Автоматика и телемеханика, № 2, 2024

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2024 г. **Ю.Г. БУЛЫЧЕВ, д-р техн. наук (profbulychev@yandex.ru)**
(АО «Концерн Радиоэлектронные технологии», Москва)

РАСПОЗНАВАНИЕ СИГНАЛОВ БЕЗ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАБЛЮДЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СИНГУЛЯРНУЮ ПОМЕХУ, С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Предлагается новый метод распознавания совокупности сигналов (из заданного ансамбля, с линейно и нелинейно входящими в них параметрами) в условиях существенной априорной неопределенности, не позволяющей воспользоваться известными статистическими методами. Сигналы могут присутствовать в аддитивной смеси, содержащей шум наблюдений и сингулярную помеху, при этом закон распределения шума полагается неизвестным, а считается заданной лишь его корреляционная матрица. Метод инвариантен к данной помехе, не требует традиционного расширения пространства состояний и обеспечивает декомпозицию и распараллеливание вычислительной процедуры. Для представления сигналов и помехи используются традиционные линейные спектральные разложения с неизвестными коэффициентами и заданными базисными функциями. Анализируются случайные и методические погрешности, а также достигаемый вычислительный эффект. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: существенная априорная неопределенность, сингулярная помеха, базисные функции с нелинейными параметрами, спектральные коэффициенты, расширение пространства состояний, оптимальное оценивание, несмещенность оценивания, инвариантность к помехе, алгоритм распознавания, декомпозиция, параллельные вычисления.

DOI: 10.31857/S0005231024020052, **EDN:** UFQHBW

1. Введение

В [1–3] развит метод решения ряда прикладных задач в условиях существенной априорной неопределенности (например, маскирования и оценивания информационных процессов применительно к стационарным и динамическим объектам) по результатам наблюдений, содержащих полезный сигнал, шум с неизвестным законом распределения (но заданной корреляционной матрицей) и параметрическую сингулярную помеху. Предполагается, что как сигнал, так и помеха могут быть представлены в виде некоторой конечномерной линейной комбинации заданных базисных функций с неизвестными спектральными коэффициентами. Предложенные в [1–3] алгоритмы основаны на идее обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания (ОИНО) без расширения пространства состояний, позволяющей формировать оценки любых линейных функционалов (над сигналом), не прибегая к нахождению спектральных коэффициентов в линейных комбинациях как сигнала, так и помехи.

В настоящей статье идея ОИНО использована для решения более сложной задачи, а именно, распознавания совокупности сигналов из заданного ансамбля с помощью различных информационно-измерительных систем. Под распознаванием понимается решение задач, связанных с оцениванием, обнаружением, различением и разрешением сигналов (как с линейными, так и нелинейными параметрами) при различных уровнях априорной неопределенности (см., например, [4–11]). Такие задачи возникают в локации, навигации, связи, радиотехнической разведке, радиоастрономии, телеметрии, технической и медицинской диагностике, информационной безопасности и многих других. В условиях правомерности применения вероятностных моделей их решение возможно в рамках известных статистических методов (минимаксного, байесова, максимального правдоподобия и др.).

Существует широкий круг задач распознавания сигналов, для которых традиционный вероятностный подход [4–11] трудно реализуем, особенно в классе информационно-измерительных систем, функционирующих в реальном времени и условиях существенной априорной неопределенности, при минимуме заданных статистических данных. Для задач оценивания с указанными ограничениями широко применяется метод наименьших квадратов (МНК), оперирующий лишь с известной корреляционной матрицей ошибок наблюдений и обеспечивающий, в соответствии с известной теоремой Гаусса–Маркова, построение наилучшей линейной оценки [12, 13]. Одним из классических подходов к решению задачи распознавания для указанных систем может служить расширенный МНК (РМНК), который основан на расширении пространства состояний и предполагает совместное оценивание всех параметров сигналов и сингулярной помехи, присутствующих во входном наблюдении. Известно [12–15], что применение РМНК для задач с нелинейностью и расширением пространства состояний приводит на практике к итерационным процедурам (т. е. требует задания достаточно хороших начальных условий) и известному эффекту «размазывания точности», который наиболее выражен в многомерных задачах распознавания, оперирующих с плохо обусловленными матрицами. Кроме того, такое расширение приводит к существенному росту вычислительных затрат и, как следствие, к снижению оперативности вычислений.

В [1–3] развита автокомпенсационная параллельная процедура ОИНО значений линейных функционалов, которая является альтернативой РМНК и позволяет строить алгоритмы оптимального оценивания параметров одного сигнала в условиях существенной априорной неопределенности. Данная процедура, основанная на декомпозиции, не требует расширения и обеспечивает автокомпенсацию сингулярной помехи, не прибегая к оцениванию ее спектральных коэффициентов, а также позволяет организовать параллельные вычисления. Показан существенный вычислительный эффект.

В настоящей статье идея ОИНО получила дальнейшее развитие, направленное на решение гораздо более сложных задач, связанных с распознаванием совокупности сигналов, при минимуме статистических данных о шуме наблюдения. При этом термин автокомпенсация рассматривается в более широком смысле, поскольку каждый сигнал в уравнении наблюдения по отношению к другому сигналу этого же уравнения рассматривается как помеховый. Развивается новый метод распознавания сигналов для нелинейного случая, который сохраняет все достоинства идеи ОИНО, не требует применения итерационных процедур и реализует принцип параллельных вычислений с многоканальной обработкой данных [16–19]. В статистическом смысле, метод не требует привлечения законов распределения, а ограничивается лишь информацией о математическом ожидании и корреляционной матрице шума наблюдения, что характерно для алгоритмов, разрабатываемых на базе МНК и РМНК.

В статье не используются стохастические сигналы, например, марковские, которые характерны для теории линейной и нелинейной фильтрации, оперирующей с большим объемом достоверной статистической информации и приводящей во многих случаях к построению алгоритмов текущего оценивания с плохой сходимостью и(или) длительными переходными процессами, что не соответствует классу рассматриваемых ниже информационно-измерительных систем.

2. Модели, ограничения и критерии. Постановка задачи распознавания для случая существенной априорной неопределенности

Рассмотрим задачу распознавания сигналов (из заданного ансамбля), наблюдаемых в виде аддитивной смеси

$$h(t) = \sum_{i=1}^{K} q_i s_i(t, \mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i) + \theta(t, \mathbf{B}) + \xi(t), \tag{1}$$
$$K \geqslant 1, \;\; \mathbf{A}_i \in \wp_i \subset \mathbb{R}^{M_i}, \;\; \boldsymbol{\zeta}_i \in \mathcal{J}_i \subset \mathbb{R}^{L_i},$$

где $t \in [0, T]$ — непрерывное время, K — число возможных сигналов ансамбля, $\theta(t, \mathbf{B})$ — сингулярная помеха, $\xi(t)$ — шум наблюдений, q_i — параметр, характеризующий отсутствие ($q_i = 0$) или присутствие ($q_i = 1$) сигнала $s_i(t, \mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i)$ в смеси, $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B}$ — векторные спектральные коэффициенты линейного разложения сигнала и помехи по своим (заранее заданным) системам базисных функций, $\boldsymbol{\zeta}_i$ — векторный параметр сигнала (в общем случае неизвестный, который будем называть базисным), нелинейно входящий в базисные функции сигнала.

При $K = 1$ имеем задачу обнаружения одного сигнала, если в (1) при $K > 1$ присутствует только один сигнал, то речь идет о задаче различения, а при наличии в (1) любого числа сигналов — о задаче разрешения. Сюда входят частные случаи: $q_i = 0 \ \forall i = \overline{1, K}$ (когда все сигналы ансамбля отсутствуют) и $q_i = 1 \ \forall i = \overline{1, K}$ (когда все сигналы ансамбля присутствуют). В модель (1) укладываются и другие задачи распознавания сигналов (см., например, [7, с. 10–12]).

Далее полагаем, что множества $\wp_i$ и $\mathcal{J}_i$ являются ограниченными и выпуклыми. В качестве координат базисного вектора $\boldsymbol{\zeta}_i$ могут рассматриваться такие физические величины, как длительность импульса, период сигнала, временная задержка, несущая частота или частота Доплера, некоторые параметры модулирующей функции и т.д.

Уравнению (1) можно дать, например, следующую физическую интерпретацию. Пусть в секторе обзора радиолокационной станции может находиться K целей. Тогда излученному зондирующему сигналу $s(t)$ в точке приема будет соответствовать сумма отраженных сигналов $q_1 a_1 s(t - \tau_1) + q_2 a_2 s(t - \tau_2) + \ldots + q_K a_K s(t - \tau_K)$, где $\tau_i = 2R_i/c$ — задержка принятого сигнала по отношению к зондирующему (где $i \in \{1, \ldots, K\}$, R_i — дальность до i-й цели, c — скорость света). Следовательно, для данного примера имеем $\mathbf{A}_i = [a_i]$ — амплитуда сигнала (линейный параметр) и $\boldsymbol{\zeta}_i = [\tau_i]$ — задержка сигнала (нелинейный параметр). В качестве $\theta(t, \mathbf{B})$ может рассматриваться результирующая помеха, например, обусловленная наличием боковых лепестков диаграммы направленности приемной антенны, влиянием подстилающей поверхности и наличием распределенных в пространстве источников помех естественного и искусственного происхождения.

Полагаем, что на множестве $\mathcal{J}_i$ можно задать числовую сетку многомерных (векторных) узлов $\boldsymbol{\zeta}_{(d_i)}$ (где $d_i \in \{1, \ldots, D_i\}$ — номер узла, D_i — объем сетки для параметра $\boldsymbol{\zeta}_i$, $\boldsymbol{\zeta}_{(d_i)}$ — значение параметра $\boldsymbol{\zeta}_i$ в узле с номером d_i), достаточную для дискретного представления $\boldsymbol{\zeta}_i$ с требуемой точностью на всем $\mathcal{J}_i$ (речь идет о разрешающей способности). Для дальнейшего упрощения математических выкладок и записей введем векторы $\boldsymbol{q} = \left[q_i, i = \overline{1, K}\,\right]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{d} = \left[d_i, i = \overline{1, K}\,\right]^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\zeta} = \left[\boldsymbol{\zeta}_i^{\mathrm{T}}, i = \overline{1, K}\,\right]^{\mathrm{T}}$, а также единый многомерный узел $\boldsymbol{\zeta}_{(d)} = \left[\boldsymbol{\zeta}_{(d_i)}^{\mathrm{T}}, i = \overline{1, K}\right]^{\mathrm{T}}$.

Для произвольных значений $\mathbf{A}_i$, $\boldsymbol{\zeta}_i$ и $\mathbf{B}$ используем следующие линейные конечномерные комбинации (модели сигнала и помехи соответственно)

$$s_i(t, \mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i) = \mathbf{A}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Psi}_i(t, \boldsymbol{\zeta}_i), \tag{2}$$

$$\theta(t, \mathbf{B}) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Omega}(t), \tag{3}$$

где $\mathbf{A}_i = \left[a_{im}, m = \overline{1, M_i}\,\right]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{B} = \left[b_j, j = \overline{1, J}\,\right]^{\mathrm{T}}$ — неизвестные векторные спектральные коэффициенты линейных разложений сигнала и помехи, $\boldsymbol{\Psi}_i(t, \boldsymbol{\zeta}_i) = \left[\psi_{im}(t, \boldsymbol{\zeta}_i), m = \overline{1, M_i}\,\right]^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\Omega}(t) = \left[\omega_j(t), j = \overline{1, J}\right]^{\mathrm{T}}$ — заданные базисные функции сигнала и помехи.

В дальнейшем будем использовать наиболее распространенное на практике векторное уравнение наблюдения для дискретного времени (на сетке узлов $\{t_1, \ldots, t_N\}$)

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{K} q_i \mathbf{S}_i + \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Xi}, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{H} = \left[h_n, n = \overline{1, N}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{S}_i = \left[s_{in}(\mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i), n = \overline{1, N}\right]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\Theta} = \left[\theta_n(\mathbf{B}), n = \overline{1, N}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\Xi} = \left[\xi_n, n = \overline{1, N}\right]^{\mathrm{T}},$$
$$h_n = h(t_n), \quad s_{in}(\mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i) = s_i(t_n, \mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i), \quad \theta_n(\mathbf{B}) = \theta(t_n, \mathbf{B}), \quad \xi_n = \xi(t_n).$$

Полагаем, что шум $\boldsymbol{\Xi}$ характеризуется нулевым математическим ожиданием и соответствующей корреляционной матрицей $\mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}}$. Никаких других вероятностных характеристик относительно $\boldsymbol{\Xi}$ не требуется.

Для произвольных значений $\mathbf{A}_i$, $\boldsymbol{\zeta}_i$ и $\mathbf{B}$ имеем

$$\mathbf{S}_i = \boldsymbol{\Psi}_i \boldsymbol{A}_i, \tag{5}$$
$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{B}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\Psi}_i = \left[\psi_{imn}(\boldsymbol{\zeta}_i), n = \overline{1, N},\, m = \overline{1, M_i}\right]$ и $\boldsymbol{\Omega} = \left[\omega_{jn}, n = \overline{1, N},\, j = \overline{1, J}\right]$ — базисные матрицы сигнала $\mathbf{S}_i$ и помехи $\boldsymbol{\Theta}$ соответственно, $\psi_{imn}(\boldsymbol{\zeta}_i) = \psi_{im}(t_n, \boldsymbol{\zeta}_i)$, $\omega_{jn} = \omega_j(t_n)$.

Также полагаем, что расширенный функциональный базис $\{\boldsymbol{\Psi}_1(t, \boldsymbol{\zeta}_1), \ldots, \boldsymbol{\Psi}_K(t, \boldsymbol{\zeta}_K), \boldsymbol{\Omega}(t)\}$ линейно независим на сетке $\{t_1, \ldots, t_N\}$ для любых значений $\boldsymbol{\zeta}_1 \in \mathcal{J}_1, \boldsymbol{\zeta}_2 \in \mathcal{J}_2, \ldots, \boldsymbol{\zeta}_K \in \mathcal{J}_K$ (по аналогии с [1–3]).

В самом общем случае задача распознавания сигналов предполагает оптимальное обнаружение каждого сигнала $s_i(t, \mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i)$ из заданного ансамбля (т.е. вынесение оценки q_i^* для параметра q_i), а также нахождение оценок $\mathbf{A}_i^*$ для $\mathbf{A}_i$ и $\boldsymbol{\zeta}_i^*$ для $\boldsymbol{\zeta}_i$. В таких условиях (многоальтернативных решений) вводится семейство гипотез Γ_l, $l \in \{1, \ldots, L\}$ (где $L = 2^K$, $L \geqslant 2$), характеризующих все возможные варианты присутствия и отсутствия сигналов ансамбля в наблюдении (1). Под $\Gamma^0 \in \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_L\}$ далее понимается истинная гипотеза.

Будем полагать, что случай $q_i = 0\ \forall i = \overline{1, K}$ отвечает гипотезе Γ_1, а случай $q_i = 1\ \forall i = \overline{1, K}$ — гипотезе Γ_L.

Каждой гипотезе Γ_l можно поставить в соответствие модельное наблюдение

$$\mathbf{H}_l = \sum_{i=1}^{K_l} \mathbf{S}_{il} + \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Xi}, \quad l \in \{1, \ldots, L\}, \quad \mathbf{S}_{il} \in \{\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_K\}, \tag{7}$$

где $\mathbf{S}_{il} = \boldsymbol{\Psi}_{il} \mathbf{A}_{il}$ (см. (5)), K_l — количество сигналов ансамбля, присутствующих в смеси согласно Γ_l.

С учетом (7) задача распознавания в рамках РМНК решается с использованием расширенного вектора спектральных коэффициентов $\mathbf{W}_l = \left[\mathbf{A}_{1l}^{\mathrm{T}}, \mathbf{A}_{2l}^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{A}_{K_l l}^{\mathrm{T}}, \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ и критерия минимума квадратичной формы $\chi^{\text{рмнк}}(\boldsymbol{\zeta}_l, \mathbf{W}_l)$:

$$(8) \quad (l^*, \boldsymbol{\zeta}_{l^*}, \mathbf{W}_{l^*}) = \arg\min_{l, \boldsymbol{\zeta}_l, \mathbf{W}_l} \chi^{\text{рмнк}}(\boldsymbol{\zeta}_l, \mathbf{W}_l) = \\ = \arg\min_{l, \boldsymbol{\zeta}_l, \mathbf{W}_l} \left[\Delta^{\text{рмнк}}(\boldsymbol{\zeta}_l, \mathbf{W}_l)\right]^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}}\right)^{-1} \Delta^{\text{рмнк}}(\boldsymbol{\zeta}_l, \mathbf{W}_l),$$

где $\Delta^{\text{рмнк}}(\boldsymbol{\zeta}_l, \mathbf{W}_l) = \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{рмнк}}(\boldsymbol{\zeta}_l, \mathbf{W}_l)$, а минимизация по нелинейному параметру $\boldsymbol{\zeta}_l$ выполняется на узлах $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d})}$ числовой сетки.

Критерий (8) позволяет обеспечить минимизацию с учетом невязок $\Delta^{\text{рмнк}}(\boldsymbol{\zeta}_l, \mathbf{W}_l)$ и весовой матрицы $\left(\mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}}\right)^{-1}$, при этом под $\boldsymbol{\zeta}_{l^*}$ и $\mathbf{W}_{l^*}$ понимаются оценки для $\boldsymbol{\zeta}_l$ и $\mathbf{W}_l$ соответственно, применительно к оптимальной гипотезе Γ_{l^*}, $l^* \in \{1, \ldots, L\}$.

Очевидно, что размерность такой задачи достаточно высока и при работе с плохо обусловленными матрицами погрешности оценивания могут существенно превосходить методическую погрешность и обесценивать результаты оптимальной обработки наблюдений (это наглядно продемонстрировано в иллюстративном примере (раздел 6)). Кроме того, критерий (8) не предусматривает возможности распараллеливания вычислительной процедуры.

Преодолеть недостатки РМНК во многом удается, если использовать модифицированную процедуру ОИНО, ориентированную на задачу распознавания сигналов. Для этого, применительно к фиксированному значению k, запишем наблюдение (7) в двух формах:

$$(9) \qquad \mathbf{H}_l = \begin{cases} \mathbf{S}_{kl} + \mathbf{X}_{kl} + \boldsymbol{\Xi}, & k \in \{1, \ldots, K_l\}, \\ \boldsymbol{\Theta} + \mathbf{X}_l + \boldsymbol{\Xi}, \end{cases}$$

где $\mathbf{S}_{kl} = \mathbf{S}_{kl}(\mathbf{A}_{kl}, \boldsymbol{\zeta}_{kl})$, $\mathbf{X}_l = \mathbf{X}_l(\mathbf{A}_l, \boldsymbol{\zeta}_l)$, $\mathbf{A}_l = \left[\mathbf{A}_{1l}^{\mathrm{T}}, \mathbf{A}_{2l}^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{A}_{K_l l}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\zeta}_l = \left[\boldsymbol{\zeta}_{il}^{\mathrm{T}}, i = \overline{1, K_l}\,\right]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{X}_{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{K_l} \mathbf{S}_{il} + \boldsymbol{\Theta}$, $\mathbf{X}_l = \sum_{i=1}^{K_l} \mathbf{S}_{il}$.

Первая форма позволяет рассматривать $\mathbf{X}_{kl}$ как составляющую, мешающую оцениванию полезного сигнала $\mathbf{S}_{kl}$, а вторая форма позволяет рассматривать $\mathbf{X}_l$ — как составляющую, мешающую оцениванию помехи $\boldsymbol{\Theta}$.

Далее потребуются матрицы оптимального линейного оценивания $\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}} = \left[p_{krnl}^{\mathbf{S}}, r = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}\right]$, $\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}} = \left[p_{kmnl}^{\mathbf{A}}, m = \overline{1, M_{kl}}, n = \overline{1, N}\right]$ и $\mathbf{P}_l^{\boldsymbol{\Theta}} = \left[p_{rnl}^{\boldsymbol{\Theta}}, r = \overline{1, N}, n = \overline{1, N}\right]$, $\mathbf{P}_l^{\mathbf{B}} = \left[p_{jnl}^{\mathbf{B}}, j = \overline{1, J}, n = \overline{1, N}\right]$ для формирования оптимальных оценок (на основе ОИНО для фиксированных значений l и $\boldsymbol{\zeta}_k$) применительно к сигналу $\mathbf{S}_{kl}$ и вектору $\mathbf{A}_{kl}$ его спектральных коэффициентов, а также к помехе $\boldsymbol{\Theta}$ и вектору $\mathbf{B}$ ее спектральных коэффициентов:

$$\mathbf{S}_{kl}^* = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}} \mathbf{H}_l, \quad \mathbf{A}_{kl}^* = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}} \mathbf{H}_l, \quad k = \overline{1, K_l}, \quad \boldsymbol{\Theta}_l^* = \mathbf{P}_l^{\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{H}_l, \quad \mathbf{B}_l^* = \mathbf{P}_l^{\mathbf{B}} \mathbf{H}_l.$$

Матрицы $\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}$, $\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{P}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}$, $\mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}$ для гипотезы Γ_l должны обеспечивать выполнение следующих равенств:

$$
(10) \qquad \begin{cases} \mathbf{H}_{kl}^{\mathbf{S}} = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}\mathbf{H}_l = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}\mathbf{S}_{kl} + \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}\mathbf{X}_{kl} + \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{S}_{kl} + \boldsymbol{\Xi}_{kl}^{\mathbf{S}}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{H}_{kl}^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}\mathbf{H}_l = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}\mathbf{S}_{kl} + \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}\mathbf{X}_{kl} + \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{A}_{kl} + \boldsymbol{\Xi}_{kl}^{\mathbf{A}}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{H}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{P}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{H}_l = \mathbf{P}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\Theta} + \mathbf{P}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{X}_{l} + \mathbf{P}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Xi}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}, \\ \mathbf{H}_{l}^{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}\mathbf{H}_l = \mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\Theta} + \mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}\mathbf{X}_{l} + \mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{B} + \boldsymbol{\Xi}_{l}^{\mathbf{B}}, \end{cases}
$$

где $\boldsymbol{\Xi}_{kl}^{\mathbf{S}} = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}\boldsymbol{\Xi}$ и $\boldsymbol{\Xi}_{l}^{\Theta} = \mathbf{P}_{l}^{\Theta}\boldsymbol{\Xi}$ — шумы с нулевыми математическими ожиданиями $M\{\boldsymbol{\Xi}_{kl}^{\mathbf{S}}\} = M\{\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}\boldsymbol{\Xi}\} = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}M\{\boldsymbol{\Xi}\} = [\mathbf{0}]_{N\times 1}$, $M\{\boldsymbol{\Xi}_{kl}^{\mathbf{A}}\} = M\{\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Xi}\} = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}M\{\boldsymbol{\Xi}\} = [\mathbf{0}]_{M_{kl}\times 1}$, $M\{\boldsymbol{\Xi}_{l}^{\Theta}\} = M\{\mathbf{P}_{l}^{\Theta}\boldsymbol{\Xi}\} = \mathbf{P}_{l}^{\Theta}M\{\boldsymbol{\Xi}\} = [\mathbf{0}]_{N\times 1}$, $M\{\boldsymbol{\Xi}_{l}^{\mathbf{B}}\} = M\{\mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\Xi}\} = \mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}M\{\boldsymbol{\Xi}\} = [\mathbf{0}]_{J\times 1}$ (здесь $M\{\cdot\}$ — символ математического ожидания, $\mathbf{0}$ — нулевой вектор-столбец соответствующей размерности, которая указывается квадратными скобками с нижними индексами).

Кроме того, для корреляционных матриц $\mathbf{K}_{kl}^{\boldsymbol{\Xi}\mathbf{S}}$, $\mathbf{K}_{kl}^{\boldsymbol{\Xi}\mathbf{A}}$ и $\mathbf{K}_{l}^{\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Theta}}$, $\mathbf{K}_{l}^{\boldsymbol{\Xi}\mathbf{B}}$ случайных векторов $\boldsymbol{\Xi}_{kl}^{\mathbf{S}}$, $\boldsymbol{\Xi}_{kl}^{\mathbf{A}}$ и $\boldsymbol{\Xi}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}$, $\boldsymbol{\Xi}_{l}^{\mathbf{B}}$ должны обеспечиваться соответствующие условия минимума

$$
(11) \qquad \begin{cases} Sp\mathbf{K}_{kl}^{\boldsymbol{\Xi}\mathbf{S}} \longrightarrow \min\limits_{\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ Sp\mathbf{K}_{kl}^{\boldsymbol{\Xi}\mathbf{A}} \longrightarrow \min\limits_{\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ Sp\mathbf{K}_{l}^{\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Theta}} \longrightarrow \min\limits_{\mathbf{P}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}}, \\ Sp\mathbf{K}_{l}^{\boldsymbol{\Xi}\mathbf{B}} \longrightarrow \min\limits_{\mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}}, \end{cases}
$$

где под Sp понимается оператор нахождения следа матрицы.

Формула (10) отражает свойства несмещенности (по отношению к параметрам полезных сигналов и сингулярной помехи)

$$
(12) \qquad \begin{cases} \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}\mathbf{S}_{kl} = \mathbf{S}_{kl}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}\mathbf{S}_{kl} = \mathbf{A}_{kl}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{P}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}, \\ \mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{B}, \end{cases}
$$

а также инвариантности (по отношению к мешающим составляющим $\mathbf{X}_{kl}$ и $\mathbf{X}_l$)

$$
(13) \qquad \begin{cases} \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}\mathbf{X}_{kl} = [\mathbf{0}]_{N\times 1}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}\mathbf{X}_{kl} = [\mathbf{0}]_{M_{kl}\times 1}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\ \mathbf{P}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{X}_{l} = [\mathbf{0}]_{N\times 1}, \\ \mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}\mathbf{X}_{l} = [\mathbf{0}]_{J\times 1}. \end{cases}
$$

Если матрицы $\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}$, $\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{P}_{kl}^{\boldsymbol{\Theta}}$, $\mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{B}}$ применять непосредственно к наблюдению (1), то получаем набор оптимальных оценок всех параметров задачи распознавания сигналов для фиксированных значений l и $\boldsymbol{\zeta}_l$

$$
\begin{cases}
\mathbf{S}_{kl}^{*} = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}\mathbf{H} = \sum\limits_{i=1}^{K_l} q_i \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}\mathbf{S}_i + \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{S}}\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Xi}_{kl}^{\mathbf{S}}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\
\mathbf{A}_{kl}^{*} = \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}\mathbf{H} = \sum\limits_{i=1}^{K_l} q_i \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}\mathbf{S}_i + \mathbf{P}_{kl}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Xi}_{kl}^{\mathbf{A}}, \quad k = \overline{1, K_l}, \\
\boldsymbol{\Theta}_{l}^{*} = \mathbf{P}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{H} = \sum\limits_{i=1}^{K_l} q_i \mathbf{P}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{S}_i + \mathbf{P}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Xi}_{l}^{\boldsymbol{\Theta}}, \\
\mathbf{B}_{l}^{*} = \mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}\mathbf{H} = \sum\limits_{i=1}^{K_l} q_i \mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}\mathbf{S}_i + \mathbf{P}_{l}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Xi}_{l}^{\mathbf{B}}.
\end{cases} \tag{14}
$$

В отличие от РМНК оценки параметров сигналов и помехи (14), формируемые в рамках ОИНО, осуществляются раздельно, что позволяет организовать параллельные вычисления, кроме того, выполнение условий инвариантности позволяет существенно снизить размерность обращаемых матриц (по аналогии с [1–3]). Это хорошо продемонстрировано далее в иллюстративном примере.

Для истинной гипотезы Γ^0 с номером $l^0 \in \{1, \ldots, L\}$, учитывая (12)–(14), получим

$$
\begin{cases}
\mathbf{S}_{kl^0}^{*} = \mathbf{P}_{kl^0}^{\mathbf{S}}\mathbf{H} = q_k\mathbf{S}_k + \boldsymbol{\Xi}_{kl^0}^{\mathbf{S}}, \quad k = \overline{1, K_{l^0}}, \\
\mathbf{A}_{kl^0}^{*} = \mathbf{P}_{kl^0}^{\mathbf{A}}\mathbf{H} = q_k\mathbf{A}_k + \boldsymbol{\Xi}_{kl^0}^{\mathbf{A}}, \quad k = \overline{1, K_{l^0}}, \\
\boldsymbol{\Theta}_{l^0}^{*} = \mathbf{P}_{l^0}^{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{H} = \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Xi}_{l^0}^{\boldsymbol{\Theta}}, \\
\mathbf{B}_{l^0}^{*} = \mathbf{P}_{l^0}^{\mathbf{B}}\mathbf{H} = \mathbf{B} + \boldsymbol{\Xi}_{l^0}^{\mathbf{B}}.
\end{cases} \tag{15}
$$

Если Γ_l не соответствует истинной гипотезе Γ^0 , то условия (12) и (13) нарушаются, что приводит к невязке

$$
\Delta^{\text{оино}}(l, \boldsymbol{\zeta}_l) = \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{оино}}(\mathbf{S}_l^{*}, \boldsymbol{\Theta}_l^{*}) = \mathbf{H} - \sum_{i=1}^{K_l} \mathbf{S}_{il}^{*} - \boldsymbol{\Theta}_l^{*},
$$

где $\mathbf{S}_l^{*} = \left[(\mathbf{S}_{il}^{*})^{\mathrm{T}}, i = \overline{1, K_l}\right]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{S}_{il}^{*} = \mathbf{S}_{il}^{*}(\boldsymbol{\zeta}_l)$, $\boldsymbol{\Theta}_l^{*} = \boldsymbol{\Theta}_l^{*}(\boldsymbol{\zeta}_l)$. В этом случае задача распознавания в рамках ОИНО решается на основе критерия минимума квадратичной формы:

$$
\begin{aligned}
(l^{*}, \boldsymbol{\zeta}_{l^{*}}) &= \arg\min_{l, \boldsymbol{\zeta}_l} \chi^{\text{оино}}(l, \boldsymbol{\zeta}_l) = \\
&= \arg\min_{l, \boldsymbol{\zeta}_l} \left[\Delta^{\text{оино}}(l, \boldsymbol{\zeta}_l)\right]^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}}\right)^{-1} (\Delta^{\text{оино}})(l, \boldsymbol{\zeta}_l),
\end{aligned} \tag{16}
$$

при этом результирующие оценки параметров сигналов и сингулярной помехи находятся как $\mathbf{S}^*_{l^*} = \mathbf{S}^*_{l=l^*}$, $\mathbf{A}^*_{l^*} = \mathbf{A}^*_{l=l^*}$, $\mathbf{\Theta}^*_{l^*} = \mathbf{\Theta}^*_{l=l^*}$, $\mathbf{B}^*_{l^*} = \mathbf{B}^*_{l=l^*}$, где $\mathbf{A}^*_l = \left[(\mathbf{A}^*_{kl})^{\mathrm{T}}, k = \overline{1, K_l}\,\right]^{\mathrm{T}}$.

В (16) минимизация по нелинейному параметру выполняется сразу на всех узлах $\boldsymbol{\zeta}_l$ числовой сетки методом параллельных вычислений.

Формулы (1)–(16) полностью задают все модели, ограничения и критерии, необходимые для разработки нового метода разрешения сигналов в условиях существенной априорной неопределенности, а также его сравнения с РМНК. Требуется построить матрицы $\mathbf{P}^{\mathbf{S}}_{kl}$, $\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kl}$ и $\mathbf{P}^{\mathbf{\Theta}}_{kl}$, $\mathbf{P}^{\mathbf{B}}_{kl}$ для фиксированных l и $\mathbf{d}$; с учетом построенных матриц и принятого критерия оптимальности в декомпозированном виде решить задачу оптимального распознавания сигналов (с линейными и нелинейными параметрами) без традиционного расширения пространства состояний в условиях минимума априорной статистической информации (используя лишь матрицу $\mathbf{K}^{\mathbf{\Xi}}$), обеспечив автокомпенсацию сингулярной помехи и параллельную обработку наблюдений; привести формулы для случайных и методических ошибок результирующего оценивания; сравнить разработанный метод с РМНК в плане вычислительной эффективности; продемонстрировать возможность его сравнения с известными статистическими методами распознавания сигналов; привести иллюстративный пример, подтверждающий преимущества разработанного метода по сравнению с РМНК.

Решение задачи распознавания в общем случае (когда неизвестно какие сигналы ансамбля присутствуют в наблюдении (1) и неизвестно значение нелинейного параметра $\boldsymbol{\zeta}_i$ для каждого из этих сигналов $s_i(t, \mathbf{A}_i, \boldsymbol{\zeta}_i)$) приводит к сложным итерационным процедурам, связанным с необходимостью выбора достаточно хороших начальных приближений. На практике обойти указанную сложность удается на основе параллельного алгоритма, предполагающего проверку всех возможных гипотез присутствия сигналов и помехи в (4), а также просмотр всех узлов для каждой гипотезы. Именно такой подход будет применен ниже, что позволит уйти от указанной выше нелинейности и связанных с ней трудностей, о которых говорилось ранее. Подобная идея успешно использована в [20, 21] при решении ряда прикладных задач управления.

3. Построение матриц оптимального линейного автокомпенсационно-декомпозиционного оценивания

Предположим сначала, что точное значение параметра $\boldsymbol{\zeta}$ известно, а в смеси (1) присутствуют все K сигналов ансамбля, т.е. $q_1 = q_2 = \ldots = q_K = 1$ (в этом случае индекс l можно опустить). Тогда решение задачи распознавания можно искать в классе линейных оценок в виде K параллельных алгоритмов вычислений

$$\mathbf{A}^*_k = \mathbf{P}^{\mathbf{A}}_k \mathbf{H}, \quad k = \overline{1, K}, \tag{17}$$

где $\mathbf{A}_k^*$ — оценка вектора $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}} = \left[p_{kmn}^A, m = \overline{1, M_k}, n = \overline{1, N}\right]$ — матрица неизвестных весовых коэффициентов оптимального оценивания.

Корреляционная матрица ошибок оценивания на основе (17) находится по правилу

$$\mathbf{K}_k^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_k^{\mathbf{A}} \mathbf{K}^{\mathbf{\Xi}} \left(\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}}\right)^{\mathrm{T}}, \quad k = \overline{1, K}. \tag{18}$$

Критерий качества, необходимый для нахождения $\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}}$, соответствует минимизации следа матрицы $Sp\mathbf{K}_k^{\mathbf{A}}$ (см. (11)). Кроме того, должны выполняться сопутствующие условия несмещенности (12) и инвариантности (13).

Для нахождения матрицы $\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}}$ преобразуем (9) к следующему виду:

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}_k + \mathbf{X}_k + \mathbf{\Xi}, \tag{19}$$

где $\mathbf{X}_k = \left[x_{kn}, n = \overline{1, N}\right]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{X}_k = \mathbf{Y}_k \mathbf{C}_k$,

$\mathbf{Y}_k = \left[\mathbf{\Psi}_1 \vdots \ldots \vdots \mathbf{\Psi}_{k-1} \vdots \mathbf{\Psi}_{k+1} \vdots \ldots \vdots \mathbf{\Psi}_K \vdots \mathbf{\Omega}\right]$ — матрица размером $N \times (\overline{M}_k + J)$,

$\mathbf{C}_k = \left[\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} \vdots \ldots \vdots \mathbf{A}_{k-1}^{\mathrm{T}} \vdots \mathbf{A}_{k+1}^{\mathrm{T}} \vdots \ldots \vdots \mathbf{A}_K^{\mathrm{T}} \vdots \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор размером $(\overline{M}_k + J) \times 1$, $\overline{M}_k = M_1 + \ldots + M_{k-1} + M_{k+1} + \ldots + M_K$.

Применительно к рассматриваемому случаю условия несмещенности и инвариантности (с учетом (12), (13) и (19)) можно записать так

$$\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}} \mathbf{\Psi}_k - [\mathbf{E}]_{M_k \times M_k} = [\mathbf{0}]_{M_k \times M_k}, \tag{20}$$

$$\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}} \mathbf{Y}_k = [\mathbf{0}]_{M_k \times (\overline{M}_k + J)}, \tag{21}$$

где $[\mathbf{0}]_{M_k \times M_k}$ и $[\mathbf{E}]_{M_k \times M_k}$ — нулевая и единичная матрицы соответственно, $[\cdot]_{M_k \times M_k}$ — обозначение размерности матрицы, стоящей в квадратных скобках (такое обозначение используется далее по всей статье).

Для дальнейшего изложения потребуется вектор $\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}} = [p_{pmn}^{\mathbf{A}}, n = \overline{1, N}]^{\mathrm{T}}$, который состоит из элементов m-й строки матрицы $\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}}$. Он позволяет найти скалярную оценку a_{km}^* коэффициента a_{km} для фиксированных значений k и m. Очевидно, что выполняются условия несмещенности $(\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}})^{\mathrm{T}} \mathbf{S}_k = a_{km}$ и инвариантности $(\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}})^{\mathrm{T}} \mathbf{X}_k = 0$. Или, по аналогии с (20) и (21), имеем

$$(\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}})^{\mathrm{T}} \mathbf{\Psi}_k - \mathbf{E}_{km}^{\mathrm{T}} = [\mathbf{0}]_{1 \times M_k}, \tag{22}$$

$$\mathbf{Y}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}} = [\mathbf{0}]_{\left(\overline{M}_k + J\right) \times 1}, \tag{23}$$

где $\mathbf{E}_{km}$ — вектор-столбец, состоящий из нулей, но на m-й позиции стоит единица.

Т е о р е м а. *Вектор* $\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}}$ *оптимального оценивания спектрального коэффициента* a_{km}, *обеспечивающий минимум квадратичной формы* $(\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}})^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^{\mathbf{\Xi}} \mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}}$, *а также выполнение условий несмещенности* (22) *и инвариантности* (23), *находится по правилу*

$$\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}} = \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{V}_k (\mathbf{\Psi}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{V}_k)^{-1} \mathbf{E}_{km}. \tag{24}$$

Доказательство теоремы приводится в Приложении.

Скалярная оценка a^*_{km} коэффициента находится так

$$a^*_{km} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{km} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_k\mathbf{V}_k(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}_k\boldsymbol{\Lambda}_k\mathbf{V}_k)^{-1}\mathbf{E}_{km}. \tag{25}$$

Переходя от скалярного коэффициента a_{km} к вектору $\mathbf{A}_k$, с учетом (24) получаем матрицу оптимального оценивания

$$\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_k = \left[\boldsymbol{\Lambda}_k\mathbf{V}_k(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}_k\boldsymbol{\Lambda}_k\mathbf{V}_k)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}, \quad k = \overline{1, K}. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (17), находим искомые оценки

$$\mathbf{A}^*_k = \mathbf{P}^{\mathbf{A}}_k\mathbf{H} = \left[\boldsymbol{\Lambda}_k\mathbf{V}_k(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}_k\boldsymbol{\Lambda}_k\mathbf{V}_k)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{H}, \quad k = \overline{1, K}. \tag{27}$$

В свою очередь, матрицу оптимального оценивания сигналов $\mathbf{S}_{kl}$ находим как

$$\mathbf{P}^{\mathbf{S}}_k = \boldsymbol{\Psi}_k\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_k, \tag{28}$$

а саму оценку в виде

$$\mathbf{S}^*_k = \boldsymbol{\Psi}_k\mathbf{A}^*_k = \boldsymbol{\Psi}_k\left[\boldsymbol{\Lambda}_k\mathbf{V}_k(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}_k\boldsymbol{\Lambda}_k\mathbf{V}_k)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{H}, \quad k = \overline{1, K}. \tag{29}$$

Оценки (27) и (29) являются оптимальными в смысле несмещенности, эффективности (обеспечивают минимальную дисперсию) и инвариантности (по отношению к результирующей сингулярной помехе).

Для решения ряда задач распознавания сигналов, помимо матриц $\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_k$ и $\mathbf{P}^{\mathbf{S}}_k$, возникает необходимость построения матриц $\mathbf{P}^{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{P}^{\boldsymbol{\Theta}}$ оптимального оценивания параметров помехи с соблюдением условий несмещенности и инвариантности (по аналогии с (22) и (23)). Теперь вместо $\mathbf{Y}_{kl}$ и $\mathbf{C}_{kl}$ строятся матрицы $\mathbf{Y}^{\boldsymbol{\Theta}}_k$ и $\mathbf{C}^{\boldsymbol{\Theta}}_k$ с учетом того, что при нахождении оценок $\mathbf{B}^*$ и $\boldsymbol{\Theta}^*$ все полезные сигналы рассматриваются как мешающие составляющие. Формулы для матриц $\mathbf{P}^{\mathbf{B}}$, $\mathbf{P}^{\boldsymbol{\Theta}}$ и оценок $\mathbf{B}^*$, $\boldsymbol{\Theta}^*$ записываются по аналогии с (26)–(29).

Для задач распознавания с учетом возможных гипотез Γ_l и нелинейного параметра γ строится семейство матриц оптимального оценивания для всех значений l и узлов $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d})}$: $\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{k(\mathbf{d})}$, $\mathbf{P}^{\mathbf{S}}_{k(\mathbf{d})}$ и $\mathbf{P}^{\mathbf{B}}_{(\mathbf{d})}$, $\mathbf{P}^{\boldsymbol{\Theta}}_{(\mathbf{d})}$.

Рассмотренных в данном разделе матриц оценивания необходимо и достаточно для решения широкого круга задач, связанных с распознаванием сигналов, в условиях существенной априорной неопределенности. В следующем разделе рассматриваются наиболее распространенные задачи распознавания: оценивание (известно какие сигналы в наблюдении присутствуют и требуется только оценить их параметры); обнаружение (надо установить присутствует ли в наблюдении полезный сигнал); различение (в наблюдении присутствует только один сигнал из заданного ансамбля и надо установить какой именно); разрешение (в наблюдении могут присутствовать те или иные сигналы ансамбля и надо установить какие). Кроме того, задачи обнаружения, различения и разрешения могут сопровождаться оцениванием параметров сигналов и помехи.

4. Алгоритмы решения базовых задач распознавания сигналов в условиях неопределенности

Алгоритм оценивания сигналов с известными нелинейными параметрами (1). Пусть в смеси (1) присутствуют все сигналы ансамбля, т.е. $q_1 = q_2 = \ldots = q_K = 1$. Требуется дать оценку всех коэффициентов $\mathbf{A}_k$ и самих сигналов $\mathbf{S}_k$, не прибегая к оценке коэффициента $\mathbf{B}$ помехи $\boldsymbol{\Theta}$, т. е. без расширения пространства состояний. В данной задаче гипотезы не используются, поэтому индекс l опускаем.

Шаг 1.1. Строим матрицы $\mathbf{P}_k^{\mathbf{A}}$ весовых коэффициентов.

Шаг 1.2. Находим оценки $\mathbf{A}_k^* = \mathbf{P}_k^{\mathbf{A}}\mathbf{H}$ векторных коэффициентов $\mathbf{A}_k,\ k = \overline{1, K}$.

Шаг 1.3. Строим матрицы $\mathbf{P}_k^{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\Psi}_k \mathbf{P}_k^{\mathbf{A}},\ k = \overline{1, K}$.

Шаг 1.4. Находим оценки $\mathbf{S}_k^* = \mathbf{P}_k^{\mathbf{S}} H$ самих сигналов $\mathbf{S}_k,\ k = \overline{1, K}$.

Алгоритм оценивания сигналов и помехи с учетом неизвестных нелинейных параметров (2). Пусть в смеси (1) присутствуют все сигналы ансамбля, т.е. $q_1 = q_2 = \ldots = q_K = 1$. Требуется дать оценки всех коэффициентов $\mathbf{A}_k$, $\boldsymbol{\zeta}_k$ и самих сигналов $\mathbf{S}_k$, а также оценки коэффициента $\mathbf{B}$ и самой помехи $\boldsymbol{\Theta}$. В данной задаче гипотезы не используются, поэтому индекс l опускаем.

Шаг 2.1. Строим матрицы $\mathbf{P}_{k(\mathbf{d})}^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{P}_{k(\mathbf{d})}^{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{P}_{(\mathbf{d})}^{\mathbf{B}}$, $\mathbf{P}_{(\mathbf{d})}^{\boldsymbol{\Theta}}$ для всех узлов $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d})}$.

Шаг 2.2. Находим частные оценки $\mathbf{A}_{k(\mathbf{d})}^*$, $\mathbf{S}_{k(\mathbf{d})}^*$ и $\mathbf{B}_{(\mathbf{d})}^*$, $\boldsymbol{\Theta}_{(\mathbf{d})}^*$ для всех узлов $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d})}$.

Шаг 2.3. Находим невязки

$$\Delta^{\text{оино}}(\mathbf{d}) = \mathbf{H} - \sum_{i=1}^{K} \mathbf{S}_{i(\mathbf{d})}^* - \boldsymbol{\Theta}_{(d)}^*$$

для всех узлов $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d})}$.

Шаг 2.4. Находим оценку $\mathbf{d}^*$ для $\mathbf{d}$ в виде

$$\mathbf{d}^* = \arg\min_{\mathbf{d}} \chi^{\text{оино}}(\mathbf{d}) = \arg\min_{\mathbf{d}} \left[\Delta^{\text{оино}}(\mathbf{d})\right]^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}}\right)^{-1} \Delta^{\text{оино}}(\mathbf{d}).$$

Шаг 2.5. Находим результирующие оценки $\mathbf{A}_{k\mathbf{d}^*}^*$, $\mathbf{S}_{k(\mathbf{d}^*)}^*$, $\boldsymbol{\zeta}_{k(\mathbf{d}^*)}^*$ и $\mathbf{B}_{(\mathbf{d}^*)}^*$, $\boldsymbol{\Theta}_{(\mathbf{d}^*)}^*$.

Алгоритм совместного обнаружения-оценивания с известными нелинейными параметрами (3). В этом случае $K = 1,\ L = 2$, следовательно можно записать $\mathbf{H} = q\mathbf{S} + \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Xi}$, т.е. в зависимости от значения коэффициента q возможны две гипотезы (Γ_1, если $q = 0$ и Γ_2, если $q = 1$). Надо дать оценку $l^* \in \{0, 1\}$ для параметра $l \in \{0, 1\}$, а также построить оценки $\mathbf{A}_{l^*}^*$, $\mathbf{S}_{l^*}^*$ и $\mathbf{B}_{l^*}^*$, $\boldsymbol{\Theta}_{l^*}^*$. В этом случае индекс k в формулах (26)–(29) можно опустить.

Шаг 3.1. Строим матрицы $\mathbf{P}_{l=1}^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{P}_{l=2}^{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{P}_{l=1}^{\mathbf{S}}$, $\mathbf{P}_{l=2}^{\mathbf{S}}$ для Γ_1 и Γ_2 соответственно.

Шаг 3.2. Находим оценки $\mathbf{A}_{l=1}^*$, $\mathbf{S}_{l=1}^*$ (для сигнала $\mathbf{S} = [\mathbf{0}]_{N\times 1}$ и гипотезы Γ_1) и $\mathbf{A}_{l=2}^*$, $\mathbf{S}_{l=2}^*$ (для $\mathbf{S} \neq [\mathbf{0}]_{N\times 1}$ и гипотезы Γ_2).

Шаг 3.3. Строим матрицы $\mathbf{P}^{\mathbf{B}}_{l=1}$, $\mathbf{P}^{\boldsymbol{\Theta}}_{l=1}$ и $\mathbf{P}^{\mathbf{B}}_{l=2}$, $P^{\Theta}_{l=2}$ для Γ_1 и Γ_2 соответственно.

Шаг 3.4. Находим оценки $\mathbf{B}^*_{l=1}$, $\boldsymbol{\Theta}^*_{l=1}$ и $\mathbf{B}^*_{l=2}$, $\boldsymbol{\Theta}^*_{l=2}$.

Шаг 3.5. Находим невязки

$$\Delta^{\text{оино}}(l) = \mathbf{H} - \mathbf{S}^*_l - \boldsymbol{\Theta}^*_l$$

и номер наилучшей гипотезы с использованием критерия:

$$l^* = \arg\min_l \chi^{\text{оино}}(l) = \arg\min_l \,[\Delta^{\text{оино}}(l)]^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}})^{-1}\Delta^{\text{оино}}(l), \quad l^* \in \{0,1\}.$$

Шаг 3.6. Находим результирующие оценки $\mathbf{A}^*_{l^*}$, $\mathbf{S}^*_{l^*}$ и $\mathbf{B}^*_{l^*}$, $\boldsymbol{\Theta}^*_{l^*}$.

Алгоритм совместного различения и оценивания параметров сигналов и помехи с неизвестными нелинейными параметрами (4). В этом случае K произвольное, $L = K$, $\mathbf{H} = \mathbf{S}_l + \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Xi}$, $l \in \{1,\ldots,L\}$. Надо установить, какой сигнал из заданного ансамбля $\{\mathbf{S}_1,\ldots,\mathbf{S}_L\}$ присутствует в наблюдении, т.е. вынести оценку $l^* \in \{1,\ldots,L\}$ для параметра l а также построить оценки $\mathbf{A}^*_{l^*}$, $\mathbf{S}^*_{l^*}$ и $\mathbf{B}^*_{l^*}$, $\boldsymbol{\Theta}^*_{l^*}$. В этом случае индекс k опускаем.

Шаг 4.1. Строим матрицы $\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{l(\mathbf{d})}$, $\mathbf{P}^{S}_{l(\mathbf{d})}$ и $\mathbf{P}^{\mathbf{B}}_{l(\mathbf{d})}$, $\mathbf{P}^{\boldsymbol{\Theta}}_{l(\mathbf{d})}$ для всех и узлов $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d})}$.

Шаг 4.2. Находим частные оценки $\mathbf{A}^*_{l(\mathbf{d})}$, $\mathbf{S}^*_{l(\mathbf{d})}$ и $\mathbf{B}^*_{l(\mathbf{d})}$, $\boldsymbol{\Theta}^*_{l(\mathbf{d})}$ для всех Γ_l и узлов $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d})}$.

Шаг 4.3. Находим невязки

$$\Delta^{\text{оино}}(l,\mathbf{d}) = \mathbf{H} - \mathbf{S}^*_{l(d)} - \boldsymbol{\Theta}^*_{l(d)}$$

для всех Γ_l и узлов $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d})}$.

Шаг 4.4. Находим номер наилучшей гипотезы с использованием следующего критерия:

$$(l^*,\mathbf{d}^*) = \arg\min_{l,\mathbf{d}} \chi^{\text{оино}}(l,\mathbf{d}) = \arg\min_{l,\mathbf{d}} \,[\Delta^{\text{оино}}(l,\mathbf{d})]^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}}\right)^{-1} \Delta^{\text{оино}}(l,\mathbf{d}).$$

Шаг 4.5. Находим результирующие оценки $\mathbf{A}^*_{l^*(\mathbf{d}^*)}$, $\mathbf{S}^*_{l^*(\mathbf{d}^*)}$ и $\mathbf{B}^*_{l^*(\mathbf{d}^*)}$, $\boldsymbol{\Theta}^*_{l^*(\mathbf{d}^*)}$ для гипотезы Γ_{l^*} и узла $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d}^*)}$.

Алгоритм совместного разрешения и оценивания параметров сигналов и помехи с неизвестными нелинейными параметрами (5). Рассматривается общий случай (4). В этом случае K произвольное, $L = 2^K$, $L \geqslant 2$. Надо установить, какие сигналы из заданного ансамбля $\{\mathbf{S}_1,\ldots,\mathbf{S}_L\}$ присутствуют в наблюдении и дать оценку их линейных и нелинейных параметров, а также оценить параметры помехи. В этом случае используются гипотезы Γ_l, где $l \in \{1,\ldots,2^K\}$.

Шаг 5.1. Строим матрицы $\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kl(\mathbf{d})}$, $\mathbf{P}^{\mathbf{S}}_{kl(\mathbf{d})}$ и $\mathbf{P}^{\mathbf{B}}_{l(\mathbf{d})}$, $\mathbf{P}^{\boldsymbol{\Theta}}_{l(\mathbf{d})}$ для всех Γ_l, $k = \overline{1,K_l}$ и узлов $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d})}$.

Шаг 5.2. Находим частные оценки $\mathbf{A}^*_{kl(\mathbf{d})}$, $\mathbf{S}^*_{kl(\mathbf{d})}$ и $\mathbf{B}^*_{l(\mathbf{d})}$, $\boldsymbol{\Theta}^*_{l(\mathbf{d})}$ для всех Γ_l, $k = \overline{1,K_l}$ и узлов $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d})}$.

Шаг 5.3. Находим невязки

$$\Delta^{\text{оино}}(l, \mathbf{d}) = \mathbf{H} - \sum_{k=l}^{K_l} \mathbf{S}^*_{kl(\mathbf{d})} - \mathbf{\Theta}^*_{(\mathbf{d})}$$

для всех Γ_l и узлов $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d})}$.

Шаг 5.4. Находим номер наилучшей гипотезы с использованием следующего критерия:

$$(l^*, \mathbf{d}^*) = \arg\min_{l,\mathbf{d}} \chi^{\text{оино}}(l, \mathbf{d}) = \arg\min_{l,\mathbf{d}} \left[\Delta^{\text{оино}}(l, \mathbf{d})\right]^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}}\right)^{-1} \Delta^{\text{оино}}(l, \mathbf{d}).$$

Шаг 5.5. Находим результирующие оценки $\mathbf{A}^*_{kl^*(\mathbf{d}^*)}$, $\mathbf{S}^*_{kl^*(\mathbf{d}^*)}$ (где $k = \overline{1, K_l}$) и $\mathbf{B}^*_{l^*(\mathbf{d}^*)}$, $\mathbf{\Theta}^*_{l^*(\mathbf{d}^*)}$ для гипотезы Γ_{l^*} и узла $\boldsymbol{\zeta}_{(\mathbf{d}^*)}$.

Примечание: используемые в алгоритмах критерии оптимизации обеспечивают минимизацию влияния друг на друга соседних сигналов ансамбля, автокомпенсацию сингулярной помехи и сглаживание шума (потенциально сравнимое с возможностями РМНК).

Рассмотренные алгоритмы лишь иллюстрируют некоторые возможности развиваемого метода. Возможны и другие постановки задачи распознавания сигналов в условиях неопределенности с учетом особенностей назначения и применения рассматриваемой информационно-измерительной системы. Очевидно, что предложенный метод можно комплексировать и с традиционными вероятностными подходами в зависимости от условий функционирования системы.

Необходимость обработки наблюдений для множества гипотез приводит к необходимости организации 2^L каналов параллельных вычислений с просмотром всех узлов числовой сетки для нелинейных параметров полезных сигналов. Для современных информационно-измерительных систем, ориентированных на режим функционирования в реальном времени, предлагаемый метод может оказаться весьма перспективным.

5. Анализ разрешения сигналов

В силу линейности предлагаемого метода существенно упрощается нахождение корреляционных матриц ошибок оценивания. Так с учетом (18) и (26) для гипотезы Γ_{l^*} и узла $\boldsymbol{\zeta}_{(d^*)}$ находим выражение для корреляционной матрицы оценки

$$\mathbf{K}^{\mathbf{A}}_{kl^*(\mathbf{d}^*)} = \mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kl^*(\mathbf{d}^*)} \mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}} \left(\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kl^*(\mathbf{d}^*)}\right)^{\mathrm{T}}, \quad k = \overline{1, K_{i^*}}, \tag{30}$$

где $\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kl^*(\mathbf{d}^*)} = \left[\Lambda_{kl^*(\mathbf{d}^*)} \mathbf{V}_{k^*(\mathbf{d}^*)} \left(\mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}_{k^*(\mathbf{d}^*)} \mathbf{\Lambda}_{k^*(\mathbf{d}^*)} \mathbf{V}_{k^*(\mathbf{d}^*)}\right)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}$.

Выражение (30) позволяет в каждом конкретном случае оценить потенциальные возможности метода с учетом требований, задаваемых к системе.

По аналогии с (30) можно записать математические формулы для корреляционных матриц $\mathbf{K}^{\mathbf{S}}_{kl^*(\mathbf{d}^*)}$, $\mathbf{K}^{\mathbf{B}}_{l^*(\mathbf{d}^*)}$ и $\mathbf{K}^{\boldsymbol{\Theta}}_{l^*(\mathbf{d}^*)}$, характеризующих точности оценивания не только отсчетов сигналов и их спектральных коэффициентов, но и сингулярной помехи. Так, дисперсии ошибок оценивания скалярных координат a_{km} вектора $\mathbf{A}_k$ и отсчетов s_{kn} сигнала $\mathbf{S}_k$ находятся так:

$$\left(\sigma^{\mathbf{A}}_{kml^*(\mathbf{d}^*)}\right)^2 = \left(\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kml^*(\mathbf{d}^*)}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}} \mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kml^*(\mathbf{d}^*)}, \quad m = \overline{1, M_{kl^*}},$$
$$\left(\sigma^{\mathbf{S}}_{kml^*(\mathbf{d}^*)}\right)^2 = \left(\mathbf{P}^{\mathbf{S}}_{kml^*(\mathbf{d}^*)}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}} \mathbf{P}^{\mathbf{S}}_{kml^*(\mathbf{d}^*)}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Для оценки характеристик обнаружения, различения и разрешения сигналов, а также возможности сравнения развитого и известных методов, достаточно задаться наиболее подходящим (для рассматриваемых условий наблюдения) законом распределения шумов наблюдений (как правило, гауссовским), а также, при необходимости, некоторыми априорными вероятностями (например, появления полезных сигналов в наблюдении) и значениями рисков от неправильных решений. Это позволяет исследовать характеристики метода в рамках известных статистических подходов [4–10], для чего строятся соответствующие функции правдоподобия и на их основе находятся значения наиболее важных (для конкретной задачи) линейных функционалов (например, вероятностей ложной тревоги, правильного обнаружения и т. д.).

Применяя построенные матрицы $\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kl(\mathbf{d})}$, $\mathbf{P}^{\mathbf{S}}_{kl(\mathbf{d})}$ и $\mathbf{P}^{\mathbf{B}}_{l(\mathbf{d})}$, $\mathbf{P}^{\boldsymbol{\Theta}}_{l(\mathbf{d})}$ непосредственно к (4), получим набор трансформированных уравнений наблюдения, сохраняющих аддитивность, но с новыми шумами $\boldsymbol{\Xi}^{\mathbf{A}}_{kl(\mathbf{d})} = \mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kl(\mathbf{d})}\boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{\Xi}^{\mathbf{S}}_{kl(\mathbf{d})} = \mathbf{P}^{\mathbf{S}}_{kl(\mathbf{d})}\boldsymbol{\Xi}$ и $\boldsymbol{\Xi}^{\mathbf{B}}_{kl(\mathbf{d})} = \mathbf{P}^{\mathbf{B}}_{kl(\mathbf{d})}\boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{\Xi}^{\boldsymbol{\Theta}}_{kl(\mathbf{d})} = \mathbf{P}^{\boldsymbol{\Theta}}_{kl(\mathbf{d})}\boldsymbol{\Xi}$.

Следовательно, зная закон распределения для исходного шума $\boldsymbol{\Xi}$, несложно записать законы распределения для новых шумов и вычислить значения интересующих функционалов. Такой подход позволяет сравнивать разработанный метод не только с РМНК, но и известными статистическими подходами к распознаванию сигналов.

Анализ выражений (27) и (29) показывает, что в развиваемом методе требуется обращение матрицы $\overline{\boldsymbol{\Phi}}_{kl}$ размером $(\overline{M}_{kl} + J) \times (\overline{M}_{kl} + J)$, а также матрицы $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}_{kl}\boldsymbol{\Lambda}_{kl}\mathbf{V}_{kl}$ размером $M_{kl} \times M_{kl}$.

Применительно к РМНК для фиксированного k предполагается обращение матрицы большего размера $(M_{1l} + M_{2l} + \ldots + M_{K_l} + J) \times (M_{1l} + M_{2l} + \ldots + M_{K_l} + J)$.

Очевидно, что при плохой обусловленности обращаемых матриц предлагаемый метод может оказаться весьма эффективным в вычислительном плане.

Пусть модельное уравнение наблюдения имеет вид

$$\mathbf{H}_l = (\mathbf{S}_{kl} + \Delta\mathbf{S}_{kl}) + (\mathbf{X}_{kl} + \Delta\mathbf{X}_{kl}) + \boldsymbol{\Xi},$$

где $\Delta\mathbf{S}_{kl}$ и $\Delta\mathbf{X}_{kl}$ — добавки к сигналу и помехе, обусловленные учетом «хвостов», используемых функциональных рядов.

В этом случае для оценки a^*_{kml} (вычисленной без учета этих добавок) имеем

$$a^*_{kml} = (\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kml})^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_l = (\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kml})^{\mathrm{T}}(\mathbf{S}_{kl} + \mathbf{\Delta S}_{kl}) + \\ + (\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kml})^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}_{kl} + \mathbf{\Delta X}_{kl}) + (\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kml})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Xi}.$$

Соответственно для истинного значения a_{kml} справедливо представление

$$a_{kml} = (\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kml} + \mathbf{\Delta P}^{\mathbf{A}}_{kml})^{\mathrm{T}}(\mathbf{S}_{kl} + \mathbf{\Delta S}_{kl}) + (\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{kml} + \mathbf{\Delta P}^{\mathbf{A}}_{kml})^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}_{kl} + \mathbf{\Delta X}_{kl}),$$

где $\mathbf{\Delta P}^{\mathbf{A}}_{kml}$ — добавка к столбцу весовых коэффициентов, необходимая для учета указанных «хвостов».

Если использовать символ математического ожидания $M\{\cdot\}$, то в качестве среднего значения методической ошибки можно принять величину

$$\overline{\Delta a}_{kml} = M\{a_{kml} - a^*_{kml}\} = \\ = (\mathbf{\Delta P}^{\mathbf{A}}_{kml})^{\mathrm{T}}(\mathbf{S}_{kl} + \mathbf{\Delta S}_{kl}) + (\mathbf{\Delta P}^{\mathbf{A}}_{kml})^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}_{kl} + \mathbf{\Delta X}_{kl}), \tag{31}$$

где учтено, что $M\{\mathbf{\Xi}\} = [\mathbf{0}]_{N\times 1}$.

Используя (31) совместно с (30), можно подобрать необходимые параметры развиваемого метода, обеспечивающие минимизацию результирующей ошибки оценивания в каждом конкретном случае.

Необходимые и достаточные условия существования и единственности решения задачи оценивания по аналогии с [1–3] требуют невырожденности и соблюдения некоторых ограничений на ранги ряда матриц. Выполнение заданных условий на практике обеспечивается рациональным выбором используемых функциональных базисов, числа степеней свободы в моделях сигналов и сингулярной помехи, а также заданием соответствующих условий наблюдения. Все эти вопросы относятся к планированию вычислительного эксперимента и далее не рассматриваются, поскольку требуют отдельных исследований в каждом конкретном случае.

Для оценки вычислительной эффективности развитого метода достаточно воспользоваться результатами работы [2], в которой демонстрируется возможность реализации процедуры ОИНО на основе распределенной обработки данных. В качестве показателя вычислительной эффективности метода можно принять время, затрачиваемое на получение искомых оценок. Данное время определяется как быстродействием распределенной среды, общим числом операций, необходимых при реализации метода и способом программирования. В [2] показано, что поскольку процедура ОИНО не требует расширения пространства состояний, то реализуемые на ее основе методы оценивания позволяют достичь значительного выигрыша в вычислительной эффективности. В [2] также дана количественная оценка достигаемого выигрыша на конкретном примере.

6. Иллюстративный пример

Пример искусственно выбран таким, чтобы он был достаточно простым и, в тоже время, наглядно демонстрировал достигаемый вычислительный эффект развиваемого метода по сравнению с РМНК (ограничимся *алгоритмом оценивания* (1)). Для этой цели использованы исходные данные, приводящие к задаче оценивания параметров сигналов с плохо обусловленными матрицами.

Примем: $K = 2$, $\mathbf{H} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Xi}$, где $\mathbf{A}_1 = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Theta}_1(t) = [1, t^2, t^3, t^5]^{\mathrm{T}}$, $M_1 = 4$, $\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}_1$, $\mathbf{A}_2 = [a_{21}, a_{22}, a_{23}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Theta}_2(t) = [t, t^4, t^6]^{\mathrm{T}}$, $M_2 = 3$, $\mathbf{S}_2 = \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}_2$, $\mathbf{B} = [b_1, b_2]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Omega}(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t)]^{\mathrm{T}}$, $J = 2$, $\boldsymbol{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & t_1^2 & t_1^3 & t_1^5 \\ 1 & t_2^2 & t_2^3 & t_2^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_N^2 & t_N^3 & t_N^5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & t_1^4 & t_1^6 \\ 1 & t_2^4 & t_2^6 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_N^4 & t_N^6 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1(t_1) & \omega_2(t_1) \\ \omega_1(t_2) & \omega_1(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ \omega_1(t_N) & \omega_2(t_N) \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{Y}_1\mathbf{C}_1$, $\mathbf{X}_2 = \mathbf{Y}_2\mathbf{C}_2$, $\mathbf{Y}_1 = [\boldsymbol{\Psi}_2 \vdots \boldsymbol{\Omega}]$ — матрица размером $N \times 5$, $\mathbf{Y}_2 = [\boldsymbol{\Psi}_1 \vdots \boldsymbol{\Omega}]$ — матрица размером $N \times 6$, $\mathbf{C}_1 = [a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_1, b_2]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{C}_2 = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_1, b_2]^{\mathrm{T}}$.

При формировании уравнения наблюдения полагалось: $a_{11} = 10^3$, $a_{12} = 50$, $a_{13} = 10$, $a_{14} = 3$, $a_{21} = -2 \cdot 10^3$, $a_{22} = -2$, $a_{23} = 1$, $\mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}} = \operatorname{diag}\left[\sigma_n^2, n = \overline{1, N}\,\right]$, $\sigma_n^2 = \sigma^2 = 4 \cdot 10^{-2}$, $t_{t+1} - t_n = 0.5$, $N = 300$.

Мерой качества оценивания (в процентах) служит величина $\delta a_{km} = 10^2\,|a_{km}^* - a_{km}|\,/\,|\bar{a}_{km}^*|$, где $\bar{a}_{km}^* = \max\{a_{km}^*, |a_{km}|\}$. Сингулярная помеха задавалась в виде линейной комбинации из двух базисных функций

$$\theta(t, b_1, b_2) = b_1\omega_1(t) + b_2\omega_2(t) = b_1 \sin(\alpha_1 t) + b_2 \exp(\alpha_2 t),$$

где α_1 и α_2 — произвольные числа.

Параметры помехи выбирались случайным образом (их конкретные значения не принципиальны, поскольку в данном методе достигается полная автокомпенсация помехи при любых значениях параметров).

Все расчеты проводились с точностью до 15 разрядов путем усреднения результатов, полученных в ходе тысячи экспериментов. Применительно к развиваемому методу получены следующие оценки для координат векторов $\boldsymbol{\delta}\mathbf{A}_1 = \left[\delta a_{1m}, m = \overline{1, 4}\,\right]^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\delta}\mathbf{A}_2 = \left[\delta a_{2m}, m = \overline{1, 3}\,\right]^{\mathrm{T}}$:

$$\delta a_{11} = 1{,}585, \quad \delta a_{12} = 0{,}621, \quad \delta a_{13} = 0{,}082, \quad \delta a_{14} = 1{,}967 \cdot 10^{-5},$$
$$\delta a_{21} = 1{,}643 \cdot 10^{-4}, \quad \delta a_{22} = 1{,}409 \cdot 10^{-7}, \quad \delta a_{23} = 2{,}756 \cdot 10^{-11}.$$

В свою очередь, для РМНК:

$$\delta a_{11} = 43{,}053, \quad \delta a_{12} = 24{,}902, \quad \delta a_{13} = 2{,}686, \quad \delta a_{14} = 0{,}138,$$
$$\delta a_{21} = 2{,}968 \cdot 10^{-3}, \quad \delta a_{22} = 2{,}906 \cdot 10^{-6}, \quad \delta a_{23} = 3{,}846 \cdot 10^{-10}.$$

Видим, что достигается существенный выигрыш по точности, а оценки для РМНК (в рассматриваемых условиях) оказываются малопригодными.

Сравнительный анализ показывает, что разработанный метод позволяет также существенно снизить вычислительную погрешность оценивания, что обусловлено декомпозицией и снижением размерности вычислительной процедуры. В ходе расчетов с использованием евклидовой нормы определялись числа обусловленности (ν_1 и ν_2) обращаемых матриц $\mathbf{\Psi_1^{\mathrm{T}} \Lambda_1 V_1}$ и $\mathbf{\Psi_2^{\mathrm{T}} \Lambda_2 V_2}$, а также число ν обусловленности соответствующей объединенной матрицы РМНК. В итоге $\nu_1 = 5{,}283 \cdot 10^{15}$, $\nu_2 = 1{,}276 \cdot 10^{14}$ и $\nu = 4{,}537 \cdot 10^{26}$.

Кроме того, подсчитывалось количество операций сложения и умножения, необходимых для реализации РМНК и разработанного метода. Относительный вычислительный выигрыш составил 1,35 раза, что также подтверждает эффективность нового метода.

В ходе численного эксперимента рассчитывались также корреляционные матрицы $\mathbf{K}_1^{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{K}_2^{\mathbf{A}}$ (по аналогии с (30)). В целях сокращения записей приводятся лишь диагональные элементы этих матриц

$$\left(\sigma_{11}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 0{,}031, \quad \left(\sigma_{12}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 3{,}631 \cdot 10^{-6}, \quad \left(\sigma_{13}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 2{,}306 \cdot 10^{-9}, \quad \left(\sigma_{14}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 0,$$
$$\left(\sigma_{21}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 2{,}287 \cdot 10^{-5}, \quad \left(\sigma_{22}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 0, \quad \left(\sigma_{23}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 0.$$

В тоже время для РМНК

$$\left(\sigma_{11}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 0{,}755, \quad \left(\sigma_{12}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 7{,}002 \cdot 10^{-4},$$
$$\left(\sigma_{13}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 1{,}236 \cdot 10^{-6}, \quad \left(\sigma_{14}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 4{,}781 \cdot 10^{-14},$$
$$\left(\sigma_{21}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 0{,}073 \cdot 10^{-6}, \quad \left(\sigma_{22}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 5{,}096 \cdot 10^{-10}, \quad \left(\sigma_{23}^{\mathbf{A}}\right)^2 = 0.$$

Поскольку оба сравниваемых метода являются линейными и оптимальными, то дисперсии ошибок оценивания не должны отличаться (если не учитывать погрешностей вычислений), т.е. методы наследуют одну и ту же потенциальную точность оценивания. Однако, как показывают расчеты, в силу указанных выше причин оценки дисперсий для разработанного метода существенно меньше аналогичных оценок для РМНК. Это также связано с тем, что погрешности вычислений по заданным формулам существенно зависят от размерности обращаемых плохо обусловленных матриц.

7. Заключение

Развитый метод может эффективно сочетаться с алгоритмами ортогональных разложений [13] и решения некорректных задач [22, 23]. Возможность декомпозиции и распараллеливания вычислительных процедур позволяет более эффективно решать целый круг прикладных задач, связанных с параллельной обработкой измерений в различных областях. Полученные алгоритмы разрешения сигналов в условиях сингулярных помех несложно реализовать в специализированных ЭВМ, ориентированных на информационно-измерительные комплексы, предназначенные для функционирования в реальном времени.

Получены компактные аналитические выражения, позволяющие заранее, под конкретную прикладную задачу, подобрать необходимые модели сигналов и помех, а также количественные значения их параметров, при которых развитый метод обеспечит достижение своих потенциальных возможностей. Метод относится к классу линейных, поэтому все процедуры сводятся к простейшим математическим операциям над векторами и матрицами, а также допускает возможность комбинирования с традиционными подходами к решению прикладных задач, связанных с оптимальной и квазиоптимальной обработкой измерений.

Полученные результаты можно применять и к классу динамических систем с измеряемым выходом, если воспользоваться известным комбинированным методом опорных интегральных кривых и обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания [3, 24, 25]. В этом случае состояние и выход таких систем можно также представлять в виде конечной линейной оболочки заданного функционального базиса, если использовать заранее построенное семейство опорных кривых или поверхностей необходимого объема.

В следующих публикациях по данной теме целесообразно более подробно исследовать эффективность метода с учетом ограничений, накладываемых на модели сигналов и сингулярной помехи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задачу оптимального оценивания коэффициента a_{km} будем решать методом множителей Лагранжа путем нахождения экстремума следующей функции

$$F(\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{km}, \boldsymbol{\gamma}_{km}, \boldsymbol{\eta}_{km}) = \left(\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{km}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}} \mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{km} + \\ + \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}_{km} \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}_{k} \mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{km} + \left[\left(\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{km}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Psi}_k - \mathbf{E}^{\mathrm{T}}_{km}\right] \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{km}}, \qquad (\text{П.1})$$

$\boldsymbol{\gamma}_{km} = \left[\gamma_{kmn}, n = \overline{1, \overline{M}_k + J}\,\right]^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\eta}_{km} = \left[\eta_{kmn}, n = \overline{1, M_k}\,\right]^{\mathrm{T}}$ — векторные множители Лагранжа, соответствующие условиям несмещенности (22) и инвариантности (23).

Дифференцируя функцию (П.1) по всем аргументам, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\partial F / \partial \mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{km} = 2\mathbf{K}^{\boldsymbol{\Xi}} \mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{km} + \mathbf{Y}_k \gamma_{km} + \boldsymbol{\Psi}_k \boldsymbol{\eta}_{km} = [\mathbf{0}]_{n\times 1},$$
$$\partial F / \partial \gamma_{km} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}_{k} \mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{km} = [\mathbf{0}]_{\left(\overline{M}_k + J\right)\times 1},$$
$$\partial F / \partial \boldsymbol{\eta}_{km} = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}_{k} \mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{km} - \mathbf{E}_{km} = [\mathbf{0}]_{M_k\times 1}.$$

Введем следующие матрицы:

$$\mathbf{V}_k = \left(\mathbf{K}^{\mathbf{\Xi}}\right)^{-1} \mathbf{\Psi}_k, \quad \overline{\mathbf{V}}_k = \left(\mathbf{K}^{\mathbf{\Xi}}\right)^{-1} \mathbf{Y}_k,$$
$$\mathbf{\Phi}_k = \mathbf{\Psi}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{V}_k, \quad \overline{\mathbf{\Phi}}_k = \mathbf{Y}_k^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{V}}_k,$$
$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{Y}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{V}_k, \quad \overline{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{\Psi}_k^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{V}}_k.$$

С учетом полученной системы уравнений и принятых обозначений находим строку весовых коэффициентов

$$\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}} = 2^{-1} \left(\mathbf{V}_k \boldsymbol{\eta}_{km} - \overline{\mathbf{V}}_k \boldsymbol{\gamma}_{km}\right). \tag{П.2}$$

Умножая левую и правую части (П.2) слева на матрицу $\mathbf{Y}_k^{\mathrm{T}}$ и учитывая условие инвариантности (23), после несложных преобразований находим

$$\boldsymbol{\gamma}_{km} = \overline{\mathbf{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k \boldsymbol{\zeta}_{km}. \tag{П.3}$$

Аналогичным умножением (П.2) на матрицу $\mathbf{\Psi}_k^{\mathrm{T}}$ и учитывая условие несмещенности (22) получаем

$$\boldsymbol{\eta}_{km} = 2\Phi_k \left(\mathbf{E}_{km} + 2^{-1} \overline{\mathbf{Z}_k} \boldsymbol{\gamma}_{km}\right). \tag{П.4}$$

Разрешая (П.3) и (П.4) относительно $\boldsymbol{\gamma}_{km}$ и $\boldsymbol{\eta}_{km}$, имеем

$$\boldsymbol{\gamma}_{km} = 2\overline{\mathbf{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k \left([\mathbf{E}]_{M_k \times M_k} - \mathbf{\Phi}_k^{-1} \overline{\mathbf{Z}}_k \overline{\mathbf{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k\right)^{-1} \mathbf{\Phi}_k^{-1} \mathbf{E}_{km}, \tag{П.5}$$

$$\boldsymbol{\eta}_{km} = 2 \left([\mathbf{E}]_{M_k \times M_k} - \mathbf{\Phi}_k^{-1} \overline{\mathbf{Z}}_k \overline{\mathbf{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k\right)^{-1} \mathbf{\Phi}_k^{-1} \mathbf{E}_{km}. \tag{П.6}$$

Подставляя (П.5) и (П.6) в (П.2), получаем

$$\mathbf{P}_{km}^{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{V}_k - \overline{\mathbf{V}}_k \overline{\mathbf{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k\right) \left([\mathbf{E}]_{M_k \times M_k} - \mathbf{\Phi}_k^{-1} \overline{\mathbf{Z}}_k \overline{\mathbf{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k\right)^{-1} \mathbf{\Phi}_k^{-1} \mathbf{E}_{km}. \tag{П.7}$$

Вводя обозначение $\mathbf{\Lambda}_k = [\mathbf{E}]_{N \times N} - \overline{\mathbf{V}}_k \overline{\mathbf{\Phi}}_k^{-1} \mathbf{Y}_k^{\mathrm{T}}$, формулу (П.7) запишем в следующем компактном виде (24). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булычев Ю.Г., Елисеев А.В., Бородин Л.И. и др.* Обобщенное инвариантно-несмещенное маскирование и оценивание информационных процессов в условиях мультиструктурных помех // АиТ. 2010. № 4. С. 140–149.
2. *Булычев Ю.Г., Елисеев А.В.* Вычислительная схема инвариантно-несмещенного оценивания значений линейных операторов заданного класса // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2008. Т. 48. № 4. С. 580–592.
3. *Булычев Ю.Г.* Некоторые аспекты идентификации динамических объектов при некорректных условиях наблюдения // АиТ. 2020. № 6. С. 131–152.

4. *Френкс Л.* Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1969.
5. *Ширман Я.Д.* Разрешение и сжатие сигналов. М.: Сов. радио, 1974.
6. *Репин В.Г., Тартаковский Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977.
7. *Фалькович С.В., Хомяков Э.Н.* Статистическая теория радиосистем. М.: Радио и связь, 1981.
8. *Черняк В.С., Заславский Л.П., Осипов Л.В.* Многопозиционные радиолокационные станции и системы // Зарубежная радиоэлектроника. 1987. № 1. С. 9–69.
9. *Сосулин Ю.Г., Костров В.В., Паршин Ю.Н.* Оценочно-корреляционная обработка сигналов и компенсация помех. М.: Радиотехника, 2014.
10. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
11. *Богданович В.А., Вострецов А.Г.* Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов. М.: Физматлит, 2004.
12. *Жданюк Б.Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.
13. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.
14. *Булычев Ю.Г., Манин А.П.* Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000.
15. *Булычев Ю.Г., Васильев В.В., Джуган Р.В. и др.* Информационно-измерительное обеспечение натурных испытаний сложных технических комплексов. М.: Машиностроение – Полет, 2016.
16. *Ежова Н.А., Соколинский Л.Б.* Обзор моделей параллельных вычислений // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». 2019. Т. 8. № 3. С. 58–91.
17. *Иванов А.И., Шпилевая С.Г.* О квантовых параллельных вычислениях // Вестник Балт. ун-та им. Канта. Серия «Физико-математические и технические науки». 2021. № 2. С. 95–99.
18. *Sutti C.* Lokal and global optimization by parallel algorithms for MIMD systems // Ann. Oper. Res. 1984. V. 1. P. 151–164.
19. *Price W.L.* Global optimization algorithms for a CAD workstation // J. Optim. Theory Appl. 1987. V. 55. P. 133–146.
20. *Булычев Ю.Г., Елисеев А.В.* Алгоритмы решения уравнений Риккати в задачах управления нестационарными объектами // Изв. РАН. ТиСУ. 1997. № 4. С. 102–110.
21. *Булычев Ю.Г., Манин А.А.* Численно-аналитический подход к решению краевой задачи принципа максимума Понтрягина // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 2. С. 118–126.
22. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
23. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989.
24. *Булычев Ю.Г.* Методы численно-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 1991. Т. 31. № 9. С. 1305–1319.

25. *Булычев Ю.Г.* Численно-аналитического интегрирование дифференциальных уравнений с использованием обобщенной интерполяции // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 1994. Т. 34. № 4. С. 520–532.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 26.06.2023

После доработки 06.12.2023

Принята к публикации 20.01.2024