

© 2024 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АДАПТИВНЫЙ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР ДЛЯ КОМПЕНСАЦИИ ПО ВЫХОДУ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается задача компенсации по выходу ограниченных сигнальных возмущений, действующих на минимально-фазовую линейную систему с неизвестными параметрами. Разработан адаптивный вспомогательный контур, который не требует знания модели возмущения и позволяет: а) разделить процессы оценивания параметрических и сигнальных возмущений, б) с любой заданной точностью оценить и скомпенсировать сигнальное возмущение при выполнении условий параметрической идентифицируемости. Сепарация процессов оценивания двух возмущений различной природы достигнута с помощью дополнения метода вспомогательного контура А.М. Цыкунова законом идентификации неизвестных параметров, построенном на базе метода инструментальных переменных и процедуры динамического расширения и смешивания регрессора (ДРСР). Полученная система компенсации сигнальных возмущений имеет определенный потенциал к использованию совместно с общепромышленными ПИ-, ПИД-регуляторами. Теоретические выводы, сделанные в работе, проиллюстрированы с помощью математического моделирования.

Ключевые слова: возмущение, оценивание, вспомогательный контур, идентификация, инструментальные переменные, сходимость, перепараметризация, динамическое расширение и смешивание.

DOI: 10.31857/S0005231024090014, EDN: ZRDUQR

1. Введение

Проблема компенсации внешних возмущений многие годы находится в центре внимания специалистов по радиотехнике, электротехнике, теории управления и т.д. К сегодняшнему дню предложено два основных принципа компенсации – косвенный и прямой (непосредственный).

При косвенной компенсации характеристический полином замкнутой системы выбирается так, чтобы как можно сильнее уменьшить вызванную возмущением составляющую вынужденного движения системы по сравнению с компонентой, связанной с задающим воздействием. Однако путем выбора характеристического полинома замкнутой системы оказывается невозможно с

одинаковым качеством компенсировать возмущения с существенно различными спектрами, и возникают задачи выбора характеристического полинома замкнутой системы по априорным данным о спектре возмущения или оптимальным образом (например, с точки зрения \mathcal{H}_2 -, \mathcal{H}_∞ -норм, метрики инвариантного эллипсоида и т.д.). В этом смысле необходимо признать ограниченность возможностей классической обратной связи.

Естественным ответом на этот вызов стало развитие принципа непосредственной компенсации, в соответствии с которым сигнал управления декомпозируется на две составляющие. Первая предназначена для коррекции характеристического полинома замкнутой системы, а вторая должна равняться возмущению с противоположным знаком. Если возмущение согласовано с сигналом управления и измеряемо, то такой подход позволяет добиться полной компенсации его влияния на регулируемую переменную. На первый взгляд, условие согласования выглядит ограничительным, поскольку на практике точки приложения возмущения и управления часто отличаются. Однако на самом деле, следуя принципу эквивалентного возмущения [1] и наложив на исходное возмущение некоторые достаточно слабые условия дифференцируемости, условие согласования всегда возможно удовлетворить. Например, рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= a_1 y + b_1 x + b_1 f, \\ \dot{x} &= a_2 x + b_2 u,\end{aligned}$$

тогда, если возмущение f дифференцируемо, применение принципа эквивалентного возмущения позволяет получить систему с согласованным возмущением:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= a_1 y + b_1 \zeta, \\ \dot{\zeta} &= a_2 x + b_2 u + \dot{f} \pm a_2 f = a_2 \zeta + b_2 \left[\underbrace{u + b_2^{-1} (\dot{f} - a_2 f)}_{f_{eq}} \right],\end{aligned}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – некоторые числа, y – измеряемый выход, x – неизмеряемое состояние, $\zeta = x + f$ – фиктивное состояние, u – управление, f – исходное возмущение, f_{eq} – эквивалентное возмущение.

Далее всюду будем рассуждать исключительно о согласованных возмущениях, предполагая, что принцип эквивалентного возмущения уже реализован.

Гораздо более ограничительным является требование доступности возмущения для измерения. Для преодоления этой проблемы в литературе предложены различные наблюдатели возмущений, позволяющие по измерениям управления и выхода системы восстановить значение возмущения с некоторой (обычно с любой заданной) точностью. Не претендуя на полноту обзора, рассмотрим некоторые из существующих наблюдателей возмущений. Для ознакомления со всем многообразием методов рекомендуем читателю ознакомиться с обзорами [2–5].

Существующие наблюдатели возмущений могут быть классифицированы следующим образом:

- 1) методы, требующие знания параметров системы, модели и параметров возмущения (расширенный наблюдатель Люенбергера) [6],
- 2) методы, требующие знания параметров системы и наличия модели возмущения, допускающей параметрическую неопределенность [7–11],
- 3) методы, требующие знания модели возмущения, но не требующие знания параметров системы и возмущения [12–16],
- 4) методы, требующие знания только параметров системы [1, 17–20],
- 5*) методы, не требующие знания модели возмущения и параметров системы [21–26].

Предметом интереса данной работы являются алгоритмы, относящиеся к группе 5*, поскольку по сравнению с остальными решениями они требуют минимального объема априорной информации о системе и возмущении. Детальный анализ алгоритмов, относящихся к этой группе, показывает, что, на самом деле, в литературе не существует наблюдателей, позволяющих оценить сигнальное возмущение, если параметры системы неизвестны. Это объясняется отсутствием возможности сепарации существующими алгоритмами параметрического и сигнального возмущения. Вместо этого алгоритмы из группы 5* выполняют оценку обобщенного возмущения, состоящего из их суммы. Проиллюстрируем эти рассуждения на примере.

Рассмотрим систему первого порядка:

$$\dot{x} = u + \theta^\top \varphi(x) + f,$$

где $\theta^\top \varphi(x)$ – параметрическое возмущение, f – сигнальное возмущение.

Если параметры θ известны, а \dot{f} ограничена, то простой наблюдатель ($s := \frac{d}{dt}$):

$$\hat{f} = \frac{s}{ls+1} [x] - \theta^\top \frac{1}{ls+1} [\varphi(x)] - \frac{1}{ls+1} [u]$$

согласно результатам [26, с. 196; 27] позволяет с любой точностью оценить и компенсировать сигнальное возмущение f .

Если параметры θ неизвестны, то можно оценить только обобщенное возмущение:

$$\frac{s}{ls+1} [x] - \frac{1}{ls+1} [u] = \frac{1}{ls+1} [f] + \theta^\top \frac{1}{ls+1} [\varphi(x)].$$

Для выделения сигнального возмущения из обобщенного необходимо получение и использование оценок параметров θ :

$$\hat{f} = \frac{s}{ls+1} [x] - \frac{1}{ls+1} [u] - \hat{\theta}^\top \frac{1}{ls+1} [\varphi(x)] = \frac{1}{ls+1} [f] - \tilde{\theta}^\top \frac{1}{ls+1} [\varphi(x)],$$

откуда следует, что разделение двух типов возмущений возможно, если и только если параметрическая ошибка $\tilde{\theta}$ асимптотически сходится к нулю. Однако существующие законы параметрической идентификации при наличии возмущения обеспечивают только ограниченность параметрической ошибки [28, с. 556], что не позволяет в полном объеме реализовать сепарацию, даже дополнив наблюдатель возмущений известными алгоритмами параметрической идентификации. Недостаточно удачные попытки выполнить сепарабельную оценку сигнальной и параметрической неопределенности могут быть обнаружены в работах [24, 29, 30].

Рассмотренная проблема разделимости носит фундаментальный характер и не зависит от конкретного типа применяемого наблюдателя возмущений. Поэтому существующие наблюдатели выполняют оценку и компенсацию обобщенного возмущения, состоящего из суммы параметрического и сигнального. Такой подход безусловно заслуживает право на существование и уже давно положительно зарекомендовал себя по сравнению со стандартными ПИ- и ПИД-регуляторами [22]. Однако, во-первых, в таких системах управления нарушается синергетический принцип минимального действия [31], так как вся динамика системы компенсируется без особых размышлений о ее «пользе» или «вреде» для достижения цели регулирования, во-вторых, в некоторых практических задачах базовая стабилизирующая составляющая управления (например, ПИ- или ПИД-регулятор) уже выбрана робастными методами с учетом наличия параметрической неопределенности ($\theta^T \varphi(x)$ в рассмотренном примере), а необходимо выполнить оценку и компенсацию только сигнального возмущения (f в рассмотренном примере). Поэтому актуальной является задача синтеза наблюдателя сигнального возмущения при наличии параметрического.

В этой работе рассматривается задача оценки и компенсации по выходу ограниченных сигнальных возмущений, действующих на минимально-фазовую линейную систему с неизвестными параметрами. Решение этой задачи предлагается получить в рамках методологии непрямого адаптивного управления, в соответствии с которой процедура синтеза управления декомпозируется на два этапа. На первом этапе вводится закон управления, обеспечивающий достижение цели регулирования при известных параметрах системы (в этой работе для синтеза такого закона предлагается воспользоваться методом вспомогательного контура А.М. Цыкунова [26, с. 196]). На втором этапе строится закон идентификации и осуществляется замена всех неизвестных параметров закона управления, выбранного на первом этапе, на их динамические оценки. Ключевым структурным элементом такой системы адаптивного управления является закон идентификации, который должен в замкнутом контуре управления гарантировать асимптотическую сходимость оценок неизвестных параметров к истинным значениям при действии сигнального возмущения и выполнении как можно более слабых требований к возбуждению регрессора. В этой работе для решения задачи онлайн идентификации предлагается воспользоваться недавно предложенным алгоритмом [32], по-

строенным на базе метода инструментальных переменных [33] и процедуры динамического расширения и смешивания регрессора (ДРСР) [34]. Условиями сходимости процесса параметрической идентификации при использовании такого закона являются:

- знание регулятора, стабилизирующего систему при наличии сигнальных и параметрических возмущений,
- ограниченность сигнала компенсации возмущения (например, с помощью $\text{sat}\{\cdot\}$ функции),
- наличие в задающем воздействии не менее n различных частот (где n – размерность системы),
- отсутствие пересечений спектров задающего воздействия и возмущения.

Показано, что при выполнении этих условий обеспечивается сходимость к нулю параметрической ошибки, несмотря на наличие сигнальной неопределенности, а предложенная система адаптивной компенсации сигнального возмущения гарантирует его асимптотическую оценку и компенсацию. В рамках математического моделирования показан потенциал использования предлагаемой системы совместно с общепромышленными ПИ-, ПИД-регуляторами, проиллюстрировано выполнение условий параметрической сходимости при использовании типовых задающих воздействий.

2. Постановка задачи

Рассмотрим возмущенную линейную динамическую систему

$$(2.1) \quad \begin{aligned} y(t) &= \frac{Z(\theta, s)}{R(\theta, s)} [u(t) + f(t)], \\ Z(\theta, s) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0, \\ R(\theta, s) &= s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, \end{aligned}$$

где $y(t)$ – измеряемый выход, $u(t)$ – формируемое управление, $f(t)$ – неизвестное ограниченное возмущение, $\theta \in D_\theta \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ – вектор неизвестных параметров разомкнутой системы, $R(\theta, s)$, $Z(\theta, s)$ – многочлены порядков n и $m \leq n - 1$ соответственно, $s[\cdot] := \frac{d}{dt}[\cdot]$ – оператор дифференцирования.

Будем считать, что управление $u(t)$ формируется следующим образом:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u(t) &= u_b(t) + u_c(t), \\ u_b(t) &= \frac{P_y(\kappa, s)}{Q_y(\kappa, s)} [y(t)] + \frac{P_r(\kappa, s)}{Q_r(\kappa, s)} [r(t)] = \frac{P_y(\kappa, s)}{Q_y(\kappa, s)} [y(t)] + r_f(t), \end{aligned}$$

где $u_b(t)$ – стабилизирующая составляющая управления, $u_c(t)$ – компонента управления, предназначенная для компенсации возмущения $f(t)$, $\kappa \in D_\kappa \subset \mathbb{R}^{n_\kappa}$ – известные постоянные параметры закона управления, $r(t)$ – задающее воздействие, $m_y \leq n_y$ и $m_r \leq n_r$ – порядки пар многочленов $P_y(\kappa, s)$, $Q_y(\kappa, s)$ и $P_r(\kappa, s)$, $Q_r(\kappa, s)$ соответственно.

Для строгой формальной постановки задачи вместе с системой (2.1) рассмотрим ее параметризацию в форме линейного регрессионного уравнения:

$$(2.3) \quad z(t) = \varphi^\top(t) \theta + w(t),$$

где

$$z(t) = \frac{s^n}{\Lambda(s)} y(t), \quad \varphi(t) = \left[-\frac{\alpha_{n-1}^\top(s)}{\Lambda(s)} [y(t)] \quad \frac{\alpha_m^\top(s)}{\Lambda(s)} [u(t)] \right]^\top,$$

$$w(t) = [b_m \quad b_{m-1} \quad \dots \quad b_0] \frac{\alpha_m(s)}{\Lambda(s)} [f(t)],$$

$$\alpha_{n-1}^\top(s) = [s^{n-1} \quad \dots \quad s \quad 1], \quad \alpha_m^\top(s) = [s^m \quad \dots \quad s \quad 1],$$

$\varphi(t) \in \mathbb{R}^{m+n+1}$ – измеряемый регрессор, $z(t) \in \mathbb{R}$ – измеряемый регрессанд, $\Lambda(s)$ – устойчивый полином порядка n .

Относительно стабилизирующей компоненты управления и возмущения принимается следующее

Допущение 1. Передаточная функция замкнутой системы ($\theta_{cl} : \mathbb{R}^{n+m+1} \times \mathbb{R}^{n_\kappa} \mapsto \mathbb{R}^{n_{cl}+m_{cl}+1}$ – неизвестные параметры замкнутой системы):

$$(2.4) \quad W_{cl}(\theta_{cl}, s) [\cdot] = \frac{Z(\theta, s) Q_y(\kappa, s)}{[Q_y(\kappa, s) R(\theta, s) - Z(\theta, s) P_y(\kappa, s)]} [\cdot] = \frac{Z_{cl}(\theta_{cl}, s)}{R_{cl}(\theta_{cl}, s)} [\cdot]$$

имеет гурвицевы многочлены $Z_{cl}(\theta_{cl}, s)$ и $R_{cl}(\theta_{cl}, s)$ при фиксированных κ из D_κ и всех значениях θ из D_θ .

Допущение 2. Существует и известна функция $\mu : [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}_>$ такая, что для

$$\lambda(t) = \frac{-1}{m_0 \mu^{n+1}(t)} \left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [f(t)] + \sum_{i=1}^n m_i \mu^{n-(i-1)}(t) \frac{d^i}{dt^i} [f(t)] \right)$$

при любых числах $m_i, i = 0, \dots, n$ верно $\mu \lambda \in L_\infty$ и $\lambda \in L_p \cap L_\infty$ для $p \in [1, \infty)$.

Допущение 3. Инструментальная переменная $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$, заданная следующим образом (где $\theta_{iv} \in D_\theta \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ – известные параметры инструментальной переменной):

$$(2.5) \quad \zeta(t) = \left[-\frac{\alpha_{n-1}^\top(s)}{\Lambda(s)} [y_{iv}(t)] \quad \frac{\alpha_m^\top(s)}{\Lambda(s)} [u_{iv}(t)] \right]^\top,$$

$$y_{iv}(t) = \frac{Z(\theta_{iv}, s)}{R(\theta_{iv}, s)} [u_{iv}(t)],$$

$$u_{iv}(t) = \frac{P_y(\kappa, s)}{Q_y(\kappa, s)} [y_{iv}(t)] + \frac{P_r(\kappa, s)}{Q_r(\kappa, s)} [r(t)],$$

и фильтрованное возмущение $w(t)$ независимы, т.е.:

$$(2.6) \quad \forall t \geq t_0 \left| \int_{t_0}^t \zeta_i(s) w(s) ds \right| \leq c < \infty \quad \forall i = 1, \dots, n + m + 1.$$

На основании уравнения замкнутого контура (2.4) определим желаемую динамику системы:

$$(2.7) \quad y_{ref}(t) = W_{cl}(\theta_{cl}, s)[r_f(t)].$$

Необходимо без использования производных выхода $y(t)$ сформировать сигнал компенсации $u_c(t)$ так, что выполняется предельное равенство

$$(2.8) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_{ref}(t)| = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| = 0.$$

Таким образом, в работе решается задача оценивания и компенсации неизвестного возмущения, действующего на минимально-фазовую систему с неизвестными параметрами.

Замечание 1. В практических задачах почти всегда известен стабилизирующий регулятор $u_b(t)$, гарантирующий гурвицевость характеристического полинома замкнутой системы $R_{cl}(\theta_{cl}, s)$ (например, в ряде ситуаций он может быть подобран эмпирически). Гурвицевость $Z_{cl}(\theta_{cl}, s)$ требует минимальной фазовости объекта управления (2.1).

Замечание 2. Заметим, что выход эталонной модели (2.4) недоступен для измерения, а сама эталонная модель для каждого конкретного вектора параметров системы θ из D_θ задает различное качество управления. Эти обстоятельства существенно отличают решаемую в работе проблему от классической задачи адаптивного управления с заданной эталонной моделью, где эталонная модель является одинаковой для всех θ .

Замечание 3. Допущение 2 ограничивает класс допустимых внешних возмущений. В практических задачах почти всегда найдется $p \in [1, \infty)$ такое, что $\frac{d^i}{dt^i} f(t) \in L_p$ для всех $i = 1, \dots, n + 1$, и для удовлетворения этого допущения достаточно выбрать $\mu(t) = \text{const} = \mu > 0$. Если $\frac{d^i}{dt^i} f(t) \notin L_p$ для всех $p \in [1, \infty)$, но $\sup_t \left| \frac{d^i}{dt^i} f(t) \right| < \infty$, то достаточно выбрать $\mu(t) = \mu_0 t + \mu_1$ для произвольных $\mu_0 > 0, \mu_1 > 0$. К сожалению, для возмущений $f(t)$ с неограниченными производными для выбора $\mu(t)$ требуются дополнительные априорные сведения.

Замечание 4. В допущении 3 приняты выполненными необходимые условия асимптотической сходимости закона идентификации [32]. В стационарном случае неравенство (2.6) выполняется, если спектры $r(t)$ и $f(t)$ не пересекаются.

3. Основной результат

Описание предлагаемого метода решения задачи (2.8) декомпозировано на три части. В первой части фильтрованный аналог возмущения параметризуется в виде функции от управления, выхода и некоторых, вычисляемых по θ , неизвестных параметров. Во второй части конструируется закон идентификации неизвестных параметров из параметризации возмущения. В третьей части на основании полученной параметризации фильтрованного возмущения и законов идентификации вводится адаптивный сигнал компенсации возмущения и доказывается выполнение поставленной цели (2.8).

3.1. Параметризация возмущения

Временно предположим, что параметры θ известны, и, следуя [26], введем в рассмотрение вспомогательную модель:

$$(3.1) \quad \hat{y}^*(t) = \frac{Z(\theta, s)}{R(\Theta, s)} [u(t)],$$

где $\Theta \in \mathbb{R}^n$ – известные параметры вспомогательной модели, такие что система (3.1) устойчива.

В силу уравнений (3.1) и (2.1) ошибку предсказания $\varepsilon^*(t) = y(t) - \hat{y}^*(t)$ возможно записать в следующем виде:

$$(3.2) \quad \varepsilon^*(t) = \frac{Z(\theta, s)}{R(\Theta, s)} [f(t)] + \frac{R(\Theta, s) - R(\theta, s)}{R(\Theta, s)} [y(t)].$$

Тогда, если $n - m$ производных сигналов $\varepsilon^*(t)$ и $y(t)$ измеряемы, а многочлен $Z(\theta, s)$ гурвицев, выбор

$$(3.3) \quad u_c(t) = -\frac{R(\Theta, s)}{Z(\theta, s)} [\varepsilon^*(t)] + \frac{R(\Theta, s) - R(\theta, s)}{Z(\theta, s)} [y(t)] = -f(t)$$

обеспечивает полную компенсацию возмущения:

$$(3.4) \quad y(t) = \varepsilon^*(t) + \hat{y}^*(t) = \frac{Z(\theta, s)}{R(\theta, s)} [u_b(t)] = W_{cl}(\theta_{cl}, s) [r_f(t)] = y_{ref}(t).$$

Возмущение и сигнал компенсации (3.3) могут быть представлены в следующей эквивалентной форме записи:

$$(3.5a) \quad f(t) = -u_c(t) = \psi_a^\top(\Theta) \alpha(s) [\varepsilon_f(t)] + \left(\psi_a^\top(\theta_a) - \psi_a^\top(\Theta) \right) \alpha(s) [y_f(t)],$$

$$(3.5b) \quad \begin{cases} \dot{\xi}_\varepsilon(t) = A_b \xi_\varepsilon(t) + \rho e_m \varepsilon^*(t), & \dot{\xi}_y(t) = A_b \xi_y(t) + \rho e_m y(t), \\ \varepsilon_f(t) = e_1^\top \xi_\varepsilon(t), \text{ если } m \geq 1, & y_f(t) = e_1^\top \xi_y(t), \text{ если } m \geq 1, \\ \varepsilon_f(t) = \rho \varepsilon^*(t), \text{ если } m = 0, & y_f(t) = \rho y(t), \text{ если } m = 0, \end{cases}$$

$$(3.5c) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}^*(t) = A_0 \hat{x}^*(t) - \Theta \hat{y}^*(t) + \theta_b u(t), \\ \hat{y}^*(t) = e_1^\top \hat{x}^*(t), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} A_b &= A_0 - \psi_b(\theta) e_1^\top, \quad \rho = \frac{1}{b_m} = \frac{1}{e_1^\top \theta_b}, \\ \psi_b(\theta) &= \left[\frac{b_{m-1}}{b_m} \quad \frac{b_{m-2}}{b_m} \quad \dots \quad \frac{b_0}{b_m} \right]^\top = \rho \mathcal{L}_\psi \theta_b, \\ \psi_a(\theta_a) &= [\mathcal{I}_n \theta_a \quad 1]^\top, \\ \theta_a &= [a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \dots \quad a_0]^\top = \mathcal{L}_a \theta, \\ \theta_b &= [b_m \quad b_{m-1} \quad \dots \quad b_0]^\top = \mathcal{L}_b \theta, \\ \mathcal{L}_a &= [I_{n \times n} \quad 0_{n \times (m+1)}], \quad \mathcal{L}_b = [0_{(m+1) \times n} \quad I_{(m+1) \times (m+1)}], \\ \mathcal{L}_\psi &= [0_{m \times 1} \quad I_{m \times m}], \quad \alpha(s) = [1 \quad \dots \quad s^{n-1} \quad s^n], \end{aligned}$$

а \mathcal{I}_n – матрица, заполненная нулями и содержащая единицы на побочной диагонали, e_i – вектор соответствующей размерности, заполненный нулями и содержащий единицу только на i -й позиции, A_0 – верхнетреугольная матрица соответствующей размерности, θ_a, θ_b – составляющие вектора $\theta = [\theta_a^\top \quad \theta_b^\top]^\top$ и одновременно параметры многочленов $R(\theta, s)$ и $Z(\theta, s)$ соответственно.

По постановке задачи параметры θ неизвестны и производные сигналов $\varepsilon^*(t)$ и $y(t)$ недоступны для прямого измерения, а значит, сигнал компенсации (3.3), (3.5а) нереализуем. От необходимости знания производных упомянутых сигналов возможно избавиться путем построения наблюдателей фильтрованных производных.

Утверждение 1. Определим: 1) наблюдатели i -й фильтрованной производной сигналов $y_f(t)$ и $\varepsilon_f(t)$

$$\begin{cases} \dot{H}_i^\varepsilon(t) = (G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)) H_i^\varepsilon(t) + e_{n+1} (K_0(t) \varepsilon_f(t) - v_\varepsilon(t)), \\ h_i^\varepsilon(t) = e_{i+1}^\top H_i^\varepsilon(t), \quad v_\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^i v_j^\varepsilon(t, M_0, K_0), \end{cases} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

$$\begin{cases} \dot{H}_i^y(t) = (G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)) H_i^y(t) + e_{n+1} (K_0(t) y_f(t) - v_y(t)), \\ h_i^y(t) = e_{i+1}^\top H_i^y(t), \quad v_y(t) = \sum_{j=0}^i v_j^y(t, M_0, K_0), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} M_0^\top(t) &= [-m_0 \mu^{n+1}(t) \quad \dots \quad -m_{n-1} \mu^2(t) \quad -m_n \mu(t)], \\ G_0 &= \begin{bmatrix} 0_{n+1} & I_{n \times n} \\ 0_{1 \times n} & \end{bmatrix}, \quad K_0(t) = m_0 \mu^{n+1}(t), \end{aligned}$$

и

$$\begin{cases} v_0^\varepsilon(t, M_0, K_0) = 0, \\ v_1^\varepsilon(t, M_0, K_0) = s^{-1} [s [M_0^\top(t)] H_i^\varepsilon(t)] + s^{-1} [s [K_0(t)] \varepsilon_f(t)], \\ \vdots \\ v_j^\varepsilon(t, M_0, K_0) = v_{j-1}^\varepsilon(t, M_0, K_0) - s^{-1} [v_{j-1}^\varepsilon(t, \dot{M}_0, \dot{K}_0)], \quad j = 2, \dots, i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0^y(t, M_0, K_0) = 0, \\ v_1^y(t, M_0, K_0) = s^{-1} [s [M_0^\top(t)] H_i^y(t)] + s^{-1} [s [K_0(t)] y_f(t)], \\ \vdots \\ v_j^y(t, M_0, K_0) = v_{j-1}^y(t, M_0, K_0) - s^{-1} [v_{j-1}^y(t, \dot{M}_0, \dot{K}_0)], \quad j = 2, \dots, i, \end{cases}$$

а числа t_0, t_1, \dots, t_n являются коэффициентами устойчивого полинома;
2) фильтрованное возмущение:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} f_f(t) &:= \psi_a^\top(\Theta) h_\varepsilon(t) + \left(\psi_a^\top(\theta_a) - \psi_a^\top(\Theta) \right) h_y(t), \\ h_y(t) &= [h_0^y(t) \quad \dots \quad h_i^y(t) \quad \dots \quad h_n^y(t)]^\top, \\ h_\varepsilon(t) &= [h_0^\varepsilon(t) \quad \dots \quad h_i^\varepsilon(t) \quad \dots \quad h_n^\varepsilon(t)]^\top. \end{aligned}$$

Тогда если выполнены допущения 1 и 2, то:

- 1) ошибка $\tilde{f}(t) = f_f(t) - f(t)$ асимптотически сходится к нулю $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f}(t) = 0$,
- 2) $\tilde{f} \in L_p \cap L_\infty$ для $p \in [1, \infty)$.

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Заметим, что в стационарном случае $\mu(t) = \text{const}$ предложенные в утверждении 1 наблюдатели фильтрованных производных редуцируются до реализуемых дифференциаторов. Согласно утверждению 1, если параметры θ известны, то вместо истинного возмущения $f(t)$ исключительно по измеряемым сигналам возможно вычислить некоторое фильтрованное возмущение $f_f(t)$, которое при выполнении допущений 1 и 2 асимптотически сходится к истинному. В этом случае выбор

$$(3.7) \quad u_c(t) = -f_f(t)$$

позволяет получить следующий результат.

Теорема 1. Если параметры θ известны и выполнены допущения 1 и 2, то управление (2.2) + (3.7) обеспечивает $\tilde{y} \in L_\infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| = 0$.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Необходимость знания параметров θ устраним путем применения разработанного в [32] закона идентификации и синтеза адаптивной вспомогательной модели (3.1) и адаптивной версии сигнала компенсации (3.7).

3.2. Идентификация неизвестных параметров

Прежде всего для реализации адаптивного сигнала компенсации требуется получить оценки $\hat{\theta}(t)$, $\hat{\rho}(t)$, $\hat{\psi}_b(t)$ неизвестных параметров системы и параметризации возмущения (3.6). Отметим, что идентификация параметров $\psi_a(\theta_a)$ не требуется, поскольку функция $\psi_a: \mathbb{R}^{n+m+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+m+2}$ очевидно удовлетворяет условию Липшица, и, следовательно, оценка $\hat{\psi}_a(t)$ может быть вычислена прямой подстановкой $\hat{\psi}_a(t) := \psi_a(\hat{\theta}_a)$, где $\hat{\theta}_a(t) = \mathcal{L}_a \hat{\theta}(t)$. Чтобы действие адаптивного закона компенсации возмущения, формируемого на базе динамических оценок, было асимптотически эквивалентно действию идеального сигнала компенсации (3.1), (3.7), необходимо обеспечить, по крайней мере, асимптотическую сходимость к нулю параметрических ошибок. Для этого будем использовать закон идентификации, разработанный в [32].

С использованием инструментальной переменной (2.5) выполним расширение регрессионного уравнения (2.3) с помощью усредняющего фильтра и фильтра типа скользящее среднее:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \dot{\vartheta}(t) &= \zeta_{iv}(t) z(t) - \zeta_{iv}(t-T) z(t-T), \quad \vartheta(t_0) = 0_{n+m+1}, \\ \dot{\psi}(t) &= \zeta_{iv}(t) \varphi^\top(t) - \zeta_{iv}(t-T) \varphi^\top(t-T), \quad \psi(t_0) = 0_{(n+m+1) \times (n+m+1)}, \end{aligned}$$

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \dot{Y}(t) &= -\frac{1}{F(t)} \dot{F}(t) (Y(t) - \vartheta(t)), \quad Y(t_0) = 0_{n+m+1}, \\ \dot{\Phi}(t) &= -\frac{1}{F(t)} \dot{F}(t) (\Phi(t) - \psi(t)), \quad \Phi(t_0) = 0_{(n+m+1) \times (n+m+1)}, \\ \dot{F}(t) &= pt^{p-1}, \quad F(t_0) = F_0 > 0, \end{aligned}$$

где $T > 0$ – ширина окна, $p \geq 1$, $F_0 \geq t_0^p$ – параметры фильтрации.

Применение фильтраций (3.8) и (3.9) при $\theta = \text{const}$ позволяет получить следующее регрессионное уравнение [32]:

$$(3.10) \quad Y(t) = \Phi(t)\theta + W(t),$$

где возмущение $W(t)$ удовлетворяет уравнениям

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \dot{W}(t) &= -\frac{1}{F(t)} \dot{F}(t) (W(t) - \varepsilon(t)), \quad W(t_0) = 0_{n+m+1}, \\ \dot{\varepsilon}(t) &= \zeta_{iv}(t) w(t) - \zeta_{iv}(t-T) w(t-T), \quad \varepsilon(t_0) = 0_{n+m+1}. \end{aligned}$$

Умножив (3.10) на $\text{adj}\{\Phi(t)\}$, имеем набор скалярных регрессионных уравнений:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \mathcal{Y}(t) &= \Delta(t)\theta + \mathcal{W}(t), \\ \mathcal{Y}(t) &:= \text{adj}\{\Phi(t)\}Y(t), \quad \Delta(t) := \det\{\Phi(t)\}, \quad \mathcal{W}(t) := \text{adj}\{\Phi(t)\}W(t). \end{aligned}$$

По регрессионному уравнению (3.10) методом градиентного спуска могут быть сформированы оценки параметров θ . Однако для реализации алгоритма компенсации (3.1), (3.7) также требуется получить оценки параметров

$\psi_b(\theta)$ и ρ . Заметим, что в силу равенства $\psi_b(\theta) = \rho \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \theta$ для получения $\hat{\psi}_b(t)$ достаточно иметь оценки параметров ρ и θ . Величина $\hat{\theta}(t)$ уже может быть получена по (3.12), а значит, остается получить аналогичное регрессионное уравнение относительно ρ .

Умножив (3.12) на $e_1^\top \mathcal{L}_b$, имеем

$$\begin{aligned} e_1^\top \mathcal{L}_b \mathcal{Y}(t) &= \Delta(t) e_1^\top \mathcal{L}_b \theta + e_1^\top \mathcal{L}_b \mathcal{W}(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow e_1^\top \mathcal{L}_b \mathcal{Y}(t) = \Delta(t) b_m + e_1^\top \mathcal{L}_b \mathcal{W}(t), \end{aligned}$$

откуда умножением на ρ получаем искомое регрессионное уравнение

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \mathcal{Y}_\rho(t) &= \mathcal{M}_\rho(t) \rho + \mathcal{W}_\rho(t), \\ \mathcal{Y}_\rho(t) &:= \Delta(t), \quad \mathcal{M}_\rho(t) := e_1^\top \mathcal{L}_b \mathcal{Y}(t), \quad \mathcal{W}_\rho(t) = -\rho e_1^\top \mathcal{L}_b \mathcal{W}(t). \end{aligned}$$

На основании регрессионных уравнений (3.12) и (3.13) могут быть построены алгоритмы оценки всех необходимых для реализации (3.1), (3.7) параметров:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= -\gamma \Delta(t) \left(\Delta(t) \hat{\theta}(t) - \mathcal{Y}(t) \right), \quad \hat{\theta}(t_0) = \hat{\theta}_0, \\ \dot{\hat{\rho}}(t) &= -\gamma_\rho \mathcal{M}_\rho(t) \left(\mathcal{M}_\rho(t) \hat{\rho}(t) - \mathcal{Y}_\rho(t) \right), \quad \hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_0, \\ \hat{\psi}_b(t) &= \hat{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \hat{\theta}(t). \end{aligned}$$

Теорема 2. Если выполнено допущение 3 и дополнительно

У1) $y(t)$ и $u_c(t)$ ограничены,

У2) $\Delta \notin L_2$,

то законы идентификации (3.14) обеспечивают следующее:

1) параметрические ошибки $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$, $\tilde{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) - \rho$, $\tilde{\psi}_b(t) = \hat{\psi}_b(t) - \psi_b(\theta)$ асимптотически сходятся к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\rho}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\psi}_b(t) = 0,$$

2) $\tilde{\theta} \in L_2 \cap L_\infty$, $\tilde{\rho} \in L_2 \cap L_\infty$, $\tilde{\psi}_b \in L_2 \cap L_\infty$.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Поскольку по условию задачи составляющая $u_b(t)$ закона управления является стабилизирующей, а многочлен $R_{cl}(\theta_{cl}, s)$ – гурвицевым, то У1 требует формирования ограниченного сигнала компенсации $u_c(t)$, например, с использованием стандартной функции насыщения (см. раздел 3.3). По доказанному в [32] достаточным условием для выполнения У2 является частотное богатство задания $r(t)$, например, при $m = n - 1$ оно должно содержать не менее n различных частот. Допущение 3 (неравенство (2.6)) будет выполнено, например, если спектры задающего воздействия $r(t)$ и возмущения $f(t)$ не пересекаются. Более подробно условия сходимости законов идентификации типа (3.14) изучались в [32].

Одной из степеней свободы используемой параметризации (2.3) и всей предложенной схемы идентификации является выбор вида регрессора $\varphi(t)$. Если начальные приближения неизвестных параметров такие, что $|u_c(t) + f(t)| > |f(t)|$ (в смысле среднего интегрального значения или дисперсии), то выбор (2.3) позволяет получить параметризацию с меньшим значением возмущения $w(t)$ в аналогичном смысле. Напротив, если начальные приближения неизвестных параметров такие, что даже без параметрической адаптации достигается $|u_c(t) + f(t)| < |f(t)|$ (в смысле среднего интегрального значения или дисперсии), то выбор следующего регрессора

$$\varphi(t) = \left[-\frac{\alpha_{n-1}^\top(s)}{\Lambda(s)} z(t) \quad \frac{\alpha_m^\top(s)}{\Lambda(s)} u_b(t) \right]^\top$$

позволяет получить параметризацию с меньшим значением возмущения $w(t)$ в аналогичном смысле.

Дальнейшая параметризация, а также предпосылки и результаты теоремы 2 от выбранного способа расчета регрессора по $u_b(t)$ или $u(t)$ не зависят.

Состояния фильтров (3.9) со скоростью $\frac{\dot{F}(t)}{F(t)}$ теряют восприимчивость к новым значениям сигналов $\vartheta(t)$ и $\psi(t)$, а значит, и параметров θ . Полностью предотвратить потерю чувствительности фильтров (3.9) на данный момент не представляется возможным, поскольку именно за счет коэффициента $\frac{\dot{F}(t)}{F(t)}$ обеспечивается сходимость параметрических ошибок к нулю при наличии внешнего возмущения.

Однако путем переопределения:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} Y(t) &:= \frac{1}{T} \vartheta(t), \\ \Phi(t) &:= \frac{1}{T} \psi(t) \end{aligned}$$

возможно получить алгоритм идентификации, обладающий качествами, более приемлемыми с практической точки зрения.

Теорема 3. Если выполнено допущение 3 и дополнительно

У1) $y(t)$ и $u_c(t)$ ограничены,

У2) существуют числа $\Delta_{UB} \geq \Delta_{LB} > 0$, такие что $\Delta_{LB} \leq |\Delta(t)| \leq \Delta_{UB}, \forall t \geq t_e$,

то существует число $\delta_0 > 0$ и сигнал $\delta_1 \in L_1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t) = 0$ такие, что

$$(3.16) \quad \left\| \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t) \\ \tilde{\rho}(t) \\ \tilde{\psi}_b(t) \end{bmatrix} \right\| \leq \delta_1(t) + \delta_0 T^{-1}, \forall t \geq t_0.$$

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

Таким образом, закон идентификации (3.14) на базе сигналов (3.8) + (3.15) обеспечивает чувствительность к новым значениям параметров θ , но вместе с этим параметрические ошибки сходятся при выполнении более строгого условия по сравнению с $\Delta \notin L_2$ и не к нулю, а к его окрестности, пропорциональной параметру $T > 0$.

3.3. Адаптивный вспомогательный контур

Мотивируясь выражениями (3.1), (3.5a)–(3.5c), (3.6) и требованием У1, на основании формируемых оценок (3.14) сигнал компенсации возмущения зададим в следующем виде:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} u_c(t) &= \text{sat}_{f_{\max}} \left\{ -\hat{f}(t) \right\}, \\ \hat{f}(t) &= \psi_a^\top(\Theta) \hat{h}_\varepsilon(t) + \left(\hat{\psi}_a^\top(t) - \psi_a^\top(\Theta) \right) \hat{h}_y(t), \end{aligned}$$

где

$$(3.18a) \quad \begin{cases} \dot{\hat{H}}_i^\varepsilon(t) = (G_0 + e_{n+1}M_0^\top(t)) \hat{H}_i^\varepsilon(t) + \\ \quad + e_{n+1} (K_0(t)\hat{\varepsilon}_f(t) - \hat{v}_\varepsilon(t)), \\ \hat{h}_i^\varepsilon(t) = e_{i+1}^\top \hat{H}_i^\varepsilon(t), \quad \hat{v}_\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^i \hat{v}_j^\varepsilon(t, M_0, K_0), \\ \dot{\hat{H}}_i^y(t) = (G_0 + e_{n+1}M_0^\top(t)) \hat{H}_i^y(t) + \\ \quad + e_{n+1} (K_0(t)\hat{y}_f(t) - \hat{v}_y(t)), \\ \hat{h}_i^y(t) = e_{i+1}^\top \hat{H}_i^y(t), \quad \hat{v}_y(t) = \sum_{j=0}^i \hat{v}_j^y(t, M_0, K_0), \end{cases} \quad \forall i = 0, \dots, n,$$

$$(3.18b) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_\varepsilon(t) &= \left(A_0 - \hat{\psi}_b(t)e_1^\top \right) \hat{\xi}_\varepsilon(t) + \hat{\rho}(t)e_m\varepsilon(t), \\ &\begin{cases} \hat{\varepsilon}_f(t) = e_1^\top \hat{\xi}_\varepsilon(t), \quad \text{если } m \geq 1, \\ \hat{\varepsilon}_f(t) = \hat{\rho}(t)\varepsilon(t), \quad \text{если } m = 0, \end{cases} \\ \dot{\hat{\xi}}_y(t) &= \left(A_0 - \hat{\psi}_b(t)e_1^\top \right) \hat{\xi}_y(t) + \hat{\rho}(t)e_m y(t), \\ &\begin{cases} \hat{y}_f(t) = e_1^\top \hat{\xi}_y(t), \quad \text{если } m \geq 1, \\ \hat{y}_f(t) = \hat{\rho}(t)y(t), \quad \text{если } m = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$(3.18c) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_0\hat{x}(t) - \Theta\hat{y}(t) + \hat{\theta}_b(t)u(t), \\ \hat{y}(t) = e_1^\top \hat{x}(t), \end{cases}$$

и $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$, $\hat{\psi}_a(t) := \psi_a(\hat{\theta}_a)$, $\hat{\theta}_a(t) = \mathcal{L}_a\hat{\theta}(t)$, $\text{sat}_{f_{\max}}\{\cdot\}$ – стандартная функция насыщения, ограничивающая по модулю сигнал $u_c(t)$ на

уровне f_{\max} . Здесь сигналы $\hat{v}_\varepsilon(t)$ и $\hat{v}_y(t)$ вычисляются по формулам, аналогичным приведенным в утверждении 1.

Теорема 4. Если

- 1) выполнены допущения 1–3 и условие У2 из теоремы 2,
 - 2) $|f(t)| < f_{\max}$ для всех $t \geq t_0$ и достаточно большого числа $f_{\max} > 0$,
- то управление (2.2) + (3.17) + (3.14) обеспечивает $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| = 0$.

Доказательство приведено в Приложении.

Использование нестационарных фильтров (3.18a) может оказаться недопустимым на практике, например, по соображениям помехозащищенности канала управления или погрешностей, связанных с дискретизацией/численным решением нестационарных дифференциальных уравнений (3.18a). Поэтому в теореме 5 исследуем устойчивость замкнутой системы управления для случая когда $\mu(t) = \text{const}$ и допущение 2 не выполняется (в том смысле, что $\lambda \notin L_p$). Отметим, что ситуация, когда $\mu(t) = \text{const}$, но допущение 2 выполняется (т.е. $\lambda \in L_p$), уже рассмотрена в теореме 4.

Теорема 5. Если

- 1) выполнены допущения 1, 3 и условие У2 из теоремы 2,
 - 2) $\mu(t) = \mu > 0$, $\lambda \in L_\infty$,
 - 3) $|f(t)| < f_{\max}$ для всех $t \geq t_0$ и достаточно большого числа $f_{\max} > 0$,
- то управление (2.2) + (3.17) + (3.14) обеспечивает $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| \leq \epsilon$ для произвольно малого числа $\epsilon > 0$.

Доказательство приведено в Приложении.

Таким образом, если $(n+1)$ производных возмущения ограничены, то предлагаемая адаптивная система компенсации (3.17), (3.18a)–(3.18c), (3.9) + (3.14) внешнего возмущения со стационарными наблюдателями производных (3.18a) обеспечивает сходимость ошибки слежения в произвольно малую окрестность нуля.

Теперь для настройки параметров компенсатора (3.17), (3.18a)–(3.18c) воспользуемся идентификатором (3.14), построенным на базе сигналов (3.15), а не (3.9).

Теорема 6. Если

- 1) выполнены допущения 1, 3 и условие У2 из теоремы 3,
 - 2) $\mu(t) = \mu > 0$, $\lambda \in L_\infty$,
 - 3) $|f(t)| < f_{\max}$ для всех $t \geq t_0$ и достаточно большого числа $f_{\max} > 0$,
- то управление (2.2) + (3.17) с законами идентификации (3.14) + (3.15) обеспечивает $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| \leq \epsilon$ для произвольно малого числа $\epsilon > 0$.

Доказательство приведено в Приложении.

Предложенная адаптивная система компенсации внешнего ограниченного возмущения состоит из адаптивной вспомогательной модели (3.18c), алгоритмов адаптивной фильтрации (3.18b), наблюдателей фильтрованных производных с сильной обратной связью (3.18a), закона компенсации (3.17) и алгоритмов идентификации (3.14), построенных на базе сигналов, вычисляе-

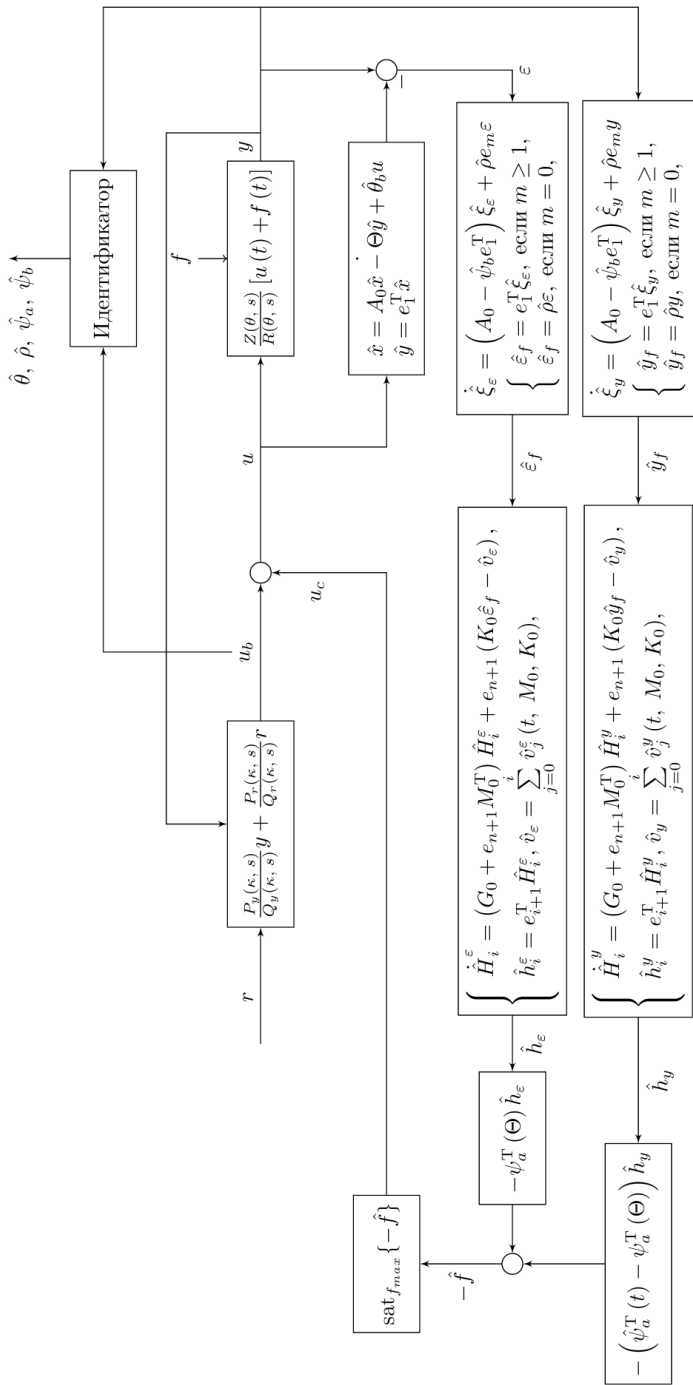


Рис. 1. Структурная схема адаптивного вспомогательного контура.

мых с помощью инструментальной модели (2.5) и фильтров (2.3), (3.8), (3.9) или (2.3), (3.8), (3.15). Структурная схема такой системы управления представлена на рис. 1.

В отличие от существующих решений [2–26] предложенный адаптивный компенсатор при выполнении условий параметрической сходимости позволяет сепарировать процессы оценивания сигнального и параметрического возмущений и асимптотически компенсировать влияние возмущения $f(t)$ на систему с неизвестными параметрами. При этом стабилизирующая компонента регулятора синтезируется независимо от компенсационной, что позволяет получить систему управления с двумя степенями свободы. По сути, в работе предложены три различные схемы компенсации внешних возмущений, которые могут быть классифицированы следующим образом:

- нестационарные наблюдатели фильтрованных производных (3.18a) + идентификатор (3.14) на базе сигналов, полученных с помощью усредняющей фильтрации (3.9),
- стационарные наблюдатели фильтрованных производных (3.18a) + идентификатор (3.14) на базе сигналов, полученных с помощью усредняющей фильтрации (3.9),
- стационарные наблюдатели фильтрованных производных (3.18a) + идентификатор (3.14) на базе сигналов, полученных с помощью фильтрации скользящим средним (3.8) + (3.15).

Первые две схемы имеют теоретическое значение, но из-за потери чувствительности фильтров (3.9) к вариациям неизвестных параметров, потенциально бесконечно большому коэффициенту усиления наблюдателей фильтрованных производных (3.18a) оказываются малоприменимыми на практике. Третья схема свободна от недостатков первых двух схем, но обеспечивает сходимость ошибки слежения только к ограниченной окрестности положения равновесия и при более строгом условии ($\mathcal{U}2$ из теоремы 3 вместо $\mathcal{U}2$ из теоремы 2).

Замечание 5. Использование нестационарных наблюдателей производных (3.18a) совместно с идентификатором на базе сигналов, полученных с помощью фильтрации скользящим средним (3.15), нецелесообразно, поскольку в силу свойств идентификатора будет обеспечена сходимость ошибки слежения только в ограниченную область.

4. Математическое моделирование

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) = \mathcal{F}(y, u, t).$$

Предположим, что величина $\frac{1}{m} \mathcal{F}(y, u, t)$ может быть приближена следующим образом:

$$\frac{1}{m} \mathcal{F}(y, u, t) := \theta_2 \frac{d}{dt} y(t) + \theta_1 y(t) + \theta_3 (u + f(t)), \quad \theta_3 := \frac{1}{m},$$

откуда в силу $s[\cdot] := \frac{d}{dt}[\cdot]$ имеем динамическую систему второго порядка:

$$(4.1) \quad y(t) = \frac{\theta_3}{s^2 + \theta_2 s + \theta_1} [u(t) + f(t)].$$

Стабилизирующую компоненту закона управления зададим с помощью ПИД-регулятора с реализуемым дифференциальным каналом:

$$(4.2) \quad u_b(t) = K_P (r(t) - y(t)) + \frac{K_I}{s} [r(t) - y(t)] + \frac{K_D s}{K_{FS} + 1} [r(t) - y(t)].$$

Параметры системы (4.1) и управления (4.2) выберем следующим образом:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \theta_1 &= 2, \quad \theta_2 = 5, \quad \theta_3 = 1, \\ K_P &= 6, \quad K_I = 2,5, \quad K_D = 1,5, \quad K_F = 0,01, \\ f(t) &= 2,5 + 1,25 \cos(\pi t) + 2,5 \sin(0,3\pi t), \\ r(t) &= 10 \operatorname{sgn}(\sin(0,05\pi t)). \end{aligned}$$

Параметры адаптивного вспомогательного контура (3.18a)–(3.18c), параметризации (2.3), инструментальной модели (2.5), фильтров (3.8), (3.9) и законов идентификации (3.14) установим в соответствии с выражением

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \Theta &= [20 \quad 100]^\top, \quad m_0 = 1, \quad m_1 = 3, \quad m_3 = 3, \quad \mu = 10^4, \\ \Lambda(s) &= s^2 + 20s + 100, \quad Z(\theta_{iv}, s) = 4, \\ R(\theta_{iv}, s) &= s^2 + 2s + 4, \quad p = 2, \quad T = 4, \\ \hat{\theta}_0 &= [2 \quad 4 \quad 2]^\top, \quad \hat{\rho}_0 = 0,5, \quad \gamma = \gamma_\rho = 10^{13}, \quad \bar{f}_{\max} = 10. \end{aligned}$$

Параметры адаптивного вспомогательного контура (3.18a)–(3.18c), параметризации (2.3) и инструментальной модели (2.5) были выбраны из соображений устойчивости соответствующих дифференциальных уравнений. Коэффициенты усиления γ, γ_ρ были подобраны методом проб и ошибок таким образом, чтобы приближенно обеспечивалась пропорциональность:

$$(4.5) \quad \gamma \sim \frac{1}{\Delta^2(t)}, \quad \gamma_\rho \sim \frac{1}{\mathcal{M}_\rho^2(t)}.$$

На практике для выбора $\gamma, \gamma_\rho, \gamma_{\psi_b}$ требуются априорные данные о значениях амплитуды регрессора $\Delta(t)$, вычисленного на типовых траекториях системы при фиксированных p и T . При отсутствии таких сведений параметры (4.5) должны подбираться в режиме онлайн методом проб и ошибок.

На рис. 2 приведены переходные процессы по регрессору $\Delta(t)$ и норме возмущения $\mathcal{W}(t)$ регрессионного уравнения (3.12).

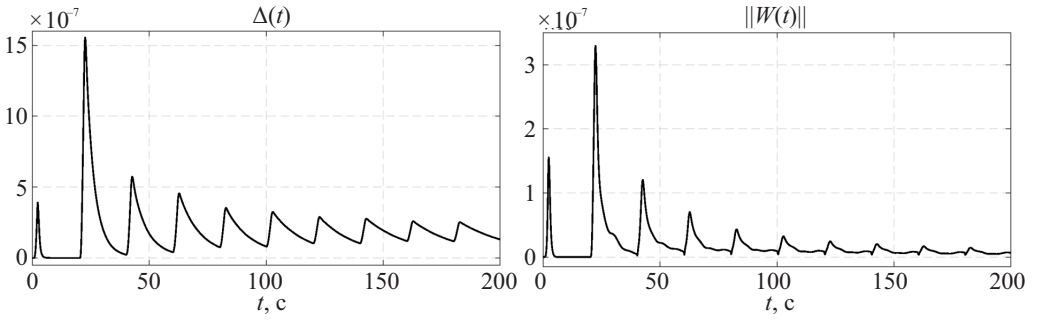


Рис. 2. Переходные процессы по $\Delta(t)$ и $\|W(t)\|$.

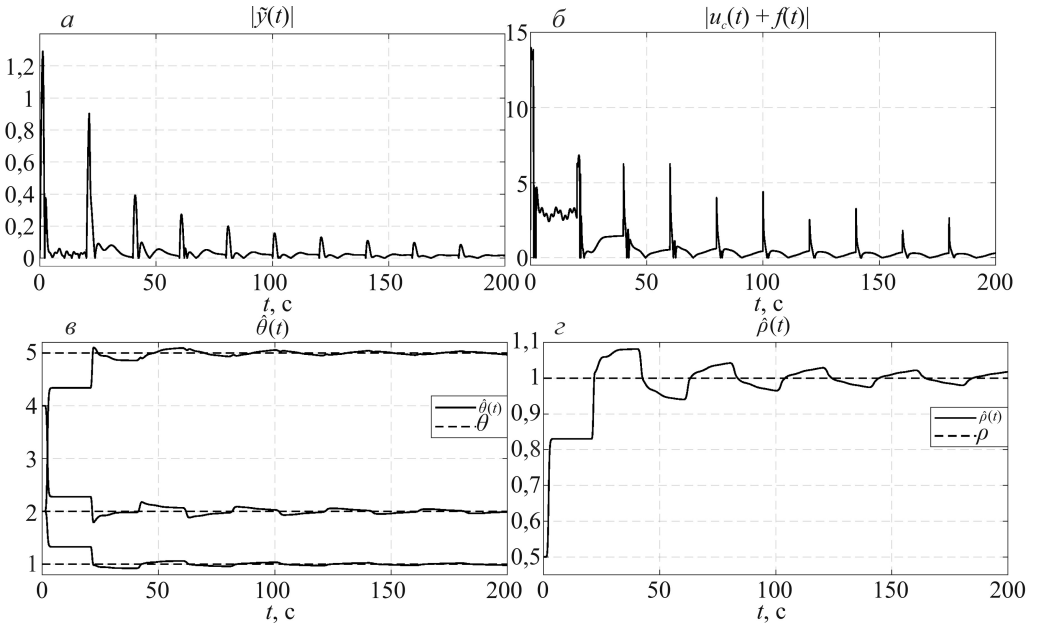


Рис. 3. Переходные процессы по $|\tilde{y}(t)|$, $|u_c(t) + f(t)|$ и $\hat{\theta}(t)$, $\hat{\rho}(t)$.

Представленные на рис. 2 переходные процессы показывают, что в течение всего моделирования начиная с $t = T = 4$ регрессор $\Delta(t)$ был отличен от нуля, а возмущение $W(t)$ асимптотически убывало. Эти два наблюдения согласно анализу [32] валидируют выполнение допущения 3 и условия У2 из теоремы 2.

На рис. 3,а приведены переходные процессы по ошибке слежения $|\tilde{y}(t)|$. На рис. 3,б приведены переходные процессы по ошибке компенсации $|u_c(t) + f(t)|$. На рис. 3,в и г приведены переходные процессы соответственно по оценкам $\hat{\theta}(t)$ и $\hat{\rho}(t)$.

Представленные переходные процессы иллюстрируют выводы, сделанные в теореме 4. При выполнении условий параметрической сходимости У2 из теоремы 2 и допущения 3 (см. комментарии к рис. 2) гарантируется асимп-

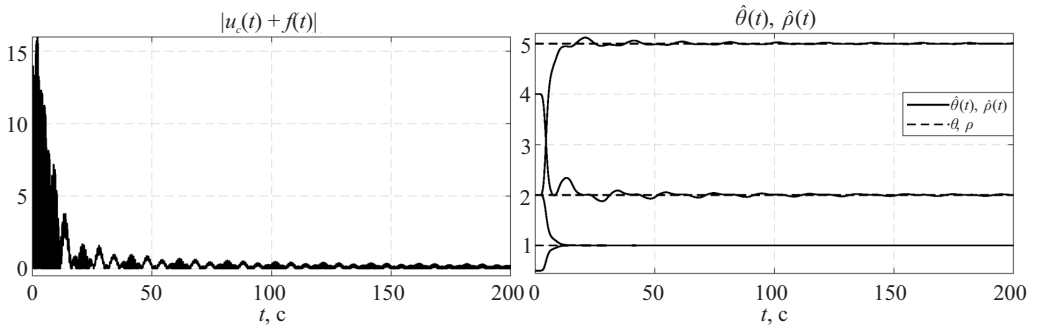


Рис. 4. Переходные процессы по $|u_c(t) + f(t)|$ и $\hat{\theta}(t), \hat{\rho}(t)$.

тотическая сходимость оценок $\hat{\theta}(t)$ и $\hat{\rho}(t)$ к неизвестным параметрам θ и ρ , что приводит к асимптотическойходимости к нулю ошибки компенсации $u_c(t) + f(t)$, в результате чего обеспечивается асимптотическая компенсация влияния возмущения $f(t)$ на качество переходных процессов. Отметим, что с практической точки зрения в силу использования интегрального канала в управлении (4.2) для компенсации возмущения $f(t)$ достаточно обеспечения $u_c(t) + f(t) \approx \text{const}$. В проведенном эксперименте параметрическая сходимость достигнута при типичном для практических задач задающем воздействии в виде периодического сигнала прямоугольной формы. Этот результат позволяет сделать вывод, что условия параметрической сходимости не являются ограничительными и выполняются в типовых ситуациях, встречающихся в приложениях.

Покажем, что при использовании задающего воздействия специального вида качество переходных процессов по $\hat{\theta}(t), \hat{\rho}(t)$ и $u_c(t) + f(t)$ может быть улучшено. Выберем задание $r(t)$ и коэффициенты усиления γ, γ_ρ следующим образом:

$$(4.6) \quad r(t) = 10 [\sin(0,2\pi t) + \sin(3\pi t)], \quad \gamma = \gamma_\rho = 10^{10},$$

а все остальные параметры установим согласно (4.3) и (4.4).

Спектр задающего воздействия (4.6) не пересекается со спектром возмущения, а сам сигнал $r(t)$ содержит $n = 2$ частот. Согласно анализу [32] вместе с ограниченностью $y(t), u_c(t)$ это незамедлительно приводит к выполнению требования У2 из теоремы 2 и допущения 3.

На рис. 4 приведены переходные процессы по $u_c(t) + f(t)$ и $\hat{\theta}(t), \hat{\rho}(t)$ при обработке системой задающего воздействия (4.6).

Специальный выбор задающего воздействия позволяет улучшить в предлагаемой системе качество переходных процессов по $\hat{\theta}(t), \hat{\rho}(t)$ и $u_c(t) + f(t)$. Таким образом, проведенное моделирование валидирует сделанные в работе теоретические выводы и иллюстрирует свойства предлагаемой системы адаптивной компенсации возмущений при различных задающих воздействиях.

Замечание 6. Не вошедшие в статью результаты численного моделирования показывают, что при любом выборе начальных условий $\hat{\theta}_0, \hat{\rho}_0$ предложенное решение обеспечивает асимптотическую компенсацию возмущения. Однако качество переходных процессов при этом может быть произвольно плохим. Поэтому на практике рекомендуется приравнивать начальные условия $\hat{\theta}_0, \hat{\rho}_0$ к «номинальным» параметрам системы, например к таким параметрам, по которым производился синтез стабилизирующей компоненты управления. В этом случае удастся не только обеспечить выполнение цели (2.8), но и получить приемлемое качество переходных процессов.

5. Заключение

Разработан метод компенсации по выходу ограниченного сигнального возмущения, действующего на линейную минимально фазовую систему с неизвестными параметрами. В качестве основы предлагаемого решения выступает алгоритм компенсации возмущений на базе метода вспомогательного контура А.М. Цыкунова [26, с.196], который для асимптотической оценки и компенсации сигнального возмущения требует знания параметров системы. Для устранения этого требования с помощью закона идентификации, построенного на базе метода инструментальных переменных и процедуры ДРСР, в замкнутом контуре управления выполняется точная онлайн асимптотическая идентификация неизвестных параметров системы. Условиями сходимости процесса параметрической идентификации является:

- У1) ограниченность сигнала компенсации возмущения (например, с помощью $\text{sat}\{\cdot\}$ функции),
- У2) частотное богатство задающего воздействия,
- У3) отсутствие пересечений спектров задающего воздействия и возмущения.

Формируемые оценки используются вместо неизвестных параметров в алгоритме компенсации возмущений на базе метода вспомогательного контура [26]. Показано, что замена неизвестных параметров на их оценки состоятельна в том смысле, что при выполнении условий У1)–У3) предложенная система адаптивной компенсации возмущений, также как и ее неадаптивный аналог, обеспечивает асимптотическую оценку и компенсацию возмущения.

Свойства предложенного решения продемонстрированы в рамках математического моделирования. Показано, что условия У1)–У3) не являются ограничительными и выполняются в типовых системах управления с ПИ-, ПИД-регуляторами при типовых задающих воздействиях. Авторы уверены, что предложенное решение имеет потенциал к практическому использованию, но отмечают, что подход имеет недостаток, связанный с необходимостью экспериментального выбора ряда параметров алгоритма идентификации и оценки неизмеряемых производных.

Актуальными направлениями дальнейших исследований являются улучшение качества переходных процессов по оценке возмущения и увеличение скорости сходимости оценок неизвестных параметров к их истинным значениям.

В этом приложении представлены вспомогательные леммы, аксиоматически используемые при доказательстве основного результата работы.

Лемма П.1.1. Для любого устойчивого, реализуемого оператора $\mathcal{H}(t, s)[\cdot]$ и соответствующего сигнала $y(t) = \mathcal{H}(t, s)[u(t)]$ верно $u \in L_p \Rightarrow y \in L_p, p \in [1, \infty]$.

Доказательство приведено в [35, с. 75].

Лемма П.1.2. Если $\dot{f} \in L_\infty$ и $f \in L_p, p \in (0, \infty)$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Доказательство приведено в [35, с. 80].

Лемма П.1.3. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x}(t) = -a^2(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$ и $a, b: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ – кусочно непрерывные ограниченные функции. Если $a \notin L_2$ и $b \in L_1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Доказательство приведено в [36, Section 3.A.1].

Лемма П.1.4. Заданы неотрицательные функции $f: [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $g: [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$. Если $f(t) \leq g(t)$ для всех $t \geq t_0$ и $g \in L_p, p \in (0, \infty)$, то $f \in L_p$.

Доказательство приведено в [28, с. 74].

Лемма П.1.5. Если $f \in L_p, 1 \leq p < \infty$, то $g(t) = H(s)[f(t)] \in L_\infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ для устойчивой строго реализуемой передаточной функции $H(s)[\cdot]$.

Доказательство приведено в [35, с. 83].

Доказательство утверждения 1. Определим линейный нестационарный оператор:

$$\mathcal{H}(t, s)[\cdot] = e_1^\top \left(sI_{n+1} - G_0 - e_{n+1}M_0^\top(t) \right)^{-1} e_{n+1}K_0(t)[\cdot].$$

В целях доказательства утверждения сначала докажем вспомогательную лемму для приведенного выше нестационарного оператора.

Лемма П.2.1. Определим сигналы $(s[\cdot] := \frac{d}{dt}[\cdot])$:

$$(П.2.1а) \quad Y^*(t) = \mathcal{H}(t, s)[s^i[U(t)]],$$

$$(П.2.1б) \quad Y_i(t) = e_{i+1}^\top \left(sI_{n+1} - G_0 - e_{n+1}M_0^\top(t) \right)^{-1} e_{n+1}K_0(t)[U(t) - v(t)],$$

зде

$$v(t) = \sum_{j=0}^i v_j(t, M_0, K_0),$$

$$v_0(t, M_0, K_0) = 0,$$

$$(П.2.2) \quad v_1(t, M_0, K_0) = s^{-1} \left[s \left[M_0^\top(t) \right] X(t) \right] + s^{-1} \left[s \left[K_0(t) \right] U(t) \right],$$

⋮

$$v_j(t, M_0, K_0) = v_{j-1}(t, M_0, K_0) - s^{-1} \left[v_{j-1} \left(t, \dot{M}_0, \dot{K}_0 \right) \right], \quad j = 2, \dots, i,$$

и

$$X(t) = \left(sI_{n+1} - G_0 - e_{n+1}M_0^\top(t) \right)^{-1} e_{n+1}K_0(t) [U(t) - v(t)].$$

Тогда для всех $i = 0, \dots, n$ и $t \geq t_0$ верно $Y^*(t) = Y_i(t)$.

Доказательство :

Перепишем (П.2.1а) и (П.2.1б) в пространстве координат состояний:

$$\begin{cases} \dot{X}^*(t) = (G_0 + e_{n+1}M_0^\top(t)) X^*(t) + e_{n+1}K_0(t) s^i [U(t)], \\ Y^*(t) = e_1^\top X^*(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (G_0 + e_{n+1}M_0^\top(t)) X(t) + e_{n+1}(K_0(t)U(t) - v(t)), \\ Y_i(t) = e_{i+1}^\top X(t). \end{cases}$$

В силу структуры матрицы $G_0 + e_{n+1}M_0^\top(t)$ нетрудно убедиться в выполнении равенств:

$$e_1^\top X(t) = Y_0(t),$$

$$e_1^\top s [X(t)] = e_1^\top \left(G_0 + e_{n+1}M_0^\top(t) \right) X(t) = e_2^\top X(t) = Y_1(t),$$

$$\begin{aligned} e_1^\top s^2 [X(t)] &= e_1^\top s \left[\left(G_0 + e_{n+1}M_0^\top(t) \right) X(t) \right] = e_1^\top \left(G_0 + e_{n+1}M_0^\top(t) \right) \dot{X}(t) = \\ &= e_1^\top \left(G_0 + e_{n+1}M_0^\top(t) \right)^2 X(t) = e_2^\top s [X(t)] = e_3^\top X(t) = Y_2(t), \end{aligned}$$

⋮

$$e_1^\top s^i [X(t)] = e_i^\top s [X(t)] = e_{i+1}^\top X(t) = Y_i(t), \quad i = 0, \dots, n,$$

что позволяет задать вектор ошибок:

$$\begin{aligned} E(t) &= s^i [X(t)] - X^*(t), \\ e_1^\top E(t) &= Y_i(t) - Y^*(t). \end{aligned}$$

Величина $s^{i+1} [X(t)]$ для всех $i = 0, \dots, n$ имеет вид

$$\begin{aligned} s[X(t)] &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) X(t) + \\ &\quad + e_{n+1} \left(\tilde{v}_0(t) + K_0(t) U(t) - \sum_{j=1}^i v_j(t) \right), \\ s^2[X(t)] &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) s[X(t)] + \\ &\quad + e_{n+1} \left(\tilde{v}_1(t) + K_0(t) s[U(t)] - s \left[\sum_{j=2}^i v_j(t) \right] \right), \\ s^3[X(t)] &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) s^2[X(t)] + \\ &\quad + e_{n+1} \left(\tilde{v}_2(t) + K_0(t) s^2[U(t)] - s^2 \left[\sum_{j=3}^i v_j(t) \right] \right), \\ s^4[X(t)] &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) s^3[X(t)] + \\ &\quad + e_{n+1} \left(\tilde{v}_3(t) + K_0(t) s^3[U(t)] - s^3 \left[\sum_{j=4}^i v_j(t) \right] \right), \\ &\quad \vdots \\ s^{i+1}[X(t)] &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) s^i[X(t)] + e_{n+1} \left(\tilde{v}_i(t) + K_0(t) s^i[U(t)] \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{v}_0(t) &= v_0(t), \\ \tilde{v}_1(t) &= \dot{\tilde{v}}_0(t) + s \left[M_0^\top(t) \right] X(t) + s \left[K_0(t) \right] U(t) - s \left[v_1(t) \right], \\ \tilde{v}_2(t) &= \dot{\tilde{v}}_1(t) + s \left[M_0^\top(t) \right] s[X(t)] + s \left[K_0(t) \right] s[U(t)] - s^2 \left[v_2(t) \right], \\ \tilde{v}_3(t) &= \dot{\tilde{v}}_2(t) + s \left[M_0^\top(t) \right] s^2[X(t)] + s \left[K_0(t) \right] s^2[U(t)] - s^3 \left[v_3(t) \right], \\ &\quad \vdots \\ \tilde{v}_i(t) &= \dot{\tilde{v}}_{i-1}(t) + s \left[M_0^\top(t) \right] s^{i-1}[X(t)] + s \left[K_0(t) \right] s^{i-1}[U(t)] - s^i \left[v_i(t) \right], \\ &\quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

В силу рекуррентной последовательности (П.2.2) получаем:

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_0(t) &= v_0(t), \\
s[v_1(t)] &= s \left[M_0^\top(t) \right] X(t) + s[K_0(t)] U(t), \\
s^2[v_2(t)] &= s^2 \left[M_0^\top(t) \right] X(t) + s^2[K_0(t)] U(t) + s \left[M_0^\top(t) \right] s[X(t)] + \\
&+ s[K_0(t)] s[U(t)] - s^2 \left[M_0^\top(t) \right] X(t) - s^2[K_0(t)] U(t) = \\
&= s \left[M_0^\top(t) \right] s[X(t)] + s[K_0(t)] s[U(t)], \\
&\vdots \\
s^j[v_j(t)] &= s \left[M_0^\top(t) \right] s^{j-1}[X(t)] + s[K_0(t)] s^{j-1}[U(t)], \quad j = 3, \dots, i,
\end{aligned}$$

откуда $\tilde{v}_i(t) = 0$ для всех $i = 0, \dots, n$.

Тогда производная ошибки $E(t)$ приобретает вид

$$\begin{aligned}
\dot{E}(t) &= s^{i+1}[X(t)] - \dot{X}^*(t) = \\
&= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) s^i[X(t)] + e_{n+1} (\tilde{v}_i(t) + K_0(t) s^i[U(t)]) - \\
&- \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) X^*(t) - e_{n+1} K_0(t) s^i[U(t)] = \\
&= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) E(t), \quad E(t_0) = 0_{n+1},
\end{aligned}$$

а значит, в силу гурвицевости $G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)$ и выполнения $E(t_0) = 0_{n+1}$ получаем $Y^*(t) = Y_i(t)$ для всех $i = 0, \dots, n$ и $t \geq t_0$.

Доказательство леммы П.2.1 завершено.

Вернемся к доказательству утверждения 1. Применив оператор $\mathcal{H}(t, s)[\cdot]$ к левой и правой части выражения (3.5а), имеем:

$$f_f(t) := \mathcal{H}(t, s)[f(t)] = \psi_a^\top(\Theta) h_\varepsilon(t) + \left(\psi_a^\top(\theta_a) - \psi_a^\top(\Theta) \right) h_y(t),$$

где

$$\begin{aligned}
h_y(t) &= \begin{bmatrix} \mathcal{H}(t, s)[y_f(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{H}(t, s)[s^{n-1}[y_f(t)]] \\ \mathcal{H}(t, s)[s^n[y_f(t)]] \end{bmatrix}, \\
h_\varepsilon(t) &= \begin{bmatrix} \mathcal{H}(t, s)[\varepsilon_f(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{H}(t, s)[s^{n-1}[\varepsilon_f(t)]] \\ \mathcal{H}(t, s)[s^n[\varepsilon_f(t)]] \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись результатами леммы П.2.1, получаем:

$$h_y(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(t, s) [y_f(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{H}(t, s) [s^{n-1} [y_f(t)]] \\ \mathcal{H}(t, s) [s^n [y_f(t)]] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0^y(t) \\ \vdots \\ h_i^y(t) \\ \vdots \\ h_n^y(t) \end{bmatrix},$$

$$h_\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(t, s) [\varepsilon_f(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{H}(t, s) [s^{n-1} [\varepsilon_f(t)]] \\ \mathcal{H}(t, s) [s^n [\varepsilon_f(t)]] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0^\varepsilon(t) \\ \vdots \\ h_i^\varepsilon(t) \\ \vdots \\ h_n^\varepsilon(t) \end{bmatrix},$$

следовательно, имеем определение (3.6).

Возмущение $f(t)$ и фильтрованное возмущение $f_f(t)$ в пространстве состояний могут быть описаны следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{F}}(t) = G_0 \mathcal{F}(t) + e_{n+1} s^{n+1} [f(t)], \\ f(t) = e_1^\top \mathcal{F}(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{F}}_f(t) = (G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t)) \mathcal{F}_f(t) + e_{n+1} K_0(t) [f(t)], \\ f_f(t) = e_1^\top \mathcal{F}_f(t). \end{cases}$$

Тогда ошибка $\tilde{f}(t)$ удовлетворяет выражению:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{f}} &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) \mathcal{F}_f(t) + e_{n+1} K_0(t) [f(t)] - \\ &- \left(G_0 \pm e_{n+1} M_0^\top(t) \right) \mathcal{F}(t) - e_{n+1} s^{n+1} [f(t)] = \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) \tilde{\mathcal{F}}(t) + \\ &+ e_{n+1} K_0(t) \left(f(t) - \frac{1}{m_0 \mu^{n+1}(t)} \left(s^{n+1} [f] + \sum_{i=0}^n m_i \mu^{n-(i-1)}(t) s^i [f(t)] \right) \right) = \\ &= \left(G_0 + e_{n+1} M_0^\top(t) \right) \tilde{\mathcal{F}}(t) + e_{n+1} K_0(t) \lambda(t), \\ \tilde{f}(t) &= e_1^\top \tilde{\mathcal{F}}(t), \end{aligned}$$

или в операторной форме:

$$(П.2.3) \quad \tilde{f}(t) = \mathcal{H}(t, s) [\lambda(t)].$$

В соответствии с допущением 2 имеем $\lambda \in L_p \cap L_\infty$ для некоторого $p \in [1, \infty)$, а тогда применение леммы П.1.1 позволяет получить $\tilde{f} \in L_p \cap L_\infty$.

Перепишем (П.2.3) в канонической наблюдаемой форме пространства координат состояний:

$$(П.2.4) \quad \begin{cases} \dot{E}(t) = (G_0 + \mathcal{I}_{n+1}M_0(t)e_1^\top)E(t) + e_{n+1}K_0(t)\lambda(t), \\ \tilde{f}(t) = e_1^\top E(t). \end{cases}$$

Определим нормированную ошибку

$$\eta(t) = \Gamma^{-1}(t)E(t),$$

где $\Gamma(t) = \text{diag}\{1, \mu(t), \dots, \mu^n(t)\}$, а значит, $\tilde{f}(t) = e_1^\top \eta(t) = e_1^\top E(t)$.

Дифференцируя $\eta(t)$ в силу (П.2.4), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= \frac{d\Gamma^{-1}(t)}{dt}E(t) + \Gamma^{-1}(t)\left(G_0 + \mathcal{I}_{n+1}M_0(t)e_1^\top\right)E(t) + \\ &+ \Gamma^{-1}(t)e_{n+1}K_0(t)\lambda(t) = \left(\frac{d\Gamma^{-1}(t)}{dt}\Gamma(t) + \mu(t)G\right)\eta(t) + \\ &+ e_{n+1}m_0\mu(t)\lambda(t), \quad G = G_0 - \mathcal{I}_{n+1}Me_1^\top, \end{aligned}$$

где использованы следующие соотношения (проверяются подстановкой):

$$\Gamma^{-1}(t)G_0\Gamma(t) = \mu(t)G_0, \quad \Gamma^{-1}(t)\mathcal{I}_{n+1}M_0(t) = -\mu(t)\mathcal{I}_{n+1}M, \quad e_1^\top\Gamma(t) = e_1^\top.$$

В соответствии с допущением 2 имеем $\mu\lambda \in L_\infty$, а поскольку автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{d\Gamma^{-1}(t)}{dt}\Gamma(t) + \mu(t)G\right)x(t), \quad x(t_0) = x_0$$

асимптотически устойчиво, то $\mu\lambda \in L_\infty \Rightarrow \dot{\eta} \in L_\infty$, значит, в силу $\dot{\tilde{f}}(t) = \dot{\eta}_1(t)$ верно $\dot{\tilde{f}} \in L_\infty$, и по лемме П.1.2 получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f}(t) = 0$.

Доказательство теоремы 1. Подставив (2.2) + (3.7) в (2.1) и вычитая из результата выражение (2.7), имеем:

$$\tilde{y}(t) = W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\tilde{f}(t) \right].$$

По утверждению 1 имеем $\tilde{f} \in L_p \cap L_\infty$ для $p \in [1, \infty)$, тогда $\tilde{y} \in L_\infty$ и по лемме П.1.5 получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = 0$.

Доказательство теоремы 2. Запишем законы идентификации (3.14) в общем виде:

$$(П.2.5) \quad \dot{\hat{\kappa}}(t) = -\gamma \mathcal{M}_\kappa(t) (\mathcal{M}_\kappa(t) \hat{\kappa}(t) - \mathcal{Y}_\kappa(t)), \quad \hat{\kappa}(t_0) = \hat{\kappa}_0,$$

где $\kappa \in \{\theta, \rho\}$, $\hat{\kappa} \in \{\hat{\theta}, \hat{\rho}\}$ и $\mathcal{Y}_\kappa(t) = \mathcal{M}_\kappa(t)\kappa + \mathcal{W}_\kappa(t)$.

По доказанному в утверждении 5 из [32] при выполнении У1 и допущения 3 оказывается верно $\mathcal{W} \in L_2$. Тогда, поскольку $\mathcal{M}_\rho \in L_\infty$, $\mathcal{Y}_\rho \in L_\infty$ (в силу У1), на основании (3.12) и (3.13) имеем $\mathcal{W}_\rho \in L_2$. Так как по (3.13) также верно

$$\Delta \notin L_2 \Rightarrow \mathcal{M}_\rho \notin L_2,$$

то доказательство теоремы 2 может быть выполнено путем анализа свойств закона идентификации общего вида (П.2.5) при выполнении условий $\mathcal{W}_\kappa \in L_2$ и $\mathcal{M}_\kappa \notin L_2$.

По доказанному в теореме 2 из [32] и утверждения 1 из [37] при $\mathcal{W}_\kappa \in L_2$ и $\mathcal{M}_\kappa \notin L_2$ имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\kappa}(t) = 0$, $\tilde{\kappa} \in L_\infty$. Значит, для завершения доказательства остается показать $\tilde{\kappa} \in L_2$.

Для этого оценим следующим образом производную функции $V = \frac{1}{2} \tilde{\kappa}^\top \tilde{\kappa}$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\gamma \tilde{\kappa}^\top \mathcal{M}_\kappa^2(t) \tilde{\kappa} + \gamma \tilde{\kappa}^\top \mathcal{M}_\kappa(t) \mathcal{W}_\kappa(t) \leq \\ (П.2.6) \quad &\leq -\gamma(1-\chi) \tilde{\kappa}^\top \mathcal{M}_\kappa^2(t) \tilde{\kappa} + \gamma \chi^{-1} \|\mathcal{W}_\kappa(t)\|^2 \leq \\ &\leq -2\gamma \mathcal{M}_\kappa^2(t) (1-\chi) V(t) + \gamma \chi^{-1} \|\mathcal{W}_\kappa(t)\|^2, \end{aligned}$$

где $\chi \in (0, 1)$.

Проинтегрировав (П.2.6), получим:

$$V(t) \leq V(t_0) - \gamma(1-\chi) \int_{t_0}^t \mathcal{M}_\kappa^2(s) \|\tilde{\kappa}(s)\|^2 ds + \gamma \chi^{-1} \int_{t_0}^t \|\mathcal{W}_\kappa(s)\|^2 ds.$$

Так как $V \in L_\infty$ (по доказанному) и $\mathcal{W}_\kappa \in L_2$, то следующий интеграл ограничен:

$$\int_{t_0}^t \mathcal{M}_\kappa^2(s) \|\tilde{\kappa}(s)\|^2 ds \leq \frac{-V(t) + V(t_0) + \gamma \chi^{-1} \int_{t_0}^t \|\mathcal{W}_\kappa(s)\|^2 ds}{\gamma(1-\chi)} < \infty.$$

На подынтегральное выражение существует следующая оценка снизу (здесь полагается, что $\mathcal{M}_\kappa(t) > 0$ почти всюду и, следовательно, $\text{ess inf}_t \mathcal{M}_\kappa^2(t) \neq 0$):

$$\text{ess inf}_t \mathcal{M}_\kappa^2(t) \|\tilde{\kappa}(t)\|^2 \leq \mathcal{M}_\kappa^2(t) \|\tilde{\kappa}(t)\|^2,$$

что по лемме П.1.4 означает $\tilde{\kappa} \in L_2$.

Для ошибки $\tilde{\psi}_b(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_b(t) &= \hat{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \hat{\theta}(t) - \rho \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \theta \pm \hat{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \theta = \\ &= \hat{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \tilde{\theta}(t) + \tilde{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \theta \pm \rho \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \tilde{\theta}(t) = \\ &= \tilde{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \tilde{\theta}(t) + \tilde{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \theta + \rho \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \tilde{\theta}(t), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\theta} \in L_2 \cap L_\infty \\ \tilde{\rho} \in L_2 \cap L_\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{\psi}_b \in L_2 \cap L_\infty, \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\rho}(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\psi}_b(t) = 0.$$

Доказательство теоремы 3. Из (3.11) при использовании (3.15) для $W(t)$ имеем:

$$W(t) = \frac{1}{T} \varepsilon(t),$$

$$\varepsilon(t) = \int_{\max(t_0, t-T)}^t \zeta_{iv}(s) w(s) ds,$$

откуда при выполнении допущения 3 получаем $|W_i(t)| \leq \frac{1}{T}c$.

При выполнении У1 для регрессора $\Phi(t)$ имеем:

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\| &= \frac{1}{T} \left\| \int_{\max(t_0, t-T)}^t \zeta_{iv}(s) \varphi^\top(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{T} T \sup_t \left\| \zeta_{iv}(t) \varphi^\top(t) \right\| = \\ &= \sup_t \left\| \zeta_{iv}(t) \varphi^\top(t) \right\|, \end{aligned}$$

откуда найдется число $c_W > 0$ такое, что

$$(П.2.7) \quad \|\mathcal{W}(t)\| \leq \frac{1}{T}c_W, \quad \|\mathcal{W}_\rho(t)\| \leq \frac{1}{T}c_W.$$

На основании (П.2.7) ошибки $\tilde{\theta}(t)$, $\tilde{\rho}(t)$, $\tilde{\psi}_b(t)$ определены следующим образом:

$$(П.2.8) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta}(t) &= \phi_{\tilde{\theta}}(t, t_0) \tilde{\theta}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi_{\tilde{\theta}}(t, \tau) \Delta(\tau) \mathcal{W}(\tau) d\tau, \\ \tilde{\rho}(t) &= \phi_{\tilde{\rho}}(t, t_0) \tilde{\rho}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi_{\tilde{\rho}}(t, \tau) \mathcal{M}_\rho(\tau) \mathcal{W}_\rho(\tau) d\tau, \\ \tilde{\psi}_b(t) &= \tilde{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \tilde{\theta}(t) + \tilde{\rho}(t) \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \theta + \rho \mathcal{L}_\psi \mathcal{L}_b \tilde{\theta}(t), \end{aligned}$$

где $\phi_{\tilde{\theta}}(t, \tau) = e^{-\gamma \int_\tau^t \Delta^2(s) ds}$, $\phi_{\tilde{\rho}}(t, \tau) = e^{-\gamma \int_\tau^t \Delta^2(s) ds}$.

По выражениям (П.2.7), (3.13) при выполнении У1 имеем $\Delta W, \mathcal{M}_\rho \mathcal{W}_\rho \in L_\infty$, а при выполнении У2 получаем $\phi_{\tilde{\theta}}, \phi_{\tilde{\rho}} \in L_1$, откуда на основании (П.2.8) и в силу оценок (П.2.7) мгновенно следует существование $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 \in L_1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t) = 0$ таких, что неравенство (3.16) выполнено.

Доказательство теоремы 4. Подставив (2.2) + (3.17) в (2.1) и вычитая из результата выражение (2.7), имеем:

$$(П.2.9) \quad \begin{aligned} \tilde{y}(t) &= W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\text{sat}_{f_{\max}} \left\{ -\hat{f}(t) \pm f_f(t) \pm f(t) \right\} + f(t) \right] = \\ &= W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\text{sat}_{f_{\max}} \left\{ \tilde{f}_f(t) - \tilde{f}(t) - f(t) \right\} + f(t) \right], \end{aligned}$$

где

$$(П.2.10) \quad \begin{aligned} \tilde{f}_f(t) &= -\hat{f}(t) + f_f(t) = \\ &= -\psi_a^\top(\Theta) \hat{h}_\varepsilon(t) - \left(\hat{\psi}_a^\top(t) - \psi_a^\top(\Theta) \right) \hat{h}_y(t) \pm \hat{\psi}_a^\top(t) h_y(t) + \\ &+ \psi_a^\top(\Theta) h_\varepsilon(t) + \left(\psi_a^\top(\theta_a) - \psi_a^\top(\Theta) \right) h_y(t) = \\ &= -\psi_a^\top(\Theta) \tilde{h}_\varepsilon(t) - \tilde{\psi}_a^\top(t) h_y(t) - \left(\hat{\psi}_a^\top(t) - \psi_a^\top(\Theta) \right) \tilde{h}_y(t) = \\ &= -\psi_a^\top(\Theta) \tilde{h}_\varepsilon(t) - \tilde{\psi}_a^\top(t) h_y(t) - \left(\psi_a^\top(\theta_a) - \psi_a^\top(\Theta) \right) \tilde{h}_y(t) - \tilde{\psi}_a^\top(t) \tilde{h}_y(t), \end{aligned}$$

и (в силу леммы П.2.1)

$$(П.2.11) \quad \tilde{h}_y(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(t, s) [\tilde{y}_f(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{H}(t, s) [s^{n-1} [\tilde{y}_f(t)]] \\ \mathcal{H}(t, s) [s^n [\tilde{y}_f(t)]] \end{bmatrix}, \quad \tilde{h}_\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(t, s) [\tilde{\varepsilon}_f(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{H}(t, s) [s^{n-1} [\tilde{\varepsilon}_f(t)]] \\ \mathcal{H}(t, s) [s^n [\tilde{\varepsilon}_f(t)]] \end{bmatrix}.$$

Поскольку (П.2.9)–(П.2.11) зависят от ошибок $\tilde{\varepsilon}_f(t) = \hat{\varepsilon}_f(t) - \varepsilon_f(t)$ и $\tilde{y}_f(t) = \hat{y}_f(t) - y_f(t)$, то на основании выражений (3.5а)–(3.5с) и (3.18б) также получим дифференциальные уравнения для них

$$(П.2.12) \quad \begin{aligned} \Sigma_1: & \begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_y = \left(A_b - \tilde{\psi}_b e_1^\top \right) \tilde{\xi}_y - \tilde{\psi}_b y_f + \tilde{\rho} e_m y, \\ \tilde{y}_f = \begin{cases} e_1^\top \tilde{\xi}_y, & \text{если } m \geq 1, \\ \tilde{\rho} y, & \text{если } m = 0, \end{cases} \end{cases} \\ \Sigma_2: & \begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_\varepsilon = \left(A_b - \tilde{\psi}_b e_1^\top \right) \tilde{\xi}_\varepsilon - \tilde{\psi}_b \varepsilon_f + (\rho + \tilde{\rho}) e_m \tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho} e_m \varepsilon^*, \\ \tilde{\varepsilon}_f = \begin{cases} e_1^\top \tilde{\xi}_\varepsilon, & \text{если } m \geq 1, \\ \tilde{\rho} \tilde{\varepsilon} + \rho \tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho} \varepsilon^*, & \text{если } m = 0. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Система Σ_3 зависит от ошибки $\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon^*(t) = y(t) - \hat{y}(t) - y(t) + \hat{y}^*(t)$, поэтому также получим дифференциальное уравнение для нее:

$$(П.2.13) \quad \Sigma_3: \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = (A_0 - \Theta e_1^\top) \tilde{x}(t) + \tilde{\theta}_b(t) u(t), \\ \tilde{\varepsilon}(t) = e_1^\top \tilde{x}(t). \end{cases}$$

Доказательство теоремы выполним с помощью леммы П.1.5. Для возможности применения этой леммы сначала покажем, что $\tilde{f}_f \in L_2 \cap L_\infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f}_f(t) = 0$. Для этого перепишем (П.2.13) в операторном виде

$$\tilde{\varepsilon}(t) = e_1^\top \left(sI - A_0 + \Theta e_1^\top \right) \left[\tilde{\theta}_b(t) u(t) \right],$$

а поскольку $\tilde{\theta}_b \in L_2 \cap L_\infty$ (по теореме 2) и $u \in L_\infty$ (по допущению 1 и в силу выбора (3.17)), по лемме П.1.1 имеем $\tilde{\varepsilon} \in L_2 \cap L_\infty$.

Дальнейшее доказательство различается для ситуаций $m = 0$ и $1 \leq m \leq n - 1$.

А) При $m = 0$ получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}, \tilde{\varepsilon} \in L_2 \cap L_\infty \\ y, \varepsilon^* \in L_\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varepsilon}_f \in L_2 \cap L_\infty \\ \tilde{y}_f \in L_2 \cap L_\infty \end{array} \right\}.$$

Б) Для случая $1 \leq m \leq n - 1$ введем в рассмотрение квадратичную форму:

$$(П.2.14) \quad V = \tilde{\xi}_\varepsilon^\top P \tilde{\xi}_\varepsilon,$$

где $A_b^\top P + P A_b = -Q$, $Q = Q^\top > 0$.

Производная (П.2.14) в силу системы Σ_2 может быть записана в следующем виде:

$$(П.2.15) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\xi}_\varepsilon^\top \left(P \left[A_b - \tilde{\psi}_b e_1^\top \right] + \left[A_b - \tilde{\psi}_b e_1^\top \right]^\top P \right) \tilde{\xi}_\varepsilon + \\ &+ 2 \tilde{\xi}_\varepsilon^\top P \left(-\tilde{\psi}_b \varepsilon_f + (\rho + \tilde{\rho}) e_m \tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho} e_m \varepsilon^* \right) = \\ &= -\tilde{\xi}_\varepsilon^\top \left(Q + P \tilde{\psi}_b e_1^\top + e_1 \tilde{\psi}_b^\top P \right) \tilde{\xi}_\varepsilon + \\ &+ 2 \tilde{\xi}_\varepsilon^\top P \left(-\tilde{\psi}_b \varepsilon_f + (\rho + \tilde{\rho}) e_n \tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho} e_n \varepsilon^* \right) \leq \\ &\leq - \left(\lambda_{\min}(Q) - 2\lambda_{\max}(P) \left\| \tilde{\psi}_b \right\| - \chi_1^{-1} \lambda_{\max}^2(P) \right) \left\| \tilde{\xi}_\varepsilon \right\|^2 + \epsilon, \end{aligned}$$

где $\chi_1 > 0$ и $\epsilon = \chi_1 \left(\left\| \tilde{\psi}_b \varepsilon_f \right\| + \|(\rho + \tilde{\rho}) e_n \tilde{\varepsilon}\| + \|\tilde{\rho} e_n \varepsilon^*\| \right)^2$.

Для любых Q и P найдутся числа $\chi_1 > 0$ и $\chi_2 > 0$ такие, что

$$\lambda_{\min}(Q) - \chi_1^{-1} \lambda_{\max}^2(P) \geq \chi_2 > 0.$$

Это позволяет переписать (П.2.15) в следующем виде:

$$(П.2.16) \quad \dot{V} \leq - \left(\chi_2 - 2\lambda_{\max}(P) \left\| \tilde{\psi}_b \right\| \right) \left\| \tilde{\xi}_\varepsilon \right\|^2 + \epsilon.$$

Поскольку $\tilde{\psi}_b \in L_\infty$ и $\tilde{\psi}_b(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (из теоремы 2), то всегда найдутся числа $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$, момент времени $\infty > t_V \geq t_0$, такие что

$$0 < \frac{-\left(\chi_2 - 2\lambda_{\max}(P) \left\| \tilde{\psi}_b \right\| \right)}{\lambda_{\max}(P)} \leq \sigma_1, \text{ для всех } t \leq t_V,$$

$$\frac{\chi_2 - 2\lambda_{\max}(P) \left\| \tilde{\psi}_b \right\|}{\lambda_{\max}(P)} \geq \sigma_2 > 0, \text{ для всех } t \geq t_V.$$

Это позволяет переписать (П.2.16) в следующем виде:

$$(П.2.17) \quad \dot{V}(t) \leq \begin{cases} \sigma_1 V(t) + \epsilon(t), & \text{для всех } t \leq t_V, \\ -\sigma_2 V(t) + \epsilon(t) & \text{для всех } t > t_V. \end{cases}$$

Так как $\tilde{\psi}_b, \tilde{\rho}, \tilde{\epsilon} \in L_2 \cap L_\infty$ (по теореме 2 и доказанному) и $\epsilon_f \in L_\infty$, $\epsilon^* \in L_\infty$ (по допущению 1 и в силу выбора (3.17)), то $\epsilon \in L_1 \cap L_\infty$. Так как $\infty > t_V \geq t_0$ и $\epsilon \in L_1 \cap L_\infty$, то $V(t)$ ограничена для всех $t \in [t_0, t_V]$. Поскольку $\epsilon \in L_1 \cap L_\infty$, то по лемме П.1.1 решение (П.2.17) также ограничено для всех $t \geq t_V$ и, следовательно, $V \in L_\infty$.

Проинтегрировав (П.2.17), получим:

$$(П.2.18) \quad V(t) \leq V(t_V) - \sigma_2 \int_{t_V}^t V(s) ds + \int_{t_V}^t \epsilon(s) ds.$$

Так как $V \in L_\infty$ и $\epsilon \in L_1$, то следующий интеграл ограничен:

$$\sigma_2 \int_{t_V}^t V(s) ds \leq -V(t) + V(t_V) + \int_{t_V}^t \epsilon(s) ds < \infty,$$

откуда $\tilde{\epsilon}_f \in L_2 \cap L_\infty$.

Повторив рассуждения (П.2.14)–(П.2.18), имеем $\tilde{y}_f \in L_2 \cap L_\infty$. Таким образом, для всех $0 \leq m \leq n-1$ по лемме П.1.1 почти всегда в смысле выполнения импликации

$$(П.2.19) \quad \left. \begin{array}{l} \tilde{\epsilon}_f \in L_2 \cap L_\infty \\ \tilde{y}_f \in L_2 \cap L_\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s^i [\tilde{\epsilon}_f(t)] \in L_2 \cap L_\infty \\ s^i [\tilde{y}_f(t)] \in L_2 \cap L_\infty \end{array} \right\} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

получаем $\tilde{h}_\epsilon \in L_2 \cap L_\infty$, $\tilde{h}_y \in L_2 \cap L_\infty$ (например, если $\frac{d}{dt}[\mu(t)] = 0$, то $\mathcal{H}(t, s)[s^i[\cdot]] = \mathcal{H}(t, s)s^i[\cdot]$ и $\tilde{h}_\epsilon \in L_2 \cap L_\infty$, $\tilde{h}_y \in L_2 \cap L_\infty$ следует непосредственно из леммы П.1.1).

С учетом $\tilde{\psi}_a \in L_2 \cap L_\infty$ (по теореме 2) на основании выражения (П.2.10) окончательно получаем $\tilde{f}_f \in L_2 \cap L_\infty$. Поскольку $\tilde{f}_f \in L_2 \cap L_\infty$, $\tilde{f} \in L_p \cap L_\infty$

для $p \in [1, \infty)$ (по доказанному в утверждении 1), то найдется достаточно большое число f_{\max} такое, что верно

$$\text{sat}_{f_{\max}} \left\{ \tilde{f}_f(t) - \tilde{f}(t) - f(t) \right\} = \tilde{f}_f(t) - \tilde{f}(t) - f(t),$$

значит, можем переписать (П.2.9) в следующем виде:

$$\tilde{y}(t) = W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\tilde{f}_f(t) - \tilde{f}(t) \right],$$

откуда в силу $\tilde{f}_f \in L_2 \cap L_\infty$, $\tilde{f} \in L_p \cap L_\infty$ по лемме П.1.5 получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = 0$.

Доказательство теоремы 5. В соответствии с доказательством утверждения 1 и теоремы 4 при $\mu(t) = \mu > 0$ замкнутая система управления описывается следующими выражениями:

$$(П.2.20а) \quad \begin{cases} \dot{\eta}(t) = \mu G \eta(t) + e_{n+1} m_0 \mu \lambda(t), \\ \tilde{f}(t) = e_1^\top \eta(t), \end{cases}$$

$$(П.2.20б) \quad \tilde{y}(t) = W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\text{sat}_{f_{\max}} \left\{ \tilde{f}_f(t) - \tilde{f}(t) - f(t) \right\} + f(t) \right],$$

$$(П.2.20с) \quad \begin{aligned} \tilde{f}_f(t) &= -\psi_a^\top(\Theta) \tilde{h}_\varepsilon(t) - \tilde{\psi}_a^\top(t) h_y(t) - \\ &- \left(\psi_a^\top(\theta_a) - \psi_a^\top(\Theta) \right) \tilde{h}_y(t) - \tilde{\psi}_a^\top(t) \tilde{h}_y(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{f} \in L_\infty$ в силу $\mu \lambda \in L_\infty$ и гурвицевости матрицы G , а для $\tilde{f}_f(t)$ (повторив доказательство (П.2.12)–(П.2.19) из теоремы 4) при выполнении допущения 1 имеем

$$\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi}_b \in L_2 \cap L_\infty \Rightarrow \tilde{f}_f \in L_2 \cap L_\infty.$$

Тогда существует достаточно большое число f_{\max} такое, что верно

$$\tilde{y}(t) = \underbrace{W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\tilde{f}_f(t) \right]}_{\tilde{y}_1(t)} - \underbrace{W_{cl}(\theta_{cl}, s) \left[\tilde{f}(t) \right]}_{\tilde{y}_2(t)},$$

где в силу $\tilde{f}_f \in L_2 \cap L_\infty$ по лемме П.1.5 получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}_1(t) = 0$.

Для завершения доказательства рассмотрим (П.2.20а) совместно с системой

$$(П.2.21) \quad \begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_{cl} z(t) + e_{n_{cl}} \tilde{f}(t), \\ \tilde{y}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0_{1 \times (n_{cl} - (m_{cl} + 1))} & \theta_{b,cl}^\top \end{bmatrix} z(t), \end{aligned}$$

где

$$A_{cl} = A_0 + e_{n_{cl}} \theta_{a,cl}^\top, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0_{n_{cl}} & I_{n_{cl}-1} \\ & 0_{1 \times (n_{cl}-1)} \end{bmatrix}, \quad e_{n_{cl}} = \begin{bmatrix} 0_{n_{cl}-1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

а параметры $\theta_{a,cl}$, $\theta_{b,cl}$ являются аналогами θ_a , θ_b и соответствуют параметрам числителя и знаменателя передаточной функции замкнутой системы (2.4).

Для анализа устойчивости (П.2.20а) + (П.2.21) введем в рассмотрение квадратичную форму:

$$(П.2.22) \quad V = z^\top P_z z + \frac{1}{\mu} \eta^\top P_\eta \eta,$$

где $P_z A_{cl} + A_{cl}^\top P_z = -Q_z$, $P_\eta G + G^\top P_\eta = -Q_\eta$ и матрицы $Q_z = Q_z^\top > 0$, $Q_\eta = Q_\eta^\top > 0$ подобраны так, что для некоторых чисел $\chi_z \in (0, 1)$, $\chi_\eta \in (0, 1)$ верно:

$$\begin{aligned} 0 < c_z &\leq \lambda_{\min} \left(Q_z - \chi_z^{-1} P_z e_{n_{cl}} e_{n_{cl}}^\top P_z \right), \\ 0 < c_\eta &\leq \lambda_{\min} \left(Q_\eta - m_0 \chi_\eta^{-1} P_\eta e_{n+1} e_{n+1}^\top P_\eta - \chi_z e_1 e_1^\top \right). \end{aligned}$$

Производная (П.2.22) в силу уравнений (П.2.20а) и (П.2.21) имеет вид

$$(П.2.23) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= z^\top \left[P_z A_{cl} + A_{cl}^\top P_z \right] z + 2z^\top P_z e_{n_{cl}} e_1^\top \eta + \\ &+ \eta^\top \left[P_\eta G + G^\top P_\eta \right] \eta + 2\eta^\top P_\eta e_{n+1} m_0 \lambda = \\ &= -z^\top Q_z z - \eta^\top Q_\eta \eta + 2z^\top P_z e_{n_{cl}} e_1^\top \eta + 2\eta^\top P_\eta e_{n+1} m_0 \lambda. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенствами

$$\begin{aligned} 2z^\top P_z e_{n_{cl}} e_1^\top \eta &\leq \chi_z^{-1} z^\top P_z e_{n_{cl}} e_{n_{cl}}^\top P_z z + \chi_z \eta^\top e_1 e_1^\top \eta, \\ 2\eta^\top P_\eta e_{n+1} \lambda &\leq \chi_\eta^{-1} \eta^\top P_\eta e_{n+1} e_{n+1}^\top P_\eta \eta + \chi_\eta \lambda^2, \end{aligned}$$

имеем:

$$(П.2.24) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= -z^\top \left[Q_z - \chi_z^{-1} P_z e_{n_{cl}} e_{n_{cl}}^\top P_z \right] z - \\ &- \eta^\top \left[Q_\eta - m_0 \chi_\eta^{-1} P_\eta e_{n+1} e_{n+1}^\top P_\eta - \chi_z e_1 e_1^\top \right] \eta + \chi_\eta m_0 \lambda^2 \leq \\ &\leq -\min \left\{ \frac{c_z}{\lambda_{\max}(P_z)}, \frac{\mu c_\eta}{\lambda_{\max}(P_\eta)} \right\} V + \chi_\eta m_0 \lambda^2. \end{aligned}$$

Поскольку в силу допущения 2 верно $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lambda^2(\mu) = 0$, то из (П.2.24) вместе с $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}_1(t) = 0$ получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| \leq \epsilon$ для произвольно малого числа $\epsilon > 0$.

Доказательство теоремы 6. При $\mu(t) = \mu > 0$ по доказанному в теореме 5 замкнутая система управления описывается выражениями (П.2.20а)–(П.2.20с) и (П.2.21). Более того, для компоненты $\tilde{y}_2(t)$ вынужденного движения (повторив анализ (П.2.21)–(П.2.24)) имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}_2(t)| \leq \epsilon_2$ для произвольно малого числа $\epsilon_2 > 0$. Из существования оценки сверху (3.16) на

основании выражений (П.2.10)–(П.2.13) нетрудными, но довольно объемными рассуждениями возможно получить оценку сверху на $\tilde{f}_f(t)$ в следующем виде:

$$(П.2.25) \quad \left| \tilde{f}_f(t) \right| \leq \tilde{f}_{1f}(t) + T^{-1} \tilde{f}_{0f},$$

где $\tilde{f}_{1f} \in L_2$ и $0 < \tilde{f}_{0f} < \infty$.

Тогда для завершения доказательства остается рассмотреть систему

$$(П.2.26) \quad \begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_{cl}z(t) + e_{n_{cl}}\tilde{f}_f(t), \\ \tilde{y}_1(t) &= [0_{1 \times (n_{cl} - (m_{cl} + 1))} \quad \theta_{b,cl}^\top]z(t). \end{aligned}$$

Для анализа устойчивости (П.2.26) введем в рассмотрение квадратичную форму

$$(П.2.27) \quad V = z^\top P_z z,$$

где $P_z A_{cl} + A_{cl}^\top P_z = -Q_z$ и матрица $Q_z = Q_z^\top > 0$ подобрана так, что для некоторого числа $\chi_z \in (0, 1)$ верно $0 < c_z \leq \lambda_{\min}(Q_z) - \chi_z^{-1} \|P_z e_{n_{cl}}\|^2$.

Производная (П.2.27) в силу уравнения (П.2.26) имеет вид

$$(П.2.28) \quad \dot{V} = z^\top \left[P_z A_{cl} + A_{cl}^\top P_z \right] z + 2z^\top P_z e_{n_{cl}} \tilde{f}_f.$$

В силу оценки (П.2.25) также получим:

$$\begin{aligned} 2 \left\| z^\top P_z e_{n_{cl}} \tilde{f}_f \right\| &\leq 2 \|z\| \|P_z e_{n_{cl}}\| \left| \tilde{f}_f \right|, \\ 2 \|z\| \|P_z e_{n_{cl}}\| \left| \tilde{f}_f \right| &\leq \chi_z^{-1} \|P_z e_{n_{cl}}\|^2 \|z\|^2 + \chi_z \tilde{f}_f^2, \\ \tilde{f}_f^2 &\leq \tilde{f}_{1f}^2(t) + 2T^{-1} \tilde{f}_{1f} \tilde{f}_{0f} + T^{-2} \tilde{f}_{0f}^2, \\ 2T^{-1} \tilde{f}_{1f} \tilde{f}_{0f} &\leq \tilde{f}_{1f}^2(t) + T^{-2} \tilde{f}_{0f}^2, \end{aligned}$$

а значит, имеем:

$$(П.2.29) \quad \dot{V} \leq -c_z \|z\|^2 + 2\chi_z \tilde{f}_{1f}^2(t) + 2T^{-2} \chi_z \tilde{f}_{0f}^2.$$

Поскольку $\tilde{f}_{1f} \in L_2$ и $\tilde{f}_{0f} < \infty$, то из (П.2.29) получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}_1(t)| \leq \epsilon_1$ для произвольно малого числа $\epsilon_1 > 0$, что позволяет сделать вывод о $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| \leq \epsilon$ для произвольно малого числа $\epsilon > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. She J.-H., Fang M., Ohyama Y., Hashimoto H., Wu M. Improving disturbance-rejection performance based on an equivalent-input-disturbance approach // IEEE Transact. Indust. Electron. 2008. V. 55. No. 1. P. 380–389.

2. *Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б.* Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1 // *АиТ.* 2020. № 9. С. 3–61.
Andrievsky B., Furtat I. Disturbance Observers: Methods and Applications. I // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 9. P. 1563–1610.
3. *Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б.* Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 2 // *АиТ.* 2020. № 10. С. 35–91.
Andrievsky B., Furtat I. Disturbance Observers: Methods and Applications. II // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 10. P. 1775–1818.
4. *Chen W.-H., Yang J., Guo L., Li S.* Disturbance-observer-based control and related methods – An overview // *IEEE Transact. Indust. Electron.* 2015. V. 63. No. 2. P. 1083–1095.
5. *Sariyildiz E., Oboe R., Ohnishi K.* Disturbance observer-based robust control and its applications: 35th anniversary overview // *IEEE Transact. Indust. Electron.* 2019. V. 67. No. 3. P. 2042–2053.
6. *Johnson C.* Further study of the linear regulator with disturbances – The case of vector disturbances satisfying a linear differential equation // *IEEE Transact. Autom. Control.* 1970. V. 15. No. 2. P. 222–228.
7. *Бобцов А.А., Кремлев А.С., Цвижевич В.И.* Синтез наблюдателя для конечного возмущения // *Науч.-техн. вест. информ. технологий, механики и оптики.* 2003. № 11. С. 81–85.
8. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений I. Объекты с известными параметрами // *АиТ.* 2004. № 10. С. 13–24.
Nikiforov V.O. Observers of External Deterministic Disturbances. I. Objects with Known Parameters // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 10. P. 1531–1541.
9. *Marino R., Santosuosso G.L., Tomei P.* Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency // *Automatica.* 2003. V. 39. No. 10. P. 1755–1761.
10. *Bobtsov A., Kremlev A.* Adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency // *IFAC Proceedings Volumes.* 2005. V. 38. No. 1. P. 131–136.
11. *Бобцов А., Пыркин А.А.* Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта любой относительной степени // *АиТ.* 2009. № 3. С. 114–122.
Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. Compensation of unknown sinusoidal disturbances in linear plants of arbitrary relative degree // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 3. P. 449–456.
12. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений II. Объекты с неизвестными параметрами // *АиТ.* 2004. № 11. С. 40–48.
Nikiforov V.O. Observers of External Deterministic Disturbances. II. Objects with Unknown Parameters // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 11. P. 1724–1732.
13. *Бобцов А.* Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // *АиТ.* 2008. № 8. С. 25–32.
Bobtsov A.A. Output control algorithm with the compensation of biased harmonic disturbances // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 8. P. 1289–1296.

14. *Бобцов А.А., Кремлев А.С., Пыркин А.А.* Компенсация гармонического возмущения для параметрически и функционально не определенного нелинейного объекта // *АиТ.* 2011. № 1. С. 121–129.
Bobtsov A.A., Kremlev A.S., Pyrkin A.A. Compensation of harmonic disturbances in nonlinear plants with parametric and functional uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 1. P. 111–118.
15. *Бобцов А.А., Колубин С.А., Кремлев А.С., Пыркин А.А.* Итеративный алгоритм адаптивного управления по выходу с полной компенсацией неизвестного синусоидального возмущения // *АиТ.* 2012. № 8. С. 64–75.
Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., Kremlev A.S., Pyrkin A.A. An iterative algorithm of adaptive output control with complete compensation for unknown sinusoidal disturbance // *Autom. Remote Control.* 2012. V. 73. No. 8. P. 1327–1336.
16. *Бобцов А.А., Ведяков А.А., Колубин С.А., Пыркин А.А.* Гибридный алгоритм управления по выходу с компенсацией неизвестного мультисинусоидального возмущения // *Изв. Вузов. Приборостроение.* 2013. Т. 56. № 4. С. 7–10.
17. *Corless M., Tu J.* State and Input Estimation for a Class of Uncertain Systems // *Automatica.* 1998. V. 34. No. 6. P. 757–764.
18. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Алгоритмы обращения линейных управляемых систем // *Дифференц. уравнения.* 1997. Т. 34. № 6. С. 744–750.
19. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Методы робастного обращения динамических систем. М.: Физматлит, 2009. 222 с.
20. *Edwards C., Spurgeon S.K., Patton R. J.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica.* 2000. V. 36. No. 4. P. 541–553.
21. *Feng H., Guo B.Z.* Active disturbance rejection control: Old and new results // *Annual Reviews in Control.* 2017. V. 44. P. 238–248.
22. *Han J.* From PID to active disturbance rejection control // *IEEE Transact. Indust. Electron.* 2009. V. 56. No. 3. P. 900–906.
23. *Bobtsov A., Pyrkin A.* A new approach to MRAC problem with disturbance rejection // *IFAC Proceedings Volumes.* 2007. V. 40. No. 13. P. 92–97.
24. *Yang J., Na J., Gao G.* Robust adaptive control with a modified controller for transient response improvement // *9 Int. Conf. Model. Identificat. Control (ICMIC).* IEEE, 2017. P. 929–934.
25. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // *АиТ.* 2007. № 7. С. 103–115.
Tsykunov A.M. Robust control algorithms with compensation of bounded perturbations // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 7. P. 1213–1224.
26. *Цыкунов А.М.* Адаптивное и робастное управление динамическими объектами по выходу. М.: Физматлит, 2009. 268 с.
27. *Glushchenko A., Lastochkin K., Abramenzkov, A., Abdulov, A.* Robust Attitude Control of Underwater Unmanned Vehicle with Estimation and Compensation of Matched Uncertainty // *5th Int. Conf. Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA).* IEEE, 2023. P. 58–63.

28. *Ioannou P.A., Sun J.* Robust adaptive control. Upper Saddle River. N.J: PTR Prentice-Hall, 1996.
29. *Bobtsov A.A., Efimov D.V., Pyrkin A.* Hybrid adaptive observers for locally Lipschitz systems // Int. J. Adaptiv Control Signal Proc. 2011. V. 25. No. 1. P. 33–47.
30. *Efimov D., Edwards C., Zolghadri A.* Enhancement of adaptive observer robustness applying sliding mode techniques // Automatica. 2016. V. 72. P. 53–56.
31. *Колесников А.А.* Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.
32. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Instrumental Variables based DREM for Online Asymptotic Identification of Perturbed Linear Systems // arXiv:2312.15631, 2023. P. 1–13.
33. *Söderström T., Stoica P.* Instrumental variable methods for system identification // Circuits, Systems and Signal Processing. 2002. V. 21. No. 1. P. 1–9.
34. *Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A.A., Astolfi A., Bobtsov A.A.* New results on parameter estimation via dynamic regressor extension and mixing: Continuous and discrete-time cases // IEEE Transact. Autom. Control. 2020. V. 66. No. 5. P. 2265–2272.
35. *Tao G.* Adaptive control design and analysis, John Wiley & Sons, 2003.
36. *Aranovskiy S.* Parameter Estimation with Enhanced Performance, Habilitation.
37. *Wang J., Efimov D., Bobtsov A.* On robust parameter estimation in finite-time without persistence of excitation // IEEE Transact. Autom. Control. 2019. Vol. 65. No. 4. P. 1731–1738.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 24.06.2024

Принята к публикации 10.07.2024