Нелинейные системы

© 2024 г. **Ж.Т. ЖУСУБАЛИЕВ, д-р техн. наук (zhanybai@gmail.com),**
Д.В. ТИТОВ, д-р техн. наук (amazing2004@inbox.ru),
О.О. ЯНОЧКИНА, канд. техн. наук (yanoolga@gmail.com)
(Юго-Западный государственный университет, Курск),
У.А. СОПУЕВ, канд. физ. мат. наук(ulansopuev@mail.ru)
(Ошский государственный университет, Ош)

О БИФУРКАЦИЯХ ГРАНИЧНОГО СТОЛКНОВЕНИЯ В ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЕ[1]

Исследуются бифуркации граничного столкновения («border-collision bifurcations») в кусочно-гладком отображении, описывающем поведение импульсной системы автоматического управления. Показано, что в области колебательных движений такое отображение является кусочно-линейным непрерывным. Известно, что в кусочно-линейных отображениях классические бифуркации, например бифуркация удвоения периода, касательная и вилообразная бифуркации, становятся вырожденными («degenerate bifurcations»), сочетая свойства как гладких, так и бифуркаций граничного столкновения. Выявлены необычные свойства рассматриваемого класса динамических систем, проявляющиеся в том, что бифуркации граничного столкновения коразмерности один, включая и вырожденные, происходят, когда пара точек периодической орбиты одновременно сталкивается с двумя многообразиями переключения. Численно и аналитически изучены бифуркации «слияния» («merging»), «расширения» («expansion»), связанные с гомоклиническими бифуркациями неустойчивых периодических орбит.

Ключевые слова: импульсная система, дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, бимодальное кусочно-линейное отображение, бифуркации граничного столкновения, вырожденные бифуркации, бифуркации «слияния» и «расширения», хаотические колебания.

DOI: 10.31857/S0005231024020027, **EDN:** UMFZYH

1. Введение

Рассмотрим импульсную систему, поведение которой описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью [1–8]

$$\frac{T}{T_0}\,\dot{x} + x = f(t,\varphi) - \mu, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$
$$f(t,\varphi) \equiv f(t+1,\varphi), \quad 0 \leqslant \mu < 1, \quad \varphi = q - x(t).$$

[1] Жусубалиев Ж.Т. поддержан Минобрнауки РФ программой стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (1.7.21/$S-2$, 1.71.23П). Работа Сопуева У.А. поддержана грантом № 14-22 Ошского государственного университета.

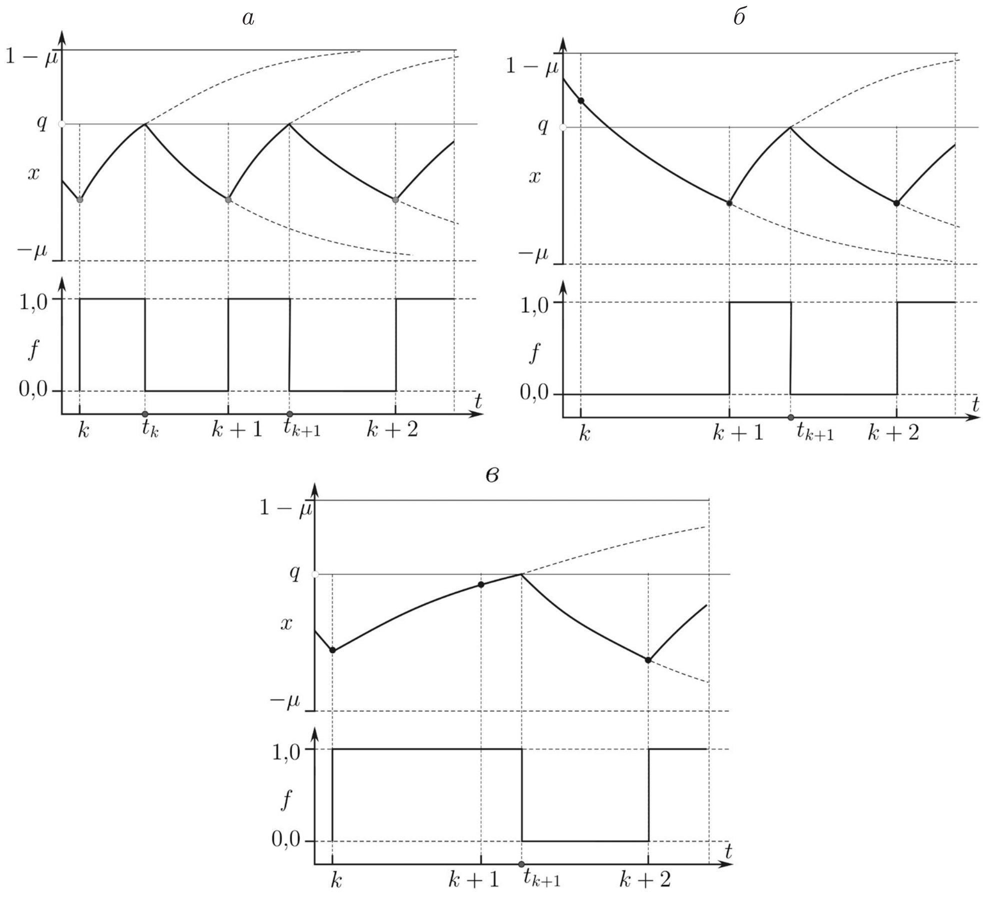

Рис. 1. Формирование импульсов управления.

Здесь, как и в [8], x – выход системы; $\dot{x}$ – производная x по безразмерному времени t; T_0 – период модуляции [8]; T– постоянная времени; q, μ – параметры; φ, f – сигналы на входе и выходе модулятора.

В пределах каждого из временных интервалов $k < t < k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ выходной сигнал f модулятора определяется как [8, 9]:

(2)
$$f = \begin{cases} 1, & k \leqslant t \leqslant t_k; \\ 0, & t_k < t < k+1. \end{cases}$$

В (2) t_k – моменты переключения модулятора $f = 1 \to f = 0$ (рис. 1),

(3)
$$t_k = \begin{cases} k, & \varphi_k^+ \leqslant 0; \\ t_{k*}, & \varphi_k^+ > 0 \quad \text{и} \quad \varphi_{k+1}^- < 0; \\ k+1, & \varphi_{k+1}^- \geqslant 0, \end{cases}$$
$$\varphi_k^{\pm} = \lim_{t \to k \pm 0} \varphi(t), \quad k \leqslant t_k \leqslant k+1.$$

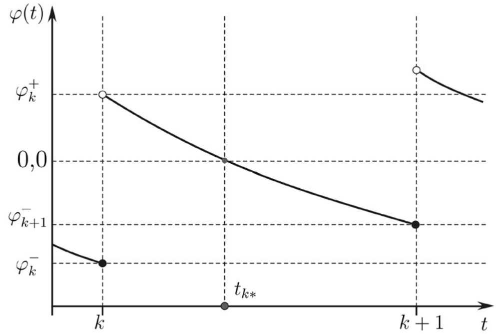

Рис. 2. График функции $\varphi(t)$ для случая когда $\varphi^+{}_k > 0$ и $\varphi^-{}_{k+1} < 0$.

Здесь

$$\varphi(t) = q - x(t),$$

где

$$x(t) = 1 - \mu + \mathrm{e}^{\lambda(t-k)}\,(x_k - 1 + \mu), \quad \lambda = -T_0/T$$

есть решение уравнения (1) при $f = 1$ с начальным условием $x(t)|_{t=k} = x_k$, а t_{k*} – корень уравнения

$$\varphi(t) = q - x(t) = q - 1 + \mu - \mathrm{e}^{\lambda(t-k)} = 0. \tag{4}$$

Легко заметить, что функция $\varphi(t)$ монотонно убывает на промежутке $t \in \in [k, k+1]$, принимая на концах $[k+0, k+1-0]$ значения φ_k^+ и φ_{k+1}^- такие, что $\varphi_k^+ > \varphi_{k+1}^-$, где $-\mu < x_k < 1 - \mu$.

Если $\varphi_k^+ > 0$ и $\varphi_{k+1}^- < 0$, то в силу монотонности $\varphi(t)$ уравнение (4) имеет единственное решение

$$t_{k*} = k + \frac{1}{\lambda}\,\ln\frac{q - 1 + \mu}{x_k - 1 + \mu}, \quad k < t_{k*} < k + 1. \tag{5}$$

График функции $\varphi(t)$ изображен на рис. 2.

Если $\varphi_k^+ < 0$ или $\varphi_{k+1}^- > 0$, то уравнение (4) не имеет корня. Тогда $t_k = k$, если $\varphi_k^+ < 0$, и $t_k = k+1$, если $\varphi_{k+1}^- > 0$. В этих случаях говорят, что модулятор насыщается.

Период периодического решения уравнения (1) в общем случае является кратным периоду внешнего воздействия. Решение с таким периодом будем называть циклом периода m или m-циклом, $m = 1, \ldots$.

Параметры: $q = 0{,}356$; $\lambda = -0{,}6$, $0 < \mu < 1$. Здесь μ – варьируемый параметр. На рис. 3 приведены результаты численных расчетов, иллюстрирующие периодические и хаотические решения (1) при разных значениях параметра μ. На рис. 3,*а* изображены $x(t)$ и выходной сигнал f модулятора, отвечающие периодическим колебаниям с периодом внешнего воздействия (1-циклу)

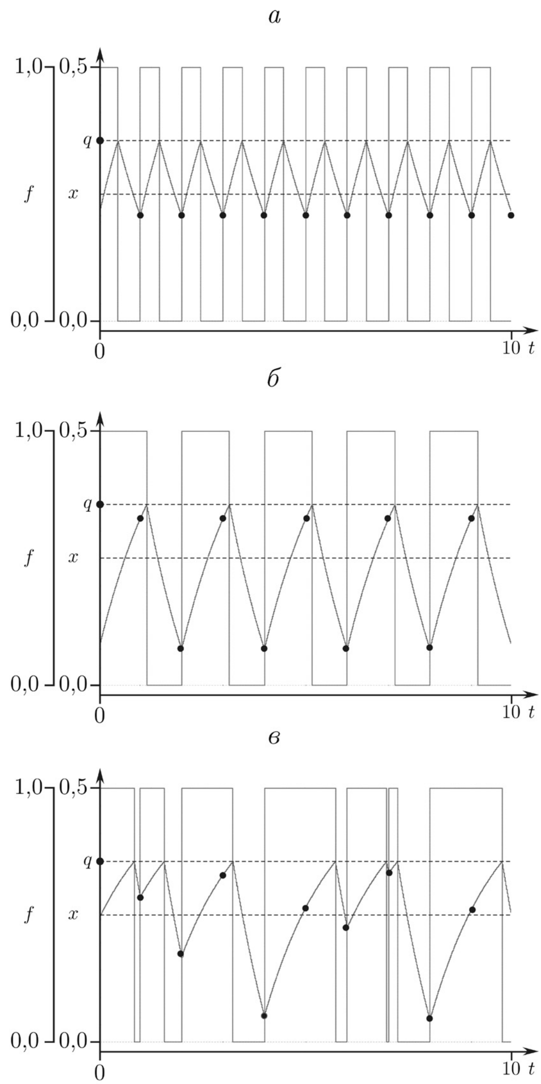

Рис. 3. *а*– Периодические колебания с $m = 1$: $x(t) = x(t+1)$, $\mu = 0{,}18$. *б* – Колебания с удвоенным периодом $m = 2$: $x(t) = x(t + 2)$, $\mu = 0{,}36$. *в* – Хаотический режим, $\mu = 0{,}4754$.

$x(t) = x(t + 1)$ при $\mu = 0{,}18$. Рисунок 3,*б* демонстрирует периодическое решение (1) с удвоенным периодом (2-цикл) $x(t) = x(t + 2)$ ($\mu = 0{,}36$). На рис. 3,*в* показан пример хаотических колебаний ($\mu = 0{,}4754$).

Рисунок 3 иллюстрирует типичное свойство нелинейных импульсных систем [7, 9]. Исследование механизмов перехода от одного колебательного движения к другому при вариации параметров в целях прогнозирования, обнаружения и подавления нерегулярных колебаний, управления колебательной системой представляет одну из актуальных задач современной нелинейной динамики и теории управления [10, 11].

Дифференциальные уравнения вида (1) обычно сводятся к кусочно-гладким отображениям $F : I \to I$, $I \subseteq \mathbb{R}$

$$F : x \mapsto F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1; \\ F_2(x), & x \in S_2; \\ \cdots\cdots \\ F_p(x), & x \in S_p, \quad p \in \mathbb{N}^+. \end{cases} \tag{6}$$

Каждая из F_i, $i = 1, \dots, p$ в (6) есть $\mathcal{C}^r$ – гладкая функция ($r \geqslant 1$) по x в своей области определения S_i; $\mathbb{N}^+$ – множество положительных целых чисел (без нуля). Границы S_i называются многообразиями переключения («switching manifolds»), в которых F является недифференцируемой. Неподвижные точки отображения (6) отвечают периодическим решениям уравнения (1) с периодом внешнего воздействия.

При вариации параметров неподвижная точка, попадает на одну из границ, разделяющих области определения функций F_i, $i = 1, \dots, p$. Это приводит к изменениям топологической структуры фазового пространства из-за нарушения условия существования неподвижной точки или цикла. Подобные перестройки фазового пространства кусочно-гладких отображений называются бифуркациями граничного столкновения («border collision bifurcations») [12] или *«C-бифуркациями»* [13–15].

Бифуркации граничного столкновения не имеют аналогов в гладких динамических системах и индуцируют чрезвычайно большое многообразие нелинейных явлений, например удвоение или «умножение» периода колебаний, одновременное возникновение нескольких сосуществующих аттракторов [16, 17] или рождение из неподвижной точки хаотического аттрактора в результате единственной бифуркации [12, 18–25].

Обратим внимание на то, что такие бифукации не связаны с нарушением условия гиперболичности неподвижных точек или циклов, поэтому они не поддаются описанию и интерпретации методами классической теории бифуркаций [26, 27].

В представленной работе численно и аналитически изучаются бифуркации граничного столкновения в кусочно-гладком отображении, полученном из уравнения (1). Показано, что в области колебательных движений такое отображение является кусочно-линейным непрерывным. Известно, что в кусочно-линейных отображениях классические бифуркации, например, бифуркация удвоения периода, касательная и вилообразная бифуркации, становятся вырожденными («degenerate bifurcations») [25, 28], сочетая свойства как гладких, так и бифуркаций граничного столкновения.

Главная особенность рассматриваемой динамической системы состоит в том, что бифуркации граничного столкновения коразмерности один, включая и вырожденные, происходят, когда пара точек периодической орбиты одновременно сталкивается с двумя многообразиями переключения.

Исследуются так называемые бифуркации «слияния» («merging»), «расширения» («expansion») [25, 28–31], связанные с гомоклиническими бифуркациями неустойчивых периодических орбит. Бифуркации «слияния» и «расширения» известны еще как «кризисы хаотических аттракторов» («merging crisis», «interior crisis», см., например, [32–34]).

Особый интерес представляют механизмы, при которых хаотический аттрактор претерпевает внезапные изменения. Различают два вида таких переходов. Хаотический аттрактор может внезапно исчезнуть из-за «граничного кризиса» («final bifurcation», «boundary crisis») или внезапно измениться в размерах из-за «внутреннего кризиса» («expansion»,«interior crisis»). В представленной работе исследуется «внутренний кризис».

2. Кусочно-гладкое отображение

Во временном интервале $k < t \leqslant t_k$ сигнал на выходе модулятора $f = 1$ и (1) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda(x + \mu - 1), \quad x_k = x(t)|_{t=k},$$

решение которого

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-k)}\,(x_k - 1 + \mu) + 1 - \mu.$$

Отсюда для $t = t_k$ имеем

$$x(t_k) = \mathrm{e}^{\lambda(t_k-k)}\,(x_k - 1 + \mu) + 1 - \mu.$$

В промежутке $t_k < t < k+1$ сигнал $f = 0$. Подставив $f = 0$ в (1), получим линейное уравнение с постоянным коэффициентом

$$\dot{x} = \lambda\,(x + \mu) - \mu,$$

решение которого с начальным условием

$$x(t_k) = \mathrm{e}^{\lambda(t_k-k)}\,(x_k - 1 + \mu) + 1 - \mu$$

будет иметь вид

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-k)}\,(x_k - 1 + \mu) - \mu + \mathrm{e}^{\lambda(t-t_k)}.$$

Отсюда для $t = k + 1$ следует, что

$$x_{k+1} = \mathrm{e}^{\lambda}\,(x_k - 1 + \mu) - \mu + \mathrm{e}^{\lambda(k+1-t_k)}. \tag{7}$$

Обозначив $z_k = t_k - k$, перепишем выражение (7) в виде

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \mathrm{e}^{\lambda}\,(x - 1 + \mu) - \mu + \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}, \tag{8}$$

где z $(0 \leqslant z \leqslant 1)$ на основании (3) и формулы (5) находится как:

$$z = \begin{cases} 0, & q - x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{\lambda}\,\ln \dfrac{q-1+\mu}{x-1+\mu}, & q - x > 0 \quad \text{и} \quad q - 1 + \mu - \mathrm{e}^{\lambda}(x-1+\mu) < 0; \\ 1, & q - 1 + \mu - \mathrm{e}^{\lambda}(x-1+\mu) \geqslant 0. \end{cases} \tag{9}$$

Переменная z называется коэффициентом заполнения импульса (относительная ширина импульса) [8].

Утверждение 1. Функция $F(x)$ (8) является кусочно-линейной. Более того, если $\mu < 1 - q$, то $F(x)$ непрерывна и разрывна, если $\mu > 1 - q$.

Доказательство. Покажем сначала, что в интервалах $x \in (-\infty; 1 - \mu + (q - 1 + \mu)/\mathrm{e}^{\lambda})$ и $x \in (q\ +\infty)$ функция $F(x)$ линейно возрастающая. Обозначим $F(x)$ в указанных интервалах через $F_{\mathcal{L}}(x)$ и $F_{\mathcal{R}}(x)$ соответственно. Найдем $F_{\mathcal{L}}(x)$ и $F_{\mathcal{R}}(x)$, подставив соответствующие значения z из (9) в разностное уравнение (8).

Запишем $F(x)$, подставив в (8) значение $z = 1$,

$$F_{\mathcal{L}}(x) = F(x)|_{z=1} = \mathrm{e}^{\lambda}(x - 1 + \mu) - \mu.$$

Функция $F_{\mathcal{L}}(x)$ линейно возрастающая во всей своей области определения $(-\infty;\ 1 - \mu + (q - 1 + \mu)/\mathrm{e}^{\lambda})$, так как производная $F'_{\mathcal{L}}(x)$ положительная: $F'_{\mathcal{L}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda} > 0$.

Аналогичным образом находим

$$F_{\mathcal{R}}(x) = F(x)|_{z=0} = \mathrm{e}^{\lambda}(x + \mu) - \mu,$$

которая также линейно возрастающая на промежутке $(q;\ +\infty)$, где она определена.

Остается показать, что на интервале $[1 - \mu + (q - 1 + \mu)/\mathrm{e}^{\lambda}; q]$ функция $F(x)$ линейно убывающая. Обозначим ее через $F_{\mathcal{M}}(x)$:

$$F_{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda}\,(x - 1 + \mu) - \mu + \mathrm{e}^{\lambda}/\mathrm{e}^{\lambda\, z}. \tag{10}$$

Разрешим уравнение (4)

$$q - x(t) = 0,\ x(t) = q - 1 + \mu - \mathrm{e}^{\lambda z}(x_k - 1 + \mu), \quad z = t - k$$

относительно $\mathrm{e}^{\lambda z}$:

$$\mathrm{e}^{\lambda z} = \frac{q - 1 + m}{x_k - 1 + \mu}. \tag{11}$$

Подставив полученное выражение (11) для $\mathrm{e}^{\lambda z}$ в (10) и опуская индекс k в x_k (см. (11)), получим

$$F_{\mathcal{M}}(x) = \frac{q + \mu}{q - 1 + \mu}\,\mathrm{e}^{\lambda}(x - 1 + \mu) - \mu.$$

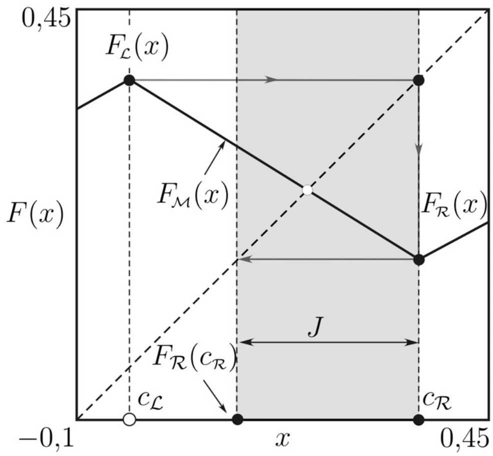

Рис. 4. Бимодальное кусочно-линейное отображение.

Область определения $F_{\mathcal{M}}(x)$ есть промежуток $[1-\mu+(q-1+\mu)/\mathrm{e}^{\lambda};q]$. Так как $\frac{q+\mu}{q-1+\mu}\,\mathrm{e}^{\lambda}<0$, то $F_{\mathcal{M}}(x)$ убывающая.

Докажем теперь непрерывность $F(x)$ на границах, разделяющих $F_{\mathcal{L}}(x)$, $F_{\mathcal{M}}(x)$ и $F_{\mathcal{M}}(x)$, $F_{\mathcal{R}}(x)$. Введем следующие обозначения для границ:

$$c_{\mathcal{L}}=1-\mu+\frac{q-1+\mu}{\mathrm{e}^{\lambda}},\quad c_{\mathcal{R}}=q.$$

Так как

$$\lim_{x=c_{\mathcal{L}}-0}F(x)=F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}});\quad \lim_{x=c_{\mathcal{L}}+0}F(x)=F_{\mathcal{M}}(c_{\mathcal{L}}),$$
$$F_{\mathcal{M}}(c_{\mathcal{L}})=F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}})=\mathrm{e}^{\lambda}(c_{\mathcal{L}}-1+\mu)+1-\mu,$$

то $F(x)$ непрерывна в точке $x=c_{\mathcal{L}}$. Аналогично доказывается непрерывность $F(x)$ в точке $x=c_{\mathcal{R}}$.

Легко проверить, что если $\mu=1-q$, то $c_{\mathcal{L}}=c_{\mathcal{R}}=q$. Поэтому в области $\mu\geqslant 1-q$ функция $F(x)$ становится разрывной:

$$F(x)=\begin{cases}F_{\mathcal{L}}(x)=\mathrm{e}^{\lambda}(x-1+\mu)+1-\mu, & x<q;\\ F_{\mathcal{R}}(x)=\mathrm{e}^{\lambda}(x+\mu)-\mu, & x\geqslant q,\end{cases}\tag{12}$$
$$F_{\mathcal{L}}(q)\neq F_{\mathcal{R}}(q).$$

Итак, если $\mu<1-q$, то $F(x)$ необратимая и непрерывная, а при $\mu\geqslant 1-q$ – обратимая и разрывная. Утверждение 1 доказано.

Окончательно отображение (8) $F:I\to R$, $I\subseteq\mathbb{R}$ можно записать в виде

$$F:x\mapsto F(x),\quad F(x)=\begin{cases}F_{\mathcal{L}}(x)=a\,x+b_{\mathcal{L}}, & x<c_{\mathcal{L}};\\ F_{\mathcal{M}}(x)=a_{\mathcal{M}}\,x+b_{\mathcal{M}}, & c_{\mathcal{L}}\leqslant x\leqslant c_{\mathcal{R}};\\ F_{\mathcal{R}}(x)=a\,x+b_{\mathcal{R}}, & x>c_{\mathcal{L}},\end{cases}\tag{13}$$

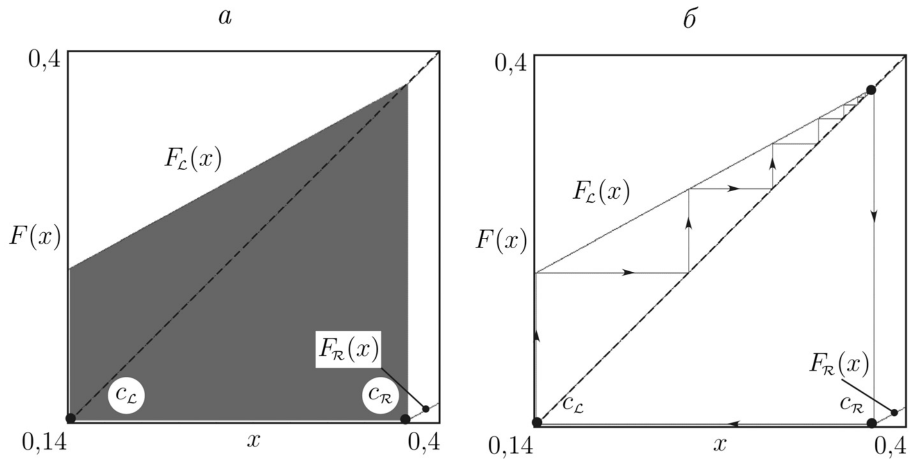

Рис. 5. Разрывное отображение.

где

$$a = \mathrm{e}^{\lambda},\ b_{\mathcal{L}} = (1-\mu)\,(1-\mathrm{e}^{\lambda}),\ b_{\mathcal{R}} = \mu\,(\mathrm{e}^{\lambda}-1),\ a_{\mathcal{M}} = \frac{q+\mu}{q-1+\mu}\,\mathrm{e}^{\lambda},$$

$$b_{\mathcal{M}} = \frac{q+\mu}{q-1+\mu}\,\mathrm{e}^{\lambda}\,(\mu-1)-\mu,\ c_{\mathcal{L}} = 1-\mu+\frac{q-1+\mu}{\mathrm{e}^{\lambda}},\ c_{\mathcal{R}} = q.$$

График функции $F(x)$ показан на рис. 4. Здесь точки $c_{\mathcal{L}}$ и $c_{\mathcal{R}}$ являются границами, разделяющими области определения функций $F_{\mathcal{L}}(x)$, $F_{\mathcal{M}}(x)$ и $F_{\mathcal{R}}(x)$, и называются многообразиями переключения [21].

Заметим, что разрывное отображение (12) при $\mu > 1-q$ имеет единственную устойчивую неподвижную точку

$$F_{\mathcal{L}}(x) - x = 0, \quad F_{\mathcal{L}} = a\,(x-1+\mu)+1-\mu,$$

отвечающую состоянию равновесия уравнения (1): $x-1+\mu=0$ (рис. 5,a). При $\mu = 1-q$ существует полуустойчивая неподвижная точка: слева она притягивающая, а справа – отталкивающая (рис. 5,$б$). Следовательно, область колебательных движений рассматриваемой системы есть $0<\mu<1-q$.

Прежде чем продолжить, напомним основные понятия [25, 35] и отметим некоторые свойства отображения (13), которые понадобятся в дальнейшем. Для этого перепишем (13) в эквивалентной форме: $x_{k+1} = F(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

- Точка $x_1 = F(x_0)$, в которую отображается за одну итерацию F точка $x_0 \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, называется образом ранга один x_0.
- Любая точка x_0, такая что $F(x_0) = x_1$, называется прообразом ранга один точки x_1, или $x_1 = F^{-1}(x_0)$, где $F^{-1}(x)$ – обратная функция. Образы и прообразы ранга k точки x_0 определяются как $F^k(x_0) = F \circ F \circ \ldots \circ F(x_0)$ и $F^{-k}(x_0) = F^{-1} \circ F^{-1} \circ \ldots \circ F^{-1}(x_0)$, $k = 1, 2, \ldots$. (см. [35]).

- Для каждого $x_0 \in I$ отображение $x_{k+1} = F(x_k)$ определяет некоторую последовательность точек:

$$x_0, F(x_0), F^2(x_0), \ldots, F^k(x_0), \ldots.$$

Эта последовательность называется положительной полутраекторией точки x_0 и обозначается как $\mathcal{O}^+(x_0)$:

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0 \in I : x_0, F^k(x_0), \quad k = 1, 2, \ldots\}.$$

- При определении отрицательной $\mathcal{O}^-(x_0)$ полутраектории могут возникнуть сложности из-за необратимости отображения. Но если взять все прообразы x_0, то

$$\mathcal{O}^-(x_0) = \{x \in I : F^k(x) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

- Если

$$F^m(x_0) - x_0 = 0$$

в $\mathcal{O}^+(x_0)$ при некотором $m > 0$, то x_0 – периодическая точка. Заметим, что если x_0 есть m-периодическая точка, то она является $k\,m$-периодической для любого положительного целого k. Поэтому под m понимается наименьший период [26]. Таким образом, если m – наименьшее положительное целое число, обладающее таким свойством, то m называют периодом цикла.
- Пусть x_0 – периодическая точка. Тогда конечная последовательность различных точек

$$\mathcal{O}_m(x_0) = \{x_0 \in I : x_0,\ F^k(x_0),\ k = 1, 2, \ldots, m-1\},$$
$$F^m(x_0) = x_0,\ F^k(x_0) \neq x_0$$

называется периодической орбитой периода m или m-циклом. В случае $m = 1$ имеем

$$F(x_0) - x_0 = 0.$$

Тогда говорят, что x_0 есть неподвижная точка или 1-цикл отображения. Очевидно, что орбита неподвижной точки состоит из одной точки $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$ [26].
- Если x_0 – периодическая точка периода m, то она является неподвижной точкой функции $F^m(x)$ [26].
- Множество $E \subseteq I$ является инвариантным F, если $F(E) = E$. Это означает, что если $x \in E$, то $F(x) \in E$. Примерами простейших инвариантных множеств являются непродвижная точка и периодическая орбита.

- Цикл периода m называется устойчивым, если

$$\rho(\mathcal{O}_m) = \left| \prod_{k=0}^{m-1} F'(x_k) \right| < 1, \quad x_k = F^k(x_0),$$

где x_k – периодические точки. Величина $\rho(\mathcal{O}_m)$ называется мультипликатором m-цикла [26].
- Если $\rho(\mathcal{O}_m) \neq 1$, то m-цикл называется гиперболическим, в противном случае – негиперболическим.
- Как можно видеть из рис. 4, функция $F(x)$ имеет два локальных экстремума в точках недифференцируемости (рис. 4,*б*): максимум в $x = c_{\mathcal{L}} = 1 - \mu + \frac{q-1+\mu}{e^{\lambda}}$ и минимум в $x = c_{\mathcal{R}} = q$. Точки локальных экстремумов $F(x)$ отображаются в так называемые критические точки [25, 35] $c_0 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}})$, $c_1 = F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}})$, являющиеся образами ранга один точек $c_{\mathcal{L}}$ и $c_{\mathcal{R}}$ соответственно.
- Множество J называется поглощающим, если [25]:
(а) $F(J) \subseteq J$ (т.е. либо J инвариантно $F(J) = J$, либо оно строго отображается само в себя $F(J) \subseteq J$);
(б) существует окрестность $\mathcal{U}$ множества J такая, что для любого $x \in \mathcal{U}$ имеется конечное число $k > 1$ такое, что $F^k(x) \in J$;
(в) J ограничено двумя различными критическими точками или критической точкой и ее образами.
- Как было показано ранее (см. (13) и рис. 4), рассматривается бимодальное кусочно-линейное непрерывное отображение. Для описания орбиты такой системы, следуя [25], можно использовать три символа $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{R}$ («left», «middle », «right»). Тогда орбита $\{x_i = F^i(x_0)\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ описывается последовательностью:

$$\sigma_0\sigma_1\sigma_2 \ \cdots ,$$

где символ σ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ в этой последовательности для каждого $i \geqslant 0$ определяется как

$$\sigma_i = \begin{cases} \mathcal{L}, & x_i < c_{\mathcal{L}}; \\ \mathcal{M}, & c_{\mathcal{L}} < x_i < c_{\mathcal{R}}; \\ \mathcal{R}, & x_i > c_{\mathcal{R}}. \end{cases}$$

Для непрерывных отображений не имеет значения, какой символ использовать для граничных точек (т.е. для точек локальных экстремумов, см. рис. 4) $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ или $\mathcal{R}$, поскольку образы таких точек определяются однозначно.
- Как известно, в кусочно-гладких системах возможны разные типы периодических движений с одинаковым периодом. Поэтому для описания m-периодического движения конкретного типа будем использовать обозначение $O_{\sigma_0\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1}}$.

Л е м м а 1. *Пусть* $c_{\mathcal{L}}$ *и* $c_{\mathcal{R}}$ *– точки локальных экстремумов функции* $F(x)$ (13) *(многообразия переключения). Тогда для критической точки* $c_0 = F(c_{\mathcal{L}})$ *и ее прообраза ранга один справедливы равенства*

$$F(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{R}}, \quad F^{-1}(c_{\mathcal{R}}) = c_{\mathcal{L}}, \tag{14}$$

где $F(\cdot) = F_{\mathcal{L}/\mathcal{M}}(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство леммы 1 состоит в проверке равенств (14). Найдем сначала $F_{\mathcal{L}}^{-1}(x)$ и $F_{\mathcal{M}}^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{L}}^{-1}(x) &= \mathrm{e}^{-\lambda}\,(x-1+\mu)+1-\mu, \\ F_{\mathcal{M}}^{-1}(x) &= \frac{q-1+\mu}{(q+\mu)\,\mathrm{e}^{\lambda}}\,(x+\mu)+1-\mu. \end{aligned} \tag{15}$$

Так как $c_{\mathcal{L}} = 1-\mu+(q-1+\mu)/\mathrm{e}^{\lambda}$ и $c_{\mathcal{R}} = q$, то, подставив выражение для $c_{\mathcal{L}}$ и $c_{\mathcal{R}}$ в левую часть равенств (14), получим

$$F_{\mathcal{L}/\mathcal{M}}(c_{\mathcal{L}}) = q; \quad F_{\mathcal{L}/\mathcal{M}}^{-1}(c_{\mathcal{R}}) = 1-\mu+(q-1+\mu)/\mathrm{e}^{\lambda}.$$

Лемма 1 доказана.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть $\mathcal{O}_m$ *— цикл периода* m. *Если при вариации параметров хотя бы одна из точек* m*-периодической орбиты* $\mathcal{O}_m$ *оказывается на одной из границ* $c_{\mathcal{L}}$ *или* $c_{\mathcal{R}}$ *(т.е.* m*-цикл* $\mathcal{O}_m$ *претерпевает бифуркацию граничного столкновения), то существует другая точка, лежащая на второй границе, так что для этой пары справедливо* (14).

Это означает, что в рассматриваемой системе бифуркации граничного столкновения происходят, когда пара точек периодической орбиты $\mathcal{O}_m$ одновременно сталкивается с двумя многообразиями переключения. Таким образом, в точке бифуракции имеем периодическую орбиту $\mathcal{O}_m = \{x_0, F(x_0), F^2(x_0), \ldots, F^{m-1}(x_0)\}$, $F^m(x_0) - x_0 = 0$, $x_0 = c_{\mathcal{L}}$, $F(x_0) = c_{\mathcal{R}}$, которая может быть гиперболической или негиперболической (в случае вырожденной бифуркации).

3. Бифуркационный анализ и численные эксперименты

В области колебательных движений отображение (13) имеет единственную неподвижную точку $O_{\mathcal{M}} = \{x_*\}$ (1-цикл), принадлежащую промежутку $[c_{\mathcal{L}},\ q]$ (рис. 6,*а*,*б*):

$$x_* = \frac{(q+\mu)\,\mathrm{e}^{\lambda}}{(q+\mu)\,\mathrm{e}^{\lambda}-q+1-\mu} - \mu. \tag{16}$$

Устойчивость $O_{\mathcal{M}}$ определяется неравенством

$$|\rho\,(\mathcal{O}_{\mathcal{M}})\,| < 1, \quad \rho\,(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = \frac{q+\mu}{q-1+\mu}\,\mathrm{e}^{\lambda}.$$

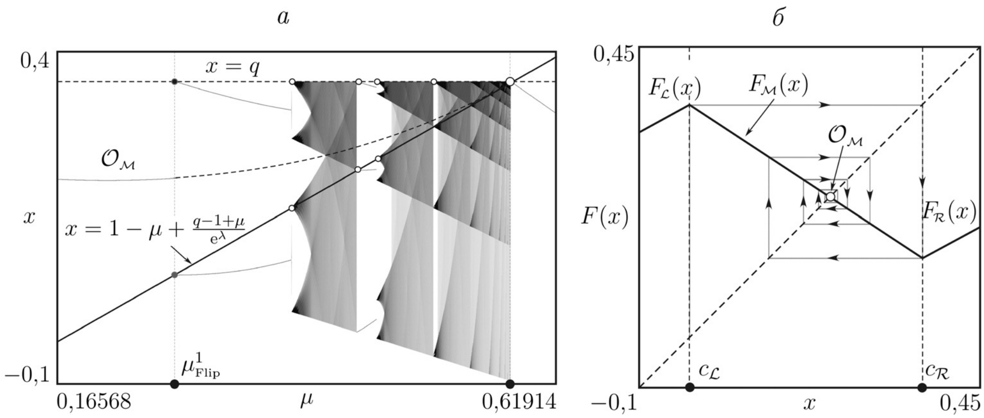

Рис. 6. *а* – Бифуркационная диаграмма. *б* – Устойчивая неподвижная точка при $0 < \mu < \dfrac{1}{1+e^{\lambda}} - q$.

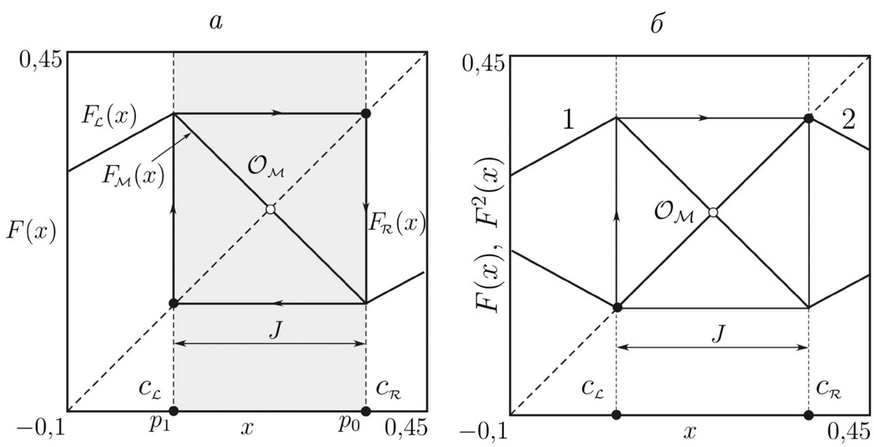

Рис. 7. *а* – Вырожденная бифуркация удвоения периода в точке μ^1_{Flip}. *б* – Графики функций $F(x)$ и $F^2(x)$ в точке бифуркации.

При $\mu = \mu_{\text{Flip}}$ неподвижная точка $O_{\mathcal{M}}$ претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода (рис. 6,*а* и рис. 7,*а*), когда

$$\rho\left(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}\right) = \frac{q+\mu}{q-1+\mu}\, e^{\lambda} = -1.$$

Решив это уравнение относительно μ, получим бифуркационное значение параметра (точку вырожденной бифуркации удвоения периода):

$$\mu^1_{\text{Flip}} = \frac{1}{1+e^{\lambda}} - q.$$

В результате такой бифуркации возникает *негиперболический* цикл $\mathcal{O}_2 = \{p_0,\ p_1\}$ периода 2 с мультипликатором $+1$ (рис. 7,*а*,*б*), для которого

$$F_{\mathcal{R}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{L}}, \quad F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}) = q.$$

Периодические точки p_0, p_1 цикла $\mathcal{O}_2$ в силу леммы 1 (см. рис. 7) равны критическим точкам ранга один $c_0 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{R}}$ и $c_1 = F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}) = c_{\mathcal{L}}$:

$$p_0 = F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}) = q - \frac{1-\mathrm{e}^{\lambda}}{1+\mathrm{e}^{2\lambda}}, \quad p_1 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = q.$$

Причем любая точка $x \in J$, $J = [c_{\mathcal{L}}; c_{\mathcal{R}}] = \left[q - \frac{1-\mathrm{e}^{\lambda}}{1+\mathrm{e}^{\lambda}}; q\right]$, за исключением $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, периодическая с периодом 2.

Действительно (см. рис. 7,*б*), в промежутке $J = \left[q - \frac{1-\mathrm{e}^{\lambda}}{1+\mathrm{e}^{\lambda}};\ q\right]$ имеем:

$$F(x) = -(x - 1 + \mu) + \mu = -x + 1 \quad \text{и} \quad F^2(x) = x.$$

Отсюда в точке $\mu = \mu^1_{\mathrm{Flip}}$

$$F\left([F_{\mathcal{M}}(c_{\mathcal{L}});\ q]\right) = [F_{\mathcal{M}}(c_{\mathcal{L}});\ q],$$

где

$$c_{\mathcal{L}} = q - \frac{1-\mathrm{e}^{\lambda}}{1+\mathrm{e}^{\lambda}}.$$

При переходе параметра μ через μ^1_{Flip} неподвижная точка $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ теряет устойчивость, а негиперболический 2-цикл $\mathcal{O}_2$ становится устойчивым $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}} = \{x_0^{\mathcal{LM}},\ x_1^{\mathcal{LM}}\}$ (см. рис. 8,*а*), где периодические точки есть

$$x_0^{\mathcal{LM}} = -\mu + 1 - \frac{\mathrm{e}^{\lambda}\left(q - 1 + \mu\right)}{q - 1 + \mu - (q+\mu)\mathrm{e}^{2\lambda}},$$
$$x_1^{\mathcal{LM}} = -\mu - \frac{\mathrm{e}^{2\lambda}\left(q + \mu\right)}{q - 1 + \mu - (q+\mu)\mathrm{e}^{2\lambda}}.$$

Цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ устойчив в диапазоне

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\lambda}} - q < \mu < \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\lambda}} - q.$$

При дальнейшем увеличении параметра 2-цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ (рис. 8,*б*) претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода. Бифуркационное значение параметра найдем из условия

$$\rho\left(\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{2\lambda}\left(q + \mu\right)}{q - 1 + \mu} = -1.$$

Отсюда получим

$$\mu^2_{\mathrm{Flip}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\lambda}} - q.$$

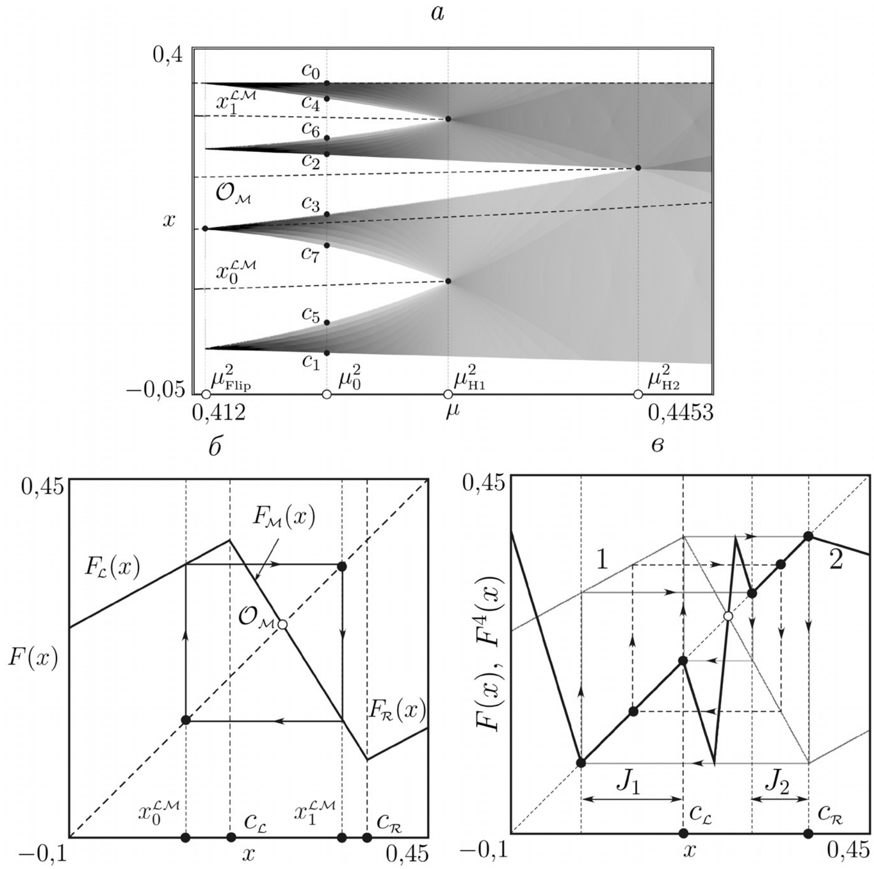

Рис. 8. *а* – Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая вырожденную бифуркацию удвоения периода 2-цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$. *б* – Устойчивый 2-цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}} = \{x_0^{\mathcal{LM}},\ x_1^{\mathcal{LM}}\}$ в области $\mu^1_{\text{Flip}} < \mu < \mu^2_{\text{Flip}}$. *в* – Графики функций $F(x)$ и $F^4(x)$ в точке бифуркации.

Такая бифуркация приводит к возникновению 4-цикла $\mathcal{O}_4$, для которого в точке $\mu = \mu^2_{\text{Flip}}$ справедливо условие

$$F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{R}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{L}}.$$

Как можно видеть из рис. 8,*б*, *в*, если $\mu = \mu^2_{\text{Flip}}$, то периодические точки p_3, p_4 4-цикла $\mathcal{O}_4 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, согласно лемме 1, лежат на многообразиях переключения $c_{\mathcal{L}}$, $c_{\mathcal{R}}$:

$$p_2 = c_{\mathcal{L}} = \frac{\mathrm{e}^{2\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda}}{1 + \mathrm{e}^{2\lambda}} + q, \quad p_4 = c_{\mathcal{R}} = q.$$

Как и в предыдущем случае, все точки $x \in J$, $J = J_1 \bigcup J_2$, за исключением периодических точек 2-цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$, являются периодическими с периодом 4 (см. рис. 8,*б*). Здесь $J_1 = [F_{\mathcal{R}}(q),\ q]$, $J_1 = [F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{R}}(q),\ q]$.

При $\mu > \mu^2_{\text{Flip}}$ из негиперболического 4-цикла $\mathcal{O}_4$ возникает четырехполосный хаотический аттрактор (рис. 9,*а*), который существует в промежутке

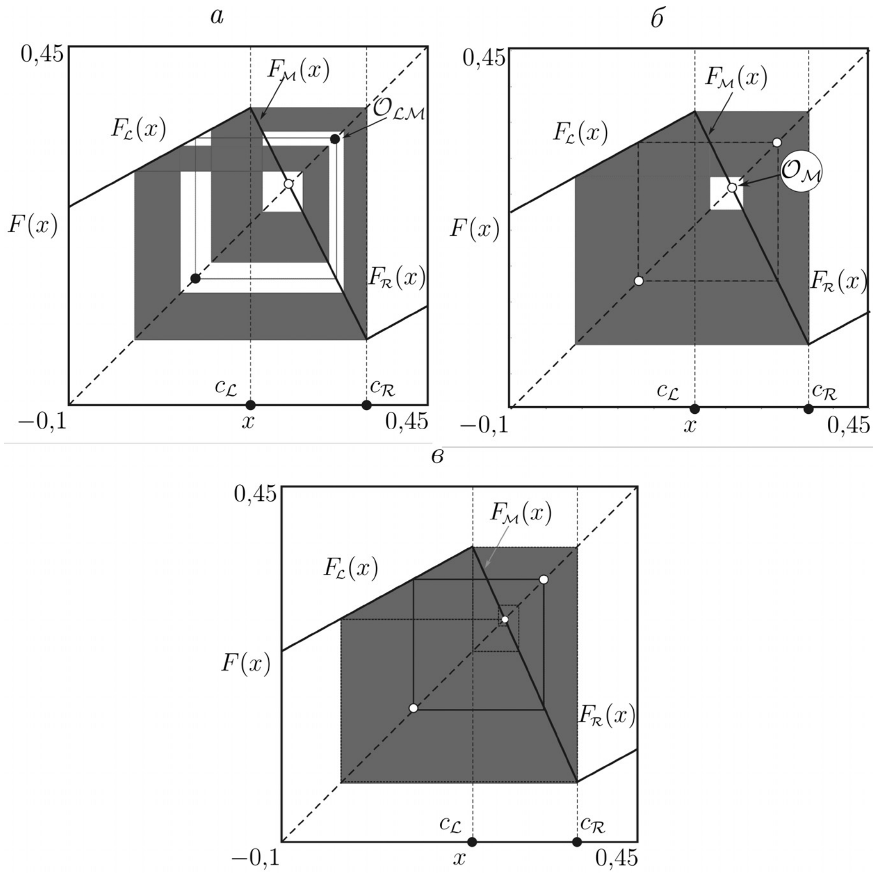

Рис. 9. *а* – Четырехполосный (4-band) хаотический аттрактор. *б* – Переход от четырехполосного хаотического аттрактора в двухполосный в точке μ^2_{H1} через гомоклиническую бифуркацию неустойчивого 2-цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{L}\mathcal{M}}$. *в* – Переход от двухполосного хаотического аттрактора в однополосный в точке μ^2_{H2} через гомоклиническую бифуркацию неустойчивой неподвижной точки $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$.

$\mu^2_{\text{Flip}} < \mu < \mu^2_{H1}$ (рис. 8,*а*). В точке $\mu = \mu^2_{H1}$ четырехполосный хаотический аттрактор переходит в двухполосный через так называемую бифуркацию «слияния» («merging»), связанную с гомоклинической бифуркацией неустойчивого 2-цикла $Q_{\mathcal{L}\mathcal{M}} = \left\{x_0^{\mathcal{L}\mathcal{M}}, x_1^{\mathcal{L}\mathcal{M}}\right\}$ (рис. 8,*а*).

Определение 1. *Предположим, что хаотический аттрактор $\mathcal{A}_k$ состоит из k полос, $k > 2$, и существует неустойчивый m-цикл $\mathcal{O}_m$, $m < k$ с отрицательным мультипликатором, расположенный на границе непосредственного бассейна притяжения A_k. Бифуркация «слияния» возникает, если при некотором значении параметра аттрактор $\mathcal{A}_k$ сталкивается с m-циклом $\mathcal{O}_m$ и полосы хаотического аттрактора, контактирующие с циклом $\mathcal{O}_m$, попарно сливаются* [25].

Поскольку границы хаотического аттрактора образованы критическими точками и их образами, то в момент бифуркации цикл $\mathcal{O}_m$ сталкивается с некоторыми из них. Это приводит к появлению гомоклинической орбиты $\mathcal{O}_m$, которая является критической в момент бифуркации. Соответственно, цикл $\mathcal{O}_m$ претерпевает гомоклиническую бифуркацию. Поскольку $\mathcal{O}_m$ является негомоклиническим до бифуркации, то он обязательно становится двусторонним гомоклиническим после, так как цикл с отрицательным мультипликатором не может быть односторонним гомоклиническим [25, 29].

Известно, что в кусочно-гладких непрерывных отображениях, когда хаотический аттрактор $\mathcal{A}_k$, имеющий $k = 2m$ полос перед бифуркацией, сталкивается с m-циклом $\mathcal{O}_m$, то все полосы сливаются попарно и их количество после бифуркации уменьшается вдвое [25, 29].

На рис. 8,*a* и 9,*a*, *б* показан переход от четырехполосного хаотического аттрактора к двухполосному. В данном переходе участвует неустойчивый 2-цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}} = \{x_0^{\mathcal{LM}},\ x_1^{\mathcal{LM}}\}$ (см. рис. 8,*a*) с отрицательным мультипликатором

$$\rho\left(\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}\right) = \frac{(q+\mu)}{q-1+\mu}\,\mathrm{e}^{2\lambda} < -1.$$

До бифуркации цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ не является гомоклиническим. При увеличении μ от значения $\mu^2_{\mathrm{Flip}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\lambda}} - q$ полосы аттрактора $\mathcal{A}_4$ растут (см. рис. 8,*a*), а затем в точке μ^2_{H1} сливаются попарно, сталкиваясь с периодическими точками $x_0^{\mathcal{LM}}$ и $x_1^{\mathcal{LM}}$ (см. рис. 8,*a*).

Как показано на рис. 8,*a* (см. также 9,*б*), верхняя граница аттрактора $\mathcal{A}_4$ равна $c_0 = q = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}})$, нижняя – $c_1 = F_{\mathcal{R}}(q)$. Следующие границы есть $c_2 = F_{\mathcal{L}}(c_1)$, $c_3 = F_{\mathcal{L}}(c_2)$, $c_4 = F_{\mathcal{M}}(c_3)$, $c_5 = F_{\mathcal{M}}(c_4)$, $c_6 = F_{\mathcal{L}}(c_7)$ и $c_7 = F_{\mathcal{M}}(c_6)$.

Бифуркационное значение параметра можно найти из условия, когда периодические точки $x_0^{\mathcal{LM}}$, $x_1^{\mathcal{LM}}$ цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ совпадают с критическими точками, определяющими соответствующие границы аттрактора. Таким образом, бифуркационное значение параметра можно найти, решив любое из уравнений

$$x_1^{\mathcal{LM}} = c_4, \quad x_1^{\mathcal{LM}} = c_6, \quad x_0^{\mathcal{LM}} = c_5, \quad x_0^{\mathcal{LM}} = c_7.$$

Первое уравнение содержит критическую точку самого низкого ранга. Поэтому оно и было использовано для нахождения бифуркационного значения параметра. Это уравнение имеет вид

$$\frac{a^4(q+\mu)^3}{(q-1+\mu)^2} - \frac{a^8(q+\mu)^5}{(q-1+\mu)^4} - \frac{a^3(q+\mu)^2}{(q-1+\mu)^2} - \frac{a^6(q+\mu)^4}{(q-1+\mu)^4} - \\ - \frac{a(q+\mu)}{q-1+\mu} - \frac{a^4(q+\mu)^3}{(q-1+\mu)^3} + \frac{a^2(q+\mu)^3}{q-1+\mu} - 1 + a = 0, \quad a = \mathrm{e}^{\lambda}.$$

и, решив его численно относительно μ, получим μ^2_{H1}.

При дальнейшем увеличении параметра двухполосный хаотический $\mathcal{A}_2$ аттрактор переходит в одноплоосный $\mathcal{A}_1$, когда в точке μ^2_{H2} (рис. 8,*a* и рис. 9,*в*)

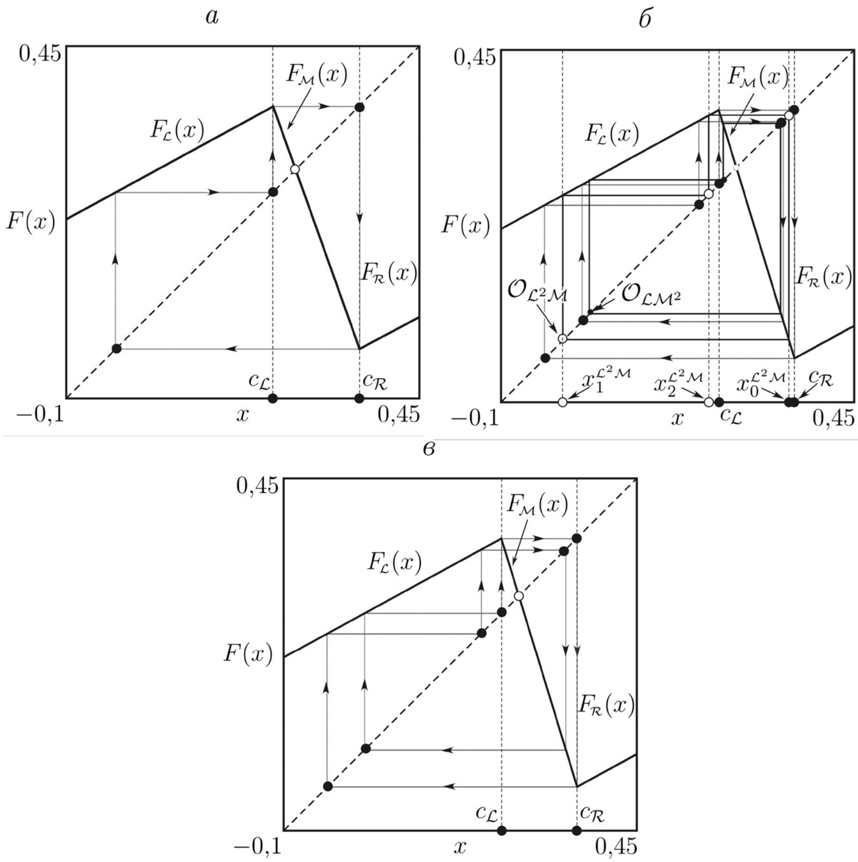

Рис. 10. *а* – Негиперболический 3-цикл с мультипликатором +1, возникающий через бифуркацию граничного столкновения («border-collision fold»). *б* – Вырожденная бифуркация удвоения периода 3-цикла $O_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$. *в* – Негиперболический 6-цикл, возникающий через вырожденную бифуркацию удвоения периода.

полосы хаотического аттрактора сливаются попарно, сталкиваясь с неподвижной точкой $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$. Бифуркационное значение параметра можно найти, решив любое из двух уравнений

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}} = c_3, \quad \mathcal{O}_{\mathcal{M}} = c_7.$$

Из первого уравнения находим:

$$e^{2\lambda}\,(q+\mu)^2 + q + \mu - 1 = 0,$$

положительный корень которого соответствует второй точке бифуркации слияния

$$\mu_{H2}^2 = -\frac{1}{2e^{\lambda}}\left(1 - \sqrt{1+4e^{2\lambda}}\right).$$

В точке μ^3_{BCB} возникают устойчивый и неустойчивый 3-циклы через бифуркацию граничного столкновения (рис. 10,*а*):

$$\mu^3_{\mathrm{BCB}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{2\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{3\lambda}} - q.$$

При $\mu > \mu^3_{\mathrm{BCB}}$ существуют два 3-цикла – устойчивый $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ с отрицательным мультипликатором и неустойчивый $\mathcal{O}_{\mathcal{L}\mathcal{M}^2}$ с положительным мультипликатором, периодические точки которых удовлетворяют уравнениям

$$F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}}(x) - x = 0, \quad F_L \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{M}}(x) - x = 0.$$

Решив эти уравнения, находим $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ и $\mathcal{O}_{\mathcal{L}\mathcal{M}^2}$.

Область устойчивости 3-цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$:

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{2\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{3\lambda}} - q < \mu < \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{3\lambda}} - q.$$

В точке

$$\mu = \mu^3_{\mathrm{Flip}} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{3\lambda}} - q$$

цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода. Как и в предыдущих случаях, две периодические точки 6-цикла одновременно сталкиваются с двумя многообразиями переключения (рис. 10,*б*,*в*):

$$F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{R}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{L}}.$$

При переходе через μ^3_{Flip} возникает шестиполосный хаотический аттрактор, который переходит в трехполосный через гомоклиническую бифуркацию (рис. 11,*а*,*б*), когда полосы хаотического аттрактора (см. рис. 8,*а*), сливаются попарно при $\mu = \mu^3_{\mathrm{H1}}$, сталкиваясь с периодическими точками $\{x_0^{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}, x_1^{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ и $x_2^{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}\}$ неустойчивого 3-цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ с отрицательным мультипликатором

$$\rho\left(\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}\right) = \frac{(q+\mu)^3}{(q-1+\mu)^3}\,\mathrm{e}^{3\lambda} < -1.$$

При дальнейшем увеличении параметра в точке μ^3_{H2} происходит так называемая бифуркация «расширения» («expansion bifurcation» [25, 29]) (см. рис. 11,*а* и *в*).

Определение 2. Предположим, что хаотический аттрактор A_k состоит из k полос, $k > 1$, и существует неустойчивый m-цикл $\mathcal{O}_m$, $m > 1$ с положительным мультипликатором, расположенный на границе непосредственного бассейна A_k. Бифуркация «расширения» («expansion») возникает, если при некотором значении параметра аттрактор A_k сталкивается с циклом $\mathcal{O}_m$ и резко увеличивается в размерах [25, 29].

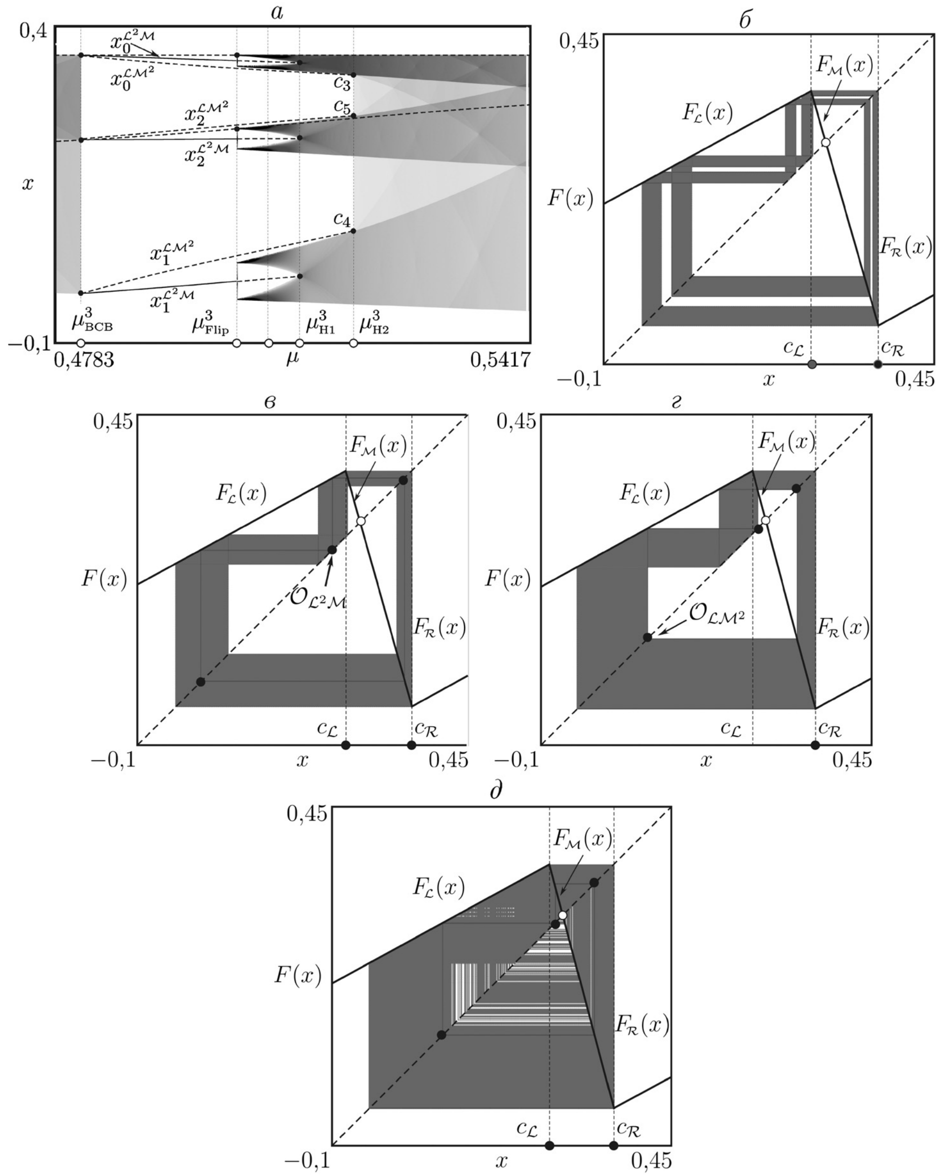

Рис. 11. *а* – Диаграмма, иллюстрирующая бифуркации «слияния» и «расширения». *б* – Шестиполосный (6-band) хаотический аттрактор. *в* – Переход от шестиполосного хаотического аттрактора в трехполосный в точке μ^3_{H1} через гомоклиническую бифуркацию неустойчивого 3-цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$. *г*, *д* – Переход от трехполосного хаотического аттрактора в однополосный в точке μ^3_{H2} через гомоклиническую бифуркацию неустойчивого 3-цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{L}\mathcal{M}^2}$.

Как и в предыдущем случае, такая бифуркация приводит к появлению гомоклинической орбиты для $\mathcal{O}_m$, которая является критической в момент бифуркации. Отличие состоит в том, что до бифуркации цикл $\mathcal{O}_m$ может быть либо односторонним гомоклиническим, либо негомоклиническим. После бифуркации $\mathcal{O}_m$ становится двусторонним гомоклиническим [25].

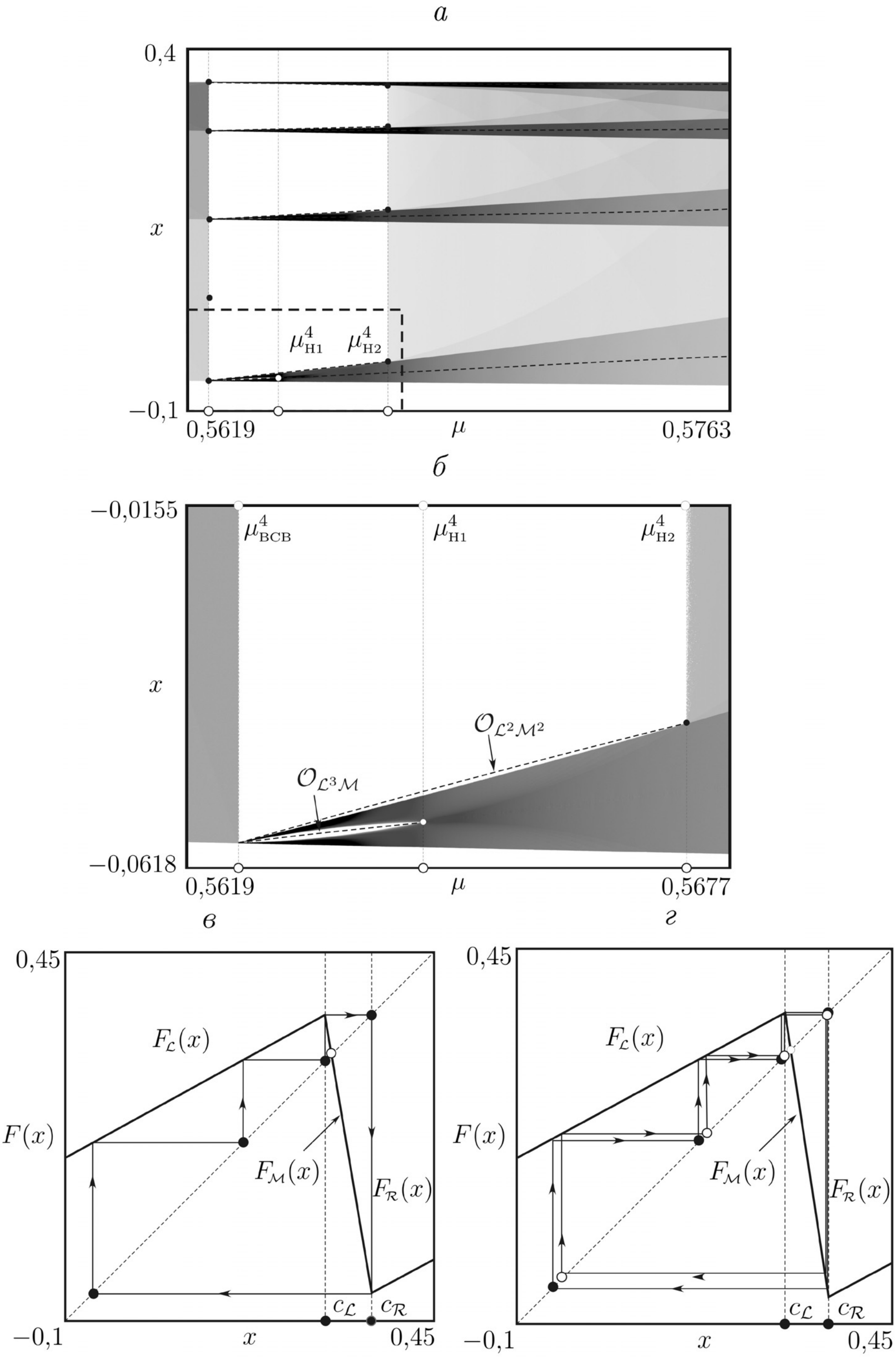

Рис. 12. *а* – Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая бифуркации «слияния» и «расширения». *б* – Увеличенный фрагмент диаграммы, выделенный пунктирным прямоугольником. *в*, *г* – Рождение неустойчивых 4-циклов через бифуркацию граничного столкновения.

При увеличении μ трехполосный хаотический аттрактор сталкивается в точке μ^3_{H2} с неустойчивым 3-циклом $O_{\mathcal{LM}^2}$ с положительным мультипликатором

$$\rho\left(\mathcal{O}_{\mathcal{LM}^2}\right) = \frac{(q+\mu)^2}{(q-1+\mu)^2}\,\mathrm{e}^{3\lambda} > 1.$$

Как отмечалось выше, после бифуркации 3-цикл $O_{\mathcal{LM}^2}$ является двусторонним гомоклиническим и хаотический A_3 аттрактор состоит только из одной полосы (рис. 11,∂).

Как можно видеть из рис. 11,a, для вычисления бифуркационного значения параметра можно решить любое из следующих уравнений:

$$x_0^{\mathcal{LM}^2} = c_1, \quad x_1^{\mathcal{LM}^2} = c_2, \quad x_2^{\mathcal{LM}^2} = c_4.$$

Первое уравнение содержит образ критической точки самого низкого ранга и, следовательно, является самым простым для решения. Точка бифуркации «расширения» μ^3_{H2} находилась численно из уравнения

$$\frac{a^3(q+\mu)^2 + a^2(q+\mu)(q-1+\mu)}{(q-1+\mu)^2 - a^3(q+\mu)^2} = a^3(q+\mu) - a^2 + 1.$$

На рис. 12 показан еще один переход. В точке μ^4_{BCB} возникают два неустойчивых 4-цикла – с положительным и отрицательным мультипликатором (рис. 12,a) через бифуркацию граничного столкновения («border-collision fold»), когда две точки 4-цикла сталкиваются одновременно с двумя многообразиями переключения.

$$\mu^4_{\text{BCB}} = \frac{1-\mathrm{e}^{3\lambda}}{1-\mathrm{e}^{4\lambda}} - q.$$

При увеличении μ цикл периода 4 с отрицательным мультипликатором претерпевает бифуркацию «слияния» в точке μ^4_{H1}, а 4-цикл с положительным мультипликатором – бифуркацию «расширения» в точке μ^4_{H2} (рис. 12,$б$).

4. Выводы

В данной статье представлены результаты исследований бифуркаций граничного столкновения («border-collision bifurcations») в кусочно-гладком отображении, описывающем поведение импульсной системы автоматического управления.

Показано, что такое отображение в области колебательных движений является кусочно-линейным непрерывным. Известно, что в кусочно-линейных отображениях классические бифуркации, например бифуркация удвоения периода, касательная и вилообразная бифуркации, становятся вырожденными («degenerate bifurcations»), сочетая свойства как гладких, так и бифуркаций граничного столкновения.

Выявлено необычное свойство рассматриваемого класса импульсных систем, состоящее в том, что бифуркации граничного столкновения коразмерности один, включая и вырожденные, происходят, когда пара точек периодической орбиты одновременно сталкивается с двумя многообразиями переключения. Насколько известно авторам, этот случай не изучался ранее в общей теории бифуркаций негладких систем. Вопрос, связан ли описанный феномен со свойством конкретной системы, остается открытым.

Вторая часть работы посвящена исследованию бифуркаций «слияния» («merging»)и «расширения» («expansion») [25, 29] хаотических аттракторов в импульсных системах. Этот важный класс нелокальных бифуркаций, известный еще как кризисы хаотических аттракторов («merging crisis», «interior crisis», «boundary crisis» [32–34]) в импульсных системах, остается практически неизученным.

Особый интерес представляют механизмы, при которых хаотический аттрактор претерпевает внезапные изменения. Хаотический аттрактор может внезапно исчезнуть из-за «граничного кризиса» («boundary crisis») или внезапно измениться в размерах из-за «внутреннего кризиса» («interior crisis») [32–34]. В представленной работе изучен «внутренний кризис».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розенвассер Е.Н.* Периодически нестационарные системы управления. М.: Наука, 1973.
2. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с раззрывной правлй частью. М.: Наука, 1985.
3. *Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.* Периодические режимы в широтно-импульсных системах // АиТ. 1986. № 11. С. 37–44.
4. *Каретный О.Я, Кипнис М.М.* Периодические режимы работы широтно-импульсных систем управления. I // АиТ. 1987. № 11. С. 46–54.
5. *Каретный О.Я, Кипнис М.М.* Периодические режимы работы широтно-импульсных систем управления. II // АиТ. 1987. № 12. С. 42–48.
6. *Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.* Исследование Ω-периодических режимов в широтно-импульсных системах // АиТ. 1989. № 2. С. 30–39.
7. *Кипнис М.М.* Хаотические явления в детерминированной одномерной широтно-импульсной систе управления // Техническая киберненика. 1992. № 1. С. 108–112.
8. *Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: Изд-во СПб. ун-та., 1993.
9. *Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т.* О недетерминированных режимах функционирования стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // Электричество. 1992. № 8. С. 47–53.
10. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // АиТ. 2003. № 5. С. 3–45.

11. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: методы и приложения. II. Приложения // АиТ. 2004. № 4. С. 3–34.

12. *Nusse H.E., Yorke J.A.* Border-Collision Bifurcations Including “Period Two to Period Three” for Piecewise Smooth Systems // Physica D. 1992. V. 57. No. 1–2. P. 39–57.

13. *Фейгин М.И.* Удвоение периода колебаний при С-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 861–869.

14. *Фейгин М.И.* Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.

15. *Di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E.* Local Analysis of C-bifurcations in n-Dimensional Piecewise-Smooth Dynamical Systems // Chaos, Solitons and Fractals, 1999. V. 19. No. 11. P. 1881–1908.

16. *Kapitaniak T., Maistrenko Yu.* Multiple Choice Bifurcations as a Source of Unpredictability in Dynamical Systems // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 5161–5163.

17. *Dutta M., Nusse H., Ott R., Yorke J., Yuan G.* Multiple Attractor Bifurcations: A Source of Unpredictability in Piecewise Smooth Systems // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4281–4284.

18. *Nordmark A.B.* Non-Periodic Motion Caused by Grazing Incidence in An Impact Oscillator // J. Sound Vib. 1991. V. 145. P. 279–297.

19. *Banerjee S., Verghese C.C. (Eds.)* Nonlinear Phenomena in Power Electronis. New York: IEEE Press, 2001.

20. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003.

21. *Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P.* Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. London: Springer-Verlag, 2008.

22. *Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P., Nordmark A.B, Tost G.O., Piiroinen P.T.* Bifurcations in Nonsmooth Dynamical Systems // SIAM Review. 2008. V. 50. P. 629–701.

23. *Avrutin V., Mosekilde E., Zhusubaliyev Zh. T., Gardini L.* Onset of Chaos in a Single-Phase Power Electronic Inverter // Chaos. 2015. No. 25. P. 043114-1–043114-14.

24. *Simpson D.J.W.* Border-Collision Bifurcations in R^N // SIAM Review. 2016. V. 58. P. 177–226.

25. *Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F.* Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures. Singapore: World Scientific, 2019.

26. *Kuznetsov Yu.A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. New York: Springer-Verlag, 2004.

27. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва–Ижевск: Инс-т компьют. исслед., 2003.

28. *Sushko I., Gardini L.* Degenerate Bifurcations and Border Collisions in Piecewise smooth 1D and 2D Maps // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2010. V. 20. No. 7. P. 2045–2070.

29. *Avrutin V., Gardini L., Schanz M., Sushko I.* Bifurcations of Chaotic Attractors in One-Dimensional Maps // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2014. V. 24. P. 1440012.

30. *Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin V., Bastian F.* Transformations of Closed Invariant Curves and Closed-Invariant-Curve-Like Chaotic Attractors in Piecewise Smooth Systems // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2021. V. 31. No. 3. P. 2130009.

31. *Avrutin V., Panchuk A., Sushko I.* Border Collision Bifurcations of Chaotic Attractors in One-Dimensional Maps with Multiple Discontinuities // Proc. Roy. Soc. A. 2021, V. 477. P. 20210432.

32. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Chaotic Attractors in Crisis // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1507–1510.

33. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.* Crisis: Sudden Changes in Chaotic Attractors and Transient Chaos // Physica D. 1983. V. 7. P. 181.

34. *Grebogi C., Ott E., Romeiras F., Yorke J.A.* Critical Exponents for Crisis-Induced Intermittency // Phys. Rev. A . 1987. V. 36. No. 11. P. 5365–5380.

35. *Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J.C.* Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps. Singapore: World Scientific, 1996.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 26.09.2022

После доработки 07.12.2023

Принята к публикации 30.12.2023