



*Российская Академия Наук*

# **А АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА**

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

**8**

**АВГУСТ**

**Москва**

**2024**

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

**Главный редактор:**

Галяев А.А.

**Заместители главного редактора:**

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

**Ответственный секретарь:**

Родионов И.В.

**Редакционный совет:**

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,  
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,  
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

**Редакционная коллегия:**

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишнеvский В.М.,  
Воронцов К.В., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И.,  
Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г.,  
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),  
Миллер Б.М., Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В.,  
Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В.,  
Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В.,  
Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Цыбаков А.Б. (Франция),  
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2024 г. А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru),  
А.В. ЗУЕВ, канд. техн. наук (alvzuev@yandex.ru)  
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;  
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток)

## ИНТЕРВАЛЬНЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ВХОДОВ В ДИСКРЕТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ<sup>1</sup>

Рассматривается задача оценивания неизвестных входов в дискретных стационарных (с постоянными параметрами) системах, описываемых динамическими моделями при наличии внешних возмущений, на основе интервальных наблюдателей. Решение основано на модели исходной системы, имеющей минимальную размерность, нечувствительной к возмущениям. Для этой модели строится интервальный наблюдатель, на основе которого определяется оценка величины неизвестных входов. Теоретические результаты иллюстрируются примером.

*Ключевые слова:* линейные системы, неизвестные входы, интервальные наблюдатели, оценивание.

DOI: 10.31857/S0005231024080018, EDN: WPYYGQ

### 1. Введение и постановка задачи

Задача оценивания неизвестных входов динамических систем имеет важное теоретическое и прикладное значение, в частности для определения величин изменений параметров системы из-за возникших дефектов для последующего парирования этих изменений или уровня внешних возмущений, что часто необходимо для их учета системой управления. При ее решении для систем, описываемых непрерывными моделями, последние 25 лет используются скользящие наблюдатели [1–3].

С другой стороны, для оценки компонент вектора состояния динамических систем последние годы применяются интервальные наблюдатели, которые в каждый момент времени вырабатывают оценку множества допустимых значений вектора состояния (или заданной линейной функции этого вектора) для различных классов динамических систем с неопределенностями. обстоятельные обзоры полученных за последнее время результатов содержатся в [4–6], решения для различных классов систем (непрерывных, дискретных, гибридных, с запаздыванием), а также практические приложения можно найти в [7–14]. Особенностью интервальных наблюдателей является то, что они позволяют простыми средствами учитывать различные виды

---

<sup>1</sup> Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 23-29-00191 (<https://rscf.ru/project/23-29-00191/>).

неопределенностей в системах (внешние возмущения, шумы измерений, параметрические неопределенности) и формировать интервал, в котором гарантированно находятся значения вектора состояния (или заданной линейной функции этого вектора).

В [15] интервальные наблюдатели предложено использовать для решения задачи оценивания неизвестных входов в дискретных линейных динамических системах. Этот метод является определенной альтернативой скользящим наблюдателям, которые неэффективны в дискретном случае.

В настоящей работе подход, предложенный в [15], развивается для решения задачи оценивания неизвестных входов в дискретных линейных и нелинейных динамических системах, подверженных внешним возмущениям. В отличие от [15] от системы не требуется быть минимально фазовой; кроме того, подход, предложенный в [15], предполагает проведение ряда сложных преобразований системы, в частности приведение ее к дескрипторному виду, чего не требуется в настоящей работе. В [15] по аналогии с [5–13] интервальный наблюдатель строится для исходной преобразованной системы, в результате чего он имеет полную размерность. В отличие от этого в настоящей работе для решения используется редуцированная модель исходной системы, что упрощает конструкцию интервального наблюдателя и дает возможность сделать его нечувствительным к внешним возмущениям, что в ряде случаев гарантирует точную оценку даже при наличии таких возмущений. Кроме того, показывается, как преодолеть требование, связанное с условием согласования, использованное в [15] и ограничивающее возможности оценивания.

## 2. Основные модели и соотношения

Рассмотрим систему, описанную дискретной нелинейной моделью

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + Dd(t) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned}$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  – векторы состояния, управления и выхода;  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $C$  и  $L$  – известные постоянные матрицы,  $\rho(t) \in \mathbb{R}^p$  – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая возмущения, действующие на систему; слагаемое  $Dd(t)$  – неизвестный вход, величину которого требуется оценить. В частности, такой вход может представлять собой результат проявления возникшего в системе дефекта. Предполагается, что  $d(t)$  – скалярная ограниченная функция:  $\underline{d} \leq d(t) \leq \bar{d}$  при всех  $t = 0, 1, 2, \dots$  для известных  $\underline{d}$  и  $\bar{d}$ . Нелинейный член  $\Psi(x, u)$  представлен в виде

$$\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1x, u) \\ \dots \\ \varphi_q(A_qx, u) \end{pmatrix},$$

$A_1, \dots, A_q$  – известные постоянные матрицы-строки,  $\varphi_1, \dots, \varphi_q$  – произвольные нелинейные функции.

*Замечание 1.* В основной части работы, кроме раздела 7, по аналогии с [15] предполагается, что выполняется условие согласования  $\text{rank}(HD) =$

$= \text{rank}(D)$ , которое означает, что неизвестный вход  $d(t)$  входит в уравнения для тех компонент вектора состояния, которые измеряются датчиками системы. В отличие от [15], где  $d(t)$  – функция произвольной размерности, вначале предполагается, что  $d(t)$  – скаляр; в разделе 8 показывается, как это ограничение можно снять.

Рассматриваемая задача вначале решается в линейном случае, когда  $C = 0$ . Как было сказано, решение ищется на основе редуцированной модели исходной системы. Для этого коротко напомним результаты работ [14, 16], где строится линейная модель системы (2.1) минимальной размерности, нечувствительная к возмущению и оценивающая некоторую переменную  $y_*(t)$ , задаваемую равенством  $y_*(t) = R_*y(t)$  для матрицы  $R_*$ , подлежащей определению в ходе решения задачи. Такая модель описывается уравнениями

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x_*(t+1) &= F_*x_*(t) + J_*y(t) + G_*u(t) + D_*d(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t) = R_*y(t), \end{aligned}$$

где  $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$ ,  $k < n$  – размерность модели,  $F_*$ ,  $G_*$ ,  $J_*$ ,  $H_*$  – матрицы, подлежащие определению. Для решения задачи предполагается, что существует матрица  $\Phi$  такая, что  $x_*(t) = \Phi x(t)$ . Известно [14, 16], что матрицы, описывающие модель, удовлетворяют уравнениям

$$(2.3) \quad \Phi F = F_*\Phi + J_*H, \quad H_*\Phi = R_*H, \quad \Phi G = G_*, \quad \Phi D = D_*, \quad \Phi L = 0.$$

Необходимым условием возможности построения такой системы является неравенство

$$(2.4) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} < \text{rank}(H) + \text{rank}(L_0),$$

где  $L_0$  – матрица максимального ранга такая, что  $L_0L = 0$ . Действительно, условие  $\Phi L = 0$  тогда может быть записано в виде  $\Phi = NL_0$  для некоторой матрицы  $N$ . Поскольку  $H_*\Phi = R_*H$ , то  $H_*NL_0 = R_*H$ , что справедливо при выполнении условия (2.4). Если оно не выполняется, то система, нечувствительная к возмущению и оценивающая переменную  $y_*(t)$ , построена быть не может. Ниже будем полагать, что условие (2.4) выполняется.

### 3. Построение модели, нечувствительной к возмущению

В общем случае матрицы  $F_*$  и  $H_*$  задаются в идентификационной канонической форме:

$$(3.1) \quad F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (1 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Если система (2.2) наблюдаема, то она всегда может быть приведена к виду с такими матрицами [17]. Если она не наблюдаема, то ее можно привести к

виду с наблюдаемой подсистемой и матрицы этой подсистемы искать в виде (3.1) [17]. Решение задачи осуществляется на основе уравнения

$$(3.2) \quad (R_* \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})(W^{(k)} \quad L^{(k)}) = 0,$$

где  $J_{*i}$  –  $i$ -я строка матрицы  $J_*$ ,

$$W^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ HF^{k-1} \\ \dots \\ H \end{pmatrix}, \quad L^{(k)} = \begin{pmatrix} HL & HFL & \dots & HF^{k-1}L \\ 0 & HL & \dots & HF^{k-2}L \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

матрица  $W^{(k)}$  обеспечивает построение модели (2.2),  $L^{(k)}$  – нечувствительность ее к возмущениям, т.е. выполнение условия  $\Phi L = 0$ . Уравнение (3.2) имеет нетривиальное решение, если

$$(3.3) \quad \text{rank}(W^{(k)} \quad L^{(k)}) < l(k+1),$$

поскольку в этом случае между строками составной матрицы  $(W^{(k)} \quad L^{(k)})$  имеется линейная зависимость, что гарантирует существование решения.

Для построения модели из (3.3) начиная с  $k = 1$  определяется минимальное  $k$  и из (3.2) – строка  $(R_* \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})$ , затем на основе соотношений

$$R_*H = \Phi_1, \quad \Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i}H, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \Phi_k F = J_{*k}H,$$

полученных из (2.3) и (3.1), строится матрица  $\Phi$ ;  $G_*$  определяется из (2.3), где  $\Phi_i$  –  $i$ -я строка матрицы  $\Phi$ . Таким образом, линейная модель (2.2) построена; предполагается, что  $D_* \neq 0$ .

Если уравнение (3.2) не имеет решения при всех  $k < n$ , модели, нечувствительной к возмущениям, не существует. В этом случае можно воспользоваться робастными методами, изложенными, например, в [18], однако получаемая оценка уже не будет точной.

#### 4. Решение задачи

Вначале для простоты предполагается, что  $k = 1$ , т.е. можно построить одномерную модель, которая с  $F_* = 0$  и  $H_* = 1$  описывается уравнениями

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x_*(t+1) &= J_*y(t) + G_*u(t) + D_*d(t), \\ y_*(t) &= x_*(t). \end{aligned}$$

*Утверждение 1. Модель (4.1) существует при выполнении двух условий:*

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{pmatrix} HF \\ H \end{pmatrix} &< \text{rank}(HF) + \text{rank}(H), \\ R_*HL &= 0. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Из (3.2) при  $k = 1$  получаем

$$(R_* \quad -J_*) \begin{pmatrix} HF & HL \\ H & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда следует равенство  $(R_* \quad -J_*) \begin{pmatrix} HF \\ H \end{pmatrix} = 0$ , которое выполняется тогда, когда справедливо первое условие. Второе условие прямо следует из предыдущего равенства.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, модель будет многомерной. Дополнительным условием является требование чувствительности к дефектам  $\Phi D = D_* \neq 0$ , представленное в виде  $R_* H D \neq 0$ .

*Замечание 2.* Поскольку в модели (4.1) значения всех переменных, кроме  $d(t)$ , могут быть измерены, последняя может быть определена из простого соотношения  $D_* d(t) = y_*(t+1) - J_* y(t) - G_* u(t)$ . Учитывая каноническую форму матрицы  $F_*$  и вид получаемой при этом модели, можно утверждать, что путем образования временных сдвигов для переменной  $y_*(t)$  и подстановок одних уравнений в другие (как это сделано в разделе 7) можно построить аналогичные соотношения и определять из них переменную  $d(t)$ . При  $k > 2$  эти соотношения будут довольно громоздкими, использование интервальных наблюдателей позволяет существенно упростить их. Поэтому несмотря на очевидное решение при  $k = 1$ , покажем, как здесь могут быть применены такие наблюдатели, чтобы распространить полученный результат на общий случай.

Интервальный наблюдатель задается в виде

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= G_* u(t) + J_* y(t) + D_*^+ \underline{d} - D_*^- \bar{d} + g \underline{e}(t), \\ \bar{x}_*(t+1) &= G_* u(t) + J_* y(t) + D_*^+ \bar{d} - D_*^- \underline{d} + g \bar{e}(t), \\ \underline{y}_*(t) &= \underline{x}_*(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_*(t), \end{aligned}$$

где  $A^+ = \max(0, A)$ ,  $A^- = A^+ - A$  для произвольной матрицы  $A$ , нетрудно видеть, что  $A^+ \geq 0$ ,  $A^- \geq 0$ ; коэффициент  $g$  выбирается для обеспечения устойчивости наблюдателя;  $\underline{e}(t) = y_*(t) - \underline{y}_*(t)$ ,  $\bar{e}(t) = y_*(t) - \bar{y}_*(t)$ .

Поскольку для интервального наблюдателя из условия  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$  следует, что при всех  $t \geq 0$  справедливо соотношение  $\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \bar{x}_*(t)$  [4], то существует число  $\alpha(t) \geq 0$  такое, что при всех  $t \geq 0$

$$(4.3) \quad x_*(t) = \underline{x}_*(t) + \alpha(t)(\bar{x}_*(t) - \underline{x}_*(t)),$$

или

$$(4.4) \quad x_*(t) = \alpha(t)\bar{x}_*(t) + (1 - \alpha(t))\underline{x}_*(t).$$

Определим значение  $\alpha(t+1)$ . Из (4.3) при  $t := t+1$  получаем

$$R_* y(t+1) = x_*(t+1) = \underline{x}_*(t+1) + \alpha(t+1)(\bar{x}_*(t+1) - \underline{x}_*(t+1)),$$

откуда

$$(4.5) \quad \alpha(t+1) = \frac{R_* y(t+1) - \underline{x}_*(t+1)}{\bar{x}_*(t+1) - \underline{x}_*(t+1)},$$

где все входящие в формулу величины могут быть измерены.

Теорема 1. Оценка функции  $d(t)$  определяется как

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \hat{d}(t) &= D_*^{-1}(g(\alpha(t+1))\underline{e}(t) + (1 - \alpha(t+1))\bar{e}(t)) + \\ &+ \alpha(t+1)(D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}) + (1 - \alpha(t+1))(D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d}), \end{aligned}$$

где коэффициент  $\alpha(t+1)$  рассчитывается согласно (4.5).

*Доказательство.* В (4.4), записанном для  $t := t+1$ , заменим переменные  $x_*(t+1)$ ,  $\underline{x}_*(t+1)$  и  $\bar{x}_*(t+1)$  правыми частями уравнений (4.1) и (4.2) соответственно:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} &J_*y(t) + G_*u(t) + D_*d(t) = \\ &= \alpha(t+1)(G_*u(t) + J_*y(t) + D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d} + g\underline{e}(t)) + \\ &+ (1 - \alpha(t+1))(G_*u(t) + J_*y(t) + D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d} + g\bar{e}(t)). \end{aligned}$$

После преобразований в правой части получаем

$$\begin{aligned} &J_*y(t) + G_*u(t) + D_*d(t) = \\ &= g(\alpha(t+1)\underline{e}(t) + (1 - \alpha(t+1))\bar{e}(t)) + G_*u(t) + J_*y(t) + \\ &+ \alpha(t+1)(D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}) + (1 - \alpha(t+1))(D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d}), \end{aligned}$$

откуда после простых преобразований следует (4.6).

*Замечание 3.* Канонический вид матрицы  $F_*$  позволяет утверждать, что наблюдатель (4.2) устойчив и без введения обратных связей  $g\underline{e}(t)$  и  $g\bar{e}(t)$ ; последние необходимы только для получения оценки  $\hat{d}(t)$ , причем в данном случае она будет точной для всех  $t > 0$ .

## 5. Многомерная модель

В случае  $k > 1$  модель (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= x_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + D_{*1}d(t), \\ x_{**}(t+1) &= F_{**}x_{**}(t) + J_{**}y(t) + G_{**}u(t) + D_{**}d(t), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t), \end{aligned}$$

где  $x_{*i}$  –  $i$ -я компонента вектора  $x_*$ ,  $x_{**} = (x_{*2}, \dots, x_{*k})$ ,  $J_{**}$ ,  $G_{**}$  и  $D_{**}$  – матрицы  $J_*$ ,  $G_*$  и  $D_*$  с удаленными первыми строками,  $F_{**}$  – матрица (3.1) размера  $(k-1) \times (k-1)$ . Предполагается, что  $D_{*1} \neq 0$  и  $D_{**} = 0$ , т.е. дефект входит только в первое уравнение. Интервальный наблюдатель имеет вид

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \underline{x}_{*1}(t+1) &= \hat{x}_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + D_{*1}^+\underline{d} - D_{*1}^-\bar{d} + g_1\underline{e}(t), \\ \hat{x}_{**}(t+1) &= F_{**}\hat{x}_{**}(t) + J_{**}y(t) + G_{**}u(t) + g_{**}\underline{e}(t), \\ \bar{x}_{*1}(t+1) &= \tilde{x}_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + D_{*1}^+\bar{d} - D_{*1}^-\underline{d} + g_1\bar{e}(t), \\ \tilde{x}_{**}(t+1) &= F_{**}\tilde{x}_{**}(t) + J_{**}y(t) + G_{**}u(t) + g_{**}\bar{e}(t), \\ \underline{y}_*(t) &= \underline{x}_{*1}(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_{*1}(t), \end{aligned}$$



т.е. интервально формируется только первая компонента вектора состояния. Здесь  $\hat{x}_{**}(t)$  и  $\tilde{x}_{**}(t)$  – векторы размерности  $k - 1$ , матрица  $(g_1 \ g_{**}^T)^T$  выбирается для обеспечения устойчивости наблюдателя, что всегда можно сделать для канонической формы (3.1).

С учетом (5.1) выражение (4.7) модифицируется следующим образом:

$$\begin{aligned} & x_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + D_{*1}d(t) = \\ & = \alpha(t+1)(\tilde{x}_{*2}(t) + G_{*1}u(t) + J_{*1}y(t) + D_{*1}^+\underline{d} - D_{*1}^-\bar{d} + g_1\underline{e}(t)) + \\ & + (1 - \alpha(t+1))(\hat{x}_{*2}(t) + G_{*1}u(t) + J_{*1}y(t) + D_{*1}^+\bar{d} - D_{*1}^-\underline{d} + g_1\bar{e}(t)). \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha(t+1)$  определяется для первых компонент векторов состояния по аналогии с (4.5):

$$\alpha(t+1) = \frac{R_*y(t+1) - \underline{x}_{*1}(t+1)}{\bar{x}_{*1}(t+1) - \underline{x}_{*1}(t+1)}.$$

Проведя ряд преобразований, получаем

$$\begin{aligned} & D_{*1}d(t) = g_1(\alpha(t+1)\underline{e}(t) + (1 - \alpha(t+1))\bar{e}(t)) + \\ (5.2) \quad & + \alpha(t+1)(D_{*1}^+\underline{d} - D_{*1}^-\bar{d}) + (1 - \alpha(t+1))(D_{*1}^+\bar{d} - D_{*1}^-\underline{d}) + \\ & + \alpha(t+1)\tilde{x}_{*2}(t) + (1 - \alpha(t+1))\hat{x}_{*2}(t) - x_{*2}(t). \end{aligned}$$

Поскольку наблюдатель устойчив, то  $\tilde{x}_{*2}(t) \rightarrow x_{*2}(t)$  и  $\hat{x}_{*2}(t) \rightarrow x_{*2}(t)$ , откуда следует  $\alpha(t+1)\tilde{x}_{*2}(t) + (1 - \alpha(t+1))\hat{x}_{*2}(t) - x_{*2}(t) \rightarrow 0$ , а тогда оценка  $\hat{d}(t)$ , определяемая выражением (4.6) с  $D_* = D_{*1}$ , будет удовлетворять соотношению  $\hat{d}(t) \rightarrow d(t)$ .

*Замечание 4.* Из полученных соотношений можно сделать вывод о том, что использование интервального наблюдателя позволяет устранить влияние всех компонент вектора  $x_{**} = (x_{*2}, \dots, x_{*k})$  на конечный результат.

## 6. Учет нелинейностей

Метод синтеза модели в нелинейном случае опирается на ранее построенную линейную модель и состоит в том, что для найденной при построении линейной модели матрицы  $\Phi$  выясняется возможность преобразования аргумента нелинейной составляющей  $\Psi(x, u)$ , делается это следующим образом [18].

Вычисляется матрица  $C_* = \Phi C$  и определяются номера  $j_i, \dots, j_s$  ее ненулевых столбцов. Далее проверяется условие

$$(6.1) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A' \end{pmatrix},$$

где матрица  $A'$  строится из матриц  $A_1, \dots, A_q$  с номерами  $j_i, \dots, j_s$  как из строк. Если это условие выполняется, преобразование аргумента возможно.

После этого строится нелинейная составляющая в виде

$$\Psi_*(x_*, y, u) = \begin{pmatrix} \varphi_{j_1}(A_{*j_1}z, u) \\ \dots \\ \varphi_{j_s}(A_{*j_s}z, u) \end{pmatrix},$$

где  $z = \begin{pmatrix} x_* \\ y \end{pmatrix}$ , матрицы-строки  $A_{*j_1}, \dots, A_{*j_s}$  определяются из линейных уравнений

$$A_j = A_{*,j} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \quad j = j_1, \dots, j_s,$$

и добавляется к линейной модели (2.2). Если условие (6.1) не выполняется, необходимо найти другое решение уравнения (3.2) при прежней или увеличенной размерности  $k$  и повторить описанную процедуру с новой матрицей  $\Phi$ . В общем случае нелинейная модель описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_*x_*(t) + J_*y(t) + G_*u(t) + C_*\Psi_*(x_*(t), y(t), u(t)) + D_*d(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t). \end{aligned}$$

Если модель одномерна, то нелинейная составляющая зависит от  $y_*(t) = x_*(t)$  и одинаковым образом входит в модель и интервальный наблюдатель, а тогда, как нетрудно видеть, точная оценка определяется выражением (4.6).

Для многомерной модели с учетом предположения, что  $D_{*1} \neq 0$  и  $D_{**} = 0$ , получаем следующие описания модели:

$$\begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= x_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + C_{*1}\Psi_{*1}(y_*(t), x_{**}(t), y(t), u(t)) + \\ &\quad + D_{*1}d(t), \\ x_{**}(t+1) &= F_{**}x_{**}(t) + J_{**}y(t) + G_{**}u(t) + C_{**}\Psi_{**}(y_*(t), x_{**}(t), y(t), u(t)) \end{aligned}$$

и интервального наблюдателя:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{*1}(t+1) &= \hat{x}_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + C_{*1}\Psi_{*1}(y_*(t), \hat{x}_{**}(t), y(t), u(t)) + \\ &\quad + D_{*1}^+ \underline{d} - D_{*1}^- \bar{d} + g_1 \underline{e}(t), \\ \hat{x}_{**}(t+1) &= F_{**}\hat{x}_{**}(t) + J_{**}y(t) + G_{**}u(t) + C_{**}\Psi_{**}(y_*(t), \hat{x}_{**}(t), y(t), u(t)) + \\ &\quad + g_{**} \underline{e}(t), \\ \bar{x}_{*1}(t+1) &= \tilde{x}_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + C_{*1}\Psi_{*1}(y_*(t), \tilde{x}_{**}(t), y(t), u(t)) + \\ &\quad + D_{*1}^+ \bar{d} - D_{*1}^- \underline{d} + g_1 \bar{e}(t), \\ \tilde{x}_{**}(t+1) &= F_{**}\tilde{x}_{**}(t) + J_{**}y(t) + G_{**}u(t) + C_{**}\Psi_{**}(y_*(t), \tilde{x}_{**}(t), y(t), u(t)) + \\ &\quad + g_{**} \bar{e}(t), \\ \underline{y}_*(t) &= \underline{x}_{*1}(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_{*1}(t), \end{aligned}$$

где матрицы  $C_{*1}$ ,  $C_{**}$  и функции  $\Psi_{*1}$ ,  $\Psi_{**}$  определяются по аналогии с  $J_{*1}$  и  $J_{**}$ .

С учетом нелинейностей выражение (5.2) модифицируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
D_{*1}d(t) = & g_1(\alpha(t+1)\underline{e}(t) + (1 - \alpha(t+1))\bar{e}(t)) + \\
& + \alpha(t+1)(D_{*1}^+\underline{d} - D_{*1}^-\bar{d}) + (1 - \alpha(t+1))(D_{*1}^+\bar{d} - D_{*1}^-\underline{d}) + \\
& + \alpha(t+1)\tilde{x}_{*2}(t) + (1 - \alpha(t+1))\hat{x}_{*2}(t) - x_{*2}(t) + \\
& + \alpha(t+1)C_{*1}\Psi_{*1}(y_*(t), \tilde{x}_{**}(t), y(t), u(t)) + \\
& + (1 - \alpha(t+1))C_{*1}\Psi_{*1}(y_*(t), \hat{x}_{**}(t), y(t), u(t)) - \\
& - C_{*1}\Psi_{*1}(y_*(t), x_{**}(t), y(t), u(t)).
\end{aligned}$$

Поскольку матрица обратной связи  $(g_1 \ g_{**}^T)^T$  выбрана так, что наблюдатель устойчив, то  $\tilde{x}_{**}(t) \rightarrow x_{**}(t)$  и  $\hat{x}_{**}(t) \rightarrow x_{**}(t)$  и по аналогии с разделом 5  $\hat{d}(t) \rightarrow d(t)$ .

## 7. Невыполнение условия согласования

Условие согласования нередко может не выполняться, однако предложенный подход может быть применен и в этом случае более сложным образом. Для простоты рассмотрим частный случай, когда  $k = 2$  и слагаемое  $D_*d(t)$  входит во второе уравнение линейной модели:

$$\begin{aligned}
x_{*1}(t+1) &= x_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t), \\
x_{*2}(t+1) &= J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + D_*d(t), \\
y_*(t) &= x_{*1}(t).
\end{aligned}$$

Интервальный наблюдатель принимает вид

$$\begin{aligned}
\underline{x}_{*1}(t+1) &= \underline{x}_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + g_1\underline{e}(t), \\
\underline{x}_{*2}(t+1) &= J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + g_2\underline{e}(t) + D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}, \\
\bar{x}_{*1}(t+1) &= \bar{x}_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + g_1\bar{e}(t), \\
\bar{x}_{*2}(t+1) &= J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + g_2\bar{e}(t) + D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d}, \\
\underline{y}_*(t) &= \underline{x}_{*1}(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_{*1}(t),
\end{aligned}$$

т.е. интервально формируются обе компоненты вектора состояния; переменные  $\underline{e}(t)$  и  $\bar{e}(t)$  определяются, как показано выше.

Найдем значения первых компонент модели и наблюдателя в момент  $t + 2$ , произведя временной сдвиг в первых уравнениях и выполнив замену переменных  $x_{*2}(t+1)$ ,  $\underline{x}_{*2}(t+1)$  и  $\bar{x}_{*2}(t+1)$  правыми частями их уравнений:

$$\begin{aligned}
x_{*1}(t+2) &= J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + D_*d(t), \\
\underline{x}_{*1}(t+2) &= J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + \\
(7.1) \quad & + g_1\underline{e}(t+1) + g_2\underline{e}(t) + D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}, \\
\bar{x}_{*1}(t+2) &= J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + \\
& + g_1\bar{e}(t+1) + g_2\bar{e}(t) + D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d}.
\end{aligned}$$

По аналогии с (4.5) определим

$$(7.2) \quad \alpha(t+2) = \frac{R_*y(t+2) - \underline{x}_{*1}(t+2)}{\bar{x}_{*1}(t+2) - \underline{x}_{*1}(t+2)},$$

образуем сумму

$$x_{*1}(t+2) = \alpha(t+2)\bar{x}_{*1}(t+2) + (1 - \alpha(t+2))\underline{x}_{*1}(t+2)$$

и заменим переменные  $x_{*1}(t+2)$ ,  $\bar{x}_{*1}(t+2)$  и  $\underline{x}_{*1}(t+2)$  правыми частями уравнений (7.1):

$$\begin{aligned} & J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + D_*d(t) = \\ & = \alpha(t+2)(J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + \\ & \quad + g_1\bar{e}(t+1) + g_2\bar{e}(t) + D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d}) + \\ & + (1 - \alpha(t+2))(J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + \\ & \quad + g_1\underline{e}(t+1) + g_2\underline{e}(t) + D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}). \end{aligned}$$

После преобразований получаем

$$(7.3) \quad \begin{aligned} D_*d(t) & = g_1(\alpha(t+2)\bar{e}(t+1) + (1 - \alpha(t+2))\underline{e}(t+1)) + \\ & + g_2(\alpha(t+2)\bar{e}(t) + (1 - \alpha(t+2))\underline{e}(t)) + \\ & + \alpha(t+2)(D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d}) + (1 - \alpha(t+2))(D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}), \end{aligned}$$

откуда с очевидностью следует формула для оценки  $\hat{d}(t)$ .

*Замечание 5.* Выражение (7.3) очевидным образом обобщается на случай  $k > 2$ , когда слагаемое  $D_*d(t)$  входит только в последнее уравнение модели, а с учетом изложенного в разделах 5 и 6 – на его вхождение только в одно произвольное уравнение и нелинейный случай. Предложенный подход сложен в реализации и при моделировании, поскольку требует выполнения дополнительных временных задержек для переменных  $\underline{e}(t)$  и  $\bar{e}(t)$  с целью получения выражения (7.3).

## 8. Решение на основе канонической формы Жордана

Если для всех решений уравнения (3.2) переменная  $d(t)$  входит в модель в две и более ее компоненты, следует использовать не идентификационную каноническую форму, а диагональную жорданову, где

$$F_* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix},$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  – собственные числа ( $|\lambda_i| < 1$ ), которые предполагаются различными. Такая форма всегда может быть получена из канонической

формы (3.1) [16]. Тогда первое уравнение в (2.3) представляется в виде  $k$  независимых уравнений:

$$(8.1) \quad \Phi_i F = \lambda_i \Phi_i + J_{*i} H, \quad i = 1, \dots, k,$$

что и позволяет построить одномерную модель, куда будет входить переменная  $d(t)$ . Дополнительное требование  $\Phi L = 0$  – нечувствительность к возмущениям – учитывается следующим образом. В связи с введенной ранее матрицей  $L_0$  уравнение (8.1) может быть записано в виде

$$(8.2) \quad (N_i - J_{*i}) \begin{pmatrix} L_0(F - \lambda_i I_n) \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

где  $I_n$  – единичная  $(n \times n)$ -матрица.

Для построения модели выбирается такое значение  $\lambda = \lambda_i$ , что определяемая из уравнения (8.2) матрица  $\Phi = N L_0$  удовлетворяет требованиям  $D_* = \Phi D \neq 0$  и  $\Phi = R_* H$  для некоторой матрицы  $R_*$ .

*Замечание 6.* Требования  $\Phi D \neq 0$  и  $\Phi = R_* H$  не всегда могут быть выполнены, поскольку внешние возмущения, представленные матрицей  $L_0$ , могут привести к ограничению множества решений уравнения (8.2) даже при соблюдении условия согласования. Это ограничение можно снять, но тогда решение не будет точным.

Модель принимает вид

$$(8.3) \quad \begin{aligned} x_*(t+1) &= \lambda x_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) + D_* d(t), \\ y_*(t) &= x_*(t). \end{aligned}$$

Несмотря на одномерность модели, использовать прием, показанный в замечании 2, здесь не получится, поскольку в правую часть уравнения (8.3) входит переменная  $x_*(t)$ , и необходимо строить интервальный наблюдатель, который описывается уравнениями

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= \lambda \underline{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + D_*^+ \underline{d} - D_*^- \bar{d} + g \underline{e}(t), \\ \bar{x}_*(t+1) &= \lambda \bar{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + D_*^+ \bar{d} - D_*^- \underline{d} + g \bar{e}(t), \\ \underline{y}_*(t) &= \underline{x}_*(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_*(t). \end{aligned}$$

Отметим, что независимо от значения  $\lambda$  коэффициент  $g$  всегда можно выбрать так, что наблюдатель будет устойчив.

*Теорема 2.* Оценка функции  $d(t)$  определяется как

$$(8.5) \quad \begin{aligned} \hat{d}(t) &= D_*^{-1} g (\alpha(t+1) \underline{e}(t) + (1 - \alpha(t+1)) \bar{e}(t)) + \\ &+ \alpha(t+1) (D_*^+ \underline{d} - D_*^- \bar{d}) + (1 - \alpha(t+1)) (D_*^+ \bar{d} - D_*^- \underline{d}) + \\ &+ \lambda (\bar{x}_*(t) - \underline{x}_*(t)) (\alpha(t+1) - \alpha(t)). \end{aligned}$$

Переменная  $\alpha(t)$  рассчитывается аналогично  $\alpha(t+1)$ , переменные  $\bar{x}_*(t)$  и  $\underline{x}_*(t)$  доступны для измерения.

*Доказательство.* Коэффициент  $\alpha(t+1)$  определяется формулой (4.5), соотношение (4.7) принимает вид

$$\begin{aligned} & \lambda x_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) + D_* d(t) = \\ & = \alpha(t+1)(\lambda \bar{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + D_*^+ \underline{d} - D_*^- \bar{d} + g \underline{e}(t)) + \\ & + (1 - \alpha(t+1))(\lambda \underline{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + D_*^+ \bar{d} - D_*^- \underline{d} + g \bar{e}(t)). \end{aligned}$$

Правая часть этого равенства преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \lambda x_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) + D_* d(t) = \\ (8.6) \quad & = g(\alpha(t+1)\underline{e}(t) + (1 - \alpha(t+1))\bar{e}(t)) + \\ & + \alpha(t+1)(D_*^+ \underline{d} - D_*^- \bar{d}) + (1 - \alpha(t+1))(D_*^+ \bar{d} - D_*^- \underline{d}) + \\ & + J_* y(t) + G_* u(t) + \alpha(t+1)\lambda \bar{x}_*(t) + (1 - \alpha(t+1))\lambda \underline{x}_*(t). \end{aligned}$$

Учитывая, что переменная  $x_*(t)$  в левой части (8.6) может быть представлена как

$$x_*(t) = \alpha(t)\bar{x}_*(t) + (1 - \alpha(t))\underline{x}_*(t),$$

объединяя ее с двумя последними слагаемыми в (8.6), получаем

$$\lambda(\bar{x}_*(t) - \underline{x}_*(t))(\alpha(t+1) - \alpha(t)),$$

что и дает (8.5).

*Замечание 7.* Описанный подход может быть применен, когда неизвестный вход  $d(t)$  представляет собой вектор и выполняется условие согласования. В этом случае решение уравнение (8.2) ищется отдельно для каждой компоненты этого вектора и так же для каждой компоненты строится наблюдатель (8.4). Возможно, не для всех компонент удастся построить наблюдатель, нечувствительный к возмущению.

## 9. Практический пример

Рассмотрим дискретизированную модель электропривода:

$$\begin{aligned} (9.1) \quad & x_1(t+1) = k_1 x_2(t) + x_1(t), \\ & x_2(t+1) = k_2 x_2(t) + k_3 x_3(t) + \rho(t), \\ & x_3(t+1) = k_4 x_2(t) + k_5 x_3(t) + k_6 u(t) + d(t), \\ & y_1(t) = x_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t), \end{aligned}$$

где  $x_1$  – угол поворота выходного вала редуктора;  $x_2$  – скорость вращения выходного вала двигателя;  $x_3$  – ток цепи якоря; коэффициенты  $k_1 - k_6$  зависят от параметров электропривода и интервала дискретизации; возмущение  $\rho(t)$  обусловлено наличием внешнего нагрузочного момента, приведенного к валу двигателя; дефект, представленный функцией  $d(t)$ , вызван изменением активного сопротивления якоря, что выражается в изменении значения

коэффициента  $k_5$ : если  $\Delta k_5(t)$  – величина изменения коэффициента  $k_5$ , то  $d(t) = x_3(t)\Delta k_5(t)$ . Рассматриваемая модель описывается матрицами согласно уравнениям (2.1):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_4 & k_5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_6 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что условие согласования выполняется.

Модель, нечувствительная к возмущению, получается при решении уравнения (3.2) с  $k = 1$ , которое описывается матрицами

$$R_* = \begin{pmatrix} -k_4 & k_1 \end{pmatrix}, J_* = \begin{pmatrix} -k_4 & k_1 k_5 \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} -k_4 & 0 & k_1 \end{pmatrix}, G_* = k_1 k_6, D_* = k_1.$$

Искомая модель имеет вид

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= -k_4 y_1(t) + k_1 k_5 y_2(t) + k_1 k_6 u(t) + k_1 d(t), \\ y_*(t) &= x_*(t) = -k_4 y_1(t) + k_1 y_2(t). \end{aligned}$$

Интервальный наблюдатель описывается следующим образом:

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= -k_1 y_1(t) + k_1 k_5 y_2(t) + k_1 k_6 u(t) + k_1 \underline{d} + g \underline{e}(t), \\ \bar{x}_*(t+1) &= -k_1 y_1(t) + k_1 k_5 y_2(t) + k_1 k_6 u(t) + k_1 \bar{d} + g \bar{e}(t), \\ \underline{y}_*(t) &= \underline{x}_*(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_*(t), \end{aligned}$$

$\underline{e}(t) = y_*(t) - \underline{y}_*(t)$ ,  $\bar{e}(t) = y_*(t) - \bar{y}_*(t)$ . Оценка переменной  $d(t)$  рассчитывается по формуле (4.6).

Для моделирования рассмотрим систему (9.1) и наблюдатель (9.2) при управлении  $u(t) = 0,2 \sin(t/10)$ , возмущение  $\rho(t)$  представлено случайной величиной, равномерно распределенной на интервале  $[-0,05; 0,05]$ ; принято  $\underline{d} = -0,4$ ,  $\bar{d} = 0,4$ ,  $g = -0,7$ . На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования с начальными условиями  $x(0) = (0 \ 0 \ 0)^T$ ,  $\underline{x}_*(0) = -1$ ,  $\bar{x}_*(0) = 1$ . На рис. 1 показано поведение функции  $d(t)$  и ошибки оценивания  $\hat{d}(t) - d(t)$ , когда функция  $d(t)$  задана в виде  $d(t) = 0,3 \sin(t/2)$ ,  $t \leq 20$ ,  $d(t) = 1$ ,  $t > 20$ ; на рис. 2 – в виде  $d(t) = 0,3 \sin(t/2)$ ,  $t \leq 20$ , при  $t > 20$  функция  $d(t)$  представлена случайной величиной, равномерно распределенной на интервале  $[-0,5; 0,5]$ . Ошибка оценивания практически равна нулю.

Дополнительно для системы (9.1) рассмотрим задачу оценки неизвестного входа  $\rho(t)$  при  $d(t) = 0$ ; предполагается, что  $|\rho(t)| \leq \rho_*$ , т.е.  $\underline{\rho} = -\rho_*$ ,  $\bar{\rho} = \rho_*$ . Нетрудно проверить, что условие согласования здесь не выполняется. Модель, решающая эту задачу, принимает размерность 2:

$$\begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= x_{*2}(t) + K y_2(t), \\ x_{*2}(t+1) &= y_1(t) + (k_1 k_3 - K k_5) y_2(t) + k_1 \rho(t), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t) = y_1(t), \end{aligned}$$

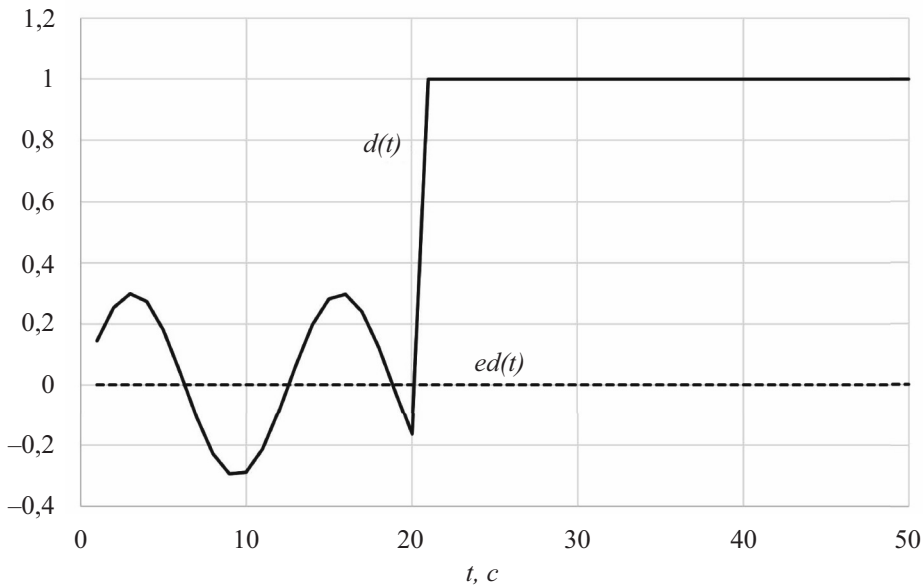


Рис. 1. Графики функций  $d(t)$  и  $ed(t) = \hat{d}(t) - d(t)$ .

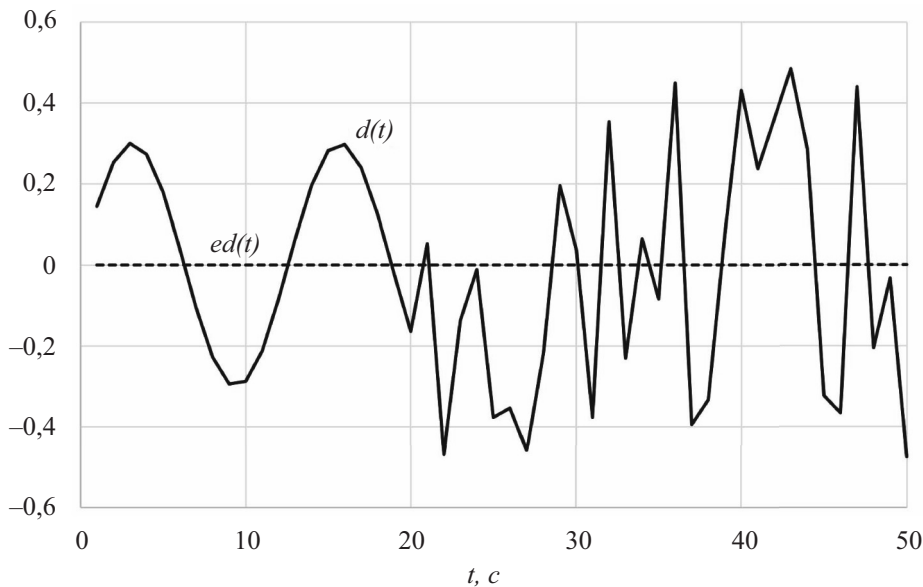


Рис. 2. Графики функций  $d(t)$  и  $ed(t) = \hat{d}(t) - d(t)$ .

где  $K = k_1(1 + k_2)/k_4$ . Интервальный наблюдатель имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{x}_{*1}(t+1) &= \underline{x}_{*2}(t) + Ky_2(t) + g_1\underline{e}(t), \\ \underline{x}_{*2}(t+1) &= y_1(t) + (k_1k_3 - Kk_5)y_2(t) - k_1\rho_* + g_2\underline{e}(t), \\ \bar{x}_{*1}(t+1) &= \bar{x}_{*2}(t) + Ky_2(t) + g_1\bar{e}(t), \\ \bar{x}_{*2}(t+1) &= y_1(t) + (k_1k_3 - Kk_5)y_2(t) + k_1\rho_* + g_2\bar{e}(t), \end{aligned}$$



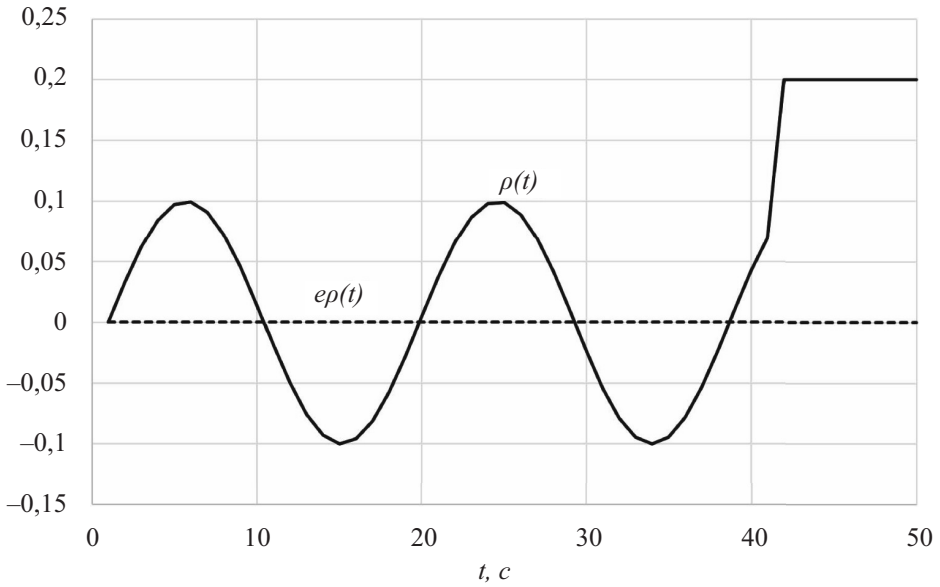


Рис. 3. Графики функций  $\rho(t)$  и  $e\rho(t) = \hat{\rho}(t) - \rho(t)$ .

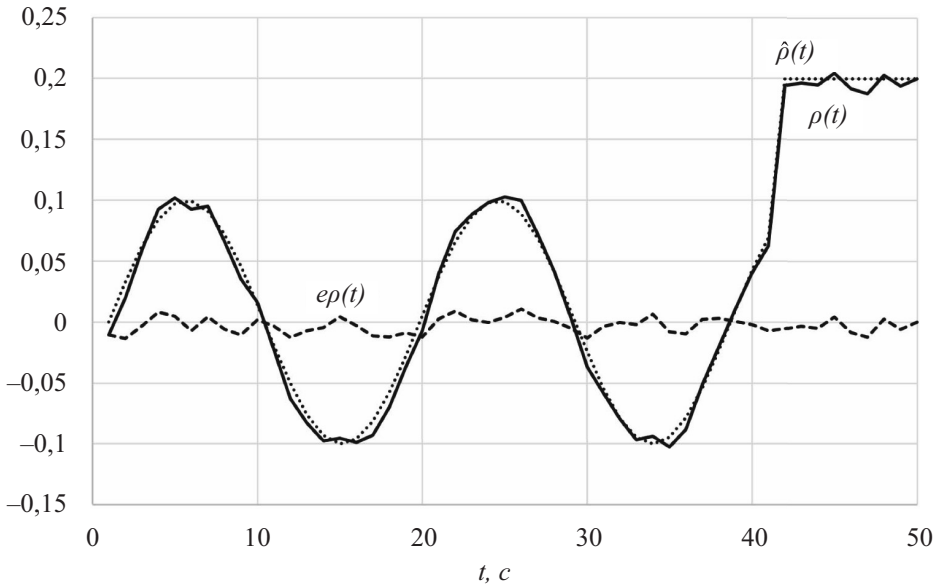


Рис. 4. Графики функций  $\rho(t)$ ,  $\hat{\rho}(t)$  и  $e\rho(t) = \hat{\rho}(t) - \rho(t)$ .

где  $\underline{e}(t) = y_*(t) - \underline{x}_{*1}(t)$ ,  $\bar{e}(t) = y_*(t) - \bar{x}_{*1}(t)$ . Коэффициент  $\alpha(t+2)$  определяется формулой (7.2) с  $R_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Неизвестный вход  $\rho(t)$  оценивается на основе выражения (7.3):

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & k_1^{-1}(g_1(\alpha(t+2)\bar{e}(t+1) + (1 - \alpha(t+2))\underline{e}(t+1)) + \\ & + g_2\bar{e}(t)(\alpha(t+2)\bar{e}(t) + (1 - \alpha(t+2))\underline{e}(t)) + \\ & + \alpha(t+2)k_1\rho_* - (1 - \alpha(t+2))k_1\rho_*). \end{aligned}$$

При моделировании с помощью пакета MATLAB принято  $\rho_* = 0,2$ ,  $g_1 = -0,4$ ,  $g_2 = -0,1$ . Результаты моделирования представлены на рис. 3 и 4, где показано поведение функции  $\rho(t)$  и ошибки оценивания  $\hat{\rho}(t) - \rho(t)$ . На рис. 3 функция  $\rho(t)$  задана в виде  $\rho(t) = 0,3 \sin(t/2)$ ,  $t \leq 40$ ,  $\rho(t) = 1$ ,  $t > 40$ ; как и выше, ошибка оценивания практически равна нулю; на рис. 4 дополнительно введены шумы измерений в виде двух независимых случайных величин, равномерно распределенных на интервале  $[-0,01; 0,01]$ , видно, что качество оценки ухудшается.

## 10. Заключение

В работе решена задача оценивания неизвестных входов в дискретных стационарных системах, описываемых линейными и нелинейными динамическими моделями при наличии внешних возмущений и выполнении так называемого условия согласования. Решение основано на модели исходной системы, имеющей минимальную размерность и нечувствительной к возмущениям. Для этой модели строится интервальный наблюдатель, на основе которого в ряде случаев может быть определена точная оценка величины неизвестных входов. Решение, полученное вначале для линейной одномерной модели, распространяется на многомерный и нелинейный случаи и системы, где условие согласования не выполняется.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Edwards C., Spurgeon S., Patton R.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica*. 2000. V. 36. P. 541–553.
2. *Yan X., Edwards C.* Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using sliding mode observers // *Automatica*. 2007. V. 43. P. 1605–1614.
3. *Жирабок А.Н., Зуев А.В., Сергиенко О., Шумский А.Е.* Идентификация дефектов в нелинейных динамических системах и их датчиках на основе скользящих наблюдателей // *АиТ*. 2022. № 2. С. 63–89.  
*Zhirabok A., Zuev A., Sergiyenko O., Shumsky A.* Identification of faults in nonlinear dynamical systems and their sensors based on sliding mode observers // *Autom. Remote Control*. 2022. V. 83. No. 2. P. 214–236.
4. *Ефимов Д.В., Раисси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // *АиТ*. 2016. № 2. С. 5–49.  
*Efomov D., Raissi T.* Design of Interval State Observers for Uncertain Dynamical Systems // *Autom. Remote Control*. 2016. V. 77. No. 2. P. 191–225.
5. *Khan A., Xie W, Zhang L., Liu L.* Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // *IET Circuits Devices Syst.* 2020. V. 14. P. 721–740.
6. *Khan A., Xie W, Bo Zhang C., Liu L.* A survey of interval observers design methods and implementation for uncertain systems // *J. Franklin Institute*. 2021. V. 358. P. 3077–3126.
7. *Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A.* Interval observers for continuous-time LPV systems with L1/L2 performance // *Automatica*. 2015. V. 51. P. 82–89.

8. *Efimov D., Polyakov A., Richard J.* Interval observer design for estimation and control of time-delay descriptor systems // *Eur. J. Control.* 2015. V. 23. P. 26–35.
9. *Efimov D., Fridman L., Raissi T., Zolghadri A., Seydou R.* Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques // *Automatica.* 2012. V. 48. P. 2365–2371.
10. *Кремлев А.С., Чеботарев С.Г.* Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // *Изв. вузов. Приборостроение.* 2013. Т. 56. №. 4. С. 42–46.
11. *Mazenc F., Bernard O.* Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2010. V. 55. No. 2. P. 523–527.
12. *Zheng G., Efimov D., Perruquetti W.* Interval state estimation for uncertain nonlinear systems // *IFAC Ncolcos 2013.* Toulouse, France, 2013.
13. *Zhang K., Jiang B., Yan X., Edwards C.* Interval sliding mode based fault accommodation for non-minimal phase LPV systems with online control application // *Int. J. Control.* 2019. <https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1687932>
14. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Ким Чхун Ир.* Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2022. № 5. С. 3–13.
15. *Zhu F., Zhang W., Zhang J., Guo S.* Unknown Input Reconstruction Via Interval Observer And State And Unknown Input Compensation Feedback Controller Designs // *Int. J. Control, Autom. Syst.* 2020. V. 18. P. 1–13.
16. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., Шумский А.Е., Ким Чхун Ир.* Интервальные наблюдатели для непрерывных систем с параметрическими неопределенностями // *АиТ.* 2023. № 11. С. 3–16.  
*Zhirabok A., Zuev A., Filaretov V., Shumsky A., Kim C.* Interval observers for continuous-time systems with parametric uncertainties // *Autom. Remote Control.* 2023.
17. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
18. *Жиравок А.Н., Шумский А.Е., Соляник С.П., Суворов А.Ю.* Метод построения нелинейных робастных диагностических наблюдателей // *АиТ.* 2017. № 9. С. 34–48.  
*Zhirabok A., Shumsky A., Solyanik S., Suvorov A.* Design of Nonlinear Robust Diagnostic Observers // *Autom. Remote Control.* 2017. No. 9. P. 1572–1584.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.*

Поступила в редакцию 16.12.2023

После доработки 04.05.2024

Принята к публикации 30.05.2024

# Стохастические системы

© 2024 г. В.И. ВОРОТНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (vorotnikov-vi@rambler.ru)  
(Сочинский институт Российского университета дружбы народов),  
Ю.Г. МАРТЫШЕНКО, канд. физ.-мат. наук (j-mart@mail.ru)  
(РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, Москва)

## К ЗАДАЧЕ ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается система нелинейных стохастических функционально-разностных уравнений с ограниченным запаздыванием. Предполагается, что рассматриваемая система допускает “частичное” (по части переменных состояния) нулевое положение равновесия. Ставится задача анализа частичной устойчивости по вероятности данного положения равновесия: устойчивость рассматривается по части определяющих его переменных. Для решения применяется дискретно-стохастический вариант метода функционалов Ляпунова–Красовского в соответствующей модификации. Получены условия частичной устойчивости по вероятности указанного вида. Приводится пример, показывающий особенности предложенного подхода, а также целесообразность введения однопараметрического семейства функционалов.

*Ключевые слова:* система нелинейных стохастических функцио-нально-разностных уравнений с ограниченным запаздыванием, частичная устойчивость по вероятности, метод функционалов Ляпунова–Красовского.

DOI: 10.31857/S0005231024080021, EDN: WPQVKN

### 1. Введение

Отдельное направление исследований в задачах качественного анализа и синтеза нелинейных динамических систем связано с анализом устойчивости систем стохастических дискретных (конечно-разностных) уравнений [1–9]. Интерес к этим системам вызван внедрением цифровых систем управления, проблемами моделирования в различных областях, а также задачами численного решения систем стохастических дифференциальных уравнений.

В рамках данного направления используется трактовка систем дискретных уравнений порядка выше первого (порядка  $m \geq 1$ )

$$x(k+1) = X(k, x(k), x(k-1), \dots, x(k-m))$$

как систем *дискретных уравнений с запаздыванием* (см., например, монографии [9–11]). Такая трактовка дает новые возможности качественного анализа этих систем, хотя их можно преобразовать к стандартным одношаговым си-

стемам дискретных уравнений введением новых переменных и расширением пространства состояний.

С другой стороны, в прикладных задачах управления через сеть (networked control) возникают системы дискретных уравнений с *переменным* запаздыванием

$$x(k+1) = X(k, x(k), x(k - \tau_1(k)), \dots, x(k - \tau_l(k))),$$

в которых функции  $\tau_i(k)$  в каждый дискретный момент времени  $k$  принимают одно из целочисленных значений из промежутка  $0 < \tau_i(k) \leq m$ . При фиксации величины запаздывания эти системы можно рассматривать как одношаговые дискретные системы с переключениями структуры (switched systems) в расширенном пространстве состояний [12].

Общий класс систем нелинейных дискретных уравнений с ограниченным запаздыванием задается системой *функционально-разностных* уравнений [9, 11, 13–19]

$$x(k+1) = X(k, x_k),$$

состояние которых в каждый дискретный момент времени  $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  определяется дискретной вектор-функцией  $x_k = x(k+j)$ ,  $j \in \mathbb{Z}_0 = \{-m, -m+1, \dots, 0\}$  с запаздывающим (отстающим) аргументом; число  $m \geq 1$  определяет величину запаздывания. Данный класс систем с начала 90-х годов прошлого столетия исследуется отдельно и включает системы дискретных уравнений с постоянным, переменным, а также с интервально заданным одним или несколькими запаздываниями.

Переход к функционально-разностной трактовке позволяет использовать для анализа устойчивости систем нелинейных стохастических дискретных уравнений с запаздыванием стохастический вариант метода функционалов Ляпунова–Красовского [9, 20–25] в пространстве дискретных (сеточных) функций. Для детерминированных нелинейных систем дискретных уравнений с запаздыванием этот подход изложен в [13–19]. Полученные результаты относятся к задаче устойчивости *по всем переменным* нулевого положения равновесия. Активно рассматриваемые в последнее время более общие задачи *частичной* устойчивости, анализ которых имеет существенные отличия (см. обзор [26]), для систем нелинейных стохастических дискретных уравнений с запаздыванием не изучались.

В данной статье рассматривается общий класс систем нелинейных стохастических дискретных уравнений с ограниченным запаздыванием. Предполагается, что рассматриваемая система допускает “частичное” (по некоторой части переменных состояния) нулевое положение равновесия. Дается постановка задачи устойчивости по вероятности данного положения равновесия по части определяющих его переменных. Для решения применяется метод функционалов, являющимися дискретными аналогами функционалов Ляпунова–Красовского, которые широко используются при анализе систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с последствием (запаздыванием).

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим линейное конечномерное пространство  $\mathbb{R}^n$  векторов  $x$  с евклидовой нормой  $|x|$  и введем разбиение вектора  $x$  на две части:  $x = (y^T, z^T)^T$  (T – знак транспонирования). К настоящему времени достаточно изученным является класс систем нелинейных стохастических дискретных (конечно-разностных) уравнений первого порядка [1, 2]

$$x(k+1) = X(k, x(k), \xi(k)),$$

в котором:  $k \in \mathbb{Z}_+$  – дискретное время;  $x(k)$  – последовательность значений фазового вектора;  $\xi(k)$  – последовательность независимых случайных векторов, заданных на вероятностном пространстве  $(\Omega, F, P)$ , с одинаковыми законами распределения для каждого  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Здесь  $\Omega$  – пространство элементарных событий  $\{\omega\}$  с заданными на нем  $\sigma$ -алгеброй  $F$  измеримыми множествами с фильтрацией  $F_k$  и вероятностной мерой  $P : F \rightarrow [0, 1]$ .

В приложениях также часто возникают более общие системы стохастических нелинейных дискретных уравнений с ограниченным запаздыванием [9, 20–24, 27, 28]

$$(1) \quad x(k+1) = X(k, x_k, \xi(k)),$$

состояние которых в каждый дискретный момент времени  $k \in \mathbb{Z}_+$  определяется дискретной вектор-функцией  $x_k = x(k+j)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  с запаздывающим (отстающим) аргументом.

Допустим, что оператор  $X(k, \psi, \xi)$ , определяющий правую часть системы (1) в пространстве  $\{\psi\}$  дискретных (сеточных) функций  $\psi(\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{Z}_0$  с нормой  $\|\psi\| = \max\{|\psi(0)|, |\psi(-1)|, \dots, |\psi(-m)|\}$ , при каждом  $k \in \mathbb{Z}_+$  непрерывен по  $\psi, \xi$  в области  $\|\psi\| < \infty$ . Начальное состояние  $x_0$  системы (1), которое определяется набором значений  $x_0 = \{x(k_0), x(k_0-1), \dots, x(k_0-m)\}$ , образующих матрицу размера  $n \times (m+1)$ , будем считать детерминированным. Тогда для всех  $k_0 \geq 0$ ,  $x_0$  существует единственный случайный многомерный дискретный процесс  $x(k_0, x_0)$ , согласованный с потоком  $\sigma$ -алгебр  $F_k$  и являющийся решением системы (1), а также соответствующий этому решению набор выборочных траекторий системы (1). Обозначим через  $x(k) = x(k; k_0, x_0)$  значения случайной вектор-функции  $x(k_0, x_0)$  на  $k$ -м шаге процесса.

С учетом разбиения  $x = (y^T, z^T)^T$  и соответствующего разбиения  $x_k = (y_k^T, z_k^T)^T$  представим рассматриваемую систему в виде двух групп уравнений

$$y(k+1) = Y(k, y_k, z_k, \xi(k)), \quad z(k+1) = Z(k, y_k, z_k, \xi(k)).$$

Если имеет место условие  $Y(k, 0, z_k, \xi(k)) \equiv 0$ , то множество  $M = \{x_k : y_k = 0\}$  является “частичным” положением равновесия системы (1) – инвариантным множеством этой системы. Существования «полного» положения

равновесия  $x_k = 0$  системы (1) не требуется: это предположение может даже противоречить смыслу решаемых задач.

Устойчивость “частичного” положения равновесия  $y_k = 0$  рассматривается не по всем определяющим его переменным, а только по отношению к их некоторой наперед заданной части. Для этого предположим, что  $y = (y_1^T, y_2^T)^T$ , причем вектор  $y_1$  включает те компоненты вектора  $y$ , устойчивость по которым рассматривается. Для расширения круга понятий  $y_1$ -устойчивости “частичного” положения равновесия  $y_k = 0$  введем произвольным образом разбиение  $z = (z_1^T, z_2^T)^T$  вектора  $z$  на две группы переменных.

Обозначим через  $D_\delta$  область значений  $x_0$  таких, что  $\|y_0\| < \delta$ ,  $\|z_{10}\| < L$ ,  $\|z_{20}\| < \infty$ . Используются нормы:

$$\|y_0\| = \max |y(k_0 + j)|, \quad \|z_{i0}\| = \max |z_i(k_0 + j)| \quad (i = 1, 2) \quad \text{при } j \in \mathbb{Z}_0.$$

*Определение 1.* “Частичное” положение равновесия  $y_k = 0$  системы (1) при больших значениях  $z_{10}$  в целом по  $z_{20}$  (for a large values of  $z_{10}$  and on the whole with respect to  $z_{20}$ ):

1)  $y_1$ -устойчиво по вероятности, если для каждого  $k_0 \in \mathbb{Z}_+$  и для любых сколь угодно малых чисел  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma > 0$ , а также для любого наперед заданного числа  $L > 0$  найдется число  $\delta(\varepsilon, \gamma, L, k_0) > 0$  такое, что для всех  $k \geq k_0$  и  $x_0 \in D_\delta$  имеет место соотношение

$$(2) \quad P \left\{ \sup_{k \geq k_0} |y_1(k; k_0, x_0)| > \varepsilon \right\} < \gamma;$$

2) равномерно  $y_1$ -устойчиво, если  $\delta = \delta(\varepsilon, \gamma, L)$ .

Ставится задача нахождения условий  $y_1$ -устойчивости при больших значениях  $z_{10}$  в целом по  $z_{20}$  по вероятности “частичного” положения равновесия  $y(k) = 0$  системы (1) в контексте метода дискретных функционалов Ляпунова–Красовского.

Данную задачу можно рассматривать и как вспомогательную при анализе устойчивости по всем переменным “частичного” положения равновесия  $y_k = 0$  системы (1), а при добавлении к системе (1) управляющих воздействий вида  $u = u(k, x_k)$  возникает соответствующая задача частичной стабилизации.

*Замечание 1.* Если  $x_0$  – случайная величина со значениями в  $\mathbb{R}^{n \times (m+1)}$  (независящая от  $\xi(k)$ ), а включение  $x_0 \in D_\delta$  выполняется почти наверное, то получаем определения (см. [29]), аналогичные введенным определениям частичной устойчивости.

*Замечание 2.* Наиболее близкими к введенным являются понятия частичной устойчивости: по всем [30] и по части переменных [31] “частичного” положения равновесия систем стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, систем стохастических дискретных уравнений [8], а также устойчивости по части переменных систем функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием [32, 33].

### 3. Условия частичной устойчивости по вероятности

В пространстве  $\{\psi\}$  дискретных (сеточных) функций  $\psi(\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{Z}_0$  будем рассматривать однозначные непрерывные по  $\psi$  при каждом  $k \in \mathbb{Z}_+$  скалярные функционалы  $V = V(k, \psi)$ ,  $V(k, 0) \equiv 0$ , определенные в области

$$(3) \quad k \geq 0, \quad \|\psi_{y1}\| < h, \quad \|\psi_{y2}\| + \|\psi_z\| < \infty.$$

Разбиение  $\psi = (\psi_{y1}^T, \psi_{y2}^T, \psi_z^T)^T$  соответствует сделанному разбиению  $x = (y_1^T, y_2^T, z^T)^T$  фазового вектора  $x$ ;  $\|\psi_{yi}\| = \max |\psi_{yi}(\theta)|$  ( $i = 1, 2$ ),  $\|\psi_z\| = \max |\psi_z(\theta)|$  при  $\theta \in \mathbb{Z}_0$ .

Подставим в функционал  $V(t, \psi)$  вектор-функцию  $x_k = x_k(k_0, x_0)$ , определяющую дискретный элемент траектории системы (1) на  $k$ -м шаге процесса. Аналогом производной функционала в силу исследуемой системы (1) являются их усредненные разности (приращения) [1, 2, 9]

$$LV(k, \psi) = E_{k,\psi}[V(k+1, x_{k+1}(k_0, x_0))] - V(k, \psi),$$

где оператор  $E_{k,\psi}$  определяет условное математическое ожидание при  $x_k(k_0, x_0) = \psi$  случайной величины  $V(k+1, x_{k+1}(k_0, x_0))$ .

Также для формулировки условий частичной устойчивости дополнительно будут использоваться следующие вспомогательные функционалы и функции.

1. Скалярные непрерывные в области (3) функционалы  $V^*(k, \psi_y, \psi_{z1})$ ,  $V^*(\psi_y, \psi_{z1})$  для указания оценки *сверху*  $V$ -функционала и вспомогательная вектор-функция  $\mu(k, \psi)$ ,  $\mu(k, 0) \equiv 0$ , посредством которой корректируется область, где строится  $V$ -функционал. Вектор-функция  $\psi_{z1}$  определяется разбиением  $\psi_z = (\psi_{z1}^T, \psi_{z2}^T)^T$ , соответствующим разбиению  $z = (z_1^T, z_2^T)^T$ . Определим  $\|\mu(k, \psi)\| = \sup |\mu(k, \psi(\theta))|$  при  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\theta \in \mathbb{Z}_0$ .

2. Непрерывная монотонно возрастающая по  $r > 0$  скалярная функция  $a(r)$ ,  $a(0) = 0$ , определяющая стандартные требования к основному  $V$ -функционалу в виде оценки *снизу*.

Введение вспомогательной  $\mu(k, \psi)$ -функции связано с тем, что анализ  $y_1$ -устойчивости «частичного» положения равновесия  $y_k = 0$  системы (1) в обычно рассматриваемой области

$$(4) \quad \|\psi_{y1}\| < h_1 < h, \quad \|\psi_{y2}\| + \|\psi_z\| < \infty$$

функционального пространства не всегда дает возможность выявить желаемые свойства  $V$ -функционала или наделить его этими свойствами. Целесообразно перейти к рассмотрению  $V$ -функционала в более узкой области

$$(5) \quad \|\psi_{y1}\| + \|\mu(k, \psi)\| < h_1 < h, \quad \|\psi_{y2}\| + \|\psi_z\| < \infty,$$

если иметь в виду, что фактически  $y_1$ -устойчивость «частичного» положения равновесия  $y_k = 0$  системы (1) означает выполнение соответствующих



вероятностных оценок вида (2) не только для компонент вектора  $y_1$ , но и для компонент некоторой  $\mu(k, x)$ -функции фазовых переменных системы (1). Указанную  $\mu(k, x)$ -функцию не всегда возможно указать заранее. Поэтому соответствующую ей  $\mu(k, \psi)$ -функцию в рассматриваемом функциональном пространстве дискретных функций естественно трактовать как дополнительную векторную функцию, которая (как и сам подходящий  $V$ -функционал) определяется в процессе решения исходной задачи  $y_1$ -устойчивости. Это приводит к целесообразности корректировки области (4) функционального пространства, где строится  $V$ -функционал, посредством *дополнительной* вспомогательной  $\mu(k, \psi)$ -функции.

*Теорема 1.* Пусть для системы (1) наряду с  $V$ -функционалом можно указать дополнительную векторную функцию  $\mu(k, \psi)$ ,  $\mu(k, 0) \equiv 0$  так, что при каждом  $k \in \mathbb{Z}_+$  и достаточно малом  $h_1 > 0$  в области (5) выполняются условия:

$$(6) \quad V(k, \psi) \geq a(|\psi_{y_1}(0)| + |\mu(k, \psi(0))|),$$

$$(7) \quad V(k, \psi) \leq V^*(k, \psi_y, \psi_{z_1}), \quad V^*(k, 0, \psi_{z_1}) \equiv 0,$$

$$(8) \quad LV(k, \psi) \leq 0.$$

Тогда “частичное” положение равновесия  $y_k = 0$  системы (1)  $y_1$ -устойчиво по вероятности при больших значениях  $z_{10}$  в целом по  $z_{20}$ .

*Теорема 2.* Если условия (7) заменить условиями

$$(9) \quad V(k, \psi) \leq V^*(\psi_y, \psi_{z_1}), \quad V^*(0, \psi_{z_1}) \equiv 0,$$

то при выполнении условий (6), (8) “частичное” положение равновесия  $y_k = 0$  системы (1) равномерно  $y_1$ -устойчиво по вероятности при больших значениях  $z_{10}$  в целом по  $z_{20}$ .

Доказательство теорем 1, 2 приведено в Приложении.

*Замечание 3.* Вспомогательный  $V$ -функционал и его усредненная разность (приращение)  $LV(k, \psi)$  в силу системы (1) в теоремах 1, 2 являются, вообще говоря, *знакопеременными* в области (4). Наряду с основным  $V$ -функционалом дополнительная вспомогательная  $\mu$ -функция вводится для наиболее рациональной замены области (4) областью (5). Условия (7), (9) выделяют *допустимую структуру*  $V$ -функционала, которая определяется спецификой поставленной задачи частичной устойчивости: в этих условиях допускается *произвольный* непрерывный  $V^*$ -функционал, для которого  $V^*(k, 0, \psi_{z_1}) \equiv 0$  или  $V^*(0, \psi_{z_1}) \equiv 0$ , и ограничивающий  $V$ -функционал сверху.

*Замечание 4.* В качестве допустимых можно использовать знакоопределенные по всем переменным *квадратичные* функционалы (или функционалы более высокого порядка) вида  $V(k, \psi) \equiv V^*(k, \psi_{y_1}, \mu(k, \psi))$ . При этом выбор  $\mu$ -функций должен быть согласован с условиями (7), (9): допустимы, например,  $\mu$ -функции вида  $\mu = \mu(\psi_{y_2}, \psi_{z_1}), \mu(0, \psi_{z_1}) \equiv 0$ .

*Замечание 5.* Если система (1) допускает “полное” положение равновесия  $x_k = 0$ , то в случае  $\mu(k, \psi) \equiv 0$ ,  $\xi(k) \equiv 0$  при начальном условии  $\|x_0\| < \delta$  (вместо  $x_0 \in D_\delta$ ) при выполнении условий (6), (8) имеем дискретный вариант (см. [34, 35]) классической теоремы В.В. Румянцева [36] об устойчивости по части переменных и ее модификации (при  $\mu(k, \psi) \neq 0$ ) [37]. Выполнение условий (7), (9) при этом не требуется.

*Замечание 6.* Имеется также другой подход к трактовке и анализу устойчивости стохастических функционально-разностных систем, разработанный в научной школе Н.В. Азбелева [38].

#### 4. Примеры

Выделим два класса нелинейных дискретных систем заданной структуры, для которых частичная устойчивость анализируется в пространстве параметров. При этом покажем также целесообразность использования однопараметрического семейства функционалов.

*Пример 1.* Пусть дискретная система (1) состоит из уравнений

$$(10) \quad \begin{aligned} y_1(k+1) &= [a_1 + \alpha_1 \xi_1(k)]y_1(k) + a_2 y_1(k-1) + \\ &+ l y_2(k-1) z_1(k-1) + \alpha_2 y_1(k-1) \xi_2(k), \\ y_2(k+1) &= [b + d y_1(k-1)]y_2(k), \\ z_1(k+1) &= [c + e y_1(k-1)]z_1(k), \quad z_2(k+1) = Z_2(k, x_k, \xi(k)), \end{aligned}$$

где  $\xi_1(k), \xi_2(k)$  – некоррелированные между собой последовательности независимых случайных величин с одинаковыми стандартными нормальными распределениями вероятностей при каждом  $k \in \mathbb{Z}_+$ ;  $a_1, a_2, b, c, d, e, l, \alpha_1, \alpha_2$  – постоянные параметры. Система (10) является частным случаем системы (1) при  $m = 1$ ; оператор  $Z_2$  удовлетворяет только общим требованиям к системе (1) при  $m = 1$ .

Система (10) допускает “частичное” положение равновесия

$$(11) \quad y_{1k} = y_{2k} = 0.$$

Рассмотрим семейство функционалов ( $M, \beta_1, \beta_2 = \text{const} > 0$ )

$$(12) \quad \begin{aligned} V(\psi) &= \psi_{y_1}^2(0) + M \psi_{y_2}^2(0) \psi_{z_1}^2(0) + \\ &+ (\beta_1 + \alpha_2^2) \psi_{y_1}^2(-1) + \beta_2 \psi_{y_2}^2(-1) \psi_{z_1}^2(-1), \end{aligned}$$

являющихся дискретными аналогами функционалов Ляпунова–Красовского, а также вспомогательную скалярную дискретную  $\mu_1$ -функцию вида

$$(13) \quad \mu_1(\psi(\theta)) = \psi_{y_2}(\theta) \psi_{z_1}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{Z}_0 = \{k = -1, 0\};$$

обозначим через  $\mu_1(0)$  и  $\mu_1(-1)$  значения функции  $\mu_1(\psi(\theta))$  при  $\theta = 0, -1$ .

Имеют место соотношения

$$\psi_{y_1}^2(0) + M\mu_1^2(0) \leq V(\psi) = V^*(\psi_{y_1}, \psi_{y_2}, \psi_{z_1}), \quad V^*(0, 0, \psi_{z_1}) \equiv 0.$$

Для  $V$ -функционала (12) в области (5) выполняются условия (6) и (7), а его усредненная разность (приращение)  $LV(\psi)$  в силу системы (10) при всех  $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_0$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} LV(\psi) &= E_{k,\psi} \{V(\psi(0), X(k, \psi(-1), \psi(0), \xi(k)))\} - V(\psi(-1), \psi(0)) = \\ &= E_{k,\psi} \{[a_1\psi_{y_1}(0) + a_2\psi_{y_1}(-1) + l\psi_{y_2}(-1)\psi_{z_1}(-1) + \alpha_1\psi_{y_1}(0)\xi_1(k) + \\ &+ \alpha_2\psi_{y_1}(-1)\xi_2(k)]^2 + M\psi_{y_2}^2(0)\psi_{z_1}^2(0)[b + d\psi_{y_1}(-1)]^2[c + e\psi_{y_1}(-1)]^2\} - \\ &- \psi_{y_1}^2(0) - M\psi_{y_2}^2(0)\psi_{z_1}^2(0) + (\beta_1 + \alpha_2^2)[\psi_{y_1}^2(0) - \psi_{y_1}^2(-1)] + \\ &+ \beta_2[\psi_{y_2}^2(0)\psi_{z_1}^2(0) - \psi_{y_2}^2(-1)\psi_{z_1}^2(-1)] = \\ &= a_1^2\psi_{y_1}^2(0) + 2a_1a_2\psi_{y_1}(0)\psi_{y_1}(-1) + 2a_1l\psi_{y_1}(0)\mu_1(-1) + \\ &+ 2a_2l\psi_{y_1}(-1)\mu_1(-1) + l^2\mu_1^2(-1) + \alpha_1^2\psi_{y_1}^2(0) + \alpha_2^2\psi_{y_1}^2(-1) + Mb^2c^2\mu_1^2(0) + \\ &+ r_1\psi_{y_1}(-1)\mu_1^2(0) + r_2\psi_{y_1}^2(-1)\mu_1^2(0) + r_3\psi_{y_1}^3(-1)\mu_1^2(0) + Md^2e^2\psi_{y_1}^4(-1)\mu_1^2(0) - \\ &- \psi_{y_1}^2(0) - M\mu_1^2(0) + (\beta_1 + \alpha_2^2)[\psi_{y_1}^2(0) - \psi_{y_1}^2(-1)] + \beta_2[\mu_1^2(0) - \mu_1^2(-1)] = \\ &= (a_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1 + \beta_1)\psi_{y_1}^2(0) + 2a_1a_2\psi_{y_1}(0)\psi_{y_1}(-1) + (a_2^2 - \beta_1)\psi_{y_1}^2(-1) + \\ &+ 2a_1l\psi_{y_1}(0)\mu_1(-1) + 2a_2l\psi_{y_1}(-1)\mu_1(-1) + (Mb^2c^2 - M + \beta_2)\mu_1^2(0) + \\ &+ (l^2 - \beta_2)\mu_1^2(-1) + r_1\psi_{y_1}(-1)\mu_1^2(0) + r_2\psi_{y_1}^2(-1)\mu_1^2(0) + \\ &+ r_3\psi_{y_1}^3(-1)\mu_1^2(0) + Md^2e^2\psi_{y_1}^4(-1)\mu_1^2(0), \\ r_1 &= bcr_0, r_2 = M(b^2e^2 + 4bcde + c^2d^2), r_3 = der_0, r_0 = 2M(be + cd). \end{aligned}$$

В полученных равенствах вычисление условного математического ожидания проведено с учетом соотношений  $E[\xi_i(k)] = 0$ ,  $E[\xi_i^2(k)] = 1$ , соответствующих стандартным нормальным распределениям некоррелированных между собой случайных величин  $\xi_i(k)$  ( $i = 1, 2$ ).

Используя для упрощения последующего анализа неравенства

$$\begin{aligned} 2a_1a_2\psi_{y_1}(0)\psi_{y_1}(-1) &\leq |a_1a_2|[\psi_{y_1}^2(0) + \psi_{y_1}^2(-1)], \\ 2a_2l\psi_{y_1}(-1)\mu_1(-1) &\leq |a_2l|[\psi_{y_1}^2(-1) + \mu_1^2(-1)], \end{aligned}$$

для квадратичной части  $(LV)_2$  полученного выражения для  $LV(\psi)$  можно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} (LV)_2 &\leq (a_1^2 + |a_1a_2| + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1 + \beta_1)\psi_{y_1}^2(0) + \\ &+ 2a_1l\psi_{y_1}(0)\mu_1(-1) + (l^2 + |a_2l| - \beta_2)\mu_1^2(-1) + \\ &+ (a_2^2 + |a_1a_2| + |a_2l| - \beta_1)\psi_{y_1}^2(-1) + (Mb^2c^2 - M + \beta_2)\mu_1^2(0). \end{aligned}$$

При выполнении условий

$$\begin{aligned} a_1^2 + |a_1 a_2| + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1 + \beta_1 &< 0, \\ (a_1^2 + |a_1 a_2| + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1 + \beta_1)(l^2 + |a_2 l| - \beta_2) &> a_1^2 l^2, \\ a_2^2 + |a_1 a_2| + |a_2 l| - \beta_1 &< 0, \quad M b^2 c^2 - M + \beta_2 < 0 \end{aligned}$$

$(LV)_2$  является отрицательно определенной функцией переменных  $\psi_{y_1}(0)$ ,  $\psi_{y_1}(-1)$ ,  $\mu_1(0)$ ,  $\mu_1(-1)$  на основании критерия Сильвестра. Поэтому в данном случае при достаточно малом  $h_1 > 0$  в области (5) для усредненной разности (приращения)  $LV(\psi)$  функционала (12) имеет место неравенство  $LV(\psi) \leq 0$ .

Пусть параметры системы (10) удовлетворяют условиям

$$(14) \quad \begin{aligned} (|a_1| + |a_2|)^2 + |a_2 l| + a_1^2 + a_2^2 &< 1, \\ [(|a_1| + |a_2|)^2 + |a_2 l| + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1][l^2 + |a_2 l| + M(b^2 c^2 - 1)] &> a^2 l^2, \end{aligned}$$

а параметры  $\beta_1, \beta_2$  в функционале (12) выберем следующим образом:

$$\beta_1 = a_2^2 + |a_1 a_2| + |a_2 l| + \varepsilon_1, \quad \beta_2 = M(1 - b^2 c^2) - \varepsilon_2.$$

При достаточно малых значениях  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $h_1 > 0$  для разности (приращения)  $LV$  функционала в области (5) (но не в области (4)) при любых значениях параметров  $d, e$  имеет место неравенство  $LV(\psi) \leq 0$ . Значит, для  $V$ -функционала (12) в области (5), помимо условий (6), (7), также выполняется условие (8).

На основании теоремы 2 заключаем, что при выполнении условий (14) «частичное» положение равновесия (11) системы (10) равномерно  $y_1$ -устойчиво по вероятности при больших значениях  $z_{10}$  в целом по  $z_{20}$ . Ассоциированный с системой (10) оператор  $LV(\psi)$  в области (4) является *знакопеременным*.

Отметим, что за счет выбора подходящего значения  $M$  в область устойчивости можно включить (или исключить) некоторые заданные комбинации параметров системы (10). Так, например, если  $l^2 + |a_2 l| = 1$ , то для, казалось бы, «естественного» выбора значения  $M = 1$  в функционале (12) при любых значениях параметров  $b, c, d, e$  область устойчивости (14) оказывается пустым множеством. Однако в том же случае  $l^2 + |a_2 l| = 1$  можно рассматривать область (14), полагая  $M = 2$ .

С другой стороны, при заданном значении  $M$  область  $y_1$ -устойчивости можно изменить за счет изменения оценок квадратичной части  $(LV)_2$  выражения, определяющего  $LV(\psi)$ . Действительно, используя неравенство

$$2a_1 l \psi_{y_1}(0) \mu_1(-1) \leq |a_1 l| [\psi_{y_1}^2(0) + \mu_1^2(-1)],$$

в случае  $a_2 = 0$  при достаточно малом  $h_1 > 0$  в области (5) неравенство  $LV(\psi) \leq 0$  будет иметь место при выполнении условий

$$\begin{aligned} a_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + |a_1 l| - 1 + \beta_1 &\leq 0, \\ l^2 + |a_1 l| - \beta_2 &\leq 0, \quad M(b^2 c^2 - 1) + \beta_2 \leq 0. \end{aligned}$$

В данном случае область  $y_1$ -устойчивости определяется следующим образом:

$$(15) \quad (|a_1| + |l|)^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 < 1 + M(1 - b^2c^2), \quad b^2c^2 < 1;$$

в отличие от области (14) при  $M = l^2 = 1$  область (15) не является пустым множеством. Для наглядности отметим, что при  $M = 1$ ,  $b^2c^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$  области устойчивости (14) и (15) имеют соответственно вид  $a_1^2 + l^2 < 1$  и  $|a_1| + |l| < \sqrt{2}$ , причем область (15) охватывает случай  $l^2 = 1$ .

Отметим также, что при  $\alpha_2 = 0$  и  $M = 2$  область (12) совпадает с областью равномерной  $y_1$ -устойчивости по вероятности “частичного” положения равновесия  $y_1(k) = y_2(k) = 0$  системы (10) при отсутствии эффекта запаздывания; такая система анализировалась [8] посредством функции Ляпунова  $V(x) = y_1^2 + 2y_2^2z_1^2$  и вспомогательной функции  $\mu_1 = y_2z_1$ .

Для численной конкретизации приведем результаты вычислений по рекуррентным соотношениям (12) на отрезке  $k \in [0, 25]$  при  $y_i(-1) = y_i(0) = 0,1$  ( $i = 1, 2$ ),  $z_1(-1) = z_1(0) = 1$  и при значениях параметров  $a_1 = 1/2$ ,  $b = 3/2$ ,  $a_2 = 0$ ,  $c = 1/3$ ,  $d = e = l = 1$ .

Для «невозмущенного» случая  $\xi_{1,2}(k) \equiv 0$  результаты вычислений приводятся в левой части таблицы. При случайных воздействиях  $\xi_1(k), \xi_2(k)$ , интенсивности  $\alpha_1, \alpha_2$  которых удовлетворяют условию (14), выборочные траектории группируются около «невозмущенной» траектории, фокусирующейся при  $k \rightarrow \infty$  вдоль оси  $Oy_2$ . Для оценки влияния случайных воздействий на динамику системы (10) в правой части таблицы при  $\alpha_1 = 1/3$ ,  $\alpha_2 = 0$  и тех же значениях параметров приводят-

**Таблица**

$k$	$y_1(k)$	$y_2(k)$	$z_1(k)$	$\xi_1(k)$	$\xi_2(k)$	$y_1(k)$	$y_2(k)$	$z_1(k)$
-1	0,1	0,1	1	-	-	0,1	0,1	1
0	0,1	0,1	1	0	0	0,1	0,1	1
1	0,15	0,16	0,4333	-1	0	0,15	0,16	0,4333
2	0,1750	0,2560	0,1877	1	0	0,1251	0,2560	0,1877
3	0,1568	0,4224	0,2094	1	0	0,1735	0,4224	0,2094
4	0,1264	0,4288	0,0954	0	0	0,1926	0,6864	0,0960
5	0,1517	0,7104	0,0468	-1	0	0,1847	1,1487	0,0487
6	0,1168	1,1554	0,0215	-1	0	0,0967	1,9443	0,0256
7	0,0916	1,9084	0,0104	1	0	0,0720	3,2757	0,0133
8	0,0706	3,0854	0,0060	0	0	0,1098	5,2303	0,0057
9	0,0551	4,9107	0,0025	0	0	0,0985	8,2220	0,0023
10	0,0461	7,7127	0,0004	1	0	0,0791	13,236	0,0011
...	...	...	...	...	...	...	...	...
15	0,0050	65,557	$5,5 \times 10^{-6}$	-1	0	0,0151	127,93	$1,1 \times 10^{-5}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
20	0,00039	504,13	$2,4 \times 10^{-8}$	-1	0	0,0010	1005,5	$5,4 \times 10^{-8}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
25	$1,9 \times 10^{-5}$	3832,1	$4,7 \times 10^{-10}$	0	0	$2,9 \times 10^{-5}$	7649,1	$2,2 \times 10^{-10}$

ся результаты вычислений в случае, когда  $\xi_2(k) \equiv 0$ , а допустимая реализация  $\xi_1(k)$  на отрезке  $k \in [0, 25]$  определяется последовательностью  $\{0, -1, 1, 1, 0, -1, -1, 1, 0, 0, 1, 1, -1, 0, 0, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 0\}$ .

*Пример 2.* Пусть дискретная система (1) состоит из уравнений

$$(16) \quad \begin{aligned} y_1(k+1) &= [a_1 + \alpha_1 \xi_1(k) + l y_2(k-1) z_1(k-1)] y_1(k) + \alpha_2 y_1(k-1) \xi_2(k), \\ y_2(k+1) &= [b + d y_1(k-1)] y_2(k), \\ z_1(k+1) &= [c + e y_1(k-1)] z_1(k), \quad z_2(k+1) = Z_2(k, x_k, \xi(k)), \end{aligned}$$

которые представляют структурно измененный вариант системы (10).

Для анализа  $y_1$ -устойчивости по вероятности “частичного” положения равновесия (11) системы (16) используем дискретный  $V$ -функционал (12) при  $\beta_1 = 0, \beta_2 = M(1 - b^2 c^2) - \varepsilon_2$  и вспомогательную дискретную функцию (13).

Квадратичная часть  $[LV(\psi)]_2$  усредненной разности (приращения)  $LV(\psi)$  этого функционала в силу системы (16) имеет вид

$$[LV(\psi)]_2 = (a_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1) \psi_{y_1}^2(0) + (M b^2 c^2 - M + \beta_2) \mu_1^2(0) + (l^2 - \beta_2) \mu_1^2(-1).$$

Поэтому при достаточно малом  $h_1 > 0$  в области (5) при любых значениях параметров  $d, e, l_1, l_2$  неравенство  $LV(\psi) \leq 0$  будет иметь место, если

$$a_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 < 1, \quad M(b^2 c^2 - 1) + \beta_2 < 0, \quad l^2 - \beta_2 < 0.$$

В результате при выполнении условий

$$(17) \quad a_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 < 1, \quad l^2 + M(b^2 c^2 - 1) < 1$$

“частичное” положение равновесия (11) системы (17) равномерно  $y_1$ -устойчиво по вероятности при больших значениях  $z_{10}$  в целом по  $z_{20}$  на основании теоремы 2.

Как и при анализе системы (10), если  $l^2 = 1$ , то для «естественного» выбора значения  $M = 1$  в функционале (12) при любых значениях параметров  $b, c, d, e$  область устойчивости (17) оказывается пустым множеством. Однако это множество также можно расширить подходящим выбором  $M$ , например при  $M = 2$ .

## 5. Заключение

Для нелинейной системы стохастических функционально-разностных уравнений с конечным запаздыванием, подверженной воздействию дискретного случайного процесса типа “белого” шума, дана поставка задач анализа устойчивости по части переменных по вероятности “частичного” нулевого положения равновесия. Дискретная вектор-функция, определяющая начальное состояние системы, считается детерминированной.

Приводятся достаточные условия разрешимости поставленной задачи в контексте дискретно-стохастического варианта метода функционалов Ляпунова–Красовского в соответствующей модификации. Наряду с основным дискретным  $V$ -функционалом также рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная дискретная  $\mu$ -функция для корректировки области дискретного функционального пространства, в которой строится  $V$ -функционал. Целесообразность такого подхода заключается в том, что в результате  $V$ -функционал, а также его усредненная разность (приращение) в силу рассматриваемой системы, могут быть знакопеременными.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Доказательство теоремы 1.

Пусть при каждом  $k \in \mathbb{Z}_+$  и достаточно малом  $h_1 > 0$  в области (5) выполняются условия (6)–(8). Возьмем произвольное число  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < h_1$ ), произвольное значение  $k_0$ , а также начальное значение  $x_0$  из области  $D_\varepsilon = \{\|y_0\| < \varepsilon, \|z_{10}\| \leq L, \|z_{20}\| < \infty\}$ . Рассмотрим случайный процесс  $x(k_0, x_0)$ , являющийся решением системы (1), и обозначим через  $k_\varepsilon$  “целочисленный” момент первого выхода этого процесса из области  $|y_1| \leq \varepsilon$ :  $k_\varepsilon = \inf\{k : |y_1(k; k_0, x_0)| > \varepsilon\}$  при  $k \geq k_0$ . Положим  $t(k) = \min(k_\varepsilon, k)$ ;  $t(k_0) = k_0$ .

Имеют место равенства

$$V(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0)) - V(k_0, x_0) = \sum_{s=k_0}^{k-1} \Delta V(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0));$$

$$\Delta V(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)) = \Delta V(t(s+1), x_{t(s+1)}(k_0, x_0)) - \Delta V(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)).$$

Из этих равенств следует, что для последовательности  $v(k)$  случайных величин  $v(k) = V(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0))$ , порожденных реализациями  $x(k, \omega)$ ,  $\xi(k, \omega)$  случайного процесса  $x(k)$ ,  $\xi(k)$ , определяемого системой (1), имеют место “усредненные” соотношения

$$\begin{aligned} & E[V(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0)) - V(k_0, x_0)] = \\ (\text{П.1}) \quad & = EV(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0)) - V(k_0, x_0) = \sum_{s=k_0}^{k-1} E\Delta V(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)). \end{aligned}$$

Учитывая равенства (полученные из соотношений (П.1) с учетом правила вычисления повторного математического ожидания)

$$\begin{aligned} & E\Delta V(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)) = \\ & = E\left\{E_{t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)}[V(t(s+1), x_{t(s+1)}(k_0, x_0))]\right\} - V(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0)) = \\ & = E[LV(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0))], \end{aligned}$$

приходим к соотношению (дискретно-функциональный вариант формулы Дынкина)

$$EV(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0)) - V(k_0, x_0) = \sum_{s=k_0}^{k-1} E[LV(t(s), x_{t(s)}(k_0, x_0))].$$

В результате на основании условия (8) получаем неравенство

$$(П.2) \quad EV(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0)) \leq V(k_0, x_0) < \infty.$$

Если справедливо неравенство  $k > k_\varepsilon$  (в этом случае имеем  $t(k) = k_\varepsilon$ ), то выполняются соотношения  $|y_1(t(k); k_0, x_0)| = |y_1(k_\varepsilon; k_0, x_0)| \geq \varepsilon$ . Если же  $k < k_\varepsilon$  (в этом случае имеем  $t(k) = k$ ), то на основании неравенства Чебышева–Маркова и оценки (П.2) находим

$$(П.3) \quad \begin{aligned} P[|y_1(k; k_0, x_0)| > \varepsilon] &\leq a^{-1}(\varepsilon)E[a(|y_1(k; k_0, x_0)|)] \leq \\ &\leq a^{-1}(\varepsilon)E[a(|y_1(k; k_0, x_0)| + |\mu(k, x(k; k_0, x_0))|)] \leq \\ &\leq a^{-1}(\varepsilon)E[V(k, x_{t(k)}(k_0, x_0))] = \\ &= a^{-1}(\varepsilon)E[V(t(k), x_{t(k)}(k_0, x_0))] \leq a^{-1}(\varepsilon)V(k_0, x_0). \end{aligned}$$

Поскольку  $V$ -функционал при каждом  $k \in \mathbb{Z}_+$  непрерывен,  $V(t, 0) \equiv 0$  и выполняются условия (7), то для всех  $k_0 \geq 0$  и для любого заданного числа  $L > 0$  предельное соотношение

$$(П.4) \quad \lim_{\|y_0\| \rightarrow 0} V(k_0, x_0) = 0$$

выполняется при  $\|z_{10}\| \leq L$  равномерно по  $\|z_{20}\| < \infty$ .

Поэтому для всех  $k_0 \geq 0$  и для любого заданного числа  $L > 0$  на основании неравенств (П.3), (П.4) имеем предельное соотношение

$$\lim_{\|y_0\| \rightarrow 0} P \left[ \sup_{k > k_0} |y_1(k; k_0, x_0)| > \varepsilon \right] = 0,$$

выполняющееся при  $\|z_{10}\| \leq L$  равномерно по  $\|z_{20}\| < \infty$ . В результате для каждого  $k_0 \geq 0$  и для любых сколь угодно малых чисел  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma > 0$ , а также для любого наперед заданного числа  $L > 0$  найдется число  $\delta(\varepsilon, \gamma, L, k_0) > 0$  такое, что неравенство (2) имеет место для всех  $k \geq k_0$  и  $x_0 \in D_\delta$ . Следовательно, при больших значениях  $z_{10}$  в целом по  $z_{20}$  “частичное” положение равновесия  $y_k = 0$  системы (1)  $y_1$ -устойчиво по вероятности.

*Доказательство теоремы 2.*

Если вместо условий (7) выполняются условия (9), то для любого заданного числа  $L > 0$  предельное соотношение (П.4) выполняется при  $\|z_{10}\| \leq L$  равномерно не только по  $\|z_{20}\| < \infty$ , но и по  $k_0 \geq 0$ . В результате для каждого  $k_0 \geq 0$  и для любых сколь угодно малых чисел  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma > 0$ , а также



для любого наперед заданного числа  $L > 0$  найдется независимое от  $k_0$  число  $\delta(\varepsilon, \gamma, L) > 0$  такое, что неравенство (2) имеет место для всех  $k \geq k_0$  и  $x_0 \in D_\delta$ . Следовательно, при больших значениях  $z_{10}$  в целом по  $z_{20}$  “частичное” положение равновесия  $y_k = 0$  системы (1) равномерно  $y_1$ -устойчиво по вероятности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
2. *Пакилин П.В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. М.: Физматлит, 1994.
3. *Ажмяков В.В., Пятницкий Е.С.* Нелокальный синтез систем стабилизации дискретных стохастических объектов управления // *АиТ.* 1994. № 2. С. 68–78.  
*Azhmyakov V.V., Pyatnitskiy E.S.* Nonlocal Synthesis of Systems for Stabilization of Discrete Stochastic Controllable Objects // *Autom. Remote Control.* 1994. V. 55. No. 2. P. 202–210.
4. *Барабанов И.Н.* Построение функций Ляпунова для дискретных систем со случайными параметрами // *АиТ.* 1995. № 11. С. 31–41.  
*Barabanov I.N.* Construction of Lyapunov Functions for Discrete Systems with Stochastic Parameters // *Autom. Remote Control.* 1995. V. 56. No. 11. P. 1529–1537.
5. *Teel A.R., Hespanha J.P., Subbaraman A.* Equivalent Characterizations of Input-to-State Stability for Stochastic Discrete-Time Systems // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2014. V. 59. No. 2. P. 516–522.
6. *Jian X.S., Tian S.P., Zhang T.L., Zhang W.H.* Stability and Stabilization of Nonlinear Discrete-Time Stochastic Systems // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 2019. V. 29. No. 18. P. 6419–6437.
7. *Qin Y., Cao M., Anderson B.D.O.* Lyapunov Criterion for Stochastic Systems and its Applications in Distributed Computation // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2020. V. 65. No. 2. P. 546–560.
8. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных стохастических систем // *АиТ.* 2021. № 9. С. 116–132.  
*Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G.* On the Problem of Partial Stability for Discrete-Time Stochastic Systems // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 9. P. 1554–1567.
9. *Shaikhet L.* Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Difference Equations. Springer Science & Business Media, 2013.
10. *Astrom K.J., Wittenmark B.* Computer Controlled Systems: Theory and Design. 1984.
11. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. Boston: Birkhauser, 2014.
12. *Helal L., Daafouz J., Iung C.* Equivalence between the Lyapunov – Krasovskii Functionals Approach for Discrete Delay Systems and that of the Stability Conditions for Switched Systems // *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems.* 2008. V. 2. No. 3. P. 697–705.

13. *Родионов А.М.* Некоторые модификации теорем второго метода Ляпунова для дискретных уравнений // *АиТ.* 1992. № 9. С. 86–93.  
*Rodionov A.M.* Certain Modifications of Theorems of the Second Lyapunov Method for Discrete Equations // *Autom. Remote Control.* 1992. V. 53. No. 9. P. 1381–1386.
14. *Elaydi S., Zhang S.* Stability and Periodicity of Difference Equations with Finite Delay // *Funkcialaj Ekvacioj.* 1994. V. 37. No. 3. P. 401–413.
15. *Анашкин О.В.* Функции Ляпунова в теории устойчивости нелинейных разностных уравнений с запаздыванием // *Дифференц. уравнения.* 2002. Т. 38. № 7. С. 976–978.
16. *Pepe P., Pola G., Di Benedetto M.D.* On Lyapunov–Krasovskii Characterizations of Stability Notions for Discrete-Time Systems with Uncertain Time-Varying Time Delays // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2017. V. 63. No. 6. P. 1603–1617.
17. *Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.B.* Delay-Independent Stability Conditions for a Class of Nonlinear Difference Systems // *J. Franklin Institute.* 2018. V. 355. No. 7. P. 3367–3380.
18. *Zhou B.* Improved Razumikhin and Krasovskii Approaches for Discrete-Time Time-Varying Time-Delay Systems // *Automatica.* 2018. V. 91. P. 256–269.
19. *Li X., Wang R., Du S., Li T.* An Improved Exponential Stability Analysis Method for Discrete-Time Systems with a Time-Varying Delay // *Int. J. Robust Nonlin. Control.* 2022. V. 32. No. 2. P. 669–681.
20. *Kolmanovskii V.B., Shaikhet L.E.* General Method of Lyapunov Functionals Construction for Stability Investigations of Stochastic Difference Equations // *Dynamical Systems and Applications (World Scientific Series in Applicable Analysis).* 1995. V. 4. P. 397–439.
21. *Paternoster B., Shaikhet L.* About Stability of Nonlinear Stochastic Difference Equations // *Appl. Math. Lett.* 2000. V. 13. No. 5. P. 27–32.
22. *Rodkina A., Basin M.* On Delay-Dependent Stability for Vector Nonlinear Stochastic Delay-Difference Equations with Volterra Diffusion Term // *Syst. Control Lett.* 2007. V. 56. No. 6. P. 423–430.
23. *Diblik J., Rodkina A., Smarda Z.* On Local Stability of Stochastic Delay Nonlinear Discrete Systems with State-Dependent Noise // *Appl. Math. Comp.* 2020. V. 374. Art. 125019.
24. *Shaikhet L.* Stability Investigation of Systems of Nonlinear Stochastic Difference Equations // *Res. Highlig. Math. Comput. Sci.* V. 2. 2022. P. 79–92.
25. *Shaikhet L.* Stability of the Exponential Type System of Stochastic Difference Equations // *Mathematics.* 2023. V. 11. No. 18. Art. 3975.
26. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // *АиТ.* 2005. № 4. С. 3–59.  
*Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects // *Autom. Remote Control.* 2005. V. 66. No. 4. P. 511–561.
27. *Zong X., Lei D., Wu F.* Discrete Razumikhin-Type Stability Theorems for Stochastic Discrete-Time Delay Systems // *J. Franklin Institute.* 2018. V. 355. No. 17. P. 8245–8265.
28. *Ngoc P.H.A., Hieu L.T.* A Novel Approach to Exponential Stability in Mean Square of Stochastic Difference Systems with Delays // *Syst. Control Lett.* 2022. V. 168. Art. 105372.

29. *Mao X.R., Yuan C.G.* Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. London: Imperial College Press, 2006.
30. *Rajpurohit T., Haddad W.M.* Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control for Stochastic Dynamical Systems // J. Dynam. Syst., Measuremen, Control. 2017. V. 139. No. 9. Art. DS-15-1602.
31. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических систем // АиТ. 2019. № 5. С. 86–98.  
*Vorotnikov V.I., Martyshenko Y.G.* On the Partial Stability in Probability of Non-linear Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 5. P. 856–866.
32. *Воротников В.И.* К частичной устойчивости и детектируемости функционально-дифференциальных систем с последействием // АиТ. 2020. № 2. С. 3–17.  
*Vorotnikov V.I.* On Partial Stability and Detectability of Functional Differential Systems with Aftereffect // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 199–210.
33. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* О частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических функционально-дифференциальных систем с последействием (запаздыванием) // Изв. РАН. ТиСУ. 2024. Т. 65. Вып. 1. С. 3–16.
34. *Игнатъев А.О.* Метод функций Ляпунова в системах разностных уравнений: устойчивость относительно части переменных // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 3. С. 407–415.
35. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* Об одном подходе к анализу устойчивости «частичных» положений равновесия нелинейных дискретных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. Т. 63. Вып. 3. С. 57–68.
36. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Матем., Механика, Физика, Астрономия, Химия. 1957. № 4. С. 9–16.
37. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998.
38. *Kadiev R., Ponosov A.* The W-Transform in Stability Analysis for Stochastic Linear Functional Difference Equations // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 389. No. 2. P. 1239–1250.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.*

Поступила в редакцию 20.09.2023

После доработки 15.03.2024

Принята к публикации 30.05.2024

# Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2024 г. Н.Г. МЕЩЕРЯКОВА (natamesc@gmail.com),  
С.В. ШВЫДУН, канд. физ.-мат. наук (shvydun@hse.ru)  
(Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Москва)

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕР ЦЕНТРАЛЬНОСТИ В СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ<sup>1</sup>

Рассматривается задача нахождения центральных элементов в сетевых структурах. Поскольку концепция центральности не имеет четкого определения, в литературе известно большое число моделей определения наиболее важных элементов сети. Приведен обзор существующих подходов для сравнения мер центральности, осуществлен сравнительный анализ чувствительности известных индексов центральности к различным изменениям в структуре сети.

*Ключевые слова:* сетевой анализ, индексы центральности, аксиомы центральности, устойчивость.

**DOI:** 10.31857/S0005231024080039, **EDN:** WPLVJA

### 1. Введение

Методы сетевого анализа активно используются при моделировании и изучении сложных систем. В частности, с помощью сетевого анализа можно описать большинство существующих технологических, биологических, социальных и других систем, а также смоделировать различные социально-экономические, транспортные, эпидемические, производственные и прочие процессы.

Одной из важных задач в области анализа сложных сетевых структур является выявление ключевых или наиболее важных участников [1]. К сожалению, концепция важности в сети не имеет четкого определения и зависит от поставленной перед исследователем задачи, а также протекающих в сети процессов. В литературе известно большое число различных моделей определения центральных элементов, которые основаны на подсчете числа взаимосвязей у каждого элемента, количестве путей между различными элементами, учете индивидуальных атрибутов элементов сети и возможности группового влияния вершин. Поскольку общее число моделей центральности

---

<sup>1</sup> Данная работа осуществлена в рамках гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (грант МК-3867.2022.1.6. “Исследование свойств индексов влияния в сетевых структурах”).

исчисляется сотнями [2], а результаты от их применения могут быть совершенно различными, возникает необходимость в оценке качества полученных результатов и сравнении данных моделей.

Сравнение индексов центральности между собой представляет собой сложную задачу из-за субъективного характера определения важности элементов сети. Так, в ряде исследований полученные результаты применения индексов центральности сопоставляются с заведомо известной информацией о важности вершин или некоторой экспертной информацией [3, 4]. В рамках конкретной задачи и при наличии заранее известного распределения важности среди элементов сети можно выбрать наиболее близкий индекс центральности для его дальнейшего использования в данной сети и ее модификациях (например, для выявления ключевых элементов в динамике, когда истинное распределение важности уже неизвестно или известно частично). К сожалению, эталонные данные об истинной важности вершин крайне редко встречаются в реальных задачах.

Существует также другой подход к оценке качества мер центральности в сетевых структурах. Ряд исследований предлагает сравнивать классические меры центральности с точки зрения выполнения или невыполнения различных свойств, известных в литературе как *аксиомы центральности* [5–13]. Данные свойства дают понимание о работе рассматриваемых индексов и о том, будет ли выявлен тот или иной ключевой элемент, если граф имеет определенную структуру. Данный подход помогает оценить, насколько хорошо та или иная мера центральности удовлетворяет ряду логичных свойств. Тем не менее текущий список свойств не является единым и исчерпывающим, что приводит к тому, что разные исследования посвящены изучению того или иного набора свойств.

Наконец, одним из способов сравнения моделей центральности является анализ их устойчивости к изменению структуры сети. Поскольку множество существующих реальных сетей зачастую содержат неполную или некорректную информацию о связях между элементами сети (например, ошибки или пропуски в исходных данных), результат применения различных индексов центральности может быть искажен. Таким образом, возникает вопрос, насколько устойчиво и репрезентативно текущее ранжирование элементов сети, которое было получено в результате применения той или иной модели центральности. На данный момент в литературе известен ряд работ, в которых исследуется чувствительность различных моделей центральности [14–19]. Тем не менее большинство данных исследований ограничивается анализом только классических индексов центральности на малом наборе сетей.

В рамках данного исследования проводится обзор существующей аксиоматики, характеризующей понятие центральности в сетевых структурах. Кроме того, в работе осуществлен анализ чувствительности некоторых классических и других мер центральности к малым изменениям в сети. Результаты данного

направления позволят получить более глубокое понимание того, как сильно изменения во взаимосвязях между элементами сети влияют на результат применения известных моделей выявления наиболее важных элементов.

Работа поделена на четыре части. В первой части приводится описание известных классических моделей центральности. Во второй части приведен обзор существующих исследований по изучению аксиоматических свойств моделей центральности. Третья часть посвящена исследованию устойчивости мер центральности к изменениям в сети на примере классических и реальных сетевых структур. В четвертой части приводится заключение по полученным результатам.

## 2. Модели центральности в сетевых структурах

Рассмотрим граф  $G = (V, E)$ , где  $V = \{1, \dots, n\}$  – множество вершин,  $|V| = n$ ,  $E \subseteq V \times V$  – множество ребер между вершинами графа. Граф  $G$  называется *ненаправленным* (неориентированным), если  $\forall i, j \in V: (i, j) \in E \implies (j, i) \in E$ , и *направленным* (ориентированным) в противном случае. Граф  $G$  может быть также представлен с помощью матрицы смежности  $A = [a_{ij}]$ , где  $a_{ij} = 1$ , если  $(i, j) \in E$ , и  $a_{ij} = 0$  в ином случае. Граф называется *взвешенным*, если он описывается с помощью матрицы весов  $W = [w_{ij}]$ , где значение  $w_{ij}$  отражает вес ребра  $(i, j) \in E$ . Каждая вершина может иметь набор атрибутов  $\{w_i^k\}$ , где  $i \in V$  – вершина графа,  $k$  – номер атрибута,  $k \in K$ , а также пороговое значение  $q_i$ , при достижении которого вершина  $i$  подвержена влиянию со стороны других вершин. Под *центральностью* вершины  $i$  подразумевается некоторое числовое значение  $c_i \in \mathbb{R}^+$ , характеризующее степень ее важности в графе  $G$ .

Центральность является одним из ключевых показателей, используемых при исследовании сложных сетевых структур [1–3]. В литературе известен ряд мер, которые помогают выявить наиболее центральные элементы в той или иной сетевой структуре. Описание наиболее известных мер приведено ниже.

### 2.1. Степенные центральности

Простейшей центральностью  $i$ -й вершины ненаправленного графа является ее степень (degree centrality), т.е. количество ребер, инцидентных  $i$ -й вершине [20]:

$$(1) \quad c_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji}.$$

В случае направленного графа существует две отдельные меры центральности по степени: входящая степень и исходящая степень. Входящая степень указывает число связей, направленных к вершине, а исходящая – число связей, направленных от вершины. Степенная центральность может быть также

адаптирована к взвешенным сетям и рассчитана с учетом веса  $w_{ij}$  каждого ребра  $(i, j) \in E$ .

## 2.2. Спектральные центральности

Степенные центральности являются локальными мерами, которые никак не учитывают важность соседних вершин. Обобщением степенной центральности является так называемая центральность по собственному вектору [20], которая учитывает не только прямые, но и не прямые взаимосвязи между вершинами. Центральность вершин по собственному вектору (eigenvector centrality)  $\vec{c}$  присваивает относительную важность каждой вершине следующим образом: более важные соседи вершины дают больший вклад в ее собственную центральность по сравнению с менее важными соседями. Вычисление данной модели центральности сводится к нахождению собственного вектора  $\vec{c}$  исходной матрицы смежности  $A$ :

$$(2) \quad A\vec{c} = \lambda\vec{c},$$

где  $\lambda$  – наибольшее собственное значение матрицы  $A$ . На практике центральность по собственному вектору используется при анализе ненаправленных графов, поскольку вычисление собственного вектора на направленных графах является более сложной задачей, которая может привести к появлению нулевых или комплексных собственных значений.

Другим примером данного класса центральностей является центральность по PageRank [21], которая заключается в определении вероятности посещения каждой вершины в рамках случайных блужданий в графе:

$$(3) \quad c_i = \alpha \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\sum_{k=1}^n a_{jk}} a_{ji} + \frac{1 - \alpha}{n},$$

где  $\alpha$  – вероятность продолжения случайного блуждания в графе,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Отметим, что в отличие от центральности по собственному вектору данный индекс может использоваться также и для направленных графов.

Существуют также и другие модели центральности, основанные на подсчете собственного вектора: центральность Каца (Katz centrality) [22], алгоритм HITS (hubs and authorities) [23], подграфовая центральность (subgraph centrality) [24] и т.д.

## 2.3. Центральности по нахождению кратчайших путей в графе

Данный класс центральностей основан на подсчете кратчайших путей между вершинами. Наиболее известным примером является центральность по близости (closeness centrality) [20, 25], которая учитывает, насколько близко к вершине  $i$  расположена к остальным вершинам сети:

$$(4) \quad c_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_{ij}},$$

где  $d_{ij}$  – длина кратчайшего пути между вершинами  $i$  и  $j$ .



Другим примером центральности, основанной на нахождении кратчайших путей между вершинами, является центральность по посредничеству (betweenness centrality) [26, 27]. Центральность по посредничеству характеризует, насколько важную роль играет вершина  $i$  как посредник между всевозможными парами других вершин:

$$(5) \quad c_i = \sum_{j \neq k} \frac{\sigma_{jk}(i)}{\sigma_{jk}},$$

где  $\sigma_{jk}$  показывает число кратчайших путей между вершинами  $j$  и  $k$ , а  $\sigma_{jk}(i)$  – число кратчайших путей между вершинами  $j$  и  $k$ , проходящих через вершину  $i$ .

#### 2.4. Центральности по ближним и дальним взаимодействиям

Большинство приведенных выше классических мер центральности не позволяет учитывать важные характеристики – индивидуальные атрибуты каждой вершины и возможность их группового взаимодействия. Более того, существующие методы не в полной мере оценивают интенсивность дальних взаимодействий и зачастую учитывают незначимые связи между элементами сети. В связи с этим в [3, 28] предложен индекс дальних взаимодействий (LRIC), который позволяет учитывать данные особенности сложных систем.

Обозначим через  $N_j$  набор вершин, имеющих прямую связь с вершиной  $j$ . Тогда группа вершин  $\Omega(j) \subseteq N_j$  является *критической* для вершины  $j$ , если  $\sum_{i \in \Omega(j)} w_{ij} \geq q_j$ , а вершина  $l \in \Omega(j)$  – *ключевой*, если ее исключение из данной группы делает группу некритической. Набор ключевых вершин в группе  $\Omega(j)$  обозначим через  $\Omega_p(j)$ . Отличительной особенностью индекса дальних взаимодействий является определение влияния вершины  $i$  на вершину  $j$  через поиск такой критической группы  $\Omega_p(j)$ , в которой вершина  $i$  имеет максимальное влияние, т.е.

$$(6) \quad c_{ij} = \begin{cases} \max_{\Omega_p(j): i \in \Omega_p(j)} \frac{w_{ij}}{\sum_{k \in \Omega_p(j)} w_{kj}}, & \text{если } \exists \Omega_p(j): i \in \Omega_p(j), \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Значение  $c_{ij}$  показывает, как вершина  $i$  влияет на вершину  $j$  напрямую. Найденные значения можно представить в виде матрицы прямых влияний  $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ , которую далее можно использовать для расчета непрямых влияний между вершинами. Модель LRIC имеет ряд модификаций. В частности, известны модели ближних взаимодействий (SRIC) [29], а также индекс группового влияния [30]. Стоит отметить, что индекс LRIC показал свою эффективность при анализе сетей международного рынка капитала, международной миграции, общей торговли, торговли оружием, торговли продовольствием, цитирования экономических журналов, а также сети взаимодействий между террористическими группами [3, 31, 32].



### 3. Свойства индексов центральности: обзор литературы

Ряд исследований предлагает сравнивать меры центральности с точки зрения выполнения или невыполнения различных свойств, определяющих разумность полученного набора наиболее важных элементов [5–11]. В данном разделе рассматриваются наиболее известные аксиомы центральности, а также приводится список индексов центральности, для которых были исследованы данные аксиомы.

#### 3.1. Аксиома анонимности (*Anonymity axiom*)

Аксиома анонимности была предложена в [5]. Согласно данной аксиоме центральность вершины  $i$  зависит только от ее расположения в сети, т.е.

$$(7) \quad c_i(V, E) = c_{f(i)}(V, \{(f(i), f(j)) : (i, j) \in E\}),$$

где  $c_i(V, E)$  – центральность вершины в графе  $G = (V, E)$ , а  $f$  – биекция на множестве вершин,  $f : V \rightarrow V$ . Другими словами, центральность вершины совпадает с центральностью соответствующей вершины в изоморфном графе. Отметим, что все индексы центральности, не использующие атрибуты вершин, удовлетворяют анонимности.

#### 3.2. Аксиома роста конечной точки (*Endpoint increase axiom*)

Аксиома роста конечной точки [5] выполняется, если добавление ребра между двумя вершинами не приводит к уменьшению их центральности, т.е.  $\forall G, \forall i, j \in V$

$$(8) \quad \begin{cases} c_i(V, E \cup (i, j)) \geq c_i(V, E), \\ c_j(V, E \cup (i, j)) \geq c_j(V, E), \end{cases}$$

где  $c_i(V, E \cup (i, j))$  – центральность вершины  $i$  в графе  $G'$ , который образуется при добавлении ребра  $(i, j)$  к графу  $G = (V, E)$ . Таким образом, у любой пары несвязных вершин имеется стимул к появлению связи между ними.

#### 3.3. Аксиома монотонности (*Monotonicity axiom*)

Аксиома монотонности [5] выполняется, если добавление в граф ребра  $(i, j)$  не уменьшает значение центральности никакой вершины графа, т.е.  $\forall G, \forall i, j, k \in V$

$$(9) \quad c_k(V, E \cup (i, j)) \geq c_k(V, E).$$

Если модель центральности предполагает нормирование значений индексов центральности, то данная аксиома практически во всех случаях не будет выполняться, поскольку увеличение центральности одной вершины приводит к уменьшению относительной центральности других вершин. Кроме того, если аксиома роста конечной точки не выполняется, то аксиома монотонности также не выполняется для рассматриваемой модели центральности.

### 3.4. Аксиома центральной вершины (Top node axiom)

Согласно аксиоме центральной вершины [5] вершина  $i$ , имеющая наибольшее значение центральности в исходном графе  $G$ , должна иметь также наибольшее значение центральности в графе  $G'$ , который образуется при добавлении инцидентного ребра к данной вершине в графе  $G$ :

$$(10) \quad \begin{aligned} c_i(V, E) \geq c_k(V, E) \quad \forall k \in V \implies \\ \implies \forall j, k \in V \quad c_i(V, E \cup (i, j)) \geq c_k(V, E \cup (i, j)). \end{aligned}$$

Аксиома центральной вершины не выполняется, если добавление инцидентных связей уменьшает центральность наиболее влиятельной вершины, что противоречит интуиции понятия центральности в сети.

### 3.5. Аксиома справедливости (Fairness axiom)

Аксиома справедливости [6] выполняется, если добавление ребра  $(i, j)$  изменяет центральность инцидентных вершин на одинаковую величину, т.е.  $\forall G, \forall i, j \in V$

$$(11) \quad c_i(V, E \cup (i, j)) - c_i(V, E) = c_j(V, E \cup (i, j)) - c_j(V, E).$$

Таким образом, вклад новой связи должен быть одинаковым для каждой из инцидентных вершин.

### 3.6. Аксиома сбалансированного вклада (Balanced contributions axiom)

Аксиома сбалансированного вклада приведена в [7] и аксиоматизирована в [9]. Модель центральности удовлетворяет данной аксиоме, если удаление всех ребер  $E_i$ , инцидентных вершине  $i$ , влияет на центральность вершины  $j$  в той же мере, как и удаление всех инцидентных ребер  $E_j$  на вершину  $i$ , т.е.  $\forall i, j \in V$

$$(12) \quad c_i(V, E) - c_i(V, E \setminus E_j) = c_j(V, E) - c_j(V, E \setminus E_i),$$

где  $E_i$  – множество всех ребер, инцидентных вершине  $i$ .

### 3.7. Аксиома добавления нового ребра (Add edge distance axiom)

Аксиома добавления нового ребра предложена в [9]. Согласно данной аксиоме добавление нового ребра между парой вершин  $i$  и  $j$ , находящихся на одинаковом расстоянии от вершины  $k$ , не влияет на значение центральности данной вершины, т.е.  $\forall i, j, k \in V: d_{ik} = d_{jk}$

$$(13) \quad c_k(V, E) = c_k(V, E \cup (i, j)).$$

Таким образом, добавление ребра между двумя вершинами не должно влиять на центральность вершин, расположенных от них на одинаковом расстоянии.

### 3.8. Аксиома моста (*Bridge axiom*)

Согласно аксиоме моста [9], если ребро  $(i, j)$  является единственной связью между двумя несвязанными компонентами связности (т.е. является мостом), то центральность вершины  $i$  должна быть выше центральности вершины  $j$ , если компонента связности, имеющая связь с вершиной  $i$ , больше второй компоненты связности.

### 3.9. Аксиома аддитивности центральности общей вершины (*Cut-vertex additivity*)

Согласно аксиоме аддитивности центральности общей вершины [10], если объединить два графа  $G$  и  $G'$ , имеющих только одну совпадающую вершину  $i$ , то центральность этой вершины в объединенном графе определяется как сумма ее центральностей в графах  $G$  и  $G'$ , т.е.  $\forall G = (V, E), G' = (V', E') : V \cap V' = \{i\}$

$$(14) \quad c_i(V \cup V', E \cup E') = C_i(V, E) + C_i(V', E').$$

Отметим, что данная аксиома имеет альтернативную формулировку:

$$(15) \quad \frac{1}{c_i(V \cup V', E \cup E')} = \frac{1}{c_i(V, E)} + \frac{1}{c_i(V', E')}.$$

Ряд аксиом центральности сформулирован в контексте рассмотрения конкретных графовых структур.

### 3.10. Аксиома плотности (*Density axiom*)

Аксиома плотности предложена в [8]. Рассмотрим граф  $G_{k,p}$ , который представляет собой полный граф из  $k$  вершин, соединенный одним ребром  $(i, j)$  с циклом длины  $p$  ( $p \geq 3$ ), где вершина  $i$  – вершина полного графа, а  $j$  – вершина цикла. Аксиома плотности выполняется, если при  $k = p$  центральность вершины  $i$  будет выше центральности вершины  $j$ .

### 3.11. Аксиома размера (*Size axiom*)

Аксиома размера рассмотрена в [8]. Рассмотрим граф  $G_{k,p}$ , который представляет собой полный граф из  $k$  вершин, соединенный одним ребром  $(i, j)$  с циклом длины  $p$  ( $p \geq 3$ ). Аксиома размера выполняется, если при любом  $k$  найдется такое значение  $p \geq k$ , что центральность вершин в цикле будет выше центральности вершин в полном графе, и, наоборот, для любого  $k$  найдется такое значение  $p < k$ , что центральность вершин в цикле будет ниже центральности вершин в полном графе.

Ряд аксиом уже был исследован для некоторых моделей центральности (см. табл. 1) [33]. Известные в литературе результаты по анализу свойств индексов центральности, упомянутых в разделе 2, приведены в [8, 10, 11, 34].

**Таблица 1.** Свойства классических индексов центральности («+» – аксиома выполняется, «-» – аксиома не выполняется, «?» – аксиома не была исследована в литературе)

№	Модели центральности	Анонимность	Рост конечной точки	Монотонность	Центральная вершина	Справедливость	Сбалансированный вклад	Добавление нового ребра	Мост	Аудитивность	Плотность	Размер
1	Степенные центральности	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	-
2	Центральность по собственному вектору	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
3	PageRank	+	?	-	?	-	-	-	-	-	+	-
4	Центральность Каца	+	+	+	?	-	-	-	-	-	+	-
5	HITS	+	?	?	?	-	-	?	?	?	?	?
6	Подграфовая центральность	+	?	?	?	-	-	?	?	?	?	?
7	Центральность по близости	+	+	+	-	-	-	+	+	-	+	-
8	Центральность по посредничеству	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	LRIC	-	?	-	?	-	-	?	?	?	?	?

Заметим, что на данный момент даже классические индексы центральности исследованы лишь частично.

Согласно табл. 1 большинству приведенных аксиом удовлетворяет только степенная центральность. Данную особенность можно объяснить тем фактом, что степенные центральности являются локальными и основаны на расчете только прямых связей между вершинами. Тем не менее большинство аксиом сформулированы таким образом, чтобы учитывать глобальную структуру сети и оценивать эффект от непрямых связей между вершинами. В связи с этим, поскольку степенные центральности не изменяют свою центральность от изменения структуры взаимосвязей других вершин, то данная мера удовлетворяет большинству аксиоматических свойств. Что касается сравнения других моделей центральности, то большинство мер не удовлетворяет приведенным аксиомам. Все рассматриваемые модели центральности, не учитывающие индивидуальные атрибуты вершин, удовлетворяют аксиоме анонимности. Аксиомы роста конечной точки и монотонности выполняются только для центральности по близости и центральности Катца. Аксиома плотности выполняется для центральности по собственному вектору, центральности Катца, PageRank и центральности по близости.

Рассматриваемый список аксиом не является исчерпывающим, а в ряде других исследований можно встретить другую аксиоматику [35–38]. Кроме того, можно предложить аксиомы из других смежных научных областей. На-

пример, известна *аксиома согласия* для функций выбора [39], согласно которой альтернатива, выбираемая на двух подмножествах, должна быть также выбрана на их объединении. В теории выбора данное условие характеризует рациональный выбор на множестве альтернатив. В связи с этим можно расширить аксиому аддитивности центральности общей вершины и предположить, что если у двух графов  $G$  и  $G'$  есть общая вершина  $i$ , которая имеет наибольшую центральность в обоих графах, то данная вершина должна также иметь наибольшую центральность и на их объединении.

Стоит отметить, что невыполнение для конкретной модели каких-либо свойств не ведет к тому, что мера является некачественной, а лишь только позволяет выявить и лучше понять основные особенности модели центральности.

#### 4. Исследование устойчивости индексов центральности

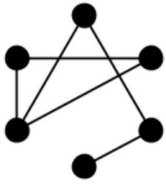
При анализе реальных систем одним из важнейших критериев выбора модели центральности является степень устойчивости полученных результатов. К сожалению, ряд существующих наборов данных является неполным или может содержать некорректную информацию. Например, в [40, 41] рассматриваются криминальные сети, которые являются неполными (в силу специфики предметной области), могут содержать ошибки (ошибки при сборе данных либо намеренно искаженная информация) и противоречащую информацию (сбор данных осуществлен из разных источников). В [31] произведен анализ сетевых взаимодействий на международном рынке капитала, при этом исходные данные содержат порядка 94% от общего числа информации, поскольку ряд стран не предоставляют отчетность. В [42] рассматривалась проблема асимметрии в данных международной торговли, связанной с различными классификациями номенклатуры, оценке объема торговли (транспортные и страховые расходы), а также задержкой по времени. Таким образом, возникает вопрос, насколько сильно результаты применения моделей центральности подвержены небольшим изменениям в структуре сети.

##### 4.1. Устойчивость индексов центральности на классических структурах

В данном разделе проводится оценка устойчивости известных моделей центральности к добавлению или удалению ребер в ненаправленных невзвешенных графах. Для оценки чувствительности известных моделей центральности произведем серию вычислительных экспериментов на классических графовых структурах, состоящих из  $n = 100$  вершин (см. рис. 1):

1. Случайный граф Эрдёша–Реньи (Erdos–Renyi graph): случайный граф с  $n$  вершинами, в котором связи образуются с вероятностью  $p$ .

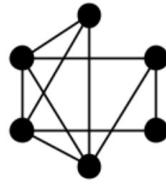
2. Безмасштабный граф (Barabasi–Albert graph): случайный граф с  $n$  вершинами, который образуется последовательным присоединением новых вершин, при этом на каждом этапе образуется  $m$  связей с вероятностью, пропорциональной текущей степени вершин графа.



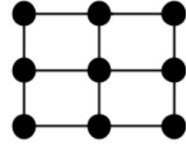
(1) Случайный граф



(2) Безмасштабный граф



(3) Сеть малого мира



(4) Граф квадратной решетки

Рис. 1. Классические сетевые структуры.

3. Сеть малого мира (Small-world Watts–Strogatz graph model): случайный граф, в рамках которого создается регулярный граф с  $n$  вершинами, а затем каждое ребро переписывается с вероятностью  $p$  на другой произвольный узел.

4. Граф квадратной решетки (Square lattice) с  $n$  вершинами, где вершины соответствуют точкам на координатной плоскости, которые впоследствии соединены ребром, если вершины находятся на расстоянии 1.

Вычислительный эксперимент осуществлен следующим образом. На первом этапе происходит построение  $N = 100$  графов заданной структуры (для графа квадратной решетки  $N = 1$ ). В рамках исследования был установлен параметр  $p = 0,05$  для случайных графов и сетей малого мира, а также  $m = 4$  для безмасштабных графов<sup>2</sup>. На втором этапе происходит изменение структуры каждого рассматриваемого графа  $K = 100$  способами (для графа квадратной решетки  $K = 10\,000$ ). Далее производится оценка центральности вершин в исходном и измененных графах, после чего между индексами центральности осуществляется расчет коэффициента корреляции Кендалла, учитывающего относительную важность вершин. Итоговое значение устойчивости индекса центральности определяется как среднее арифметическое среди рассчитанных характеристик по  $N \times K = 10\,000$  экспериментам. Отметим, что увеличение числа экспериментов не приводит к значительному изменению результатов.

Вычислительный эксперимент осуществлен для следующих моделей центральности: степенная центральность (degree), центральность по собственному вектору (eigenvector), PageRank, центральность по близости (closeness), центральность по посредничеству (betweenness), подграфовая центральность (subgraph), а также индекс дальних взаимодействий (LRIC). Полученные результаты приведены на рис. 2.

Как показано на рис. 2, наибольшую устойчивость индексы центральности демонстрируют на случайных и безмасштабных графах: после удаления/добавления 20 ребер в графе корреляция индексов центральности остается высокой (выше 0,8). Наоборот, небольшие изменения в структуре сети малого мира и графа квадратной решетки приводят к значительным измене-

<sup>2</sup> Авторы также рассматривали другие значения параметров  $p$  (от 0,01 до 0,1 с шагом 0,01) и  $m$  (от 2 до 5). Было выявлено, что относительное расположение индексов центральности с точки зрения их устойчивости при других значениях параметров меняется незначительно.

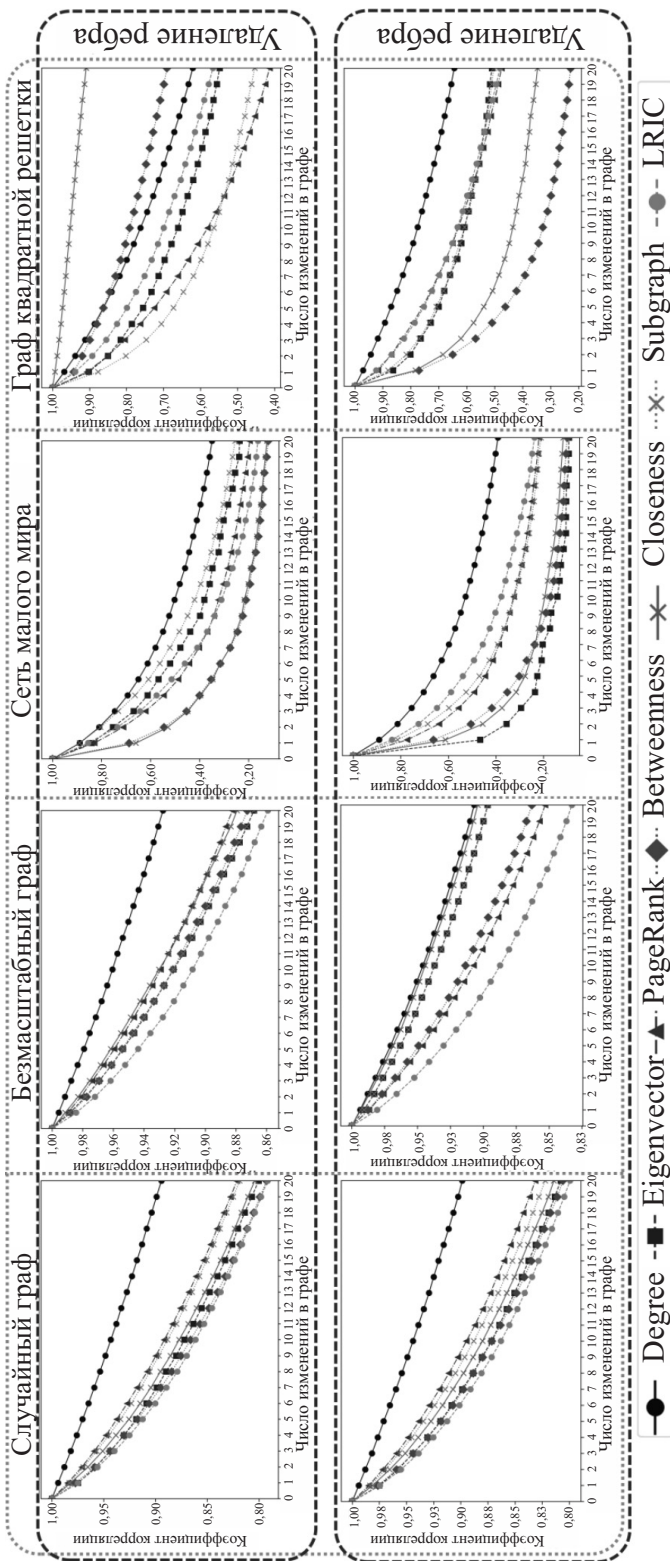


Рис. 2. Устойчивость индексов центральности на классических структурах.



ниям центральности вершин. Таким образом, интерпретировать индексы центральности на этих сетевых структурах нужно с осторожностью, поскольку большинство моделей центральности крайне неустойчивы (исключение составляют степенная центральность при добавлении ребра, а также центральность по близости при удалении ребра в графе квадратной решетки). Среди индексов центральности, учитывающих глобальную структуру сети и имеющих низкую чувствительность к малым возмущениям, стоит выделить индекс PageRank и подграфовую центральность (случайные и безмасштабные графы, а также сети малого мира), а также LRIC (граф квадратной решетки). Стоит отметить, что собственный вектор и центральности, основанные на кратчайших путях, наибольшим образом подвержены изменениям в большинстве структур сети. Таким образом, выбор наиболее подходящей модели центральности по критерию устойчивости сильно зависит от рассматриваемой структуры сети.

#### *4.2. Устойчивость индексов центральности на реальных сетевых структурах*

Поскольку в ряде прикладных задач исследователь не обладает полной информацией о реальной структуре сети, возникает вопрос, насколько устойчив и репрезентативен полученный набор элементов сети. В рамках данного раздела анализ чувствительности моделей центральности производится на основе анализа двух реальных сетевых структур (криминальная сеть, сеть международной торговли), информация о структуре которых доступна лишь частично.

##### **Анализ криминальной сети**

Исследуемая сеть содержит информацию, собранную итальянской полицией в рамках масштабной операции в 2007 г., о взаимодействиях между членами сицилийской мафии. Рассматриваемая сеть была построена на основе зафиксированных встреч между участниками мафии и представляет собой ненаправленный граф, состоящий из 101 вершины и 256 ребер [41]. Чувствительность индексов центральности в криминальной сети осуществлена из предположения о том, что в сети отсутствует порядка 10% от общего числа зафиксированных связей. Были рассмотрены две основные стратегии добавления новых ребер в граф: случайным образом (сценарий 1) и пропорционально расстоянию между вершинами (сценарий 2). Оценка чувствительности оценивалась на основе сравнения среднего значения индекса корреляции Кендалла между исходной и модифицированной структурой сети и среднего коэффициента Жаккарда между множествами наиболее центральных элементов (ТОП-5). Полученные результаты приведены в табл. 2.

Согласно табл. 2 случайные изменения в структуре графа (сценарий 1) оказывают большее влияние на общее ранжирование всех вершин по сравнению с изменениями структуры графа на основе расстояния между вершинами (сценарий 2). Степенная центральность показывает наиболее устойчивые



**Таблица 2.** Устойчивость индексов корреляции в криминальной сети

Модель центральности	Сценарий 1		Сценарий 2	
	Корреляция	ТОП-5	Корреляция	ТОП-5
Степенные центральности	0,91	0,98	0,92	0,98
Собственный вектор	0,89	0,85	0,89	0,84
PageRank	0,78	0,94	0,85	0,93
Центральность Каца	0,91	0,95	0,9	0,94
Подграфовая центральность	0,92	0,91	0,92	0,88
Центральность по близости	0,81	0,88	0,83	0,87
Центральность по посредничеству	0,66	0,84	0,71	0,85
LRIC	0,74	0,8	0,79	0,81

результаты, что согласуется с результатами раздела 4.1. Среди других мер стоит также отметить центральность Каца и подграфовую центральность, которые показывают достаточно устойчивые результаты и учитывают глобальную структуру сети. Напротив, центральности, основанные на кратчайших путях, а также индекс LRIC имеют наибольшую чувствительность на рассматриваемом наборе данных.

### **Анализ сети международной торговли продовольствием**

Исследуемая сеть содержит информацию об объеме торговли продовольствием за 2020 г. между 222 странами мира [43]. Поскольку рассматриваемый граф является направленным и взвешенным (наибольший объем торговли зафиксирован между США и Канадой – около 5,5 млрд. долл.), то анализ чувствительности был проведен только для тех индексов центральности, которые использовались ранее для анализа торговых сетей. В рамках проведенного эксперимента было осуществлено несколько сценариев по изменению структуры сети: изменение текущего объема торговли между странами в пределах 5% (учет возможных ошибок в оценке торгового потока, сценарий 1), а также добавление новых потоков между странами суммарной стоимостью в 1% от общего объема мировой торговли (для учета отсутствующих потоков из-за отсутствия отчетности некоторых стран, сценарий 2). Оценка чувствительности мер центральности проводилось на основе коэффициента корреляции Кендалла и коэффициента Жаккарда между множествами наиболее центральных элементов (ТОП-10). Полученные результаты приведены в табл. 3.

Согласно табл. 3 погрешность в оценке торговых потоков в пределах 5% (сценарий 1) не оказывает практически никакого влияния на значение индексов центральности, при этом отсутствие информации о торговле между некоторыми странами (сценарий 2) может значительно повлиять на ранжирование наиболее центральных элементов сети. В частности, наибольшая корреляция ( $> 0,71$ ) наблюдается для исходящей степенной центральности, а также для моделей hubs (один из индексов алгоритма HITS) и LRIC. Довольно низкое значение корреляции может быть объяснено значительным изменени-

**Таблица 3.** Устойчивость индексов корреляции в торговой сети продовольствием

Модель центральности	Сценарий 1		Сценарий 2	
	Корреляция	ТОП-10	Корреляция	ТОП-10
Входящая степень (импорт)	0,99	0,99	0,38	0,22
Исходящая степень (экспорт)	0,99	1	0,79	0,92
Разность степеней (чистый экспорт)	0,99	1	0,14	0,81
Hubs	0,99	1	0,78	0,72
Authorities	0,99	1	0,26	0,22
PageRank	0,99	1	0,43	0,26
LRIC	0,99	0,98	0,71	0,5

ем в ранжировании тех стран, которые не входят в список наиболее важных в исходной сети. Набор наиболее влиятельных элементов (ТОП-10) является достаточно устойчивым для ряда степенных центральностей, а также для модели hubs.

## 5. Заключение

Концепция влияния в сетевых структурах не имеет четкого определения, что привело к возникновению большого числа различных моделей центральности. В связи с этим одним из основных инструментов для выбора наиболее подходящей меры центральности является использование аксиоматического подхода, а также анализ чувствительности моделей к изменению структуры сети.

В рамках данного исследования представлен обзор существующих аксиом центральности в сетевых структурах и показаны текущие результаты по проверке свойств классических индексов. Результаты направления являются основой для дальнейшего исследования известных индексов центральности, поскольку многие аксиомы для существующих моделей до сих пор не были проверены.

В работе проведена оценка устойчивости индексов центральности на различных графовых структурах. Поскольку большинство существующих сетей изменяются во времени, а исследователю доступна лишь частичная информация о структуре сети, возникает вопрос, насколько неслучайным является полученный набор центральных элементов. В рамках текущего направления была проведена оценка чувствительности классических моделей центральности к различным изменениям в структуре искусственных и реальных сетей. Заметим, что модели, имеющие высокую чувствительность к изменениям структуры сети, требуют более осторожного использования при анализе наиболее влиятельных элементов сети.

Полученные результаты расширяют теоретические знания о понятии центральности в сетевых структурах. Результаты исследования могут быть ис-

пользованы при выборе наиболее подходящего индекса центральности, в том числе в условиях неполной информации о реальной структуре графа. Кроме того, результаты исследования могут быть использованы для разработки новых методов по оценке центральности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Newman M.E.J.* Networks: Second Edition. Oxford: Oxford University Press, 2018.
2. Centiserver: The most comprehensive centrality resource and web application for centrality measures calculation. [онлайн] доступно по ссылке: <https://www.centiserver.org/centrality/list/> [дата обращения – 7.12.2023].
3. *Aleskerov F.T., Shvydun S., Meshcheryakova N.* New Centrality Measures in Networks: How to Take into Account the Parameters of the Nodes and Group Influence of Nodes to Nodes. Boca Raton: CRC Press, 2022.
4. *Shvydun S.* The Impact of COVID-19 on the Air Transportation Network // Advances in Intelligent Systems and Computing. Springer, Cham. 2023. V. 1435. P. 94–107.
5. *Sabidussi G.* The centrality index of a graph // Psychometrika. 1966. V. 31. No. 4. P. 581–603.
6. *Myerson R.B.* Graphs and cooperation in games // Math. Oper. Res. 1977. V. 2. P. 225–229.
7. *Myerson R.B.* Conference structures and fair allocation rules // Int. J. Game Theory. 1980. V. 9. P. 169–182.
8. *Boldi P., Vigna S.* Axioms for centrality // Internet Math. V. 10. 2014. P. 222–262.
9. *Skibski O., Michalak T.P., Rahwan T.* Axiomatic characterization of game-theoretic centrality // J. Artif. Int. Res. 2018. V. 62. No. 1. P. 33–68.
10. *Skibski O., Sosnowska J.* Axioms for Distance-Based Centralities // Proceedings of the 32nd AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI). 2018. P. 1218–1225.
11. *Chebotarev P.* Selection of centrality measures using Self-consistency and Bridge axioms // J. Complex Networks. 2023. V. 11. No. 5. P. 1–23.
12. *Хитрая В.А., Мазалов В.В.* Теоретико-игровая центральность вершин ориентированного графа // МТИП. 2023. Т. 3. № 15. С. 64–87.
13. *Щербакоева Н.Г.* Аксиоматика центральности в комплексных сетях // Проблемы информатики. 2015. Т. 3. № 28. С. 3–14.
14. *Borgatti S., Carley K., Krackhardt D.* On the robustness of centrality measures under conditions of imperfect data // Soc. Networks. 2006. V. 28. No. 2. P. 124–136.
15. *Frantz T.L., Cataldo M., Carley K.M.* Robustness of centrality measures under uncertainty: Examining the role of network topology // Comput. Math. Organ. Theor. 2009. V. 15. No. 4. P. 303–328.
16. *Segarra S., Ribeiro A.* Stability and Continuity of Centrality Measures in Weighted Graphs // IEEE Transactions on Signal Processing. 2016. V. 64. No. 3. P. 543–555.
17. *Martin C., Niemeyer P.* Influence of measurement errors on networks: Estimating the robustness of centrality measures // Network Sci. 2019. V. 7. No. 2. P. 180–195.
18. *Murai S., Yoshida Y.* Sensitivity Analysis of Centralities on Unweighted Networks // The World Wide Web Conference on – WWW'19. 2019. P. 1332–1342.

19. *Meshcheryakova N., Shvydun S.* Perturbation Analysis of Centrality Measures // 2023 IEEE/ACM International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining (ASONAM). 2023. P. 407–414.
20. *Freeman L.C.* Centrality in social networks: conceptual clarification // Soc. Networks. 1979. V. 1. No. 3 P. 215–239.
21. *Brin S., Page L.* The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine// Comput. Netw. 1998. V. 30. P. 107–117.
22. *Katz L.* A New Status Index Derived from Sociometric Index // Psychometrika. 1953. V. 18 P. 39–43.
23. *Kleinberg J.M.* Authoritative sources in a hyperlinked environment // J. ACM. 1999. V. 46. No. 5. P. 604–632.
24. *Estrada E., Rodriguez-Velazquez J.A.* Subgraph centrality in complex networks // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. No. 5. P. 1–9.
25. *Bavelas A.* Communication Patterns in Task-Oriented Groups // J. Acoust. Soc. Amer. 1950. V. 22. No. 6. P. 725–730.
26. *Anthonisse J.M.* The rush in a directed graph // Technical Report BN 9/71, Stichting Mathematisch Centrum. Amsterdam. 1971.
27. *Freeman L.C.* A set of measures of centrality based upon betweenness // Sociometry. 1977. V. 40. No. 1. P. 35–41.
28. *Aleskerov F.T., Meshcheryakova N.G., Shvydun S.V.* Power in Network Structures // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2017. V. 197. P. 79–85.
29. *Aleskerov F.T., Andrievskaya I.K., Permjakova E.E.* Key borrowers detected by the intensities of their short-range interactions // Working papers by NRU Higher School of Economics. Series FE “Financial Economics”. 2014. No. WP BRP 33/FE/2014.
30. *Aleskerov F., Yakuba V.* Matrix-vector approach to construct generalized centrality indices in networks // NRU Higher School of Economics. Series WP7 “Mathematical methods for decision making in economics, business and politics”. 2020. No. 2323.
31. *Aleskerov F., Andrievskaya I., Nikitina A., Shvydun S.* Key Borrowers Detected by the Intensities of Their Interactions // Handbook of Financial Econometrics, Mathematics, Statistics, and Machine Learning (In 4 Volumes). World Scientific. 2020. P. 355–389.
32. *Aleskerov F., Gavrilenkova I., Shvydun S., Yakuba V.* Power Distribution in the Networks of Terrorist Groups: 2001–2018 // Group. Decis. Negot. 2020. V. 29. P. 399–424.
33. Centrality Measures: from Theory to Applications. [онлайн] доступно по ссылке: <https://centrality.mimuw.edu.pl/> [дата обращения – 7.12.2023].
34. *Skibski O.* Vitality Indices are Equivalent to Induced Game-Theoretic Centralities // IJCAI-21. 2021. P. 398–404.
35. *Nieminen U.J.* On the centrality in a directed graph // Soc. Sci. Res. 1973. V. 2. No. 4. P. 371–378.
36. *Garg M.* Axiomatic Foundations of Centrality in Networks // Soc. Sci. Res. Network. 2009. No. 1372441.
37. *Landherr A., Friedl B., Heidemann J.* A Critical Review of Centrality Measures in Social Networks // Bus. Inf. Syst. Eng. 2010. V. 2. P. 371–385.
38. *Bloch F., Jackson M.O., Tebaldi P.* Centrality measures in networks // Soc. Choice Welf. 2023. V. 61. P. 413–453.

39. *Aizerman M.A., Aleskerov F.T.* Theory of choice. Amsterdam: North-Holland. 1995.
40. *Ficara A., Cavallaro L., Curreri F., Fiumara G., De Meo P., Bagdasar O., Song W., Liotta A.* Criminal networks analysis in missing data scenarios through graph distances // PLOS ONE. 2021. V. 16. No. 8. e0255067.
41. *Ficara A., Cavallaro L., De Meo P., Fiumara G., Catanese S., Bagdasar O., Liotta A.* Social Network Analysis of Sicilian Mafia Interconnections // Studies Comput. Int. 2020. V. 882. P. 440–451.
42. *Meshcheryakova N.* Network Analysis of Bilateral Trade Data Under Asymmetry // 2020 IEEE/ACM International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining (ASONAM). 2020. P. 379–383.
43. The World Integrated Trade Solution. [онлайн] доступно по ссылке: <https://wits.worldbank.org/> [дата обращения – 7.12.2023].

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.*

Поступила в редакцию 11.12.2023

После доработки 19.06.2024

Принята к публикации 10.07.2024

# Управление в социально-экономических системах

© 2024 г. Г.М. КРЮКОВ (gkryukov@nes.ru),  
М.С. САНДОМИРСКАЯ, канд. физ.-мат. наук (msandomirskaya@hse.ru)  
(Национальный исследовательский университет  
Высшая школа экономики, Москва, Санкт-Петербург)

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ПОСЛЕДСТВИЙ УТЕЧКИ СКОРИНГОВОЙ МОДЕЛИ<sup>1</sup>

В данной статье моделируется раскрытие информации о скоринговой модели. Некоторые клиенты компании узнают свой внутренний рейтинг в компании. Такие клиенты могут изменить свое поведение, чтобы повысить свой внутренний рейтинг. Клиенты, знающие об утечке информации, являются игроками, которые могут выбирать стратегию: повышать ли свой внутренний рейтинг и если да, то насколько. Главная задача – найти в этой игре равновесие Байеса–Нэша и выяснить, как оно зависит от различных параметров, таких как масштаб утечки, распределение рейтингов.

*Ключевые слова:* скоринговая модель, байесова игра, манипулирование, раскрытие информации.

**DOI:** 10.31857/S0005231024080041, **EDN:** WPGHKX

### 1. Введение

Компании по всему миру внедряют методы машинного обучения для решения задач бизнеса. В частности, компании нередко вычисляют с помощью методов Data Science внутренние параметры пользователя (например, вероятность вернуть кредит для банка или привлекательность для сервиса онлайн-знакомств). Скоринговая модель присваивает каждому пользователю определенный рейтинг (score). Этот рейтинг может быть как дискретной случайной величиной (например, разделение пользователей на несколько кластеров), так и непрерывной (например, нейронная сеть часто возвращает действительные значения из отрезка  $[0,1]$ ). Эти модели могут быть полезны для решения самых разных бизнес-задач, таких как: “отобрать для участия в акции  $m$  пользователей с наибольшей склонностью к спонтанным покупкам” или “отобрать  $m$  пользователей из нужного компании кластера и предложить им пробную версию нового продукта”.

Проблема заключается в том, что периодически случаются утечки информации. В результате таких утечек пользователи могут узнать, какой у них

---

<sup>1</sup> Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

внутренний рейтинг либо к какому внутреннему кластеру они относятся. Например, в 2016 г. произошла утечка внутреннего рейтинга пользователей в приложении для знакомств Tinder [1]. Помимо утечки конечного рейтинга, пользователи могут узнать, как именно работает модель машинного обучения, а также рейтинги/распределение по кластерам других пользователей. Тогда у пользователей может появиться мотивация обмануть алгоритм: пользователи могут изменить свое поведение так, чтобы алгоритм машинного обучения улучшил им внутренний рейтинг либо отнес к более хорошему кластеру. Однако изменение поведения и иных видимых алгоритму характеристик не бесплатно: пользователю нужно потратить время и иногда деньги, чтобы изменить свой рейтинг (например, посетить определенные страницы на сайте, оформить заявку на определенный продукт). Кроме того, для разных пользователей издержки на то, чтобы изменить оценку алгоритма, могут различаться. Соответственно каждый пользователь индивидуально решает задачу: менять свое поведение, чтобы улучшить внутренний рейтинг, либо оставить все как есть.

В данной работе ставится вопрос о том, как будут вести себя пользователи при утечке информации о внутреннем ранжировании пользователей от фирмы. Как их поведение зависит от значений параметров скоринговой модели? Для этого моделируется рынок, где компания хочет отобрать  $m$  клиентов из  $n$  для определенной активности (выдача кредитов, участие в выгодной акции, тестирование нового продукта и т.п.). Сделаем предположение, что все клиенты одинаково ценят эту активность и что принять в ней участие лучше, чем не принять. Часть пользователей получают информацию о том, как работает алгоритм машинного обучения компании, который ранжирует/распределяет по кластерам клиентов. Эти пользователи стоят перед стратегическим выбором. С одной стороны, они могут понести определенные издержки, чтобы увеличить свой рейтинг либо перейти в лучший кластер, тем самым увеличить свои шансы на попадание в  $m$  клиентов, которые получают определенный бонус. С другой стороны, они могут принять свой текущий внутренний рейтинг как приемлемый и ничего не менять. Таким образом, клиенты, получившие доступ к внутренней информации о моделях машинного обучения фирмы, становятся игроками, которые выбирают оптимальную для себя стратегию. Эта ситуация представляет собой байесовскую игру, и далее исследуется ее равновесие. Связь стратегических последствий и вида функции распределения издержек может быть использована для анализа устойчивости скоринговой модели к утечкам данных. Различные скоринговые модели могут включать параметры, в большей или меньшей степени сложные для манипулирования информированным клиентом, так что фирма, выбирая конкретную скоринговую модель, может заранее спрогнозировать потенциальные масштабы скоринговых ошибок при небольших или значительных утечках. Это может способствовать повышению безопасности и устойчивости применяемых скоринговых моделей.



### *1.1. О скоринговых моделях в литературе*

Центральное место в данной работе занимает модель машинного обучения, которая производит скоринг клиентов. Модели скоринга пользователей используются в индустрии и активно развиваются. Каноничным примером являются модели кредитного скоринга, которые оценивают кредитоспособность клиентов. Для оценки кредитного рейтинга активно применяются методы науки о данных, в том числе методы интерпретируемого глубинного обучения [2] и генетические иерархические сети [3]. Авторы в [4] установили, что после внедрения продвинутых методов, указанных выше, в которых клиенты не осведомлены о детальном механизме работы скоринговой модели, они стали хуже понимать, какие шаги им следует предпринять, чтобы улучшить свой кредитный рейтинг. В этой работе предполагается, что при утечке информации о работе модели кредитного скоринга у клиентов станет больше понимания, как можно повлиять на свой кредитный рейтинг, и поэтому клиенты могут захотеть манипулировать своим рейтингом.

Отметим, что компании могут оценивать пользователей не только для кредитного скоринга. Так, продвинутые методы машинного обучения активно применяются для предсказания совершения пользователем определенного действия, например покупки определенного товара [5]. Эти данные также применяются для принятия бизнес-решений о стратегиях проведения акций и распределения персональных скидок. Поэтому информация о подобных моделях скоринга клиентов также может быть использована пользователями для получения выгоды.

Стоит отметить, что алгоритмы машинного обучения применяются также для кластеризации пользователей по категориям [6]. В этом случае пользователи также имеют стимулы манипулировать моделью при ее раскрытии, чтобы попасть в более привлекательный для себя кластер.

### *1.2. О теоретико-игровом контексте в модели*

Для моделирования ситуации утечки информации о скоринговой модели будет использоваться теоретико-игровой подход, эффективность которого для изучения эмпирических задач отмечается, например, в [7]. Игровая составляющая возникает из-за того, что клиенты (игроки в модели) претендуют на конечное количество блага, так что повышение рейтинга отдельного клиента снижает шансы быть выбранными для остальных. Имея представление о механизме скоринговой модели, клиент способен рассчитать свой собственный рейтинг, однако рейтинг других клиентов ему неизвестен, и он может полагаться лишь на некоторое общеизвестное распределение рейтингов в популяции. Также клиенты действуют независимо и не наблюдают действия, предпринимаемые другими, так что можно считать их взаимодействие одновременным. Таким образом, будет построена байесовская игра [8].

Стоит отметить, что идея манипулирования нередко встречается в теоретико-игровых моделях, в том числе моделях оптимального управления.



Например, в [9–12] исследуются оптимальные механизмы управления в системах с активными элементами. Наиболее полный обзор работ представлен в [13]. По сути это направление исследует задачу дизайна механизмов, в которой ключевой идеей является раскрытие информации о типе агентов и адекватный учет поведения агента в целевой функции центра. С одной стороны, большинство работ так или иначе посвящено исследованию проблемы манипулирования и выделению классов предпочтений, для которых процедура управления устойчива к манипулированию. При этом под манипулированием понимается искажение агентами своих заявляемых предпочтений, и это искажение, как правило, не требует явных издержек от агентов. В данной работе внимание акцентируется на возникающих сопутствующих издержках на искажение рейтинга, что более характерно, например, для работ по манипулированию репутацией [14, 15]. Также важной особенностью этой работы является то, что в результате утечки активной становится некоторая случайная подвыборка агентов, а не все агенты, причем в этой подвыборке, вследствие гетерогенности по издержкам, найдутся и те, кто захочет манипулировать, и те, кто предпочтет оставить свои истинные характеристики. Таким образом, следует отметить, что даже при экзогенном сужении множества активных агентов проблема манипулируемости не исчезает, а ее анализ требует совместного учета поведения и активных агентов, и тех кто формально присутствует в системе с фиксированными характеристиками.

Поскольку целью скоринговой модели является отбор ограниченного множества клиентов, то при анализе будут возникать структуры, характерные для работ в области конечных рынков [16]. Одна из таких работ связана с исследованием ценовой конкуренции на рынках с редким товаром и частной информацией об оценках товара покупателями [17]. Авторы рассматривают рынок с двумя продавцами, у каждого из которых есть одна единица идентичного товара. Продавцы одновременно выбирают цены, после чего покупатели выбирают, к какому продавцу идти за товаром либо не идти ни к кому. Условия, выводимые при решении задачи покупателя, схожи с теми, что возникают в данной работе при анализе игры с единственным кандидатом, выбираемым скоринговой моделью (победителем). Если говорить о модели с несколькими победителями, то полученные здесь формулы с биномиальным коэффициентом идейно похожи на результаты в [18] об олигополии Бертрана с ограничениями на производственные мощности фирм.

## 2. Модель

Формализуем игровую модель, в которой пользователи, получившие информацию о скоринговом алгоритме, решают, пользоваться ли полученной информацией для увеличения своего рейтинга.

Пусть имеется фирма, которая производит определенный продукт (например, банк, выдающий кредитные карты). Пусть есть  $n$  потребителей, которые претендуют на продукт ( $n$  клиентов, которые хотят получить кредитные

карты). При этом у фирмы есть ограничение (например, на количество пластика для карт), поэтому они готовы продать только  $m < n$  единиц товара. Предположим, что все покупатели ценят товар одинаково. Обладание товаром приносит единичную полезность.

Фирма решает использовать некоторую скоринговую модель для классификации своих пользователей. В этой статье предполагается, что скоринговая модель классифицирует потребителей только на две категории: хороший (единица) и плохой (ноль). Механизм работы скоринговой модели основан на некоторых методах машинного обучения и по сути представляет некоторый “черный ящик” ввиду сложности своей работы, однако фирма знает входные параметры этого ящика, при необходимости может оценить их вес в итоговом результате классификации прогонкой модели на достаточно широкой выборке своих клиентов, характеристики которых известны фирме. Также по этой выборке фирма может аппроксимировать распределение издержек клиентов на то, чтобы поменять какие-то из своих индивидуальных параметров, важных для скоринговой модели, на значения, достаточные чтобы быть классифицированными как “хорошие”.

В игре рассматривается ситуация, когда произошла утечка информации о скоринговой модели. Пользователь, получивший доступ к этой информации, узнает, к какому классу его относит модель и какие параметры она использует. Также пользователь, получивший доступ к информации, узнает, какое распределение имеет рейтинг на выборке из всех клиентов (клиентов много, рейтинг определен для всех, а не только для  $n$ , которые хотят получить кредитную карту или другую награду). Однако пользователь достоверно не знает, какими характеристиками обладают другие пользователи, знающие об утечке, т.е. стратегический пользователь принимает дальнейшие решения в условиях неполной информации.

Пусть потребитель согласно скоринговому алгоритму является хорошим с вероятностью  $p$ . Клиент с вероятностью  $\alpha$  нашел необходимые данные. Если покупатель узнает, что модель относит его к хорошему типу, то у него нет стимулов менять свое привычное поведение. Другими словами, изменение поведения таким образом, чтобы алгоритм классифицировал его как плохого, является слабо доминируемой стратегией и поэтому не будет использоваться в дальнейшем анализе.

Если потребитель узнает, что алгоритм относит его к плохому типу, у него появляется стратегия изменить свое поведение, понести издержки  $c_i$  и мимикрировать под хорошего. Полагаем, что  $c_i$  могут быть различны для разных игроков в рамках носителя функции распределения, каждый игрок знает свое значение издержек  $c_i$ . Действительно, кому-то надо сделать совсем немного, чтобы выполнить условия алгоритма для “хорошего потребителя”, а кому-то надо сильно изменить свое поведение и соответственно понести большие издержки. Пусть функция распределения издержек на “мимикрирование” пользователей, которых модель относит к плохому типу, равна  $F(x) = P[c_i \leq x]$ ;

для согласованности с нормировкой полезности к 1 предположим также, что функция распределения издержек определена на  $[0; 1]$ . Если бы какие-то потребители имели издержки на мимикрирование выше, чем полезность от обладания продуктом фирмы, то они гарантированно не станут мимикрировать и их можно исключить из рассмотрения. Предположим, что  $F(x)$  известна всем стратегическим игрокам. Уместно считать величину издержек относительной величиной – долей полезности от обладания продуктом. Тогда все дальнейшие расчеты в модели линейно масштабируются на необходимый размер “приза”. В качестве возможного примера параметра скоринговой модели, издержки на изменение которого высоки для большинства клиентов, можем рассмотреть наличие и размер ипотечного кредита у заемщика (на данном примере легко видеть, что издержки могут и превышать размер “приза”, так что такой параметр в модели вряд ли будет подвержен искажению). Напротив, пример параметра, искажение которого малозатратно, – наличие полностью заполненного открытого профиля в социальной сети.

Отметим, что для поставленных здесь целей не важно детальное знание внутреннего механизма скоринга, а достаточно знать только вероятность  $p$  и функцию  $F(x)$ , которые относятся как к скоринговому механизму, так и к характеристикам популяции пользователей, на которой его планируется применять.

С вероятностью  $1 - \alpha$  покупатель ничего не знает об утечке. Он не является стратегическим игроком, утечка информации не влияет на его внутренний рейтинг и поведение. Таким образом, стратегическими игроками в данной игре являются только агенты, знающие об утечке, которые относятся скоринговой моделью к плохому классу. При этом байесовым типом игрока  $i$  являются его издержки  $c_i$ .

Выигрыш стратегического агента при выборе стратегии “НЕ мимикрировать” равен вероятности получить товар, если скоринговая модель классифицирует игрока как плохого, т.е. должен допускать ситуацию, что товара больше, чем хороших, определяемых алгоритмом, так что придется случайно выбрать оставшихся из категории плохих. Выигрыш стратегического агента при выборе стратегии “мимикрировать” равен разности вероятности получить товар, если модель классифицирует игрока как хорошего, и издержек на мимикрирование. Отметим, что стратегии выбираются игроками одновременно и независимо.

Осталось обсудить, как фирма определяет ровно  $m$  победителей. Пусть  $k$  агентов классифицированы скоринговой моделью как хорошие (это могут быть как изначально хорошие, так и стратегические, которые решили изменить данные о себе и обмануть модель). Если  $k > m$ , то победителями становятся случайные  $m$  из  $k$  хороших по модели клиентов. Если  $k \leq m$ , то победителями становятся все хорошие по модели клиенты, а также из плохих дополнительно случайно выбирается  $m - k$  победителей.

Таким образом, одновременная игра состоит в том, что каждый клиент из узнавших про утечку и классифицированных плохими делает бинарный выбор и решает, готов ли он вкладываться в соответствии со своими издержками в улучшение рейтинга или оставить все как есть. Когда “плохой”, в соответствии с исходной работой скорингового алгоритма, клиент решает мимикрировать под “хорошего”, это искажает результаты классификации модели и может приводить к неправильному выбору фирмы победителя. Задачей является поиск равновесных стратегий для агентов, узнавших об утечке, т.е. определение для каждого клиента оптимального выбора стратегии “мимикрировать” или нет в зависимости от числа “призов”, избирательности скоринговой модели  $p$ , используемых ею параметров и, как следствие, распределения издержек на мимикрирование этими параметрами в популяции, масштаба утечки, а также от величины собственных издержек на улучшение своего типа, которые клиент знает с точностью. Этот выбор неочевиден, поскольку отдельный клиент не может полагаться исключительно на собственную стратегическую активность, а должен корректно предсказать изменение поведения и других активных агентов, которое повлияет на итоговую вероятность быть выбранным. При этом попадание в число победителей носит вероятностный характер, а издержки на мимикрирование детерминированы и невозвратны.

Исследовав равновесную стратегию всех клиентов, фирма сможет спрогнозировать, какая доля информированных клиентов решит мимикрировать и, следовательно, как это исказит результаты скоринга фирмы. Поскольку скоринговая модель может включать различные параметры, стоимость манипулирования которыми может быть различна для пользователя, то при одних и тех же масштабах утечек данных в разных моделях может наблюдаться большая и меньшая степень искажения. Соответственно, на этапе выбора скоринговой модели фирма может учесть дальнейшие риски от подобных утечек.

### 3. Равновесие Нэша в игре с одним победителем

Рассмотрим частный случай модели при  $m = 1$ . Например, компания может выбирать одного клиента, которого хотят сделать лицом нового продукта. Часть клиентов (плохие согласно алгоритму) ей точно не подойдут, а среди хороших можно брать любого, так как все подходят в достаточной степени.

Ищем симметричное равновесие Байеса–Нэша. Обозначим через  $y$  вероятность того, что плохой будет мимикрировать под хорошего в равновесии. Отметим, что данная вероятность в дальнейшем будет складываться из того, что агенты некоторых типов издержек будут детерминированно мимикрировать, а других типов – не будут, однако поскольку отдельный игрок не знает истинный тип других агентов (для него это случайная величина), то их поведение также будет выглядеть как случайное, вероятностное. Также определим  $q$  как апостериорную вероятность того, что игрок будет классифициро-

ван алгоритмом как хороший тип с учетом стратегического мимикрирования доли потребителей, узнавших об утечке,

$$q = p + (1 - p)\alpha y.$$

Если игрок не мимикрирует, то у него есть шанс выиграть только в случае, когда все остальные также окажутся плохими *ex-post*. Ожидаемый выигрыш от стратегии “не мимикрировать”:

$$u_i(0) = \frac{1}{n}(1 - q)^{n-1}.$$

Выпишем формулу ожидаемого выигрыша при выборе стратегии “мимикрировать”. Независимо от исхода игроку придется заплатить  $c_i$ . В случае, если ровно  $k$  конкурентов будут классифицированы как хорошие, вероятность победы равна  $\frac{1}{k+1}$ . Случайная величина “число конкурентов, которые будут классифицированы как хорошие”, имеет биномиальное распределение:  $\text{Bin}(n - 1, q)$ . Итого ожидаемый выигрыш от стратегии “мимикрировать”, выражается формулой

$$u_i(1) = -c_i + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \binom{n-1}{k} q^k (1-q)^{n-1-k}.$$

Воспользуемся следующим тождеством, доказанным в [17]:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \binom{n-1}{k} q^k (1-q)^{n-1-k} = \frac{1 - (1-q)^n}{nq}.$$

Ожидаемый выигрыш от стратегии “мимикрировать” переписывается в следующем виде:

$$u_i(1) = -c_i + \frac{1 - (1-q)^n}{nq}.$$

Игрок выберет ту из двух стратегий, которая ему принесет наибольший ожидаемый выигрыш. Заметим, что ожидаемый выигрыш от стратегии “не мимикрировать” не зависит от  $c_i$ , в то время как ожидаемый выигрыш от стратегии “мимикрировать” уменьшается с ростом  $c_i$ . Значит, оптимальная стратегия игрока  $i$  является монотонной (пороговой). Иными словами, существует такое пороговое значение издержек  $c^*$ , что для всех  $c_i < c^*$  игрок  $i$  мимикрирует и для всех  $c_i > c^*$   $i$ -й игрок НЕ мимикрирует. При  $c = c^*$  ожидаемые выигрыши от обеих стратегий одинаковы.

Тогда вероятность того, что плохой будет мимикрировать под хорошего в равновесии, равна вероятности того, что издержки окажутся ниже порогового уровня, и выражается через  $c^*$  как

$$y = P[c_i \leq c^*] = F(c^*).$$

Условие для  $c^*$  определяется из равенства ожидаемых выигрышей от двух чистых стратегий:

$$c^* = -\frac{1}{n}(1-q)^{n-1} + \frac{1-(1-q)^n}{nq}.$$

$$c^* = \frac{1-(1-q)^{n-1}}{nq}.$$

Важно уточнить, что эта формула является выражением в неявном виде, ведь  $q$  зависит от  $y$ , который однозначно определен через  $c^*$ :

$$q(c^*) = p + (1-p)\alpha y = p + (1-p)\alpha F(c^*).$$

Введем функцию  $f(q)$ :

$$f(q) = \frac{1-(1-q)^{n-1}}{nq}.$$

Тогда условие на  $c^*$  записывается в виде  $c^* = f(q(c^*))$ .

*Теорема 1.* Для непрерывной функции распределения оценок  $F(c)$  пороговое значение  $c^*$  в оптимальной монотонной стратегии существует и единственно.

*Доказательство.* Сначала заметим, что  $f(q)$  монотонно убывает с ростом  $q$  при  $n > 2$  и постоянно при  $n = 2$ . Докажем это. Рассмотрим частную производную

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{-1 + (1-q)^{n-2}((n-2)q + 1)}{nq^2}.$$

Знаменатель больше нуля. Рассмотрим числитель. Заметим, что при  $n = 2$  числитель равен нулю.

Выполняется следующее неравенство:

$$(1-q)^n(nq+1) > (1-q)^{n+1}((n+1)q+1).$$

Действительно,

$$(1-q)^n(nq+1) - (1-q)^{n+1}((n+1)q+1) = (n+1)q^2(1-q)^n > 0.$$

Из этого утверждения следует монотонность: числитель  $-1 + (1-q)^{n-2} \times ((n-2)q + 1)$  убывает по  $n$ , при этом равен 0 при  $n = 2$ . Отсюда следует, что  $-1 + (1-q)^{n-2}((n-2)q + 1) < 0$  при  $n > 2$ , а отсюда следует, что частная производная отрицательная.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial q} = 0, & \text{если } n = 2, \\ \frac{\partial f}{\partial q} < 0, & \text{если } n > 2. \end{cases}$$

Теперь докажем, что  $\frac{1}{n} \leq c^* \leq \frac{n-1}{n}$ . Для этого достаточно показать, что  $\frac{1}{n} \leq f(q) \leq \frac{n-1}{n}$  при  $q \in (0, 1)$ . В силу монотонности достаточно посчитать значения функции в точках  $q = 0$  и  $q = 1$ .

Для подсчета предела в точке  $q = 0$  воспользуемся правилом Лопиталья.

$$\lim_{q \rightarrow 0} f = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - q)^{n-1}}{nq} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{(n-1)(1-q)^{n-2}}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Также вычислим значение в точке  $q = 1$ :  $f(1) = \frac{1}{n}$ .

Тогда и функция  $f(q)$ , и равновесное значение  $c^*$  лежат в искомом интервале.

Наконец осталось рассмотреть следующую функцию:

$$g(c) = c - f(q(c)).$$

Решение уравнения  $g(c) = 0$  будет являться решением исходного уравнения на  $c^*$ . Из свойств функции  $f$  следует, что  $g(c)$  монотонно возрастает по  $c$ . Также  $g(c)$  непрерывна.

На краях интервала имеем  $g(0) \leq -\frac{n-1}{n} < 0$  и  $g(1) \geq 1 - \frac{1}{n} > 0$ . Тогда по теореме о промежуточном значении следует, что найдется такая точка, где  $g = 0$ . Теорема доказана.

### *Анализ результатов игры с одним победителем*

Изучим найденное равновесие в игре с  $m = 1$ .

*Следствие 1.* В игре с двумя игроками для любой функции распределения издержек  $F(c)$  имеем  $c^* = \frac{1}{2}$ .

Действительно,

$$c^* = \frac{1 - (1 - q)^{2-1}}{2q} = \frac{1}{2}.$$

Получается, что при  $n = 2$  принятие решения игроком не зависит от доли хороших типов, доли стратегических игроков и распределения издержек на мимикрирование.

При доказательстве теоремы 1 попутно было доказано

*Следствие 2.* Для любых значений параметров модели  $\frac{1}{n} \leq c^* \leq \frac{n-1}{n}$ .

Из этого следует, что при любых значениях параметров модели найдутся типы агентов, которым оптимально мимикрировать и не мимикрировать. Если издержки маленькие  $c_i < \frac{1}{n}$ , то игроку оптимально мимикрировать независимо, например, от масштаба утечки или функции распределения издержек других игроков. И наоборот, при высоких издержках  $c_i > \frac{n-1}{n}$  игрок никогда не мимикрирует.

*Утверждение 1. Пороговое значение  $c^*$  в равновесии монотонно убывает с ростом  $p$ ,  $\alpha$  при  $n > 2$ . Также  $c^*$  имеет монотонную зависимость от параметра распределения  $\lambda$ , если функция распределения  $F$  монотонно зависит от  $\lambda$ .*

*Доказательство.* Поскольку  $c^*$  не выражено аналитически, то будем пользоваться теоремой о неявной функции. Рассмотрим уравнение связки:

$$g = c^* - f(q(c^*)) = 0.$$

Для анализа зависимости порогового значения от доли  $p$  определим знак производной:

$$\frac{\partial c^*}{\partial p} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial p}}{\frac{\partial g}{\partial c^*}}.$$

Числитель:

$$\frac{\partial g}{\partial p} = - \frac{\partial f}{\partial p} = - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p} > 0,$$

так как ранее было показано, что  $\frac{\partial f}{\partial q} < 0$  при  $n > 2$ , а  $\frac{\partial q}{\partial p} = 1 - \alpha F(c^*) > 0$ .

Знаменатель:

$$\frac{\partial g}{\partial c^*} = 1 - \frac{\partial f}{\partial c^*} = 1 - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial c^*} \geq 1 > 0,$$

так как  $\frac{\partial f}{\partial q} < 0$  при  $n > 2$ , и  $\frac{\partial F}{\partial c^*} \geq 0$  по определению функции распределения, так что  $\frac{\partial q}{\partial c^*} = (1 - p)\alpha \frac{\partial F}{\partial c^*} \geq 0$ .

Тогда верно, что  $\frac{\partial c^*}{\partial p} < 0$ .

Данный результат имеет естественную интерпретацию: чем вероятнее появление действительно сильных по модели агентов, тем сложнее с ними конкурировать слабым, хоть и стратегическим игрокам, а значит, меньше плохих агентов будет пытаться мимикрировать.

Аналогично доказываем зависимость от  $\alpha$  при  $n > 2$ . Получаем

$$\frac{\partial c^*}{\partial \alpha} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial \alpha}}{\frac{\partial g}{\partial c^*}} < 0$$

в силу того, что

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = - \frac{\partial f}{\partial \alpha} = - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} = - \frac{\partial f}{\partial q} ((1 - p)F(c^*)) > 0.$$

Этот результат обусловлен похожей логикой стратегического поведения агентов: чем вероятнее появление слабого агента, знающего про утечку информации, тем вероятнее и с ними тоже придется конкурировать, а значит,



меньше слабых согласно исходной скоринговой модели агентов будут пытаться мимикрировать.

Наконец, рассмотрим параметрическое семейство функций распределения  $F(c, \lambda)$ . Определим возможный характер зависимости от параметра  $\lambda$ , опять используя теорему о неявной функции:

$$\frac{\partial c^*}{\partial \lambda} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial \lambda}}{\frac{\partial g}{\partial c^*}}.$$

Преобразуем числитель

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = -\frac{\partial f}{\partial \lambda} = -\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \lambda} = -\frac{\partial f}{\partial q} (1-p)\alpha \frac{\partial F}{\partial \lambda}.$$

Отсюда следует, что  $\text{sgn}\left(\frac{\partial q}{\partial \lambda}\right) = \text{sgn}\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)$ , а значит

$$\text{sgn}\left(\frac{\partial c^*}{\partial \lambda}\right) = -\text{sgn}\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right).$$

В частности, если  $F$  монотонно возрастает (убывает) с ростом параметра  $\lambda$ , то пороговое значение  $c^*$  монотонно убывает (возрастает) с ростом параметра  $\lambda$ . Так, рост параметра  $\lambda$  в функции распределения издержек означает, что в обществе снижаются издержки на мимикрирование (например, новая скоринговая модель использует более очевидные параметры, поддающиеся более простому искажению), и это приводит к уменьшению порогового значения, при котором игрок перестает пытаться мимикрировать.

Утверждение 1 доказано.

Стало понятно, как изменяется пороговое значение с изменением параметра  $\lambda$ , и данный результат не кажется интуитивным до тех пор, пока не будет выяснено, как меняется при этом доля тех стратегических агентов, кто решит мимикрировать. Это величина соответствует значению  $F(c^*)$ . Имеем функцию распределения  $F(c, \lambda)$ . Обозначим через  $F^{(1,0)}$ ,  $F^{(0,1)}$  производные  $F$  по первой и второй переменной соответственно. По определению функции распределения  $F^{(1,0)} \geq 0$ . Пусть функция распределения монотонно зависит от параметра  $\lambda$ , т.е. знак  $F^{(0,1)}$  одинаковый для всех значений параметра. Исследуем знак  $\frac{\partial F(c^*(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda}$ . Преобразуем

$$\frac{\partial F(c^*(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial c^*}{\partial \lambda} F^{(1,0)} + F^{(0,1)} = -\frac{-\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial F} F^{(0,1)}}{1 - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial F} F^{(1,0)}} F^{(1,0)} + F^{(0,1)},$$

что дает

$$\frac{\partial F(c^*(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda} = \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial F} F^{(1,0)}}{1 - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial F} F^{(1,0)}} + 1 \right) F^{(0,1)}.$$

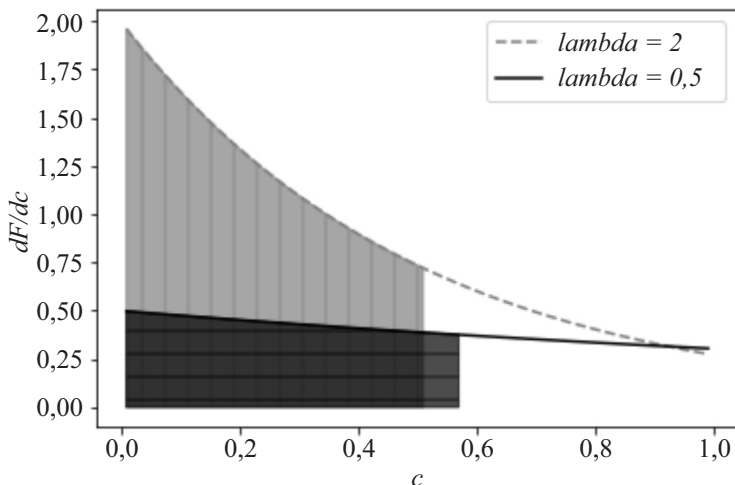


Рис. 1. Равновесные пороговое значение и доля мимикрирующих при экспоненциальном распределении издержек.

Выше было показано, что  $\frac{\partial f}{\partial q} < 0$ ,  $\frac{\partial q}{\partial F} > 0$ ,  $F^{(1,0)} \geq 0$  при  $n > 2$ . Также легко видеть, что  $\frac{x}{1-x} > -1$  при  $x \leq 0$ . Из этих утверждений следует, что выражение в больших скобках положительно. Отсюда заключаем:

$$\operatorname{sgn} \left( \frac{\partial F(c^*(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda} \right) = \operatorname{sgn}(F^{(0,1)}).$$

Рассмотрим этот эффект подробнее на примере экспоненциального распределения. Зафиксируем  $n = 3$ ,  $m = 1$ ,  $p = 0,2$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $F(c, \lambda) = 1 - \exp(-\lambda_i c)$ , где  $\lambda_1 = 0,5$ ,  $\lambda_2 = 2$ .

Численно решим уравнение  $c^* - f(q(c^*)) = 0$  и найдем  $c^*$  с точностью до четырех знаков после запятой.

$$\begin{aligned} c^*(\lambda_1) &= 0,5671, \\ c^*(\lambda_2) &= 0,5143, \\ F(c^*(\lambda_1), \lambda_1) &= 0,2469, \\ F(c^*(\lambda_2), \lambda_2) &= 0,6425. \end{aligned}$$

В рассмотренном примере увеличение  $\lambda$  повлекло за собой небольшое уменьшение порогового значения, зато значительно увеличило долю мимикрирующих.

На рис. 1 приведен график с плотностями распределения при  $\lambda_1 = 0,5$ ,  $\lambda_2 = 2$  и значениями доли мимикрирующих в равновесии как площадь под графиками при  $c \in [0, c^*]$ .

Подведем итоги. Пусть распределение издержек изменилось таким образом, что  $F(c)$  стало больше при всех значениях  $c$ . Это равносильно упрощению скоринговой модели, повышению ее уязвимости. Тогда пороговое значение в равновесии  $c^*$  уменьшится, однако не настолько сильно: вероятность

того, что потребитель будет мимикрировать, увеличится, как и доля мимикрирующих. Кроме того, как было выяснено ранее,  $c^*$  уменьшается с ростом  $p$  и  $\alpha$ . Так как эти параметры не влияют на распределение, то вероятность того, что потребитель будет мимикрировать, также уменьшается с ростом  $p$  и  $\alpha$ .

#### 4. Равновесие Нэша в игре с $m$ победителями

Пусть теперь  $m \leq n$  хороших согласно скоринговой модели игроков получают доступ к продукту. Будем искать симметричное равновесие Байеса–Нэша. Пусть  $y$  – вероятность того, что плохой будет мимикрировать под хорошего в равновесии. Аналогично случаю с одним победителем  $q$  как вероятность того, что игрок будет классифицирован алгоритмом как хороший тип, вычисляется по формуле полной вероятности:

$$q = p + (1 - p)\alpha y.$$

Найдем ожидаемые выигрыши  $i$ -го игрока, который является стратегическим агентом, от стратегий “мимикрировать” и “не мимикрировать”. Пусть  $k$  конкурентов классифицированы как хороший тип. Как и в случае с одним победителем, случайная величина “число конкурентов, которые будут классифицированы как хорошие”, имеет биномиальное распределение:  $\text{Bin}(n - 1, q)$ . Осталось посчитать ожидаемые выигрыши  $i$ -го игрока.

Если  $k$  конкурентов классифицированы как хороший тип и  $i$ -й игрок выбирает стратегию “не мимикрировать”, то при  $m \leq k$  все места будут заняты игроками, которые будут классифицированы как хорошие. Если  $m > k$ , то остается  $m - k$  товаров для плохих по модели игроков, вероятность получить их равна  $\frac{m-k}{n-k}$ .

Если  $k$  конкурентов классифицированы как хороший тип и  $i$ -й игрок выбирает стратегию “мимикрировать”, то при  $m > k$  игроки, которые классифицированы моделью как хорошие, гарантированно получают товар, а значит  $i$ -й игрок с единичной вероятностью получит товар. Если  $m \leq k$ , то  $k + 1$  хороших по модели игроков будут конкурировать за  $m$  мест. Поэтому вероятность получить товар равна  $\frac{m}{k+1}$ .

Итак, ожидаемый выигрыш от стратегии “не мимикрировать”:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \max \left( 0, \frac{m-k}{n-k} \right) \binom{n-1}{k} q^k (1-q)^{n-1-k}.$$

Ожидаемый выигрыш от стратегии “мимикрировать”:

$$-c_i + \sum_{k=0}^{n-1} \min \left( 1, \frac{m}{k+1} \right) \binom{n-1}{k} q^k (1-q)^{n-1-k}.$$

Заметим, что ожидаемый выигрыш от стратегии “не мимикрировать” не зависит от  $c_i$ , в то время как ожидаемый выигрыш от стратегии “мимикрировать” уменьшается с ростом  $c_i$ . Значит, оптимальная стратегия игрока  $i$  является монотонной в том же смысле, что и в разделе 3: существует  $c^*$  такое, что для всех  $c_i < c^*$   $i$ -й игрок мимикрирует и для всех  $c_i > c^*$   $i$ -й игрок не мимикрирует. При  $c = c^*$  ожидаемые выигрыши от обеих стратегий одинаковы.

Вероятность того, что плохой будет мимикрировать под хорошего в равновесии, выражается через  $c^*$ :

$$y = P[c_i \leq c^*] = F(c^*).$$

Приравнивая ожидаемые выигрыши от чистых стратегий, получаем условие на пороговое значение  $c^*$ :

$$c^* = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \min \left( 1, \frac{m}{k+1} \right) - \max \left( 0, \frac{m-k}{n-k} \right) \right) \binom{n-1}{k} q^k (1-q)^{n-1-k},$$

где

$$q = p + (1-p)\alpha F(c^*).$$

Преобразуем полученное выражение. Если  $k < m$ , то

$$\min \left( 1, \frac{m}{k+1} \right) - \max \left( 0, \frac{m-k}{n-k} \right) = 1 - \frac{m-k}{n-k} = \frac{n-m}{n-k}.$$

Если  $k \geq m$ , то

$$\min \left( 1, \frac{m}{k+1} \right) - \max \left( 0, \frac{m-k}{n-k} \right) = \frac{m}{k+1} - 0 = \frac{m}{k+1}.$$

Тогда получаем следующее выражение для порогового значения:

$$c^* = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n-m}{n-k} \binom{n-1}{k} q^k (1-q)^{n-1-k} + \sum_{k=m}^{n-1} \frac{m}{k+1} \binom{n-1}{k} q^k (1-q)^{n-1-k}.$$

Для удобства анализа равновесия введем дополнительную функцию

$$\tilde{f}(m, q) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n-m}{n-k} \binom{n-1}{k} q^k (1-q)^{n-1-k} + \sum_{k=m}^{n-1} \frac{m}{k+1} \binom{n-1}{k} q^k (1-q)^{n-1-k}$$

и перепишем условие в виде

$$\begin{aligned} c^* &= \tilde{f}(m, q(c^*)), \\ q(c^*) &= p + (1-p)\alpha F(c^*). \end{aligned}$$

Начнем с анализа зависимости равновесного порога от  $q$ . Эта зависимость отражает предельный рост равновесного порога по апостериорной вероятности мимикрирования. Технически это важный объект, поскольку влияние других параметров на равновесие в итоге зависит от знака  $df/dq$ .

**Утверждение 2.** В общем случае функция  $\tilde{f}(m, q)$  является монотонной по  $q$  тогда и только тогда, когда  $m = 1$  или  $m = n - 1$ .

**Доказательство.** В первую очередь заметим, что  $\tilde{f}(m = 1, q) = \tilde{f}(m = n - 1, 1 - q)$ .

Как было доказано в исследовании игры с одним победителем,  $\tilde{f}(m = 1, q)$  строго убывает с ростом  $q$ . Тогда отсюда следует, что  $\tilde{f}(m = n - 1, q)$  строго возрастает с ростом  $q$ .

Теперь покажем, что при  $1 < m < n - 1$  функция  $\tilde{f}(m, q)$  не является монотонной по  $q$ . Для этого вычислим пределы производной при  $q \rightarrow 0$  и  $q \rightarrow 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n-m}{n-k} \binom{n-1}{k} q^{k-1} (1-q)^{n-2-k} (k - (n-1)q) + \\ &+ \sum_{k=m}^{n-1} \frac{m}{k+1} \binom{n-1}{k} q^{k-1} (1-q)^{n-2-k} (k - (n-1)q). \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что  $\lim_{q \rightarrow 0} q^a (1-b)^b = 1$  при  $a = 0, b > 0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} &= \begin{cases} -(n-1) \frac{n-m}{n} + \frac{m}{2} \binom{n-1}{1}, & \text{если } m = 1, \\ -(n-1) \frac{n-m}{n} + \frac{n-m}{n-1} \binom{n-1}{1}, & \text{если } m > 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{(n-1)(n-2)}{2n}, & \text{если } m = 1, \\ \frac{n-m}{n}, & \text{если } m > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} &= \begin{cases} -\frac{n-m}{n-(n-2)}(n-1) + \frac{m}{n}(n-1), & \text{если } m = n-1, \\ -\frac{m}{n-1}(n-1) + \frac{m}{n}(n-1), & \text{если } m < n-1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(n-1)(n-2)}{2n}, & \text{если } m = n-1, \\ -\frac{m}{n}, & \text{если } m < n-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, возможны три случая:

1.  $m = 1$ . В этом случае  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} < 0$ .
2.  $m = n - 1$ . В этом случае  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} > 0$ .

3.  $1 < m < n - 1$ . В этом случае  $\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} > 0$  и  $\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} < 0$ . Тогда из непрерывности  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q}$  следует, что функция достигает максимума на  $q \in [0, 1]$  при  $q^* \in (0, 1)$ .

Итак, показано, что если  $1 < m < n - 1$ , то  $\tilde{f}(m, q)$  не является монотонной по  $q$ . По-видимому, используемые для описания  $\tilde{f}(m, q)$  комбинаторные суммы слишком сложны и не упрощаются в виде элементарных функций. Поэтому аналитически выразить  $q^*$ , которое максимизирует  $\tilde{f}(m, q)$  при фиксированном  $m$ , не удалось.

Утверждение 2 доказано.

Рассмотрим примечательный частный случай  $n = 2m$ ,  $m > 1$ . Пусть  $k \geq m$ . Тогда при  $n = 2m$  справедливо  $n - 1 - k < m$ . Также заметим, что при  $n = 2m$ :

$$\frac{n - m}{n - (n - 1 - k)} \binom{n - 1}{n - 1 - k} = \frac{m}{k + 1} \binom{n - 1}{k}.$$

Кроме того, при  $q = \frac{1}{2}$  выполнено  $q^{k-1}(1 - q)^{n-2-k} = 2^{3-n}$ .

Эти факты позволяют вычислить частную производную при  $q = \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} \left( n = 2m, q = \frac{1}{2} \right) = \\ & = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{m}{k+1} \binom{2m-1}{k} 2^{3-2m} (k + (2m - k - 1) - (2m - 1)) = 0. \end{aligned}$$

В общем случае непросто показать, что найденная точка является точкой максимума. Для примера рассмотрим  $n = 4$ ,  $m = 2$ . Условие второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial q^2} (n = 4, m = 2) = -1.$$

Таким образом,  $\tilde{f}$  является вогнутой функцией по  $q$  при  $n = 4$ ,  $m = 2$ , значит, в точке  $q = 0,5$  она достигает глобального максимума.

Интересен вопрос о том, к чему стремится точка максимума функции  $\tilde{f}$  (обозначим через  $q^*(n, m)$ ) при больших  $m$ . Для этого находим  $q^*$  при фиксированных  $n, m$  численными методами.

Замечаем, что чем больше  $n$ , тем больше зависимость  $q^*(m)$  похожа на линейную (уже при  $n = 100$  отмечаем  $R^2 > 99,9\%$  для регрессии  $q^* = \beta_0 + \beta_1 m$ ;  $R^2$  растет с ростом  $n$ ). Кроме того, с ростом  $n$   $q^*(m = 2)$  стремится к 0, а  $q^*(m = n - 2)$  стремится к 1. Это позволяет выдвинуть гипотезу о том, что при больших  $n$  и  $1 < m < n - 1$  точка максимума  $\tilde{f}(q)$  стремится к  $q^* = \frac{m-2}{n-4}$  (рис. 2). Проверка этой гипотезы интересна для дальнейших исследований; в случае истинности интересна интуиция результата.

*Утверждение 3. В общем случае пороговое значение  $c^*$  немонотонно по  $p$  и  $\alpha$ .*

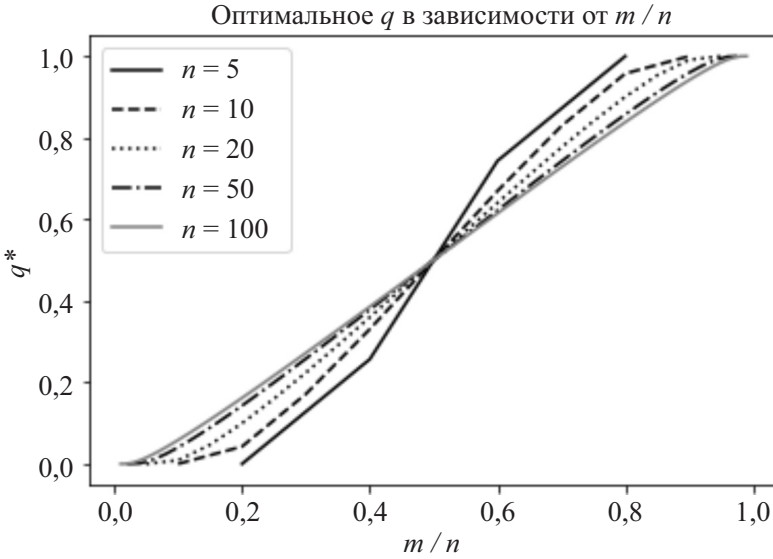


Рис. 2. Точка максимума  $\tilde{f}(q)$  в зависимости от  $n$  и отношения  $\frac{m}{n}$ .

*Доказательство.* Вычислим производные функции, заданной в неявном виде, как было сделано ранее в утверждении 2.

$$\tilde{g} = c^* - \tilde{f}(q(c^*)) = 0.$$

$$\operatorname{sgn} \left( \frac{\partial c^*}{\partial p} \right) = \operatorname{sgn} \left( - \frac{\frac{\partial \tilde{g}}{\partial p}}{\frac{\partial \tilde{g}}{\partial c^*}} \right) = \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} \right).$$

$$\operatorname{sgn} \left( \frac{\partial c^*}{\partial \alpha} \right) = \operatorname{sgn} \left( - \frac{\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \tilde{g}}{\partial c^*}} \right) = \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} \right).$$

Преобразования с частными производными аналогичны преобразованиям в утверждении 1, когда данные производные рассчитывались для случая  $m = 1$ . В утверждении 2 была доказана немонотонность  $\tilde{f}$  по  $q$  в общем случае. Отсюда следует, что  $\operatorname{sgn} \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} \right)$  не является постоянной величиной.

Но тогда и  $\operatorname{sgn} \left( \frac{\partial c^*}{\partial p} \right)$ ,  $\operatorname{sgn} \left( \frac{\partial c^*}{\partial \alpha} \right)$  не являются постоянными величинами при  $1 < m < n - 1$ . Случай  $m = 1$  был рассмотрен ранее, для  $m = n - 1$  все выводы противоположны случаю  $m = 1$  (т.е.  $\frac{\partial c^*}{\partial p} > 0$ ,  $\frac{\partial c^*}{\partial \alpha} > 0$  при  $m = n - 1$ ). Более того, очевидно, что максимумы по  $p$  и по  $q$  также однозначно связаны.

Утверждение 3 доказано.

Продемонстрируем немонотонность наглядно. Численно вычислим значение  $c^*$  при фиксированных значениях параметров из условий  $c^* = \tilde{f}(m, q(c^*))$ ,  $q = p + (1 - p)\alpha F(c^*)$ . Зафиксируем, что издержки распределены равномерно на отрезке  $[0, 1]$ , и найдем несколько решений уравнений для

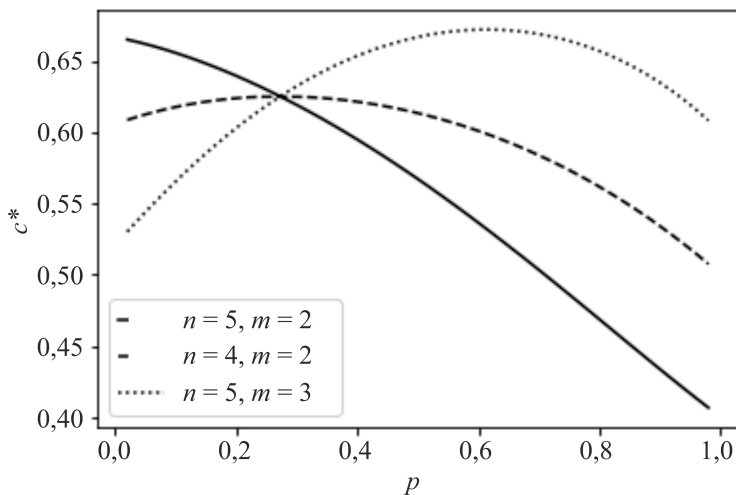


Рис. 3. Зависимость  $c^*$  от  $p$  при  $\alpha = 0,5$ ,  $F(c) = c$ .

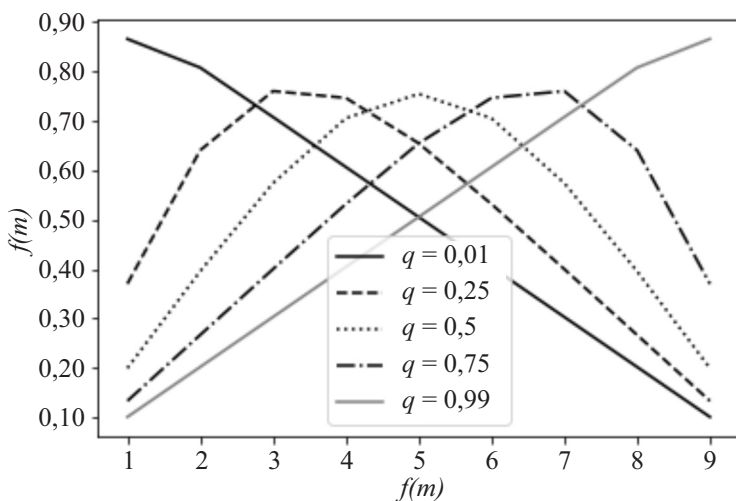


Рис. 4. Зависимость  $c^*$  от  $m$  при  $n = 20$ ,  $\alpha = 0,2$ ,  $F(c) = c$ .

разных значений параметра с точностью до четвертого знака после запятой.

$$c^*(n = 4, m = 2, p = 0,1, \alpha = 0,5) = 0,6175,$$

$$c^*(n = 4, m = 2, p = 0,3, \alpha = 0,5) = 0,6248,$$

$$c^*(n = 4, m = 2, p = 0,5, \alpha = 0,5) = 0,6132.$$

Таким образом, монотонности  $c^*$  по  $p$  в общем случае нет (рис. 3). Интуитивно объясним этот факт: с ростом вероятности  $p$  растет исходное число хороших агентов, таким образом, что при небольшой их доле есть смысл активно мимикрировать и бороться за сравнительно большое число “призов”. Однако если их доля уже высока, то конкурировать с ними сложно, вероятность победы слишком мала, так что доля мимикрирующих (и соответствующее пороговое значение) падает.



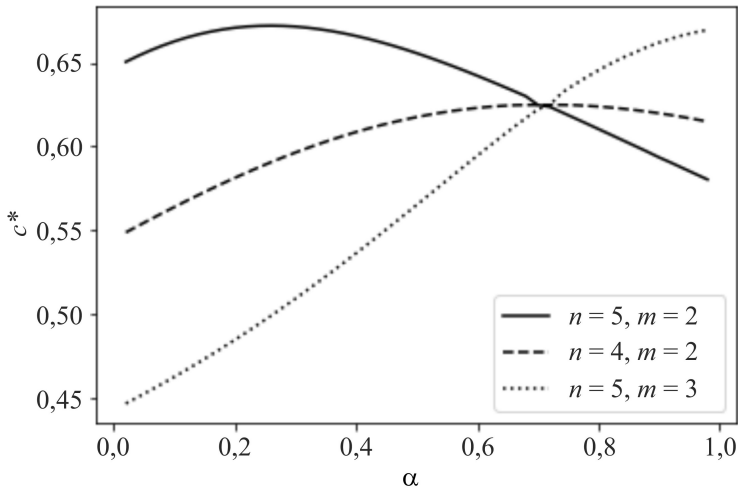


Рис. 5. Зависимость  $c^*$  от  $\alpha$  при  $p = 0,1$ ,  $F(c) = c$ .

Аналогично исследуем зависимость от масштаба утечки  $\alpha$ .

$$c^*(n = 4, m = 2, p = 0,1, \alpha = 0,5) = 0,6175,$$

$$c^*(n = 4, m = 2, p = 0,1, \alpha = 0,7) = 0,6248,$$

$$c^*(n = 4, m = 2, p = 0,1, \alpha = 0,9) = 0,6198.$$

Таким образом, монотонности  $c^*$  по  $\alpha$  в общем случае нет (рис. 4). Здесь действует аналогичная логика: с ростом утечки все больше слабых потенциально захочет мимикрировать под сильных и до какого-то уровня это будет для них выгодно, однако далее конкуренция станет слишком жесткой и поэтому желание мимикрировать снизится.

*Утверждение 4. Пороговое значение  $c^*$  немонотонно по  $m$  в общем случае.*

Как и в утверждении 3, вычислим  $c^*$  при различных значениях параметров с точностью до четырех знаков после запятой и покажем немонотонность порогового значения в равновесии по числу победителей.

$$c^*(n = 4, m = 1, p = 0,5, \alpha = 0,5) = 0,3910,$$

$$c^*(n = 4, m = 2, p = 0,5, \alpha = 0,5) = 0,6132,$$

$$c^*(n = 4, m = 3, p = 0,5, \alpha = 0,5) = 0,5045.$$

В этом случае объяснение заключается в том, что при росте числа победителей близко к числу всех участников может стать бессмысленно стараться и тратить средства на мимикрирование, так как и без этого вероятность войти в число победителей высока. Однако, как видно из рис. 5, для особых скоринговых моделей, порождающих очень большую или очень маленькую вероятность классификации игрока как хорошего, имеет место монотонная зависимость доли мимикрирующих от числа призов.

## 5. Заключение

В статье смоделирована ситуация, при которой часть клиентов компании узнает свой внутренний рейтинг в компании и может изменить свое поведение, чтобы увеличить внутренний рейтинг. Рассмотрена постановка, в которой скоринговая модель распределяет пользователей на “хороших” и “плохих” (бинарная классификация типов агентов).

Доказано, что равновесие существует, единственно и представляет собой профиль монотонных стратегий. Наличие внутреннего порогового значения говорит о том, что отнюдь не все агенты, получив доступ к механизму работы скоринговой модели, будут использовать эту информацию в манипулятивных целях.

Полагаем, что существует большой потенциал для дальнейших исследований. В случае бинарного распределения типов интересно подробнее изучить найденные немонотонные зависимости, например найти точки экстремумов аналитически в зависимости от значений параметров. Может быть полезно расширить бинарное распределение до дискретного, так как некоторые модели распределяют пользователей по нескольким кластерам, а также до непрерывного, так как многие модели возвращают рейтинг как некоторое действительное число, часто на отрезке  $[0, 1]$ .

Подводя итог, хотелось бы отметить, что рассмотренная проблема манипулирования поведением является примером проявления свойства естественного интеллекта непрерывно адаптироваться и искать сложные и нетривиальные стратегии улучшения своей полезности. В этом смысле вряд ли автоматизированные модели способны в полной мере противостоять всем возможностям, потенциально доступным человеку. Однако если заранее спрогнозировать стратегическое поведение пользователей, то можно более эффективно оценить как устойчивость, так и перспективы исходной модели, что может повлиять на оптимальный выбор модели, либо сформулировать более адекватные критерии к улучшению модели. Другой примыкающей проблемой является манипулирование поведением при обучении модели, что безусловно повлияет на ее дальнейшее функционирование. Это приводит к тому, что оптимальная траектория развития науки о моделях машинного обучения и искусственного интеллекта должна включать адекватный теоретико-игровой элемент, учитывающий, что данные для этих моделей генерируются стратегическими людьми.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carr A. I found out my secret internal tinder rating and now I wish I hadn't. <https://www.fastcompany.com/3054871/whats-your-tinder-score-inside-the-apps-internal-ranking-system> (Accessed: 22.01.2024)
2. Albanesi S., Vamossy D. Predicting consumer default: A deep learning approach // National Bureau of Econom. Res. 2019. No. w26165. 72 p.

3. *Plawiak P., Abdar M., Plawiak J., et al.* DGHNL: A new deep genetic hierarchical network of learners for prediction of credit scoring // *Inform. Sci.* 2020. V. 516. P. 401–418.
4. *Hurley M., Adebayo J.* Credit scoring in the era of big data // *Yale JL & Tech.* 2016. V. 18. No. 148.
5. *Martinez A., Schmuck C., Pereverzyev S., Pirker C., Haltmeier M.* A machine learning framework for customer purchase prediction in the non-contractual setting // *Eur. J. Oper. Res.* 2020. V. 281. No. 3. P. 588–596.
6. *Syakur M.A. et al.* Integration k-means clustering method and elbow method for identification of the best customer profile cluster // *IOP conference series: materials science and engineering*, IOP Publishing. 2018. V. 336. No. 012017.
7. *Roth A.* Game theory as a part of empirical economics // *The Econ. J.* 1991. V. 101. No. 404. P. 107–114.
8. *Harsanyi J.* Games with incomplete information played by “bayesian” players, I–III part I. The basic model // *Management Sci.* 1967. V. 14. No. 3. P. 159–182.
9. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. Т. 255.
10. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Теории активных систем 50 лет: история развития // *Материалы международной научно-практической конференции «ТЕОРИЯ АКТИВНЫХ СИСТЕМ – 50 лет» (ТАС-50, Москва)*. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 10–57.
11. *Еналеев А.К.* Оптимальность согласованных механизмов функционирования в активных системах // *Управление большими системами: сборник трудов*. 2011. № 33. С. 143–166.
12. *Еналеев А.К.* Оптимальный согласованный механизм в системе с несколькими активными элементами // *Проблемы управления*. 2015. № 3. С. 20–28.
13. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Коргин Н.А.* Согласованность и неманипулируемость механизмов организационного управления: текущее состояние проблемы, ретроспектива, перспективы развития теоретических исследований // *А и Т*. 2021. № 7. С. 5–37.
14. *Dellarocas C.* Strategic manipulation of internet opinion forums: Implications for consumers and firms // *Management Sci.* 2006. V. 52. No. 10. P. 1577–1593.
15. *Dini F., Spagnolo G.* Buying reputation on eBay: Do recent changes help? // *Int. J. Electron. Business*. 2009. V. 7. No. 6. P. 581–598.
16. *Wright R. et al.* Directed search and competitive search equilibrium: A guided tour // *J. Econ. Lit.* 2021. V. 59. No. 1. P. 90–148.
17. *Sandomirskaja M., Shavshin R.* Price Competition in Finite Markets with a Rare Good and Private Consumer Valuations // *Higher School Econom. Res. Paper*, 2021. V. 248. 29 p.
18. *Peters M.* Bertrand equilibrium with capacity constraints and restricted mobility // *Econometrica*. 1984. V. 52. No. 5. P. 1117–1127.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.*

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 01.07.2024

Принята к публикации 10.07.2024

# Управление в социально-экономических системах

© 2024 г. А.С. ШВЕДОВ, д-р физ.-мат. наук (ashvedov@hse.ru)  
(Национальный исследовательский университет  
Высшая школа экономики, Москва)

## МОДЕЛЬ БЕКМАННА ДУОПОЛИИ БЕРТРАНА–ЭДЖВОРТА: НОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ<sup>1</sup>

Впервые для изучения олигополии Бертрана–Эджворта (т.е. для изучения конкуренции между фирмами, когда стратегиями фирм являются цены и при этом производственные возможности фирм ограничены) используется понятие слабого активного равновесия, введенное в 80-е гг. XX в. Э.Р. Смольяковым. Найдены все симметричные слабые активные равновесия для основополагающей (хотя и сильно упрощенной) модели дуополии Бертрана–Эджворта, изучавшейся в 60-е гг. XX в. Бекманном. Исследован вопрос существования несимметричных слабых активных равновесий для этой модели.

*Ключевые слова:* дуополия Бертрана–Эджворта, некооперативная игра, слабо экстремальный профиль стратегий, слабое активное равновесие.

**DOI:** 10.31857/S0005231024080052, **EDN:** WPFTBS

### 1. Введение

Хотя из-за своей простоты модель Бекманна [1] (см. также [2]) достаточно далека от реальности, эта модель послужила отправной точкой для многих последующих исследований олигополии Бертрана–Эджворта (см., например, [3–15]). В классической постановке для олигополии Бертрана (когда стратегиями фирм являются цены, а задачей – максимизация прибыли) предполагается, что после объявления цен фирмы смогут произвести столько продукции, что будет удовлетворен весь спрос. Предположение об ограниченности производственных возможностей фирм (в таком случае олигополия Бертрана называется олигополией Бертрана–Эджворта) существенно изменяет ответ на вопрос, какие стратегии будут выбираться фирмами в данной игре. То, что при одних производственных возможностях фирм равновесия Нэша в чистых стратегиях в модели Бекманна существуют, а при других – нет (и поэтому Бекманн ищет равновесия Нэша в смешанных стратегиях), привело к тому, что и во многих последующих работах по олигополии Бертрана–Эджворта

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда экономических исследований академика Н.П. Федоренко (проект № 2022-139).

значительное внимание уделяется равновесиям Нэша в смешанных стратегиях, при том, что практическое значение равновесий в смешанных стратегиях для данных задач меньше, чем равновесий в чистых стратегиях.

В настоящей работе показано, что если вместо равновесия Нэша использовать слабое активное равновесие (равновесие Нэша является частным случаем этого равновесия), представленное в [16, 17], то равновесия в чистых стратегиях в модели Бекманна существуют при любых производственных возможностях фирм. Нет необходимости использовать для изучения этой модели дуополии равновесия в смешанных стратегиях. В настоящей работе в явном виде дается ответ на вопрос, какие симметричные профили стратегий являются слабыми активными равновесиями, а какие не являются. Исследован вопрос существования несимметричных слабых активных равновесий. Подробнее об олигополии Курно и олигополии Бертрана см., например, [18].

Пусть каждый из индексов  $i$  и  $j$  принимает значения 1 и 2,  $i \neq j$ . Игрок  $i$  может выбрать свою стратегию  $x_i$  из некоторого множества  $D_i$ . Через  $f_i(x_i, x_j)$  обозначается выигрыш игрока  $i$  при профиле стратегий  $(x_i, x_j)$ .

*Определение 1. Профиль стратегий  $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$  называется слабо экстремальным для игрока  $i$ , если для любой стратегии  $x_i \in D_i$  существует стратегия  $x_j \in D_j$  такая, что*

$$f_i(x_i, x_j) \leq f_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j).$$

*Определение 2. Профиль стратегий  $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$  называется слабым активным равновесием, если данный профиль стратегий является слабо экстремальным для любого игрока.*

Понятия слабо экстремального профиля стратегий и слабо активного равновесия введены Э.Р. Смольяковым в 80-е гг. XX в.

*Определение 3. Профиль стратегий  $(x_i^*, x_j^*)$  называется равновесием Нэша, если при любом  $i$*

$$f_i(x_i^*, x_j^*) = \max_{x_i \in D_i} f_i(x_i, x_j^*).$$

Нетрудно увидеть, что любое равновесие Нэша является слабым активным равновесием. Обратное, вообще говоря, неверно.

В разделе 2 настоящей работы приводится описание дуополии Бертрана–Эджворта. В разделе 3 дается необходимое и достаточное условие того, чтобы профиль стратегий был слабо экстремальным для одного из игроков при малых производственных возможностях, а в разделе 4 такое же условие дается для больших производственных возможностей. В разделе 5 представлены слабые активные равновесия и обсуждаются практические рекомендации.

## 2. Дуополия Бертрана–Эджворта

Рассматриваются две фирмы, которые производят однородный товар, затраты на производство считаются нулевыми. Производственные возможно-

сти фирм одинаковые, количество товара, которое может произвести каждая фирма, обозначается через  $c$ ,  $0 < c < 1$ . Фирмы одновременно объявляют цены,  $x_1 \in D_1$  и  $x_2 \in D_2$ , по которым они будут продавать товар;  $D_1 = D_2 = [0, 1]$ . Функция спроса предполагается линейной:

$$(1) \quad q = 1 - x.$$

Это означает, что если фирмы объявили одну и ту же цену  $x$ , то количество проданного товара определяется формулой (1). Тогда доход каждой фирмы составляет  $0,5x(1 - x)$  (предполагается, что в этом случае фирмы делят рынок поровну). Если фирмы объявили разные цены, то сначала продает товар фирма, объявившая меньшую цену, эту цену обозначим через  $x$ . При  $x > 1 - c$  из (1) следует, что  $q < c$ , поэтому количество товара, проданного фирмой, равняется  $1 - x$ ; в этом случае вторая фирма не продает ничего и доход второй фирмы равен 0. При  $x \leq 1 - c$  из (1) следует, что  $q \geq c$ , но из-за ограниченности производственных возможностей количество товара, проданного этой фирмой, равняется  $c$ . Вторая фирма сталкивается с функцией остаточного спроса следующего вида:

$$(2) \quad \left(1 - \frac{c}{1 - x}\right) (1 - y),$$

где  $y$  – цена, объявленная второй фирмой; т.е. вторая фирма в этом случае может продать количество товара, определяемое формулой (2). Экономический смысл такой функции остаточного спроса обсуждается, например, в [5]. Также в [5] дается сравнение (2) и другой возможной формы остаточного спроса. Целью фирмы является максимизация дохода, который рассчитывается как произведение цены и количества проданного товара. Поскольку затраты на производство считаются нулевыми, можно исходить из того, что количество товара, произведенного каждой фирмой, равняется  $c$ .

Таким образом, доход фирмы 1 рассчитывается по следующей формуле:

$$(3) \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} cx_1 & \text{при } x_1 < x_2, x_1 \leq 1 - c, \\ x_1(1 - x_1) & \text{при } x_1 < x_2, x_1 > 1 - c, \\ cx_1 & \text{при } x_1 = x_2, x_2 \leq 1 - 2c, \\ 0,5x_1(1 - x_1) & \text{при } x_1 = x_2, x_2 > 1 - 2c, \\ x_1 \min \left( c, \left(1 - \frac{c}{1 - x_2}\right) (1 - x_1) \right) & \text{при } x_1 > x_2, x_2 \leq 1 - c, \\ 0 & \text{при } x_1 > x_2, x_2 > 1 - c. \end{cases}$$

Доход фирмы 2 равен  $f(x_2, x_1)$ . Формально не исключается из рассмотрения случай, когда какая-то фирма объявляет нулевую цену. Но оказывается, что при рассматриваемой постановке задачи такой случай малоинтересен (в отличие от классической олигополии Бертрана).

Нетрудно показать (см. [1, 2]), что при  $0 < c \leq 0,25$  профиль стратегий  $(1 - 2c, 1 - 2c)$  является равновесием Нэша. В соответствии с (1) это озна-

чает, что спрос будет удовлетворен настолько, насколько позволяют производственные возможности фирм. Также нетрудно показать (см. [1, 2]), что при  $0,25 < c < 0,5$  профиль стратегий  $(1 - 2c, 1 - 2c)$  не является равновесием Нэша.

### 3. Слабо экстремальные профили при малых производственных возможностях

В дальнейшем используется обозначение

$$\mu = (1 - 2c)c.$$

*Лемма 1.* Пусть  $0 < c \leq \frac{1}{3}$ . Профиль  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  является слабо экстремальным для фирмы 1 тогда и только тогда, когда  $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \geq \mu$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \geq \mu$ . Пусть  $0 \leq x_1 \leq 1 - 2c$ . Тогда при любом  $x_2$  имеем

$$f(x_1, x_2) = cx_1 \leq (1 - 2c)c \leq f(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

Пусть  $1 - 2c < x_1 \leq 1 - c$ . Тогда, рассматривая предел слева, находим

$$\begin{aligned} & \lim_{x_2 \rightarrow x_1 - 0} \left(1 - \frac{c}{1 - x_2}\right) x_1(1 - x_1) = \\ & = \left(1 - \frac{c}{1 - x_1}\right) x_1(1 - x_1) = (1 - c - x_1)x_1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1 - 0} f(x_1, x_2) = (1 - c - x_1)x_1$$

в силу неравенства  $1 - c - x_1 < c$ . Поскольку функция  $\left(1 - \frac{c}{1 - x_2}\right)$  является непрерывной и монотонно убывающей при  $x_2 < x_1$ , для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $x_2 < x_1$  такое, что

$$f(x_1, x_2) \leq (1 - c - x_1)x_1 + \varepsilon.$$

Значение функции  $(1 - c - x_1)x_1$  при  $x_1 = 1 - 2c$  равняется  $(1 - 2c)c$ . Функция  $(1 - c - x_1)x_1$  является монотонно убывающей при  $x_1 > 1 - 2c$  (в силу условия  $c \leq \frac{1}{3}$ ), т.е.  $(1 - c - x_1)x_1 < \mu$ , поэтому можно выбрать  $\varepsilon$  так, что  $f(x_1, x_2) \leq \mu$  при некотором  $x_2 < x_1$ .

Пусть  $1 - c < x_1 \leq 1$ . Тогда  $f(x_1, 1 - c) = 0 < \mu$ .

Теперь докажем, что в случае  $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < \mu$  профиль  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  не является слабо экстремальным для фирмы 1. Это так, поскольку  $f(1 - 2c, x_2) = \mu$  при любом  $x_2$ .

Лемма 1 доказана.

#### 4. Слабо экстремальные профили при больших производственных возможностях

В дальнейшем используется обозначение

$$\nu = \left( \frac{1-c}{2} \right)^2.$$

*Лемма 2.* Пусть  $\frac{1}{3} < c < 1$ . Профиль  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  является слабо экстремальным для фирмы 1 тогда и только тогда, когда  $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > \nu$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > \nu$ . Пусть  $0 \leq x_1 \leq \max(0, 1-2c)$ . Тогда при  $x_2 > x_1$

$$f(x_1, x_2) = cx_1 \leq c \max(0, 1-2c) \leq \left( \frac{1-c}{2} \right)^2 < f(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

Пусть  $\max(0, 1-2c) < x_1 \leq 1-c$ . Обозначим  $\varepsilon = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - \nu$ . Имеем

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1 - 0} \left( 1 - \frac{c}{1-x_2} \right) x_1 (1-x_1) = (1-c-x_1)x_1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1 - 0} f(x_1, x_2) = (1-c-x_1)x_1$$

в силу неравенства  $1-c-x_1 < c$ . Функция  $(1-c-x_1)x_1$  достигает максимума при  $x_1 = \frac{1-c}{2}$  (внутренняя точка отрезка  $[\max(0, 1-2c), 1-c]$ ); максимум равен  $\left( \frac{1-c}{2} \right)^2$ . Поэтому при любом  $x_1 \in (\max(0, 1-2c), 1-c]$  найдется точка  $x_2 < x_1$  такая, что

$$f(x_1, x_2) < \left( \frac{1-c}{2} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{2} < f(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

Пусть  $1-c < x_1 \leq 1$ . Тогда  $f(x_1, 1-c) = 0 \leq \nu$ .

Теперь докажем, что в случае  $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq \nu$  профиль  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  не является слабо экстремальным для фирмы 1. Достаточно показать, что  $f\left(\frac{1-c}{2}, x_2\right) > \nu$  при любом  $x_2$ . Заметим, что при  $x_1 = \frac{1-c}{2}$  выполняется условие  $\max(0, 1-2c) < x_1 \leq 1-c$ , поскольку  $c > \frac{1}{3}$ .

Пусть  $x_2 < x_1$ . Функция  $f(x_1, x_2)$ , рассматриваемая как функция аргумента  $x_2$ , является монотонно невозрастающей при  $x_2 \in [0, x_1)$ . Как было установлено выше при доказательстве данной леммы, вблизи точки  $x_1$  функция  $f(x_1, x_2)$  совпадает с функцией  $\left(1 - \frac{c}{1-x_2}\right)x_1(1-x_1)$  и, следовательно, является монотонно убывающей. Поэтому

$$f(x_1, x_2) > (1-c-x_1)x_1 = \left( \frac{1-c}{2} \right)^2.$$



Пусть  $x_2 = x_1$ . Тогда

$$f(x_1, x_2) = 0,5x_1(1 - x_1) = \frac{1 - c}{2} \times \frac{1 + c}{4} > \left(\frac{1 - c}{2}\right)^2,$$

поскольку  $c > \frac{1}{3}$ . Пусть  $x_2 > x_1$ . Тогда

$$f(x_1, x_2) = c \frac{1 - c}{2} > \left(\frac{1 - c}{2}\right)^2,$$

поскольку  $c > \frac{1}{3}$ .

Лемма 2 доказана.

## 5. Слабые активные равновесия

Из (3) нетрудно увидеть, что при  $0 < c \leq \frac{1}{4}$  выполняются следующие соотношения:  $f(x, x) = \mu$  при  $x = 1 - 2c$  и  $f(x, x) < \mu$  при  $x \neq 1 - 2c$ ; поэтому в силу леммы 1 в этом случае единственный профиль стратегий  $(x, x)$ , который является слабым активным равновесием, — это  $(1 - 2c, 1 - 2c)$ ; этот же профиль стратегий является и равновесием Нэша.

*Теорема 1.* Пусть  $\frac{1}{4} < c \leq \frac{1}{3}$ . Профиль стратегий  $(x, x)$  является слабым активным равновесием тогда и только тогда, когда  $1 - 2c \leq x \leq 2c$ .

*Доказательство* сводится к применению леммы 1 и проверке условия  $0,5x(1 - x) \geq \mu$ , которое эквивалентно условию  $1 - 2c \leq x \leq 2c$ .

Теорема 1 доказана.

При  $\frac{1}{4} < c \leq \frac{1}{3}$  симметричное равновесие в чистых стратегиях  $(1 - 2c, 1 - 2c)$  найдено в [15], утверждение 4.3, и установлено, что других равновесий в безопасных стратегиях для этой игры нет. Однако из (3) очевидно, что при  $\frac{1}{4} < c \leq \frac{1}{3}$  для профиля стратегий  $(0,5, 0,5)$ , который является слабым активным равновесием, доход фирмы выше, чем для профиля стратегий  $(1 - 2c, 1 - 2c)$ .

*Теорема 2.* Пусть  $\frac{1}{3} < c < 1$ . Профиль стратегий  $(x, x)$  является слабым активным равновесием тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2(1 - c)^2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2(1 - c)^2}.$$

*Доказательство* сводится к применению леммы 2 и проверке условия  $0,5x(1 - x) > \nu$ , которое эквивалентно тому, что  $x \in (a_1, a_2)$ , где  $a_1$  и  $a_2$  — корни квадратного уравнения  $0,5x(1 - x) = \left(\frac{1 - c}{2}\right)^2$ .

Теорема 2 доказана.

Можно дать интерпретацию полученных результатов применительно к реальному поведению фирм. При малых производственных возможностях, когда  $c \leq \frac{1}{4}$ , как это следует из симметричного равновесия Нэша в чистых стратегиях  $(1 - 2c, 1 - 2c)$ , нужно ориентироваться на верхнюю часть кривой спроса и назначать цену  $1 - 2c$ . При больших производственных возможностях,  $c > \frac{1}{4}$ , как это вытекает из теорем 1 и 2, следует держать цену 0,5.

Теоремы 1 и 2 относятся к симметричному случаю, т.е. к случаю, когда обе фирмы объявляют одну и ту же цену  $x$ . Однако леммы 1 и 2 могут быть использованы и для того, чтобы дать ответ на вопрос, существуют ли несимметричные слабые активные равновесия, т.е. профили стратегий  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ,  $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ , которые являются слабыми активными равновесиями.

*Теорема 3.* Пусть  $0 < c \leq \frac{1}{4}$ . Тогда не существует профиля стратегий  $(x_1, x_2)$  такого, что  $x_1 \neq x_2$ ,  $f(x_1, x_2) \geq \mu$ ,  $f(x_2, x_1) \geq \mu$ .

*Доказательство.* Пусть считается, что функция  $f$  (см. (3)) определена не на единичном квадрате  $0 \leq x_1 \leq 1$ ,  $0 \leq x_2 \leq 1$ , а на единичном квадрате с вырезанным отрезком  $x_1 = x_2$ , т.е. игнорируются значения функции  $f$  при  $x_1 = x_2$ .

Заметим, что при  $x_1 < 1 - 2c$ ,  $x_2 < x_1$  выполняется неравенство

$$c < \left(1 - \frac{c}{1 - x_2}\right)(1 - x_1).$$

Поэтому на основании (3) для дохода фирмы 1 имеет место неравенство  $f(x_1, x_2) < \mu$  при  $x_1 < 1 - 2c$ ,  $x_2 \neq x_1$ . Аналогично для дохода фирмы 2 имеет место неравенство  $f(x_2, x_1) < \mu$  при  $x_2 < 1 - 2c$ ,  $x_1 \neq x_2$ . Поэтому в дальнейшем при доказательстве теоремы будем рассматривать только стратегии  $(x_1, x_2)$  для  $x_1 \geq 1 - 2c$ ,  $x_2 \geq 1 - 2c$ .

Заметим, что при  $x_1 > 1 - 2c$ ,  $x_2 = 1 - 2c$  выполняется неравенство

$$(4) \quad c > \left(1 - \frac{c}{1 - x_2}\right)(1 - x_1),$$

поэтому в данном случае  $f(x_1, x_2) = 0,5x_1(1 - x_1)$ ; отсюда вытекает, что  $f(x_1, x_2) < \mu$ . При  $1 - 2c < x_2 \leq 1 - c$ ,  $x_1 > x_2$  также выполняется неравенство (4). Поэтому  $f(x_1, x_2) < 0,5x_1(1 - x_1) < \mu$ . Аналогично  $f(x_2, x_1) < \mu$  при  $1 - 2c \leq x_1 \leq 1 - c$ ,  $x_2 > x_1$ .

Наконец, в силу (3) при  $x_2 > 1 - c$ ,  $x_1 > x_2$  выполняется  $f(x_1, x_2) = 0$ , и аналогично при  $x_1 > 1 - c$ ,  $x_2 > x_1$  выполняется  $f(x_2, x_1) = 0$ .

Теорема 3 доказана.

В силу леммы 1 из теоремы 3 следует, что при  $0 < c \leq \frac{1}{4}$  несимметричных слабых активных равновесий нет. Расчеты показывают, что при больших значениях  $c$  несимметричные слабые активные равновесия существуют. Пусть  $\gamma$  – это отношение числа профилей  $(x_1, x_2)$ ,  $x_1 > x_2$ , которые являются слабыми активными равновесиями, к общему числу профилей  $(x_1, x_2)$ ,  $x_1 > x_2$  (при использовании некоторой достаточно мелкой сетки). В таблице для некоторых значений  $c$  приведены  $\gamma$ .

Значения  $\gamma$  при различных  $c$

$c$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\gamma$	0,0063	0,1113	0,2059	0,2586	0,2684	0,2349	0,1506

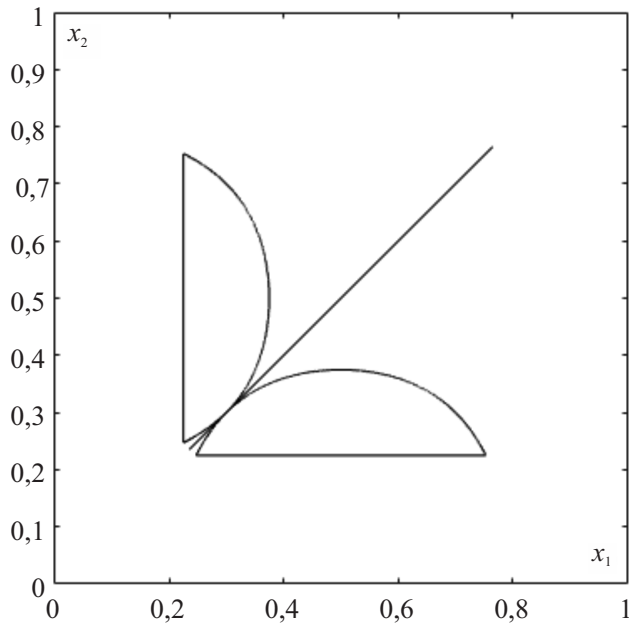


Рис. 1. Слабые активные равновесия при  $c = 0,4$ .

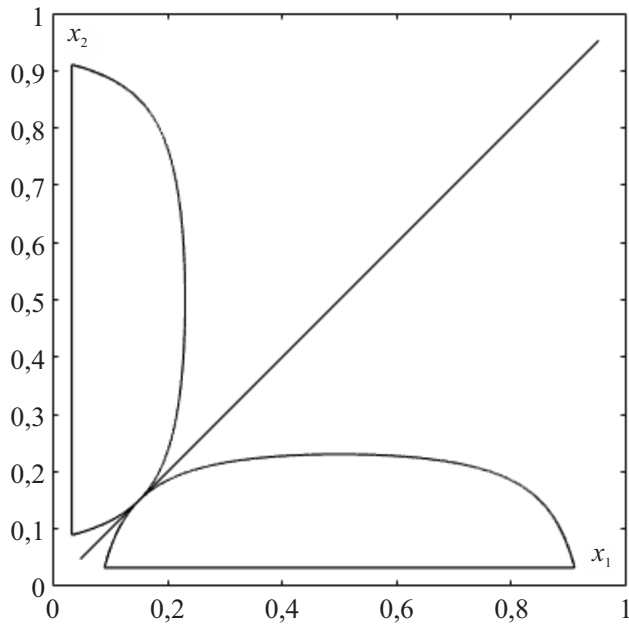


Рис. 2. Слабые активные равновесия при  $c = 0,7$ .

Из рис. 1, 2 видно, что множество профилей  $(x_1, x_2)$ , представляющих собой слабые активные равновесия, состоит из части диагонали единичного квадрата (симметричные слабые активные равновесия) и двух примыкающих к этой диагонали лунок (несимметричные слабые активные равновесия).

## 6. Заключение

Изучение олигополии Бертрана–Эджворта имеет большое практическое значение. Именно такой подход используется в ряде стран властями при анализе политики в области конкуренции (см. [13]). В настоящей работе впервые для изучения олигополии Бертрана–Эджворта применяется понятие слабого активного равновесия. Использование данного понятия позволяет рассматривать только равновесия в чистых стратегиях и не рассматривать равновесия в смешанных стратегиях, как это приходится делать при использовании понятия равновесия Нэша. Найдены все симметричные слабые активные равновесия для модели Бекманна дуополии Бертрана–Эджворта, исследован вопрос о существовании несимметричных слабых активных равновесий.

За исключением тех случаев, когда слабое активное равновесие совпадает с равновесием Нэша в чистых стратегиях, слабое активное равновесие оказывается не единственным. В связи с этим возникает интересный вопрос о сужении понятия слабого активного равновесия, указании каких-то дополнительных свойств, чтобы выделить из всего множества слабых активных равновесий единственное. Таким сужением является, например, понятие сильного активного равновесия, введенное в [17]. Однако, скорее всего, для олигополии Бертрана–Эджворта последнее понятие не совсем подходящее.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beckmann M.J. (with the assistance of D. Hochstadter) Edgeworth–Bertrand duopoly revisited / Oper. Res. – Verfahren III (R. Henn, Ed.) Meisenheim: Verlag Anton Hein. 1965. P. 55–68.*
2. *Cheviakov A.F., Hartwick J.M. Beckmann’s Edgeworth–Bertrand duopoly example revisited // Int. Game Theory Rev. 2005. V. 7. P. 461–472.*
3. *Levitan R.E., Shubik M. Price duopoly and capacity constraints // Int. Econom. Rev. 1972. V. 13. P. 111–122.*
4. *Kreps D.M., Scheinkman J.A. Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes // Bell J. Econom. 1983. V. 14. P. 326–337.*
5. *Davidson C., Deneckere R. Long-run competition in capacity, short-run competition in price, and the Cournot model // Rand J. Econom. 1986. V. 17. P. 404–415.*
6. *Tasnadi A. Existence of pure strategy Nash equilibrium in Bertrand–Edgeworth oligopolies // Econom. Lett. 1999. V. 63. P. 201–206.*
7. *Lepore J.J. Cournot outcomes under Bertrand–Edgeworth competition with demand uncertainty // J. Mathem. Econom. 2012. V. 48. P. 177–186.*
8. *Sun C.-J. Dynamic price dispersion in Bertrand–Edgeworth competition // Int. J. Game Theory. 2017. V. 46. P. 235–261.*
9. *Chen Z., Li G. Horizontal mergers in the presence of capacity constraints // Econom. Inquiry. 2018. V. 56. P. 1346–1356.*
10. *Grub J.T. Can mergers lead to partial collusion? Introducing heterogeneous discount factors to a Bertrand–Edgeworth model // Eur. Compet. J. 2020. V. 16. P. 512–530.*
11. *Somogyi R. Bertrand–Edgeworth competition with substantial horizontal product differentiation // Math. Soc. Sci. 2020. V. 108. P. 27–37.*

12. *Bos I., Vermeulen D.* On pure strategy Nash equilibria in price-quantity games // *J. Mathem. Econom.* 2021. V. 96. № 102501.
13. *Edwards R.A., Routledge R.R.* Information, Bertrand–Edgeworth competition and the law of one price // *J. Mathem. Econom.* 2022. V. 101. № 102658.
14. *Bos I., Marini M.A.* Oligopoly pricing: The role of firm size and number // *Games.* 2023, V. 14. № 3.
15. *Искаков А.Б., Искаков М.Б.* Равновесия в безопасных стратегиях в ценовой дуополии Бертрана–Эджворта // *Математическая теория игр и ее приложения.* 2014. Т. 6. № 2. С. 42–59.
16. *Смольяков Э.Р.* Экстремальность и равновесность относительно заданных функций и игровые модели. 1 // *А и Т.* 1983. № 3. С. 101–107.
17. *Смольяков Э.Р.* Экстремальность и равновесность относительно заданных функций и игровые модели. 2 // *А и Т.* 1983. № 4. С. 41–49.
18. *Шведов А.С.* Олигополия Курно: выбор стратегий при неопределенности и другие вопросы // *Проблемы управления.* 2023. № 5. С. 23–39.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.*

Поступила в редакцию 27.12.2023

После доработки 27.05.2024

Принята к публикации 27.06.2024

# Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2024 г. Л.Г. АФРАЙМОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (levafrainovich@gmail.com),  
М.Д. ЕМЕЛИН (maksim888e@mail.ru)  
(Нижегородский государственный университет)

## СВЕРТКИ КРИТЕРИЕВ ПРИ КОМБИНИРОВАНИИ РЕШЕНИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Рассматривается трехиндексная аксиальная задача о назначениях, которая является одной из классических NP-трудных задач. В рамках задачи о назначениях ставится задача комбинирования допустимых решений, представляющая собой задачу о назначениях на множестве решений, которые содержат только компоненты выбранных допустимых решений. Исследуются вопросы комбинирования решений для многокритериальной задачи с различными видами сверток критериев. В общем случае задача комбинирования оказывается NP-трудной. В работе выделяются условия, при которых задача комбинирования полиномиально разрешима.

*Ключевые слова:* аксиальная задача о назначениях, многоиндексные задачи, комбинирование решений, полиномиальная разрешимость, NP-трудность.

DOI: 10.31857/S0005231024080063, EDN: WPFNBF

### 1. Введение

Существует широкий класс прикладных задач, формализуемых в виде многоиндексных аксиальных задач о назначениях [1–4]. В общем случае класс многоиндексных аксиальных задач о назначениях является NP-трудным [5]. Известны частные полиномиально разрешимые подклассы и подклассы, для которых существуют полиномиальные приближенные алгоритмы [1, 6, 7]. В [6–10] исследуются аксиальные задачи о назначениях со специальной структурой многоиндексной матрицы стоимостей, в [11] описывается метод ветвей и границ решения аксиальной задачи о назначениях, в [12] обсуждается параллельная реализация алгоритма решения, в [13] строится генетический алгоритм, в [14] обсуждается нижняя оценка задачи, в [15] исследуются асимптотически оптимальные решения. Многокритериальные постановки многоиндексных задач о назначениях обсуждаются в [16–19]. В [20–22] рассматривается задача комбинирования решений аксиальной задачи о назначениях.

В данной работе рассматривается многокритериальная трехиндексная аксиальная задача о назначениях. В рамках данной постановки сформулирована задача комбинирования допустимых решений, представляющая собой

многокритериальную задачу о назначениях на множестве решений, получаемых комбинированием компонент заданных допустимых решений. В качестве схем компромисса при решении многокритериальных задач рассматривается свертка критериев. В работе исследуются линейная, минимаксная и лексикографические свертки.

Для данных видов сверток исследуются возникающие задачи комбинирования  $N$  допустимых решений. В работе получены следующие результаты:

- в случае линейной свертки задача комбинирования полиномиально разрешима при  $N = 2$ , при  $N \geq 4$  задача комбинирования NP-трудна,
- в случае лексикографической свертки задача комбинирования полиномиально разрешима при  $N = 2$ , при  $N \geq 4$  задача комбинирования NP-трудна,
- в случае минимаксной свертки задача комбинирования NP-трудна при  $N \geq 2$ .

Работа является продолжением серии статей [20–22], в которых комбинирование исследуется при решении (однокритериальной) аксиальной задачи о назначениях. Под комбинированием решений здесь понимается построение такого решения, которое содержит только назначения из выбранных допустимых решений. Решение задачи комбинирования, в свою очередь, предполагает поиск оптимального (с точки зрения выбранного критерия или схемы компромисса) решения на множестве решений, получаемых в результате комбинирования выбранных допустимых решений.

Отметим, что исходная многокритериальная трехиндексная аксиальная задача о назначениях с рассматриваемыми видами сверток в качестве схемы компромисса является NP-трудной. Таким образом, предложенные алгоритмы комбинирования для найденных полиномиально разрешимых случаев могут быть применены в качестве дополнения к эвристическим или приближенным алгоритмам решения исходных NP-трудных задач. Значительное количество эвристических или приближенных алгоритмов решения задач о назначениях основаны на построении серии допустимых решений с дальнейшим выбором рекорда среди них, например [1, 3, 6]. Вместо общепринятого подхода выбора рекорда среди найденных допустимых решений в работе предлагается применение шага комбинирования построенных допустимых решений. При этом гарантируется, что с точки зрения критерия оптимизации решение, полученное в результате комбинирования, не хуже рекорда (так как множество решений, получаемых в результате комбинирования, в том числе содержит и все найденные исходные допустимые решения).

Далее статья построена следующим образом. В разделе 2 приводится постановка многокритериальной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях и описаны применяемые виды сверток критериев, в разделе 3 ставится задача комбинирования допустимых решений, в разделах 4, 5 и 6 исследуются задачи комбинирования для линейной, лексикографической и минимаксной сверток критериев соответственно. В разделе 7 приводятся результаты вычислительных экспериментов.

## 2. Многокритериальная трехиндексная аксиальная задача о назначениях

Пусть  $I, J, K$  – непересекающиеся множества индексов,  $I \cap J = \emptyset$ ,  $I \cap K = \emptyset$ ,  $J \cap K = \emptyset$  и  $|I| = |J| = |K| = n$ ;  $M$  – фиксированное количество критериев задачи;  $c_{ijk}^u$ ,  $i \in I, j \in J, k \in K, u = \overline{1, M}$  – трехиндексные матрицы стоимостей;  $x_{ijk}$ ,  $i \in I, j \in J, k \in K$  – трехиндексная матрица неизвестных. Тогда многокритериальная трехиндексная аксиальная задача о назначениях ставится как следующая задача целочисленного линейного программирования:

$$(1) \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} = 1, \quad k \in K,$$

$$(2) \quad \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \quad j \in J,$$

$$(3) \quad \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \quad i \in I,$$

$$(4) \quad x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K,$$

$$(5) \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk}^u x_{ijk} \rightarrow \min, \quad u = \overline{1, M}.$$

Для удобства многокритериальную задачу (1)–(5) обозначим через  $Z_M$ . Как известно, в однокритериальной постановке (при  $M = 1$ ) задача о назначениях  $Z_M$  является NP-трудной [5].

В многокритериальной постановке в качестве схемы компромисса будем рассматривать свертку критериев. В работе будут рассмотрены линейная, лексикографическая и минимаксная свертки.

Пусть заданы веса  $\alpha_u$ ,  $u = \overline{1, M}$ . Тогда линейная свертка критериев будет иметь вид

$$(6) \quad \sum_{u=1}^M \alpha_u \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk}^u x_{ijk} \rightarrow \min.$$

Для удобства задачу (1)–(4), (6) обозначим через  $Z_L$ . Легко увидеть, что к задаче  $Z_L$  полиномиально сводима NP-трудная (однокритериальная) трехиндексная аксиальная задача о назначениях. Действительно, рассмотрим трехиндексную аксиальную задачу о назначениях с матрицей стоимостей  $c_{ijk}$ ,  $i \in I, j \in J, k \in K$ . В соответствующей задаче  $Z_L$  определим  $c_{ijk}^1 = c_{ijk}$ ,  $c_{ijk}^u = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_u = 0$ ,  $i \in I, j \in J, k \in K, u = \overline{2, M}$ . Отсюда

*Утверждение 1. Задача  $Z_L$  NP-трудна.*

Будем предполагать, что порядок значимости критериев (5) совпадает с их исходной индексацией. Тогда введем отношение предпочтения на множестве допустимых решений задачи о назначениях. Обозначим через  $P$  множество допустимых решений системы ограничений (1)–(4). Пусть  $x^1, x^2 \in P$ . Будем



записывать  $x^1 \preceq x^2$  тогда и только тогда, когда существует  $y \in \{1, \dots, M\}$  такой, что выполняются условия (7), (8):

$$(7) \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk}^u x_{ijk}^1 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk}^u x_{ijk}^2, \quad u \in \{1, \dots, y\},$$

$$(8) \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk}^u x_{ijk}^1 < \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk}^u x_{ijk}^2, \quad u \in \{1, \dots, M\} \cap \{y + 1\}.$$

В результате многокритериальная задача с лексикографической сверткой критериев заключается в поиске  $x^*$ , удовлетворяющего системе ограничений:

$$(9) \quad x^* \in P,$$

$$(10) \quad x^* \preceq x, \quad x \in P.$$

Задачу (9), (10) обозначим через  $Z_{\preceq}$ . Несложно увидеть, что к задаче  $Z_{\preceq}$  полиномиально сводима NP-трудная трехиндексная аксиальная задача о назначениях. В соответствующей задаче  $Z_{\preceq}$  определим  $c_{ijk}^1 = c_{ijk}$ ,  $c_{ijk}^u = 0$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ ,  $k \in K$ ,  $u = \overline{2, M}$ . Отсюда

*Утверждение 2. Задача  $Z_{\preceq}$  NP-трудна.*

Минимаксная свертка критериев будет иметь вид

$$(11) \quad \max_{u \in \{1, \dots, M\}} \left( \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk}^u x_{ijk} \right) \rightarrow \min.$$

Для удобства задачу (1)–(4), (11) обозначим через  $Z_{\min\max}$ . Легко увидеть, что к задаче  $Z_{\min\max}$  полиномиально сводима NP-трудная трехиндексная аксиальная задача о назначениях. В соответствующей задаче  $Z_{\min\max}$  определим  $c_{ijk}^u = c_{ijk}$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ ,  $k \in K$ ,  $u = \overline{1, M}$ . Отсюда

*Утверждение 3. Задача  $Z_{\min\max}$  NP-трудна.*

Таким образом, многокритериальная аксиальная задача о назначениях с линейной, лексикографической или минимаксной сверткой критериев в качестве схемы компромисса является NP-трудной. Отсюда возникает вопрос комбинирования допустимых решений в качестве дополнения к эвристическим или приближенным алгоритмам решения данных NP-трудных задач.

### 3. Задача комбинирования решений

Пусть задано множество  $W \subseteq I \times J \times K$ , которое определяет подмножество разрешенных назначений. Рассмотрим задачу (1)–(4), (12), (5).

$$(12) \quad x_{ijk} = 0, \quad (i, j, k) \notin W.$$

Для удобства изложения многокритериальную задачу (1)–(4), (12), (5) для заданного множества  $W$  будем обозначать через  $Z_M(W)$ . Очевидно задача (1)–(5) соответствует задаче  $Z_M(I \times J \times K)$ .

Далее будем рассматривать многокритериальную задачу  $Z_M(W)$  с различными вариантами свертки критериев в качестве схемы компромисса.

В случае линейной свертки критериев соответствующая задача принимает вид (1)–(4), (12), (6), для удобства обозначаемая через  $Z_L(W)$ .

В случае лексикографической свертки критериев соответствующая задача принимает вид (9), (10), где в качестве множества  $P$  применяется множество допустимых решений системы ограничений (1)–(4), (12). Данную задачу обозначим через  $Z_{\preceq}(W)$ .

В случае минимаксной свертки критериев соответствующая задача принимает вид (1)–(4), (12), (11), для удобства обозначаемая через  $Z_{\min\max}(W)$ .

Проблема проверки совместности системы ограничений задачи  $Z_M(W)$ , т.е. системы (1)–(4), (12), для произвольного множества  $W$  является NP-полной [1]. Будем рассматривать такие множества  $W$ , которые соответствуют назначениям заданного подмножества допустимых решений.

Пусть  $x_{ijk}, i \in I, j \in J, k \in K$  – допустимое решение системы ограничений (1)–(4). Тогда через  $W(x)$  обозначим следующее множество разрешенных назначений:

$$W(x) = \{(i, j, k) | x_{ijk} = 1, i \in I, j \in J, k \in K\}.$$

Рассмотрим  $x_{ijk}^1, \dots, x_{ijk}^r, i \in I, j \in J, k \in K$  – произвольные  $r$  допустимых решений системы ограничений (1)–(4). Тогда

$$W(x^1, \dots, x^r) = W(x^1) \cup \dots \cup W(x^r).$$

Далее в работе будем исследовать задачи

$$Z_L(W(x^1, \dots, x^r)), \quad Z_{\preceq}(W(x^1, \dots, x^r)), \quad Z_{\min\max}(W(x^1, \dots, x^r)).$$

Данные задачи представляют собой задачи комбинирования – оптимизационные задачи на множестве разрешенных назначений  $W(x^1, \dots, x^r)$ , которое строится путем объединения фактических назначений выбранных допустимых решений  $x^1, \dots, x^r$ . Таким образом, решение задач комбинирования соответствует решению, которое содержит только назначения выбранных допустимых решений.

#### 4. Линейная свертка критериев

Рассмотрим многокритериальную задачу о назначениях в случае линейной свертки критериев. Несложно увидеть, что задача  $Z_L(W(x^1, \dots, x^r))$  эквивалентна однокритериальной трехиндексной аксиальной задаче с матрицей

стоимостей

$$c_{ijk} = \sum_{u \in \{1, \dots, M\}} \alpha_u c_{ijk}^u, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K.$$

Таким образом, согласно [20] задача  $Z_L(W(x^1, x^2))$  полиномиально разрешима. Алгоритм комбинирования, предложенный в [20], требует  $O(n)$  вычислительных операций и может быть применен при решении задачи  $Z_L(W(x^1, x^2))$ . Согласно [22] справедливо

*Утверждение 4. Класс задач  $Z_L(W(x^1, \dots, x^r))$  при  $r \geq 4$  является NP-трудным.*

Сложностной статус класса задач  $Z_L(W(x^1, x^2, x^3))$  на данный момент неизвестен.

## 5. Лексикографическая свертка критериев

Построим алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях в случае лексикографической свертки критериев при комбинировании двух допустимых решений.

*Алгоритм 1* (решение задачи  $Z_{\preceq}(W(x^1, x^2))$ ).

Шаг 1. Построить граф  $G = (V, A)$ , где

$$V = \{I \cup J \cup K\}, \quad A = \{(i, j), (i, k), (j, k) \mid (i, j, k) \in W(x^1, x^2)\}.$$

Шаг 2. Найти компоненты связности  $V_l$ ,  $l = \overline{1, q}$  графа  $G$  и построить подграфы  $G_l = (V_l, A_l)$ ,  $l = \overline{1, q}$ , порожденные соответствующими компонентами связности.

Шаг 3. Построить следующие множества:

$$D_l^1 = \{(i, j, k) \mid (i, j, k) \in W(x^1), (i, j), (i, k), (j, k) \in A_l\}, \quad l = \overline{1, q},$$

$$D_l^2 = \{(i, j, k) \mid (i, j, k) \in W(x^2), (i, j), (i, k), (j, k) \in A_l\}, \quad l = \overline{1, q}.$$

Шаг 4. Пусть

$$P_l^1 = \left\{ p \mid p = \operatorname{argmin}_{p \in \{1, 2\}} \sum_{(i, j, k) \in D_l^p} c_{ijk}^1 \right\},$$

$$P_l^u = \left\{ p \mid p = \operatorname{argmin}_{p \in P_l^{u-1}} \sum_{(i, j, k) \in D_l^p} c_{ijk}^u \right\}, \quad u = \overline{2, M-1},$$

$$p_l^* = \operatorname{argmin}_{p \in P_l^{M-1}} \sum_{(i, j, k) \in D_l^p} c_{ijk}^M, \quad l = \overline{1, q}.$$

Шаг 5. Решение задачи  $Z_{\preceq}(W(x^1, x^2))$  определяется по следующему алгоритму. Пусть  $x_{ijk}^* := 0$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ ,  $k \in K$ . Далее для каждого  $l = \overline{1, q}$

ВЫПОЛНИТЬ

$$x_{ijk}^* := 1, \quad (i, j, k) \in D_l^{p_i^*}.$$

При этом значение критериев (5) на решении  $x^*$  определяется как

$$\sum_{l=1}^q \sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_i^*}} c_{ijk}^u, \quad u = \overline{1, M}.$$

*Теорема 1.* Алгоритм 1 находит решение задачи  $Z_{\preceq}(W(x^1, x^2))$ .

*Доказательство.* Доказательство проведем от противного. Предположим, что решение, полученное алгоритмом 1, не является решением задачи  $Z_{\preceq}(W(x^1, x^2))$ . Тогда существует допустимое решение  $x$  задачи  $Z_{\preceq}(W(x^1, x^2))$  такое, что не выполняется условие  $x^* \preceq x$ .

Согласно доказательству [20, теорема 1] в каждой компоненте связности  $V_l$ ,  $l = \overline{1, q}$ , любое допустимое решение задачи  $Z_{\preceq}(W(x^1, x^2))$  может содержать назначения, состоящие из троек только первого или только второго решения.

По предположению, существует компонента связности  $V_l$ , в которой назначения решения  $x$  не совпадают с назначениями решения  $x^*$ . Тогда построим решение  $x'$  следующим образом:

Шаг 1.  $x^0 = x$ ,  $l = 1$ .

$$\text{Шаг 2. } x_{ijk}^t = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j, k) \in D_l^{p_i^*}, \\ 0, & \text{если } (i, j, k) \in D_l^{3-p_i^*}, \\ x_{ijk}^{t-1} & \text{иначе,} \end{cases} \quad i \in I, j \in J, k \in K,$$

Шаг 3. Если  $l = q$ , закончить, иначе  $l = l + 1$ , перейти на шаг 2.

Тогда по построению  $x^{l+1} \preceq x^l$ ,  $l = \overline{0, q-1}$ . При этом  $x^q = x^*$ ,  $x^0 = x$ . Отсюда  $x^* \preceq x$ . Получили противоречие. Предположение неверно. Теорема доказана.

Согласно [20, теорема 2] справедливо

*Утверждение 5.* Алгоритм 1 требует  $O(n)$  вычислительных операций.

Несложно увидеть, что к классу задач  $Z_{\preceq}(W(x^1, x^2, x^3, x^4))$  полиномиально сводим класс трехиндексных аксиальных задач с множеством разрешенных назначений вида  $W(x^1, x^2, x^3, x^4)$ , который, как было доказано в [22], является NP-трудным. Действительно, рассмотрим трехиндексную аксиальную задачу о назначениях с матрицей стоимостей  $c_{ijk}$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ ,  $k \in K$ . При сведении в соответствующей задаче  $Z_{\preceq}(W(x^1, x^2, x^3, x^4))$  определим  $c_{ijk}^1 = c_{ijk}$ ,  $c_{ijk}^u = 0$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ ,  $k \in K$ ,  $u = \overline{2, M}$ . Отсюда

*Утверждение 6.* Класс задач  $Z_{\preceq}(W(x^1, \dots, x^r))$  при  $r \geq 4$  является NP-трудным.

Сложностной статус класса задач  $Z_{\preceq}(W(x^1, x^2, x^3))$  на данный момент неизвестен.

## 6. Минимаксная свертка критериев

Рассмотрим многокритериальную задачу о назначениях в случае минимаксной свертки критериев.

*Лемма 1. Оптимизационная задача (13), (14) NP-трудна:*

$$(13) \quad x'_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$(14) \quad \max \left( \sum_{i=1}^n a_i x'_i, \sum_{i=1}^n b_i (1 - x'_i) \right) \rightarrow \min.$$

*Доказательство.* Для доказательства данной леммы полиномиально сведем к задаче (13), (14) классическую NP-полную задачу РАЗБИЕНИЯ [5]. Рассмотрим задачу РАЗБИЕНИЯ с исходными параметрами  $w_i, i = \overline{1, m}$ . Определим  $n = m, a_i = b_i = w_i, i = \overline{1, n}$ . Оптимальное значение критерия задачи (13), (14) равно  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w_i$  тогда и только тогда, когда задача РАЗБИЕНИЯ имеет решение. Следовательно, задача (13), (14) является NP-трудной. Лемма доказана.

*Теорема 2. Класс задач  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$  NP-трудный.*

*Доказательство.* Покажем полиномиальную сводимость NP-трудной задачи (13), (14) к классу задач  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$ .

Пусть  $N = 2n, I = J = K = \{1, \dots, N\}, M = 2$ . Трехиндексные матрицы стоимостей  $c_{ijk}^1, c_{ijk}^2, i \in I, j \in J, k \in K$  определим следующим образом:

$$c_{ijk}^1 = \begin{cases} a_q, & \text{если } \exists q \in \{1, \dots, n\}, \text{ что } i = j = k = 2q - 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad i \in I, j \in J, k \in K,$$

$$c_{ijk}^2 = \begin{cases} b_q, & \text{если } \exists q \in \{1, \dots, n\}, \text{ что } i = j = k + 1 = 2q, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad i \in I, j \in J, k \in K.$$

Построим два подмножества  $P_1, P_2 \subseteq I \times J \times K$ , определяющих два допустимых решения системы (1)–(4):

$$P_1 = \{(i, i, i) | i = \overline{1, N}\},$$

$$P_2 = \{(2i - 1, 2i - 1, 2i), (2i, 2i, 2i - 1) | i = \overline{1, n}\}.$$

Соответствующие два допустимых решения  $x^1, x^2$  системы (1)–(4) определим как

$$x_{ijk}^t = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j, k) \in P_t, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad i \in I, j \in J, k \in K, t \in \{1, 2\}.$$

Далее рассмотрим соответствующую задачу комбинирования  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$ . Покажем, что оптимальное значение критерия задачи (13), (14) совпадает с оптимальным значением критерия задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$ .

1. Пусть  $x^{j*}$  – оптимальное решение задачи (13), (14), тогда построим  $P(x^{j*})$  следующим алгоритмом:

Шаг 1.  $P(x^{j*}) = \emptyset$ .

Шаг 2. Для каждого  $i = \overline{1, n}$ :

если  $x_i^{j*} = 1$ , тогда  $P(x^{j*}) = P(x^{j*}) \cup \{(2i - 1, 2i - 1, 2i - 1), (2i, 2i, 2i)\}$ ,

иначе  $P(x^{j*}) = P(x^{j*}) \cup \{(2i - 1, 2i - 1, 2i), (2i, 2i, 2i - 1)\}$ .

Нетрудно увидеть, что значение критерия задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$  на решении, соответствующем  $P(x^{j*})$ , совпадет с оптимальным значением критерия задачи (13), (14). Докажем это от противного. Предположим, что решение, соответствующее  $P(x^{j*})$ , не является оптимальным в задаче  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$ . Пусть  $x^*$  – оптимальное решение задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$ . Тогда значение критерия задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$  на решении  $x^*$  строго меньше значения критерия задачи (13), (14) на решении  $x^{j*}$ . Тогда построим допустимое решение  $x'$  задачи (13), (14) следующим способом:

$$x'_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{iii}^* = 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad i = \overline{1, n}.$$

По построению значение критерия задачи (13), (14) на решении  $x'$  совпадает со значением критерия задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$  на решении  $x^*$ . Следовательно,  $x^{j*}$  не является оптимальным решением задачи (13), (14). Получили противоречие, предположение неверно. Отсюда значение критерия задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$  на решении, соответствующем  $P(x^{j*})$ , совпадет с оптимальным значением критерия задачи (13), (14).

2. Пусть  $x^*$  – оптимальное решение задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$ , тогда построим оптимальное решение задачи (13), (14) следующим способом:

$$x'_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{iii}^* = 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad i = \overline{1, n}.$$

Нетрудно увидеть, что значение критерия задачи (13), (14) на решении  $x'$  совпадает с оптимальным критерием задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$ . Докажем от противного.

Предположим, что решение  $x'$  не является оптимумом в задаче (13), (14). Пусть  $x^{j*}$  – оптимальное решение задачи (13), (14). Тогда значение критерия задачи (13), (14) на решении  $x^{j*}$  строго меньше значения критерия задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$  на решении  $x^*$ . Построим решение задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$  следующим алгоритмом:

Шаг 1.  $P(x^{j*}) = \emptyset$ .

Шаг 2. Для каждого  $i = \overline{1, n}$ :

если  $x_i^{j*} = 1$ , тогда  $P(x^{j*}) = P(x^{j*}) \cup \{(2i - 1, 2i - 1, 2i - 1), (2i, 2i, 2i)\}$ ,

иначе  $P(x^{j*}) = P(x^{j*}) \cup \{(2i - 1, 2i - 1, 2i), (2i, 2i, 2i - 1)\}$ .

По построению значения критерия задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$  на решении, соответствующем  $P(x'^*)$ , совпадает со значением критерия задачи (13), (14) на решении  $x'^*$ . Следовательно,  $x^*$  не является оптимальным решением задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$ . Получили противоречие, предположение неверно. Отсюда значение критерия задачи (13), (14) на решении  $x'$  совпадет с оптимальным значением критерия задачи  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$ .

Таким образом, задача (13), (14) полиномиально сводима к классу задач  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$ . Следовательно, класс задач  $Z_{\min\max}(W(x^1, x^2))$  является NP-трудным. Теорема доказана.

## 7. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим задачу  $Z_{\leq}$  при  $M = 2$ . По аналогии с [12] построим тестовый набор с трехиндексными матрицами стоимостей, элементы которых сгенерированы с целочисленными значениями, равномерно распределенными на отрезке  $[0, 300]$ . Будем проводить серии экспериментов при фиксированных значениях  $n$ , количество задач в серии обозначим через  $K$ . Построим два эвристических алгоритма для решения задачи  $Z_{\leq}$ . Первый алгоритм основан на построении подмножеств допустимых решений и выборе среди них рекорда, второй – аналогичен первому, но шаг выбора рекорда заменен на последовательное комбинирование решений при помощи алгоритма 1. Отметим, что согласно утверждению 5 алгоритм 1 имеет сложность  $O(n)$ , что совпадает со сложностью выбора рекорда.

Эвристический алгоритм 1. Построим  $N = n^3$  случайных решений, к каждому из которых применим алгоритм локальной оптимизации [13]. Полученные допустимые решения задачи  $Z_{\leq}$  обозначим через  $x'_t$ ,  $t = \overline{1, N}$ . Тогда в качестве решения алгоритма выберем рекорд из полученных решений  $x^* : x^* \preceq x'_t$ ,  $t = \overline{1, N}$ .

Эвристический алгоритм 2. Вместо шага выбора рекорда будем последовательно комбинировать пары решений при помощи алгоритма 1 следующим образом. Пусть  $x''_1$  является решением задачи  $Z_{\leq}(W(x'_1, x'_2))$ . Далее через  $x''_t$  обозначим решение задачи  $Z_{\leq}(W(x''_{t-1}, x'_{t+1}))$ ,  $t = \overline{2, N-1}$ . В качестве решения алгоритма выберем  $x''_{N-1}$ .

Через  $C^1(x)$ ,  $C^2(x)$  обозначим значения критериев (5) на решении  $x$ . Будем сравнивать среднее отклонение значений критериев при комбинировании (эвристический алгоритм 2) и значений критериев при выборе рекорда (эвристический алгоритм 1) в сериях. Полученные результаты приведены в табл. 1.

Таким образом, среднее отклонение для первого критерия по всем сериям составляет 3,94%, для второго – по всем сериям составляет 0,7%, что демонстрирует эффективность применения стратегии комбинирования вместо общепринятой стратегии выбора рекорда.

Случай линейной свертки эквивалентен однокритериальной задаче с линейным критерием и рассмотрен в работах [20, 21], которые также содержат результаты вычислительного эксперимента. Случай минимаксной свертки в

**Таблица 1**

$n$	$K$	$100\% \frac{C^1(x^*) - C^1(x''_{N-1})}{C^1(x^*)}$	$100\% \frac{C^2(x^*) - C^2(x''_{N-1})}{C^2(x^*)}$
10	10	3,09%	1,98%
11	10	5,3%	-6,23%
12	10	5,31%	6,58%
13	10	2,05%	0,46%
14	10	0%	0%
15	10	1,26%	-1,85%
16	10	2,5%	2,14%
17	10	2,74%	-4,92%
18	10	3,19%	-0,7%
19	10	7,08%	2,3%

вычислительном эксперименте не рассматривается, так как согласно теореме 2 задача комбинирования с минимаксной сверткой является NP-трудной уже при комбинировании двух решений.

## 8. Заключение

В результате исследования алгоритмов решения NP-трудной многокритериальной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях с различными видами сверток критериев в качестве схемы компромисса в данной работе сформулирована задача комбинирования допустимых решений задачи. Комбинирование решений может быть применено в качестве дополнения к известным эвристическим или приближенным алгоритмам для постобработки полученных приближенных решений задачи о назначениях вместо общепринятой практики выбора рекорда.

Исследован сложностной статус комбинирования решений и показано, что в случае линейной или лексикографической свертки комбинирование пар решений может быть выполнено за время  $O(n)$ , класс задач комбинирования четырех и более решений является NP-трудным, сложностной статус комбинирования трех решений – открытая проблема. В случае минимаксной свертки класс задач комбинирования двух и более решений является NP-трудным. Полученные результаты приведены для наглядности в табличном виде (см. табл. 2).

В работе построен алгоритм комбинирования пар решений для случая лексикографической свертки. Приведены результаты комбинирования, показы-

**Таблица 2**

	$Z_L(W(x^1, \dots, x^r))$	$Z_{\leq}(W(x^1, \dots, x^r))$	$Z_{\min\max}(W(x^1, \dots, x^r))$
$r = 2$	$O(n)$	$O(n)$	NP-трудный
$r = 3$	?	?	
$r \geq 4$	NP-трудный	NP-трудный	



вающие снижение отклонения от оптимума при проведении вычислительного эксперимента.

Дальнейшим направлением исследования является изучение открытых случаев комбинирования трех решений и исследование комбинирования решений при построении Парето-оптимальных решений многокритериальной задачи о назначениях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Spieksma F.C.R.* Multi Index Assignment Problems. Complexity, Approximation, Applications. P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.) / Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000. P. 1–11.
2. *Burkard R., Dell’Amico M., Martello S.* Assignment problems: revised reprint. PA: SIAM, 2012.
3. *Kuroki Y., Matsui T.* An approximation algorithm for multidimensional assignment problems minimizing the sum of squared errors // *Discret. Appl. Math.* 2009. V. 157. No. 9. P. 2124–2135.
4. *Poore A.B.* Multidimensional Assignment Problems Arising in Multitarget and Multisensor Tracking. P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.) / Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000. P. 13–38.
5. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
6. *Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation Algorithms for Three-Dimensional Assignment Problems with Triangle Inequalities // *Eur. J. Oper. Res.* 1992. V. 60. P. 273–279.
7. *Bandelt H.J., Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation algorithms for multidimensional assignment problems with decomposable costs // *Discret. Appl. Math.* 1994. V. 49. P. 25–50.
8. *Burkard R.E., Rudolf R., Woeginger G.J.* Three-dimensional axial assignment problems with decomposable cost coefficients // *Discret Appl. Math.* 1996. V. 65. P. 123–139.
9. *Spieksma F., Woeginger G.* Geometric three-dimensional assignment problems // *Eur. J. Oper. Res.* 1996. V. 91. P. 611–618.
10. *Custic A., Klinz B., Woeginger G.J.* Geometric versions of the three-dimensional assignment problem under general norms // *Discret. Optim.* 2015. V. 18. P. 38–55.
11. *Balas E., Saltzman M.J.* An Algorithm for the Three-Index Assignment Problem // *Oper. Res.* 1991. V. 39. No. 1. P. 150–161.
12. *Natu S., Date K., Nagi R.* GPU-accelerated Lagrangian heuristic for multidimensional assignment problems with decomposable costs // *Parallel Comput.* 2020. V. 97. 102666.
13. *Huang G., Lim A.* A hybrid genetic algorithm for the Three-Index Assignment Problem // *Eur. J. Oper. Res.* 2006. V. 172. P. 249–257.
14. *Kim B.J., Hightower W.L., Hahn P.M., Zhu Y.R., Sun L.* Lower bounds for the axial three-index assignment problem // *Eur. J. Oper.* 2010. V. 202. P. 654–668.

15. Дичковская С.А., Кравцов М.К. Исследование полиномиальных алгоритмов решения трехиндексной планарной проблемы выбора // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. 2006. Т. 46. № 2. С. 222–228.
16. Дичковская С.А., Кравцов М.К. Исследование полиномиальных алгоритмов решения многокритериальной трехиндексной планарной задачи о назначениях // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. 2007. Т. 47. № 6. С. 1077–1086.
17. Емеличев В.А., Перепелица В.А. Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная математика. 1994. Т. 6. Вып. 1. С. 3–33.
18. Прилуцкий М.Х. Многокритериальные многоиндексные задачи объемнокалендарного планирования // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 78–82.
19. Прилуцкий М.Х. Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // АиТ. 1996. № 2. С. 24–29.
20. Афраймович Л.Г., Емелин М.Д. Комбинирование решений аксиальной задачи о назначениях // АиТ. 2021. № 8. С. 159–168.  
*Afraimovich L.G., Emelin M.D. Combining solutions of the axial assignment problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 8. P. 1418–1425.*
21. Афраймович Л.Г., Емелин М.Д. Эвристические стратегии комбинирования решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях // АиТ. 2021. № 10. С. 6–12.  
*Afraimovich L.G., Emelin M.D. Heuristic Strategies for Combining Solutions of the Three-Index Axial Assignment Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 10. 1635–1640.*
22. *Afraimovich L.G., Emelin M.D. Complexity of Solutions Combination for the Three-Index Axial Assignment Problem // Mathematics. 2022. V. 10. No. 7. 1062.*

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.*

Поступила в редакцию 04.03.2024

После доработки 21.05.2024

Принята к публикации 27.06.2024

# Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2024 г. П.В. ПАКШИН, д-р физ.-мат. наук (pakshinpv@gmail.com),  
Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА, канд. физ.-мат. наук (EmelianovaJulia@gmail.com)  
(Арзамасский политехнический институт (филиал)

Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева),  
Э. РОДЖЕРС, доктор философии (etar@ecs.soton.ac.uk)  
(Университет Саутгемптона, Саутгемптон, Великобритания)

## СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ТЯЖЕЛОГО ШАРИКА<sup>1</sup>

Рассматривается задача синтеза управления с итеративным обучением на основе наблюдателя состояния для дискретных линейных систем. С целью ускорения сходимости ошибки обучения предлагается новый подход к ее решению, использующий комбинацию метода тяжелого шарика из теории оптимизации и метода векторной функции Ляпунова для класса двумерных систем, известных как повторяющиеся процессы. Приведен пример, включающий сравнение с известными результатами.

*Ключевые слова:* управление с итеративным обучением, повторяющиеся процессы, устойчивость, сходимость, наблюдатель состояния, метод тяжелого шарика, векторная функция Ляпунова, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231024080074, EDN: WPDYEU

### 1. Введение

Метод управления с итеративным обучением (УИО) появился в результате исследований, направленных на повышение точности повторяющихся операций, выполняемых роботами [1], таких как операции выбора и размещения. Ранние результаты в этой активно развивающейся области можно найти, например, в обзорных статьях [2, 3], а более поздние результаты, например, в [4]. В настоящее время УИО эффективно применяется в аддитивном производстве, в частности в установках высокоточного многослойного лазерного напыления [5, 6], в медицинских роботах для реабилитации пациентов, перенесших инсульт [7, 8], в устройствах поддержки желудочка сердца [9] и во многих других приложениях.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке Российского научного фонда, грант № 23-71-01044, <https://rscf.ru/project/23-71-01044>.

Класс систем, к которым может применяться УИО, составляют системы, выполняющие одну и ту же задачу конечной продолжительности в повторяющемся режиме. Характерным примером является робот, работающий в режиме захвата и размещения; он забирает полезную нагрузку из указанного места, перемещает ее в течение ограниченного периода времени, устанавливает ее в определенную позицию, а затем возвращается в исходное положение, чтобы повторить эту последовательность задач. Каждое выполнение, обычно называемое в публикациях по УИО пробным шагом, имеет конечную продолжительность. После завершения очередного пробного шага вся информация, генерируемая на его протяжении, становится доступной для обновления управляющего сигнала последующего пробного шага, что подчеркивает итеративный характер УИО. Например, в производстве химикатов, фармацевтических препаратов, потребительских товаров и биопродуктов широко используется пакетная обработка, где одна и та же операция конечной продолжительности применяется к последовательности объектов с ограничением по времени между окончанием обработки одного и началом обработки следующего. Поскольку пакетные процессы имеют повторяющийся характер, то применение УИО для таких процессов вполне обосновано [10].

В рассматриваемых приложениях обычно задается эталонная траектория движения. В операции захвата и размещения эта траектория представляет собой идеальный путь, которому робот должен следовать на каждом пробном шаге. Разности между выборочными значениями на этой траектории и результатами пробных шагов образуют последовательность ошибок обучения. Задача проектирования управления включает в себя построение последовательности пробных входных сигналов. Эти сигналы предназначены для управления движением робота таким образом, чтобы последовательность ошибок сходилась (относительно пробных шагов) либо к нулю, либо к значению в пределах заданного допуска. Переходный процесс в течение пробного шага можно оценить на основании знания конкретной задачи.

Как хорошо известно, двухшаговые методы, такие как метод тяжелого шарика и метод сопряженных градиентов, позволяют существенно ускорить сходимость градиентного метода в задачах оптимизации [11–13]. В этой статье исследуется задача ускорения сходимости ошибки обучения относительно пробных шагов с помощью управления, значение которого на любом пробном шаге является явной функцией входных данных текущего и предыдущих пробных шагов. Анализ основан на использовании метода тяжелого шарика [11], и ключевой идеей здесь является подобие структур градиентного метода и управления с итеративным обучением.

В литературе рассматривались альтернативные стратегии использования данных предыдущих пробных шагов, чтобы ускорить сходимость ошибки обучения. Был проведен значительный объем исследований по синтезу законов УИО, где для создания входных данных для последующего пробного повторения используется более одной ошибки обучения предыдущих повторений, например, [14–20]. Законы УИО, использующие управляющие входные данные

из двух и более предыдущих пробных повторений для вычисления входных данных, используемых на последующем пробном повторении, получили название законов высшего порядка. В общих чертах в этих подходах сначала на основе эвристических соображений определялась структура закона обновления УИО. Далее параметры этого закона находились из условия сходимости ошибок относительно пробных повторений. Выбор количества предыдущих пробных испытаний для достижения наиболее значимого эффекта пока остается открытой исследовательской проблемой.

В [21] описан закон УИО, основанный на методе Нестерова [22], но достигнутая скорость сходимости оказалась медленнее, чем установленная в [22]. По видимому, это связано с использованием так называемого причинного закона УИО. В системах, где применяется УИО, все данные, полученные на текущем пробном шаге, доступны для использования при вычислении закона управления для последующего пробного шага; для дискретной динамики в момент выборки  $p$  можно использовать данные, например, из выборки  $p + \lambda$  с предыдущего пробного шага. Известно [2], что неиспользование такой информации может серьезно ограничить преимущества закона УИО. В заключение этого краткого анализа отметим, что на текущий момент не получено строгого теоретического доказательства преимуществ использования законов высшего порядка.

На протяжении статьи обозначения переменных имеют вид  $h_k(p)$ ,  $0 \leq p \leq N - 1$ , где  $h$  – рассматриваемый вектор или скалярная переменная, целое число  $k \geq 0$  обозначает номер пробного шага, а  $N$  – (конечное) количество выборок на текущем пробном шаге ( $N$ , умноженное на период выборки, дает длительность пробного шага). Символы  $\succ 0$ ,  $\prec 0$ ,  $\succeq 0$  и  $\preceq 0$  обозначают соответственно симметричную положительно определенную матрицу, симметричную отрицательно определенную матрицу, симметричную положительно полуопределенную матрицу и симметричную отрицательно полуопределенную матрицу.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную систему в повторяющемся режиме, описываемую уравнением состояния

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= Ax_k(p) + Bu_k(p), \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \quad 0 \leq p \leq N-1, \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

где  $x_k(p) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $u_k(p) \in \mathbb{R}$  и  $y_k(p) \in \mathbb{R}$  – соответственно входная и выходная скалярные переменные, в рассматриваемом классе задач переменная  $k$  обычно называется пробным шагом, а  $y_k(p)$  – профилем пробного шага. Матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  известны и предполагается, что  $CB \neq 0$ , это предположение сделано только для компактности изложения и может быть снято, например, с использованием результата [23]. Граничные условия имеют вид  $x_k(0) = x_0$ ,  $k \geq 0$ ,  $x_0$  известен и задан (после завершения пробного

шага система возвращается в исходное состояние),  $u_k(p)$  для  $k = 0$  задана, ограничена и для  $k \geq 1$  вычисляется в соответствии с описанным далее законом обновления. Заметим, что дальнейшее изложение без принципиальных затруднений распространяется на многомерные системы с одинаковыми размерностями входа и выхода.

Предполагается, что система является полностью управляемой и наблюдаемой и на каждом пробном шаге  $k$  измерению доступна переменная  $y_k(p)$ . Для оценки вектора состояния используем асимптотический наблюдатель полного порядка

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \hat{x}_k(p+1) &= A\hat{x}_k(p) + Bu_k(p) + G(y_k(p) - C\hat{x}_k(p)), \\ \hat{x}_k(0) &= x_0, \quad 0 \leq p \leq N-1, \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

где матрица  $G$  выбирается любым известным методом из условия, что ошибка оценивания

$$\tilde{x}_k(p) = x_k(p) - \hat{x}_k(p) \rightarrow 0$$

при  $p \rightarrow \infty$ .

*Замечание 1.* При указанных начальных условиях наблюдатель точно восстанавливает вектор состояния. Если  $x_0$  недоступен для наблюдателя и его начальные условия будут другими, переходный процесс по ошибке оценивания приведет к снижению точности. Этот случай требует самостоятельного изучения, выходящего за рамки данной статьи.

Обозначим через  $y_{ref}(p)$ ,  $0 \leq p \leq N-1$ ,  $y_{ref}(0) = Cx_0$ , заданную желаемую траекторию выходной переменной системы (2.1). Тогда на пробном шаге  $k$  переменная

$$(2.3) \quad e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p)$$

будет означать ошибку воспроизведения желаемой траектории. Далее эту переменную будем называть ошибкой обучения. Задача управления с итеративным обучением состоит в построении последовательности входных переменных  $\{u_k\}$  такой, чтобы при всех  $0 \leq p \leq N-1$  для  $e_k(p)$  и  $u_k(p)$  выполнялись условия

$$(2.4) \quad |e_k(p)| \leq \alpha \rho^k, \quad \alpha > 0, \quad 0 < \rho < 1,$$

$$(2.5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |u_k(p)| = |u_\infty(p)| < \infty.$$

Переменную  $u_\infty(p)$  в литературе часто называют обученным управлением. В приложениях УИО продолжительность пробного шага конечна; следовательно, можно добиться сходимости ошибки относительно пробных шагов (по  $k$ ) для неустойчивых по переменной  $p$  траекторий. Тогда существуют два варианта: а) разработать закон управления со стабилизирующей обратной связью, а затем применить УИО к результирующей управляемой системе,

б) разработать закон управления, который одновременно обеспечивает сходимость ошибки относительно пробных шагов к нулю либо к значению в пределах заданного допуска и регулирует динамику вдоль траектории пробного шага. В последнем случае систему с УИО следует рассматривать как двумерную систему, в которой информация распространяется как относительно пробных шагов ( $k$ ), так и вдоль траектории пробного шага ( $p$ ).

### 3. Анализ сходимости и синтез управления

В теории УИО получили распространение два подхода. Подход с использованием расширенной модели для систем с дискретным временем предполагает использование так называемых супервекторов [14]. Поскольку длина профиля конечна, значения переменной на этой длине можно объединить в вектор-столбец, например, для входных данных  $\mathbf{U}_k = [u_k(0) \dots u_k(N-1)]$ . В результате динамика обновления переменных относительно пробных шагов может быть выражена в виде стандартных разностных уравнений. Такой подход может привести к моделям очень больших размерностей. Более того, во многих случаях необходимо применять управление с обратной связью для регулирования динамики вдоль профиля пробного шага. Альтернативой является представление динамики в виде особой формы 2D-систем – дискретных повторяющихся процессов [24], что позволяет избежать повышения размерности. Этот подход используется в данной статье. Для построения модели в виде повторяющегося процесса в соответствии с [24] введем приращения переменных:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \eta_{k+1}(p+1) &= x_{k+1}(p) - x_k(p), \quad \hat{\eta}_{k+1}(p+1) = \hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p), \\ \tilde{\eta}_{k+1}(p+1) &= \tilde{x}_{k+1}(p) - \tilde{x}_k(p), \quad 0 \leq p \leq N-1, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Используя (3.1) и (2.1), (2.2), (2.3), получим

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}_{k+1}(p+1) &= (A - GC)\tilde{\eta}_{k+1}(p), \\ \hat{\eta}_{k+1}(p+1) &= GC\tilde{\eta}_{k+1}(p) + A\hat{\eta}_{k+1}(p) + B\Delta u_{k+1}(p-1), \\ e_{k+1}(p) &= -CGC\tilde{\eta}_{k+1}(p) - CA\hat{\eta}_{k+1}(p) - CB\Delta u_{k+1}(p-1) + e_k(p), \end{aligned}$$

где  $\Delta u_{k+1}(p-1) = u_{k+1}(p-1) - u_k(p-1)$ . Закон управления с итеративным обучением обычно формируется как сумма входных данных предыдущего испытания плюс поправочный член (закон обновления). При завершении очередного пробного шага вся информация с предыдущих пробных шагов доступна для формирования управления на следующем пробном шаге. Во многих случаях используются только данные предыдущего пробного шага. Возникает естественный вопрос: “Будет ли полезным использование конечного числа предыдущих пробных шагов, большего одного?” В этой статье рассматривается закон управления, который использует сигналы управления двух предыдущих пробных шагов и процедуру оптимизации для ускорения сходимости ошибки обучения относительно пробных шагов.

Закон управления для (3.2) имеет следующую структуру:

$$(3.3) \quad u_{k+1}(p-1) = u_k(p-1) + \Delta u_{k+1}(p-1)$$

и задача сводится к нахождению обновляющей поправки  $\Delta u_{k+1}(p-1)$ , обеспечивающей выполнение условий сходимости (2.4) и (2.5). Дополнительно потребуем, чтобы обновляющая поправка удовлетворяла соотношению

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \Delta u_{k+1}(p-1) = & \alpha \Delta u_k(p-1) + \beta \nabla \left( \frac{1}{2} e_{k+1}(p)^2 \right) + \\ & + \gamma [\Delta u_k(p-1) - \Delta u_{k-1}(p-1)], \end{aligned}$$

где

$$(3.5) \quad \nabla \left( \frac{1}{2} e_{k+1}(p)^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \Delta u_{k+1}(p-1)} \left( \frac{1}{2} e_{k+1}(p)^2 \right).$$

Соотношение (3.4) сформировано по аналогии с алгоритмом метода тяжелого шарика в теории оптимизации. Этот простейший двухшаговый метод ускоряет сходимость градиентного метода. Как будет показано, такой же эффект достигается при управлении с итеративным обучением с обновляющей поправкой, удовлетворяющей (3.4). Заметим, что это лишь один из вариантов использования прошлых пробных шагов в законе УИО.

*Замечание 2.* В оригинальной работе [11] коэффициент при первом слагаемом в правой части (3.4) равен единице, но в рассматриваемом приложении закон обновления (3.4) будет погружен в динамику системы (3.2) и, в отличие от [11], аргумент  $\Delta u_{k+1}(p-1)$  параметризован по переменной  $p$ . Следовательно, параметры  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , гарантирующие сходимость, могут отличаться от рекомендованных в [11].

В силу последнего уравнения из (3.2) выражение под знаком производной в (3.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e_{k+1}(p)^2 = & [-CGC\tilde{\eta}_{k+1}(p) - CA\hat{\eta}_{k+1}(p) - CB\Delta u_{k+1}(p-1) + e_k(p)]^T \times \\ & \times [-CGC\tilde{\eta}_{k+1}(p) - CA\hat{\eta}_{k+1}(p) - CB\Delta u_{k+1}(p-1) + e_k(p)]. \end{aligned}$$

Вычисляя производную правой части по  $\Delta u_{k+1}(p-1)$ , получим

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{1}{2} e_{k+1}(p)^2 \right) = & (CB)^2 \Delta u_{k+1}(p-1) + CBCA\hat{\eta}_{k+1}(p) + \\ & + CBCGC\tilde{\eta}_{k+1}(p) - CBe_k(p). \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (3.4), после несложных преобразований имеем

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \Delta u_{k+1}(p-1) = & K_1 \Delta u_k(p-1) + K_2 CGC\tilde{\eta}_{k+1}(p) + K_2 CA\hat{\eta}_{k+1}(p) - \\ & - K_2 e_k(p) - K_3 \Delta u_{k-1}(p-1), \end{aligned}$$



где

$$K_1 = \frac{\alpha + \gamma}{1 - \beta(CB)^2}, \quad K_2 = \frac{\beta CB}{1 - \beta(CB)^2}, \quad K_3 = \frac{\gamma}{1 - \beta(CB)^2}.$$

Далее с целью применения техники линейных матричных неравенств (ЛМН) вместо исходных параметров  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  будут использоваться  $K_1, K_2$  и  $K_3$ . Обозначим:

$$\zeta_k(p) = \tilde{\eta}_{k+1}(p), \quad \xi_k(p) = \hat{\eta}_{k+1}(p), \quad \Delta \bar{u}_k(p) = \Delta u_k(p - 1).$$

Подставляя (3.6) в (3.2), получим

$$\begin{aligned} \zeta_k(p+1) &= (A - GC)\zeta_k(p), \\ \xi_k(p+1) &= (I + BK_2C)GC\zeta_k(p) + (I + BK_2C)A\xi_k(p) + \\ &\quad + BK_1\Delta \bar{u}_k(p) - BK_3\Delta \bar{v}_k(p) - BK_2e_k(p), \\ (3.7) \quad \Delta \bar{u}_{k+1}(p) &= K_2CA\xi_k(p) + K_1\Delta \bar{u}_k(p) - K_3\Delta \bar{v}_k(p) - K_2e_k(p), \\ \Delta \bar{v}_{k+1}(p) &= \Delta \bar{u}_k(p), \\ e_{k+1}(p) &= -C(I + BK_2C)GC\zeta_k(p) - C(I + BK_2C)A\xi_k(p) - \\ &\quad - CBK_1\Delta \bar{u}_k(p) + CBK_3\Delta \bar{v}_k(p) + (1 + CBK_2)e_k(p). \end{aligned}$$

В модели (3.7) векторы  $\zeta_k(p)$  и  $\xi_k(p)$  изменяются вдоль траектории повторения (относительно  $p$ ), а переменные  $\Delta \bar{u}_k(p)$ ,  $\Delta \bar{v}_k(p)$  и  $e_k(p)$  изменяются от повторения к повторению (относительно  $k$ ). Системы с таким характером динамики известны как дискретные линейные повторяющиеся процессы [24]. На каждом повторении (пробный шаг в задачах УИО) в таких системах протекает динамический процесс конечной продолжительности. После завершения очередного повторения система возвращается в исходное положение и становится готовой к следующему повторению. Уникальной особенностью является то, что результат любого повторения влияет на динамику следующего, а это может привести к колебаниям, которые увеличиваются от повторения к повторению и не могут управляться стандартными методами. Для таких систем была разработана теория устойчивости в рамках линейной динамики [24], которая была применена к синтезу УИО с экспериментальным подтверждением [25].

Как и при анализе устойчивости и разработке законов управления в стандартной теории линейных систем, одним из подходов к решению может быть построение подходящей функции Ляпунова. В рассматриваемом случае она должна быть построена из суммы членов, изменяющихся относительно пробных шагов и вдоль траекторий пробных шагов. Но уравнения в (3.7) связаны, следовательно, градиент функции Ляпунова (в рассматриваемом случае его дискретный аналог) можно найти только в том случае, если решения этих уравнений известны, что является очень сильным ограничением, и вместо этого необходимо использовать векторную функцию Ляпунова и заменять градиент дивергенцией [26]. (В случае линейной динамики подходы [24, 26] приводят к эквивалентным результатам.)

В данной работе векторная функция Ляпунова для системы (3.7) имеет вид

$$(3.8) \quad V(\bar{\xi}_k(p), \bar{e}_k(p)) = \begin{bmatrix} V_1(\bar{\xi}_k(p)) \\ V_2(\bar{e}_k(p)) \end{bmatrix},$$

где  $\bar{\xi}_k(p) = [\zeta_k(p)^T \xi_k(p)^T]^T$ ,  $\bar{e}_k(p) = [\Delta \bar{u}_k(p) \quad \Delta \bar{v}_k(p) \quad e_k(p)]^T$ ,  $V_1(\bar{\xi}_k(p)) > 0$ ,  $\bar{\xi}_k(p) \neq 0$ ,  $V_2(\bar{e}_k(p)) > 0$ ,  $\bar{e}_k(p) \neq 0$ ,  $V_1(0) = 0$ ,  $V_2(0) = 0$ . Определим аналог оператора дивергенции этой функции на траекториях системы (3.2):

$$(3.9) \quad DV(\bar{\xi}_k(p), \bar{e}_k(p)) = V_1(\bar{\xi}_k(p+1)) - V_1(\bar{\xi}_k(p)) + V_2(\bar{e}_{k+1}(p)) - V_2(\bar{e}_k(p)).$$

Справедливо следующее утверждение.

*Теорема 1.* *Предположим, что существуют векторная функция Ляпунова (3.8) и положительные скаляры  $c_1, c_2, c_3$  такие, что на траекториях системы (3.7) справедливы неравенства*

$$(3.10) \quad c_1 \|\bar{\xi}_k(p)\|^2 \leq V_1(\bar{\xi}_k(p)) \leq c_2 \|\bar{\xi}_k(p)\|^2,$$

$$(3.11) \quad c_1 \|\bar{e}_k(p)\|^2 \leq V_2(\bar{e}_k(p)) \leq c_2 \|\bar{e}_k(p)\|^2,$$

$$(3.12) \quad DV(\bar{\xi}_k(p), \bar{e}_k(p)) \leq -c_3(\|\bar{\xi}_k(p)\|^2 + \|\bar{e}_k(p)\|^2).$$

Тогда выполняются условия сходимости ошибки обучения (2.4) и ограниченности управления (2.5).

*Доказательство.* В [26, теорема 1] доказано, что при выполнении (3.10)–(3.12) справедлива оценка

$$(3.13) \quad \|\bar{\xi}_k(p)\|^2 + \|\bar{e}_k(p)\|^2 \leq \bar{\varkappa} \varrho^k, \quad 0 \leq p \leq N-1, \quad k \geq 0,$$

где  $\bar{\varkappa}$  и  $0 < \varrho < 1$  зависят от  $c_1, c_2$  и  $c_3$ . Из (3.13) с учетом определения  $\bar{e}_k(p)$  следует

$$(3.14) \quad |e_k(p)|^2 \leq \bar{\varkappa} \varrho^k, \quad |\Delta \bar{u}_k(p)|^2 \leq \bar{\varkappa} \varrho^k.$$

Из первого неравенства в (3.14) следует (2.4) при  $\varkappa = \bar{\varkappa}^{\frac{1}{2}}$  и  $\rho = \varrho^{\frac{1}{2}}$ . Ограниченность управления (2.5) следует из очевидного соотношения

$$|u_k(p)| \leq |u_{k-1}(p)| + |\Delta \bar{u}_k(p)|, \quad 0 \leq p \leq N-1, \quad k = 1, 2, \dots$$

с учетом ограниченности  $u_0(p)$  и второго неравенства из (3.14).

Определим следующие матрицы и векторы:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A - GC & 0 & 0 & 0 & 0 \\ GC & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -CGC & -CA & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ 1 \\ 0 \\ -CB \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ CGC & CA & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следующая теорема позволяет найти параметры закона обновления с использованием техники линейных матричных неравенств.

Теорема 2. Предположим, что для некоторой матрицы  $Q \succ 0$  и положительного скаляра  $R$  система из линейного матричного неравенства и уравнения

$$(3.15) \quad \begin{bmatrix} X & (\bar{A}X + \bar{B}Y\bar{C})^T & X & (Y\bar{C})^T \\ \bar{A}X + \bar{B}Y\bar{C} & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ Y\bar{C} & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \bar{C}X = Z\bar{C}$$

имеет решение  $X = \text{diag}[X_1 \ X_2]$ ,  $Y$ ,  $Z$ , где  $X_1$  и  $X_2$  – положительно определенные матрицы размеров  $2n \times 2n$  и  $3 \times 3$ . Тогда закон управления с итеративным обучением

$$(3.16) \quad \begin{aligned} u_{k+1}(p) &= u_k(p) + \Delta u_{k+1}(p), \\ \Delta u_{k+1}(p) &= K_1 \Delta u_k(p) + K_2 CA[\hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p)] + \\ &+ K_2 CG[(y_{k+1}(p) - y_k(p)) - (\hat{y}_{k+1}(p) - \hat{y}_k(p))] - \\ &- K_2[y_{ref}(p+1) - Cx_k(p+1)] - K_3 \Delta u_{k-1}(p), \end{aligned}$$

где

$$K = [ K_1 \quad K_2 \quad K_3 ] = YZ^{-1},$$

гарантирует выполнение условия сходимости ошибки обучения (2.4) и условия ограниченности управления (2.5).

Доказательство. Применяя к неравенству (3.15) лемму о дополнении Шура, получим

$$X - (\bar{A}X + \bar{B}Y\bar{C})^T X^{-1} (\bar{A}X + \bar{B}Y\bar{C}) - XQX - (Y\bar{C})^T R(Y\bar{C}) \succeq 0.$$

Учитывая, что  $Y = KZ$  и  $CX = Z\bar{C}$  перепишем это неравенство в виде

$$X - (\bar{A}X + \bar{B}K\bar{C}X)^T X^{-1} (\bar{A}X + \bar{B}K\bar{C}X) - XQX - (K\bar{C}X)^T R(K\bar{C}X) \succeq 0.$$

Умножая последнее неравенство на  $P = X^{-1}$  слева и справа и затем переставляя слагаемые имеем

$$(3.17) \quad (\bar{A} + \bar{B}K\bar{C})^T P (\bar{A} + \bar{B}K\bar{C}) - P + Q + (K\bar{C})^T R(K\bar{C}) \preceq 0.$$

Выберем компоненты векторной функции (3.8) в виде квадратичных форм

$$(3.18) \quad \begin{aligned} V_1(\bar{\xi}_k(p)) &= \bar{\xi}_k^T P_1 \bar{\xi}_k(p), \\ V_2(\bar{e}_k(p)) &= \bar{e}_k^T P_2 \bar{e}_k(p), \end{aligned}$$

тогда вычисляя дивергенцию (3.9) на траекториях системы (3.7), получим, что условия (3.10)–(3.12) будут выполнены, если

$$(3.19) \quad (\bar{A} + \bar{B}K\bar{C})^T P (\bar{A} + \bar{B}K\bar{C}) - P \prec 0,$$

но последнее неравенство справедливо в силу (3.17). Соотношение (3.16) следует из (3.6) с учетом (3.1) и (2.3).

*Замечание 3.* Система (3.15) по структуре аналогична соотношениям задачи о линейно-квадратичном регуляторе (ЛКР) в терминах ЛМН. Конкретное значение матрицы  $K = [K_1 \ K_2 \ K_3]$  зависит от  $Q$  и  $R$ , которые выбираются исходя из достижения желаемой скорости сходимости ошибки обучения. Как и в задаче ЛКР, полная формализация такого выбора отсутствует и можно рекомендовать эвристический подход, основанный на знании особенностей динамики рассматриваемой системы.

Для дальнейшего сравнительного анализа рассмотрим наиболее часто применяемый закон обновления (см., например, [27])

$$(3.20) \quad \Delta u_k(p) = \widehat{K}_1 \widehat{\eta}_k(p) + \widehat{K}_2 e_{k-1}(p+1).$$

Подставляя (3.20) в (3.2) и применяя теорему 1 с компонентами функции (3.8)

$$(3.21) \quad \begin{aligned} V_1(\bar{\xi}_k(p)) &= \bar{\xi}_k^T(p) \widehat{P}_1 \bar{\xi}_k(p), \\ V_2(e_k(p)) &= e_k^T(p) \widehat{P}_2 e_k(p), \end{aligned}$$

получим

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}V(\bar{\xi}_k(p), e_k(p)) &= \\ &= [\bar{\xi}_k^T(p) \ e_k(p)] [(\widehat{A} + \widehat{B}\widehat{K}\widehat{C})^T \widehat{P}(\widehat{A} + \widehat{B}\widehat{K}\widehat{C}) - \widehat{P}] [\bar{\xi}_k^T(p) \ e_k(p)]^T, \end{aligned}$$

где  $\widehat{P} = \text{diag}[\widehat{P}_1 \ \widehat{P}_2]$ ,

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A - GC & 0 & 0 \\ GC & A & 0 \\ -CGC & -CA & 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ -CB \end{bmatrix}, \quad \widehat{C} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = [\widehat{K}_1 \ \widehat{K}_2].$$

Повторяя выводы из доказательства теоремы 2, получим, что если система из линейного матричного неравенства и уравнения

$$(3.23) \quad \begin{bmatrix} \widehat{X} & (\widehat{A}\widehat{X} + \widehat{B}\widehat{Y}\widehat{C})^T & \widehat{X} & (\widehat{Y}\widehat{C})^T \\ \widehat{A}\widehat{X} + \widehat{B}\widehat{Y}\widehat{C} & \widehat{X} & 0 & 0 \\ \widehat{X} & 0 & \widehat{Q}^{-1} & 0 \\ \widehat{Y}\widehat{C} & 0 & 0 & \widehat{R}^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \widehat{C}\widehat{X} = \widehat{Z}\widehat{C}$$

имеет решение  $\widehat{X} = \text{diag}[\widehat{X}_1 \ \widehat{X}_2]$ ,  $\widehat{Y}$ ,  $\widehat{Z}$ , где  $\widehat{X}_1 \succ 0$  матрица размера  $2n \times 2n$ , а  $\widehat{X}_2$  – положительный скаляр, то закон УИО с обновляющей поправкой (3.20) и матрицей  $\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{Z}^{-1}$  гарантирует условие сходимости ошибки обучения (2.4) и условие ограниченности управления (2.5).

*Замечание 4.* Подход на основе применения метода тяжелого шарика приводит к новой структуре закона управления (3.16), отличающейся от используемой в известной литературе. Если при этом значения параметров обеспечивают выполнение условий (2.4) и (2.5), то обновляющая поправка в

соответствии с (3.4) изменяется вдоль направления градиента квадратичной функции этой поправки. В случае, когда обновляющая поправка формируется в соответствии с (3.20), это гарантировать нельзя. По-видимому, этим обеспечивается ускорение сходимости ошибки обучения при использовании закона управления (3.16), но строгого доказательства получить пока не удалось.

#### 4. Пример

В [25] рассмотрен порталный робот, специально спроектированный для имитации операции захвата и размещения, к которому применимо УИО. Этот робот имеет три взаимно перпендикулярные оси, одна из которых  $X$  направлена вдоль конвейерной ленты, вторая  $Y$  перпендикулярна этой оси в плоскости конвейера. Третья ось  $Z$  перпендикулярна плоскости  $XY$  (см. рис. 1). Система спроектирована так, что взаимодействием между осями можно пренебречь, а модели для проектирования системы управления были получены на основе частотных характеристик.

Передаточная функция для оси  $Y$  равна

$$(4.1) \quad G_Y(s) = \frac{23,736(s + 661,2)}{s(s^2 + 426,7s + 1,744 \times 10^5)}.$$

Желаемая траектория для этой оси показана на рис. 2, а период дискретизации для дискретной реализации  $T_s = 0,01$  с. Для построения дискретной

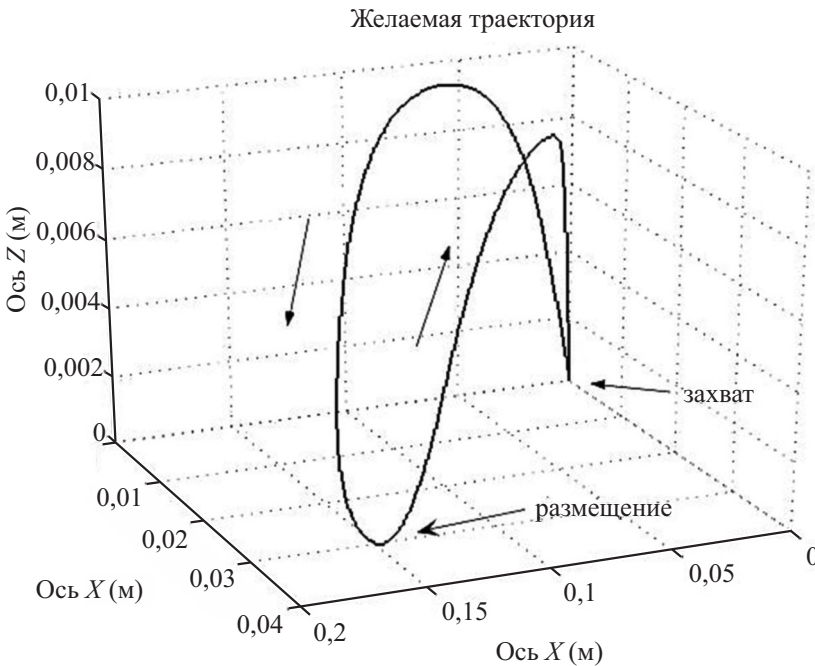


Рис. 1. Желаемая пространственная траектория движения робота.

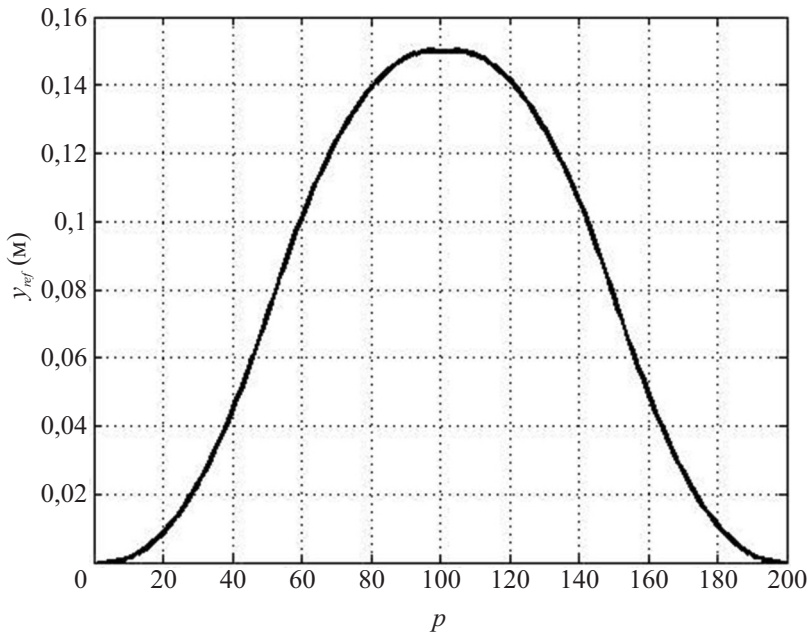


Рис. 2. Желаемая траектория движения робота по оси  $Y$ .

модели использованы стандартные функции `ss` и `c2d` пакета MATLAB. Матрицы этой модели имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} -0,0762 & 0,0487 & 0 \\ -0,0732 & -0,1372 & 0 \\ 0,0033 & 0,0026 & 1,0000 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0,0006 \\ 0,0134 \\ 0,0001 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0,0116 \ 7,6631].$$

При оценке эффективности управления необходимо оценивать как сходимость ошибки относительно пробных шагов, так и вид процесса на пробном шаге. На каждом пробном шаге вид процесса может быть оценен с использованием стандартных показателей. Для сходимости ошибки относительно пробных шагов одним из обычно используемых показателей является среднеквадратическая ошибка обучения для каждого пробного шага, отображаемая в зависимости от номера пробного шага, т.е. на шаге  $k$

$$(4.2) \quad E(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} |e_k(p)|^2}.$$

Для нахождения параметров наблюдателя воспользуемся результатами теории модального управления, реализованными в стандартной функции `place` пакета MATLAB. Задавая собственные значения матрицы  $A - GC$  в виде  $\lambda_1 = 0,9$ ,  $\lambda_{2,3} = -0,1 \pm 0,01i$ , в результате применения этой функции получим

$$G = [-0,3070 \ 2,6427 \ 0,0073]^T.$$

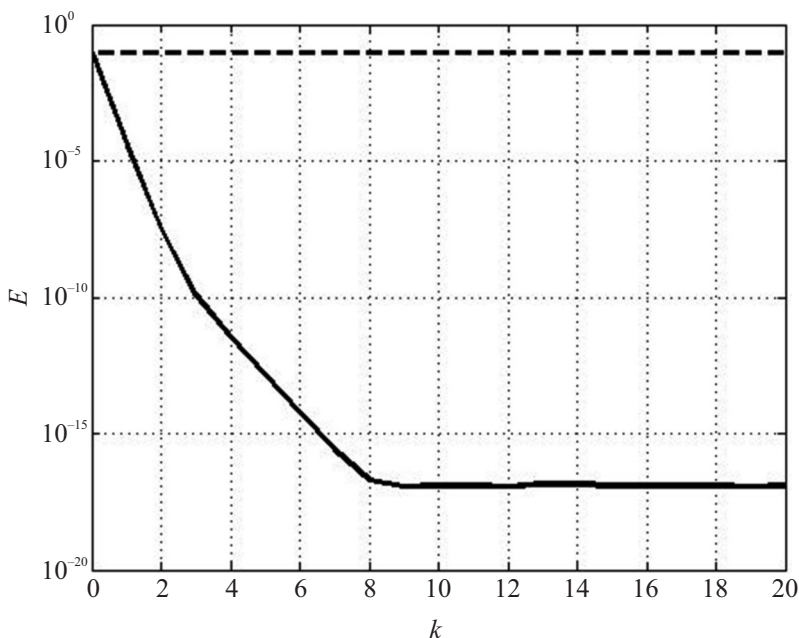


Рис. 3. Изменение  $E(k)$  при единичных  $Q$  и  $R$  при УИО по оси  $Y$  с обновляющей поправкой (3.16) (сплошная линия) и при УИО с обновляющей поправкой (3.20) (пунктирная линия).

Как отмечалось при постановке задачи, при сделанных предположениях любая матрица  $G$  наблюдателя, при которой собственные значения  $A - GC$  располагаются внутри единичного круга, гарантирует точное воспроизведение вектора состояния. Поэтому конкретный выбор собственных значений осуществлялся из условия, что коэффициенты усиления наблюдателя (элементы матрицы  $G$ ) являются относительно небольшими.

Выбирая  $Q$  и  $R$  единичными и применяя теорему 2, получим

$$K_1 = -1,09 \times 10^{-7}, \quad K_2 = -1196,0, \quad K_3 = -1,61 \times 10^{-8}.$$

При этих значениях параметров алгоритм (3.16) уже за один пробный шаг уменьшает ошибку обучения в  $10^5$  раз, а за 8 повторений эта ошибка достигает компьютерного нуля. Алгоритм УИО с обновляющей поправкой (3.20) дает в этом случае снижение ошибки на 1% за 70 пробных шагов (рис. 3).

Заметим, что коэффициенты  $K_1$  и  $K_3$  получились достаточно малыми. Моделирование показывает, что результат не изменится, если их положить равными нулю. В этом случае приходим к УИО с обновляющей поправкой (3.20), в которой  $\hat{K}_1 = K_2 CA$  и  $\hat{K}_2 = -K_2$ . Таким образом, применение метода тяжелого шарика по сути накладывает ограничения на структуру  $\hat{K}_1$  и  $\hat{K}_2$ , при которой обеспечивается высокая скорость сходимости. Попасть в область этих ограничений за счет эвристического выбора  $Q$  и  $R$  достаточно сложно, а установление связи скорости сходимости ошибки обучения с  $Q$  и  $R$

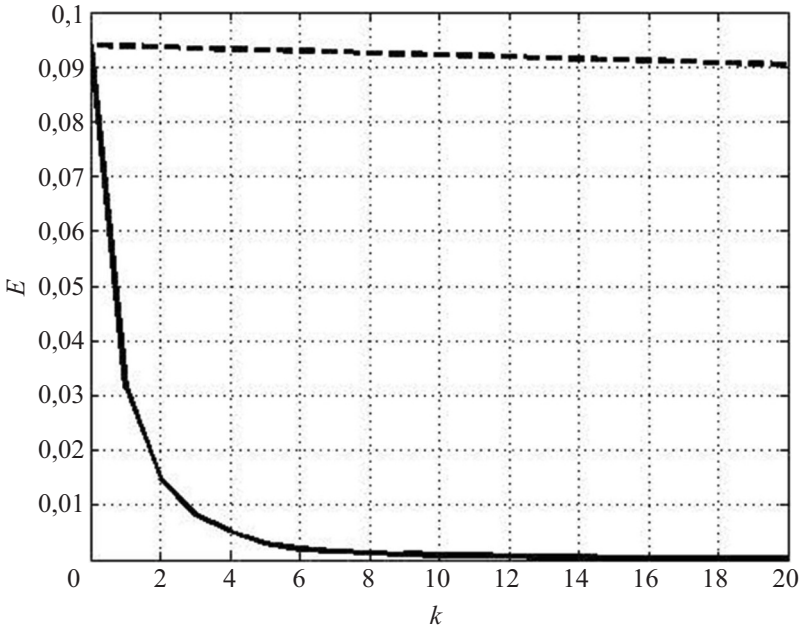


Рис. 4. Изменение  $E(k)$  с единичными  $Q$  и  $R$  при УИО по оси  $Y$  с обновляющей поправкой (3.16) при  $K_2 = -50$  (сплошная линия) и при УИО с обновляющей поправкой (3.20) при единичных  $Q$  и  $R$  (пунктирная линия).

является открытой задачей (авторам удалось подобрать матрицы, обеспечивающие примерно в 10 раз меньшую скорость сходимости, и это потребовало существенных затрат времени). С учетом этой особенности можно снижать скорость сходимости уменьшая  $K_2$  с последующей проверкой ЛМН (3.19). На практике это может оказаться важным из-за наличия амплитудных ограничений, приводящих к необходимости компромиссного решения. При  $K_2 = -50$  скорость сходимости снижается примерно в 80 раз по отношению к результату, полученному при единичных  $Q$  и  $R$  в (3.15), тем не менее эта скорость остается выше, чем при единичных  $Q$  и  $R$  в (3.23) (рис. 4); коэффициенты усиления в случае  $K_2 = -50$  и  $K_1 = K_3 = 0$  имеют вид

$$(4.3) \quad \hat{K}_1 = [-1,24 \quad -0,93 \quad -383,2], \quad \hat{K}_2 = 50,0,$$

а в случае УИО с обновляющей поправкой (3.20) при единичных  $Q$  и  $R$

$$(4.4) \quad \hat{K}_1 = [-21,8 \quad -18,4 \quad -7465,4], \quad \hat{K}_2 = 1,9.$$

Для решения систем линейных матричных уравнений и неравенств использовался программный пакет *SeDuMi* в комбинации с синтаксическим анализатором *YALMIP*. Анализируя (4.3) и (4.4), нетрудно заметить, что при отсутствии структурных ограничений на  $\hat{K}_1$  и  $\hat{K}_2$  внутренний алгоритм *SeDuMi* находит решение в области, обеспечивающей низкую скорость сходимости, в то время



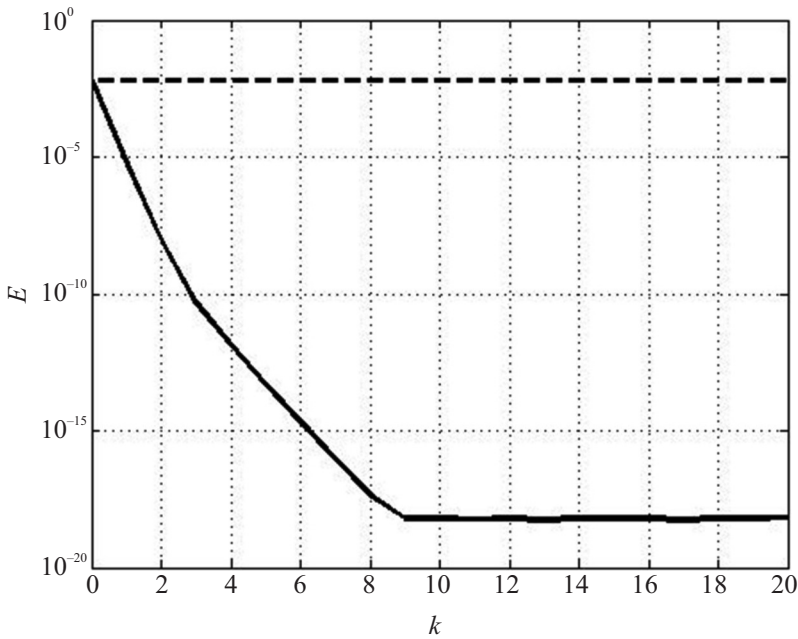


Рис. 5. Изменение  $E(k)$  с единичными  $Q$  и  $R$  при УИО по оси  $Z$  с обновляющей поправкой (3.16) (сплошная линия) и с обновляющей поправкой (3.20) (пунктирная линия).

как наличие ограничений, которые дает метод тяжелого шарика, направляет решение в область, обеспечивающую ускорение сходимости.

Рассмотрим построение УИО по осям  $Z$  и  $X$ , по которым передаточные функции соответственно имеют вид

$$G_Z(s) = \frac{15,8869(s + 661,2)}{s(s^2 + 707,6s + 3,377 \times 10^5)},$$

$$G_X(s) = \frac{13\,077\,183,4436(s + 113,4)(s^2 + 227,9s + 5,467 \times 10^4)}{s(s^2 + 61,57s + 1,125 \times 10^4)(s^2 + 227,9s + 5,467 \times 10^4)(s^2 + 466,1s + 6,142 \times 10^5)}.$$

Для построения наблюдателя по оси  $Z$  воспользуемся тем же методом, что и в предыдущем случае задавая полюсы наблюдателя в виде  $\lambda_1 = 0,9$ ,  $\lambda_{2,3} = -0,1 \pm 0,01i$ . Применяя функцию `place` пакета MATLAB, получим

$$G = [-0,405 \quad -28,01 \quad 0,078]^T.$$

Применение теоремы 2 с единичными  $Q$  и  $R$  дает

$$K_1 = -6,33 \times 10^{-8}, \quad K_2 = -2,673 \times 10^3, \quad K_3 = -8,33 \times 10^{-9}.$$

Результаты моделирования представлены на рис. 5.

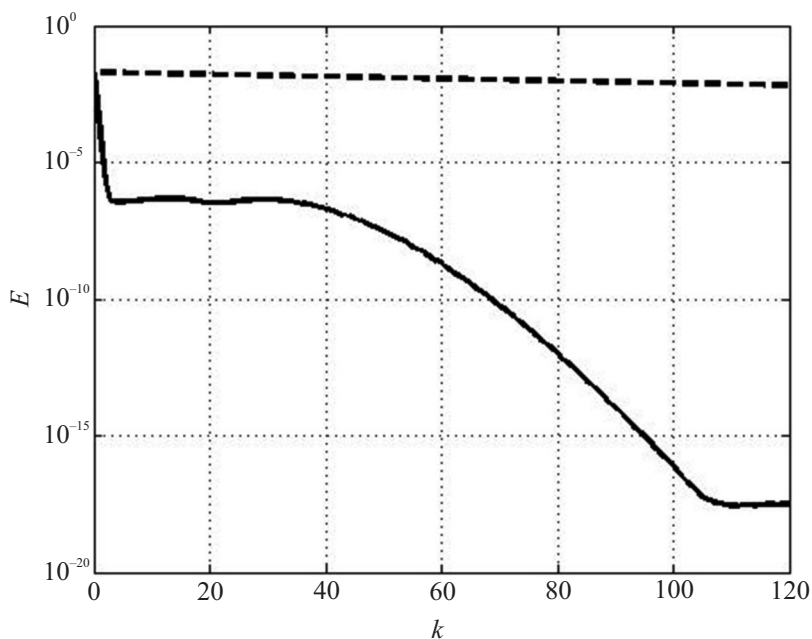


Рис. 6. Изменение  $E(k)$  с  $Q$  и  $R$  вида (4.5) при УИО по оси  $X$  с обновляющей поправкой (3.16) (сплошная линия) и с обновляющей поправкой (3.20) (пунктирная линия).

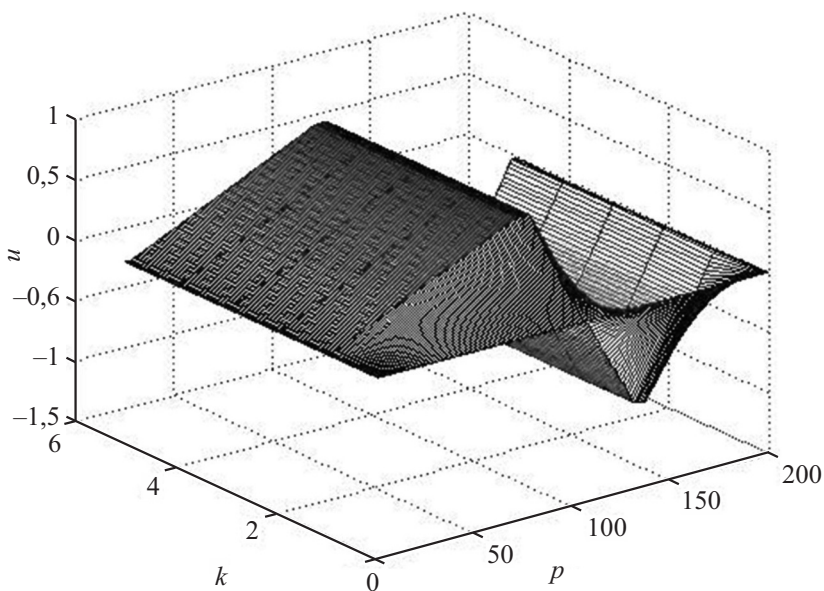


Рис. 7. Изменение управления по оси  $X$  при законе обновления (3.16).

Полусы наблюдателя по оси  $X$  зададим в виде

$$\lambda_1 = 0,95, \quad \lambda_2 = -0,4, \quad \lambda_3 = 0,4,$$

$$\lambda_{4,5} = 0,4 \left( \cos \frac{\pi}{3} \pm \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad \lambda_{6,7} = 0,4 \left( \cos \frac{\pi}{3} \pm \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

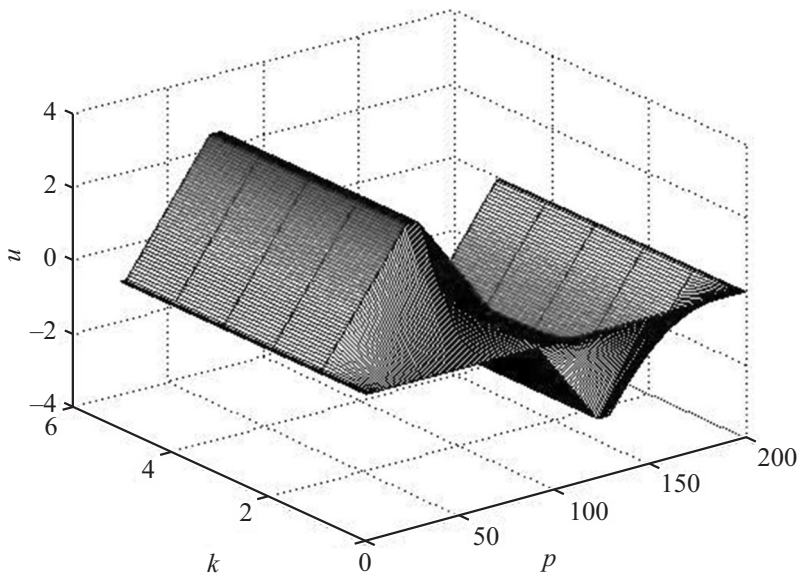


Рис. 8. Изменение управления по оси  $Y$  при законе обновления (3.16).

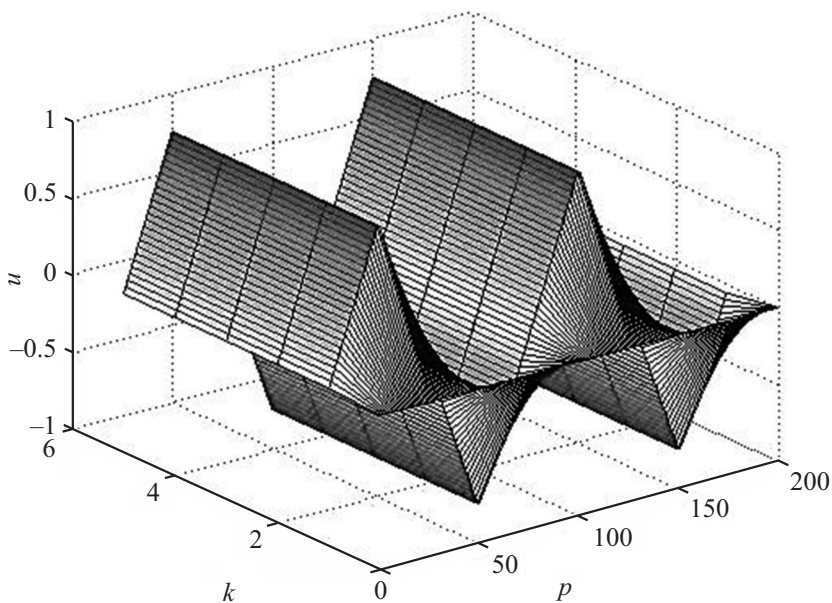


Рис. 9. Изменение управления по оси  $Z$  при законе обновления (3.16).

и применяя функцию `place` пакета MATLAB, получим

$$G = [38,1 \quad 40,161 \quad -44,093 \quad 15,913 \quad -16,428 \quad -12,67 \quad 0,309]^T.$$

В данном случае зададим  $Q$  и  $R$  в виде

$$(4.5) \quad Q = \text{diag}[I_n \quad 10I_n \quad 1 \quad 1 \quad 1], \quad R = 1,$$

тогда, применяя теорему 2, имеем

$$K_1 = -5,715 \times 10^{-9}, \quad K_2 = -1308,2, \quad K_3 = -6,868 \times 10^{-10}.$$

Результаты моделирования представлены на рис. 6. Процессы управления по осям  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  с законом обновления, заданным (3.16), представлены на рис. 7, 8 и 9. Заметим, что обученное управление по всем осям достигается достаточно быстро (после трех-четырех пробных шагов управления по осям не изменяются в зависимости от  $k$ ).

Как видно из рис. 5, сходимость ошибки обучения до компьютерного нуля достигается за несколько шагов. По оси  $X$  наблюдается иная картина, рис. 6:  $E(k)$  уменьшается в  $10^7$  раз за четыре пробных шага, затем скорость сходимости уменьшается и уровень компьютерного нуля достигается лишь за 107 пробных шагов, в то же время эта скорость существенно превышает скорость сходимости альтернативного алгоритма.

Таким образом, в данном примере алгоритм УИО с использованием метода тяжелого шарика обеспечивает высокую скорость сходимости, которую не удалось достичь альтернативным методом. Заметим, что для всех трех осей коэффициенты  $K_1$  и  $K_3$  получились достаточно малыми. Является ли это общим свойством предлагаемого подхода или это связано с особенностями динамики рассматриваемой системы, пока остается неясным и требует дополнительных исследований.

## 5. Заключение

Закон УИО (3.16) отличается от известных в литературе специальной структурой матриц усиления, которая, судя по результатам моделирования, является основным фактором, обеспечивающим ускорение сходимости. В случае неструктурированных матриц, как в (3.20), наверно, можно добиться высоких скоростей сходимости, но это будет связано с длительной эвристической процедурой выбора  $Q$  и  $R$ . Таким образом, можно сделать предварительный вывод, что применение метода тяжелого шарика дает структуру УИО, обеспечивающую высокую скорость сходимости. Окончательный вывод требует строгого обоснования, которое в рамках данной статьи получить не удалось и будет составлять предмет дальнейшего исследования. В ближайшей перспективе будет рассмотрено применение при синтезе УИО простого градиентного метода и метода Ньютона, возможно, полученные структуры УИО дадут ключ к общему доказательству ускорения сходимости. В более отдаленной перспективе предполагается рассмотреть применение метода сопряженных градиентов и метода Нестерова. В целом, существует большой простор для дальнейших исследований в этой обширной области.

## Благодарность

Авторы посвящают эту статью памяти Бориса Теодоровича Поляка, автора метода тяжелого шарика и ряда других выдающихся результатов в теории оптимизации и теории управления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Robots by Learning // *J. Robot. Syst.* 1984. V. 1. P. 123–140.
2. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G.* A Survey of Iterative Learning Control: A Learning-Based Method for High-Performance Tracking Control // *IEEE Control Syst. Magaz.* 2006. V. 26. No. 3. P. 96–114.
3. *Ahn H.-S., Chen Y.Q., Moore K.L.* Iterative Learning Control: Survey and Categorization // *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part C: Appl. Rev.* 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
4. *Rogers E., Chu B., Freeman C., Lewin P.* Iterative Learning Control Algorithms and Experimental Benchmarking Chichester.: John Wiley & Sons, 2023.
5. *Lim I., Hoelzle D.J., Barton K.L.* A multi-objective iterative learning control approach for additive manufacturing applications // *Control Engineer. Practice.* 2017. V. 64. P. 74–87.
6. *Sammons P.M., Gegel M.L., Bristow D.A., Landers R.G.* Repetitive Process Control of Additive Manufacturing with Application to Laser Metal Deposition // *IEEE Transact. Control Syst. Technol.* 2019. V. 27. No. 2. P. 566–575.
7. *Freeman C.T., Rogers E., Hughes A.-M., Burrige J.H., Meadmore K.L.* Iterative learning control in health care: electrical stimulation and robotic-assisted upper-limb stroke rehabilitation // *IEEE Control Syst. Magaz.* 2012. V. 47. P. 70–80.
8. *Meadmore K.L., Exell T.A., Hallewell E., Hughes A.-M., Freeman C.T., Kutlu M., Benson V., Rogers E., Burrige J.H.* The application of precisely controlled functional electrical stimulation to the shoulder, elbow and wrist for upper limb stroke rehabilitation: a feasibility study // *J. NeuroEngin. Rehabil.* 2014. P. 11–105.
9. *Ketelhut M., Stemmler S., Gesenhues J., Hein M., Abel D.* Iterative learning control of ventricular assist devices with variable cycle durations // *Control Engin. Practice.* 2019. V. 83. P. 33–44.
10. *Wang Y., Gao F., Doyle F.J.* Survey on iterative learning control, repetitive control, and run-to-run control // *J. Proc. Control* 2009. V. 19. P. 1589–1600.
11. *Поляк Б.Т.* О некоторых способах ускорения сходимости итерационных методов // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1964. Т. 4. № 5. С. 791–803.
12. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
13. *d’Aspremont A., Scieur D., Taylor A.* Acceleration Methods. arXiv:2101.09545v3. 2021.
14. *Ahn H.S., Moore K.L., Chen Y.Q.* Iterative Learning Control. Robustness and Monotonic Convergence for Interval Systems / *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* London: Springer-Verlag, 2007.
15. *Bien Z., Huh K.M.* Higher-order iterative learning control algorithm // *IEE Proc. D-Control Theory Appl.* 1989. V. 136. P. 105–112.
16. *Chen Y., Gong Z., Wen C.* Analysis of a high-order iterative learning control algorithm for uncertain nonlinear systems with state delays // *Automatica.* 1998. V. 34. P. 345–353.
17. *Norrlof M., Gunnarsson S.* A frequency domain analysis of a second order iterative learning control algorithm // *Proc. 38th IEEE Conf. Decis. Control.* 1999. V. 2. P. 1587–1592.

18. *Bu X., Yu F., Fu Z., Wang F.* Stability analysis of high-order iterative learning control for a class of nonlinear switched systems // *Abstract Appl. Anal.* 2013. V. 2013, P. 1–13.
19. *Wei Y.-S., Li X.-D.* Robust higher-order ILC for non-linear discrete-time systems with varying trail lengths and random initial state shifts // *IET Control Theory Appl.* 2017. V. 11. P. 2440–2447.
20. *Wang X., Chu B., Rogers E.* Higher-order Iterative Learning Control Law Design using Linear Repetitive Process Theory: Convergence and Robustness // *IFAC PapersOnLine.* 2017. V. 50-1. P. 3123–3128.
21. *Gu P., Tian S., Y. Chen Y.* Iterative learning control based on Nesterov accelerated gradient method // *IEEE Access.* 2019. V. 7. P. 115 836–115 842.
22. *Нестеров Ю.Е.* Метод решения задачи выпуклого программирования со скоростью сходимости  $O(\frac{1}{k^2})$  // *Докл. АН СССР.* 1983. Т. 269. № 3. С. 543–547.
23. *Paszke W., Rogers E., Galkowski K.* Experimentally verified generalized KYP lemma based iterative learning control design // *Control Engin. Practic.* 2016. V. 33. P. 57–67.
24. *Rogers E., Galkowski K., Owens D.H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes / *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* V. 349. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
25. *Hladowski L., Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C.T., Lewin P.L.* Experimentally supported 2D systems based iterative learning control law design for error convergence and performance // *Control Engin. Practic.* 2010. V. 18. P. 339–348.
26. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E.* Dissipativity and stabilization of nonlinear repetitive processes // *Syst. Control Lett.* 2016. V. 91, P. 14–20.
27. *Пакилин П.В., Емельянова Ю.П.* Управление с итеративным обучением дискретными стохастическими системами с переключениями // *А и Т.* 2020. № 11. С. 93–111.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 06.04.2024

После доработки 27.06.2024

Принята к публикации 01.07.2024

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### Нелинейные системы

- Жирабок А.Н., Зуев А.В.** Интервальные наблюдатели для оценивания неизвестных входов в дискретных стационарных динамических системах.....3

### Стохастические системы

- Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.** К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических дискретных систем с запаздыванием..... 20

### Робастное, адаптивное и сетевое управление

- Мещерякова Н.Г., Швыдун С.В.** Сравнительный анализ мер центральности в сетевых структурах..... 36

### Управление в социально-экономических системах

- Крюков Г.М., Сандомирская М.С.** Исследование стратегических последствий утечки скоринговой модели..... 54
- Шведов А.С.** Модель Бекманна дуополии Бертрана–Эджворта: новые равновесия в чистых стратегиях..... 76

### Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Афраймович Л.Г., Емелин М.Д.** Свертки критериев при комбинировании решений многокритериальной аксиальной задачи о назначениях..... 86
- Пакшин П.В., Емельянова Ю.П., Роджерс Э.** Синтез управления с итеративным обучением для дискретных систем на основе наблюдателя состояния с использованием метода тяжелого шарика..... 99



## C O N T E N T S

### Nonlinear Systems

- Zhirabok A.N., Zuev A.V.** Interval Observers for Estimating Unknown Inputs in Discrete Time-Invariant Dynamic Systems . . . . . 3

### Stochastic Systems

- Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G.** On Partial Stability in Probability of Non-linear Stochastic Discrete-Time Systems with Delay . . . . . 20

### Robust, Adaptive and Network Control

- Meshcheryakova N., Shvydun S.** A Comparative Analysis of Centrality Measures in Complex Networks . . . . . 36

### Control in Social Economic Systems

- Kryukov G.M., Sandomirskaja M.S.** The Study of the Strategic Consequences of a Scoring Model Disclosure . . . . . 54
- Shvedov A.S.** Beckmann's Bertrand–Edgeworth Duopoly Model: New Pure Strategy Equilibria . . . . . 76

### Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Afraimovich L.G., Emelin M.D.** Convolution of Criteria in Combining Solutions of a Multicriterial Axial Assignment Problem . . . . . 86
- Pakshin P.V., Emelianova J.P., Rogers E.** State Observer-Based Iterative Learning Control Design for Discrete Systems Using the Heavy Ball Method . . . . . 99