Автоматика и телемеханика, № 2, 2024

Нелинейные системы

© 2024 г. А.В. АРУТЮНОВ, д-р физ.-мат. наук (arutyunov@cs.msu.ru),
С.Е. ЖУКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (s-e-zhuk@yandex.ru),
К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ λ-УКОРОЧЕНИЙ[1]

Рассматриваются конечномерные и бесконечномерные задачи оптимизации при наличии ограничений общего вида. Получены достаточные условия устойчивости строгого решения и условия устойчивости множества решений, состоящего более чем из одной точки, относительно малых возмущений параметров задачи. В конечномерном случае получены условия устойчивости решений экстремальных задач с ограничениями типа равенств на основе конструкции λ-укорочений отображений.

Ключевые слова: абстрактные задачи оптимизации, экстремальные задачи с ограничениями, устойчивость решения.

DOI: 10.31857/S0005231024020014, **EDN:** UMNFFU

1. Введение

В теории и практике решения экстремальных задач зачастую приходится иметь дело с неопределенными параметрами, участвующими в формировании оптимизируемого функционала и/или ограничений задачи. В связи с этим значительный объем исследований в последние десятилетия был направлен на изучение зависимости решений экстремальных задач от этих параметров. Ключевым является вопрос о том, насколько сильно изменится решение данной экстремальной задачи (в предположении, что оно существует) при «малом» изменении параметров относительно некоторых заданных значений. В случае таких же «малых» изменений решения говорят о его устойчивости, а относительная величина этих изменений обычно характеризуется как чувствительность решения к малым изменениям параметров [1].

Абстрактные задачи оптимизации с ограничениями при наличии неопределенных параметров и устойчивость их решений рассматривались ранее

[1] Лемма 1 и теорема 1 доказаны С.Е. Жуковским за счет средств проекта Российского научного фонда № 20-11-20131 (https://rscf.ru/project/20-11-20131) в ИПУ РАН. Теорема 2 доказана К.А. Царьковым за счет средств проекта Российского научного фонда № 22-11-00042 (https://rscf.ru/project/22-11-00042) в ИПУ РАН.

в [2, 3], а также являются предметом изложения в [4]. Основы теории чувствительности для конечномерных задач с ограничениями подробно изложены в [1]. Значительное число результатов об устойчивости решений оптимизационных задач с ограничениями получено при выполнении дополнительных условий регулярности, см., например, последние результаты, касающиеся условия регулярности Робинсона [5, 6]. Анализ устойчивости в отсутствие подобных дополнительных предположений до сих пор остается нетривиальной задачей [7]. В то же время вопрос оценки чувствительности решений является актуальным для широкого класса конечномерных экстремальных задач и задач оптимального управления при наличии неопределенных и случайных параметров [8].

В настоящей работе рассматривается задача минимизации при наличии ограничений общего вида

$$f(x,\sigma) \to \inf, \quad x \in \Phi(\sigma)$$

с параметром σ, к которой естественным образом сводится и параметризованная задача максимизации. В разделах 2, 3 предполагается, что переменная x принимает значения в произвольном банаховом пространстве, параметр σ — в топологическом пространстве, а функция f и многозначное отображение Φ удовлетворяют лишь естественным требованиям непрерывности. В этих предположениях получены достаточные условия устойчивости строгого решения x_0 рассматриваемой задачи при некотором фиксированном значении параметра $\sigma = \sigma_0$ (лемма 1). В разделе 4 полученный результат обобщается на случай, когда минимум задачи при $\sigma = \sigma_0$ достигается не в единственной точке, а на целом подмножестве множества $\Phi(\sigma_0)$ (лемма 2). В разделе 5 при помощи конструкции λ-укорочений [9] результаты конкретизированы для конечномерной задачи с ограничениями типа равенств.

2. Основные конструкции и предположения

Пусть заданы банахово пространство X и точка $x_0 \in X$. Через $B_r(x_0) \subset X$ будем обозначать замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0.

Пусть $R > 0$ – некоторый фиксированный радиус и даны непустые замкнутые множества $\Phi(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$, где Σ – заданное топологическое (в частности метрическое) пространство. При этом $\Phi(\sigma) \subset B_R(x_0)$ $\forall \sigma \in \Sigma$.

Рассмотрим задачу

$$f(x,\sigma) \to \inf, \quad x \in \Phi(\sigma) \tag{1}$$

при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$, играющем роль параметра. Здесь $f(\cdot,\sigma)$ – заданные непрерывные на $B_R(x_0)$ функции.

Множества $\Phi(\sigma)$ имеют следующий смысл. Как правило, они заданы в виде $\Phi(\sigma) = \{x \in X : F(x,\sigma) \in C(\sigma)\} \cap B_R(x_0)$. Здесь $F : X \times \Sigma \to Y$ – заданное непрерывное отображение, а $C(\sigma) \subset Y$ – заданные непустые замкнутые множества, которые определяют ограничения задачи (1), Y – нормированное пространство. Если же рассматривается задача без ограничений, то $\Phi(\sigma) \equiv \equiv B_R(x_0)$.

Пусть задана точка $\sigma_0 \in \Sigma$, в которой выполнена первая аксиома счетности, т.е. существует счетная определяющая последовательность окрестностей точки σ_0 (например, σ_0 – произвольная точка в случае метрического пространства Σ). Из совокупности задач (1) отдельно выделим для рассмотрения задачу

$$f(x) := f(x, \sigma_0) \to \inf, \quad x \in \Phi(\sigma_0). \tag{2}$$

Предположим, что функции $f(\cdot, \sigma)$ сходятся к $f = f(\cdot, \sigma_0)$ при $\sigma \to \sigma_0$ равномерно на $B_R(x_0)$. Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $O(\sigma_0) \subset \Sigma$ точки σ_0, что

$$|f(x, \sigma) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in B_R(x_0) \quad \forall \sigma \in O(\sigma_0). \tag{3}$$

Будем предполагать, что при каждом σ инфимум в задаче (1) конечен. Пусть также $x_0 \in \Phi(\sigma_0)$, причем x_0 является строгим решением задачи (2), т.е.

$$f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in \Phi(\sigma_0) : x \neq x_0. \tag{4}$$

Введем два предположения относительно функции $f = f(\cdot, \sigma_0)$. Первое из них заключается в том, что существует неубывающая функция $\delta : \mathbb{R}+ \to \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, для которой $\delta(0) = 0$, $\delta(r) > 0$ при $r > 0$ и выполняется

$$f(x) \geqslant f(x_0) + \delta(\|x - x_0\|) \quad \forall x \in \Phi(\sigma_0). \tag{5}$$

Второе предположение заключается в том, что

$$x \in \Phi(\sigma), \quad \widetilde{x} \in \Phi(\sigma_0), \quad \|x - \widetilde{x}\| \to 0, \quad \sigma \to \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geqslant f(\widetilde{x}) - 1(\sigma), \tag{6}$$

где $1(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \neq \sigma_0$ и $1(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \sigma_0$. Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие окрестность $O(\sigma_0) \subset \Sigma$ точки σ_0 и число $\gamma > 0$, что при всех $\sigma \in O(\sigma_0)$ имеет место

$$x \in \Phi(\sigma), \quad \widetilde{x} \in \Phi(\sigma_0), \quad \|x - \widetilde{x}\| < \gamma \quad \Rightarrow \quad f(x) \geqslant f(\widetilde{x}) - \varepsilon.$$

Следующее предположение касается многозначного отображения $\Phi : \Sigma \rightrightarrows B_R(x_0)$. А именно, будем предполагать, что оно полунепрерывно сверху в точке σ_0, т.е.

$$\Phi(\sigma) \subset \Phi(\sigma_0) + B_{1(\sigma)}(0) =: B_{1(\sigma)}(\Phi(\sigma_0)) \quad \text{при} \quad \sigma \to \sigma_0. \tag{7}$$

Здесь функция $1(\sigma)$ такая же, как и в условии (6), символ + означает сумму множеств по Минковскому (подробнее о многозначных отображениях см., например, [10, глава 1] или [11, §2.3]).

3. Устойчивость решения экстремальной задачи

Положим $x(\sigma_0) = x_0$. Пусть на Σ задана неотрицательная скалярная функция ψ такая, что $\psi(\sigma) \to \psi(\sigma_0) = 0$ при $\sigma \to \sigma_0$ и при любом $\sigma \in \Sigma$, $\sigma \neq \sigma_0$, существует $x(\sigma) \in \Phi(\sigma)$, для которого имеет место

$$f(x(\sigma), \sigma) \leqslant f(x, \sigma) + \psi(\sigma) \quad \forall x \in \Phi(\sigma). \tag{8}$$

Указанная функция ψ существует всегда. В самом деле, если пространство X конечномерно, то решение $x(\sigma)$ задачи (1) минимизации непрерывной функции на компактном множестве $\Phi(\sigma)$ существует и можно положить $\psi = 0$. Пусть теперь банахово пространство X бесконечномерно. Тогда при любом $\psi(\sigma) > 0$, $\sigma \neq \sigma_0$, поскольку инфимум в задаче (1) конечен, то ее решение существует, но уже с точностью до ψ. Поэтому найдется $x(\sigma)$, для которого выполняется условие (8).

Определение 1. Решение x_0 экстремальной задачи (2) *называется устойчивым, если для любых точек $x(\sigma) \in \Phi(\sigma)$, $\sigma \neq \sigma_0$, удовлетворяющих условию* (8), *имеет место*

$$x(\sigma) \to x_0 \quad \textit{при} \quad \sigma \to \sigma_0.$$

Спрашивается, когда решение x_0 задачи (2) является устойчивым? Один из ответов на этот вопрос приведен ниже.

Лемма 1. Пусть $\varphi(\sigma_0) := x_0$ и для любого $\sigma \neq \sigma_0$ существует $\varphi(\sigma) \in \Phi(\sigma)$ такое, что

$$\varphi(\sigma) \to x_0 \quad \textit{при} \quad \sigma \to \sigma_0. \tag{9}$$

Пусть, кроме того, точка x_0 является строгим решением задачи (2), *а также выполняются условия* (3), (5)–(7). *Тогда решение x_0 задачи* (2) *устойчиво.*

Доказательство леммы 1. Не теряя общности, будем считать, что $x_0 = 0$ и $f(0) = 0$. Предположим, что утверждение леммы нарушается. В силу первой аксиомы счетности это означает, что существуют такие последовательности $\{\sigma_i\}$ и $\{x_i\}$, что $\sigma_i \to \sigma_0$, $\forall i\ x_i = x(\sigma_i) \in \Phi(\sigma_i)$, выполняется (8) и последовательность $\{x_i\}$ к нулю не сходится. Следовательно, существует такое число ε, что $0 < 2\varepsilon < R$ и, после перехода к подпоследовательности, имеем $\|x_i\| \geqslant 2\varepsilon$ для всех i.

В силу (7) существуют такие точки $\widetilde{x}_i \in \Phi(\sigma_0)$, что

$$\|x_i - \widetilde{x}_i\| \to 0. \tag{10}$$

Значит, при всех достаточно больших i имеем $\|\widetilde{x}_i\| \geqslant \varepsilon$. Отсюда в силу предположения (5) имеет место $f(\widetilde{x}_i) \geqslant \delta(\|\widetilde{x}_i\|) \geqslant \delta(\varepsilon) > 0$, т.е. существует такое $\delta_0 = \delta(\varepsilon)/2 > 0$, что $f(\widetilde{x}_i) \geqslant 2\delta_0$ для всех достаточно больших i. Но тогда в силу (6) и (10) имеем $f(x_i) \geqslant f(\widetilde{x}_i) - \delta_0/2 \geqslant \frac{3}{2}\delta_0$ для всех достаточно больших i. Следовательно, поскольку в силу (3) функции $f_i := f(\cdot, \sigma_i)$ сходятся равномерно к функции f на $B_R(0)$, то при всех достаточно больших i имеет место $f_i(x_i) \geqslant \delta_0$.

Положим $\varphi_i = \varphi(\sigma_i)$ и $\psi_i = \psi(\sigma_i)$. В силу (9) $\varphi_i \to 0$, а в силу свойств функции ψ имеем $\psi_i \to 0$, $i \to \infty$. Поэтому в силу (3) существует такое натуральное i_0, что для всех $i \geqslant i_0$ выполняется

$$|f_i(x) - f(x)| + \psi_i \leqslant \frac{\delta_0}{4} \quad \forall x \in B_R(0). \tag{11}$$

Из непрерывности f, увеличивая при необходимости натуральное i_0, получаем

$$f(\varphi_i) \leqslant \frac{\delta_0}{4}, \quad i \geqslant i_0. \tag{12}$$

При $i \geqslant i_0$ в силу (8) для произвольного $x \in \Phi(\sigma_i)$ имеет место $f_i(x_i) \leqslant$ $\leqslant f_i(x) + \psi_i$. В частности, при $x = \varphi_i \in \Phi(\sigma_i)$ получаем, что для всех достаточно больших i выполняется

$$f_i(x_i) \leqslant f_i(\varphi_i) + \psi_i = \Big(f_i(\varphi_i) - f(\varphi_i) + \psi_i\Big) + f(\varphi_i) \leqslant \frac{\delta_0}{4} + f(\varphi_i) \leqslant \frac{\delta_0}{2}.$$

Здесь предпоследнее неравенство вытекает из (11), а последнее – из (12).

Итак, доказано, что $f_i(x_i) \leqslant \delta_0/2$ при всех больших i. Но по построению имеем $f_i(x_i) \geqslant \delta_0 > 0$, т.е. получено противоречие. Лемма доказана.

Обсудим условия устойчивости решения x_0 задачи (2), фигурирующие в лемме 1. Начнем с предположения (5). Как показывает следующий пример, в конечномерном пространстве X оно всегда выполняется, если выполняется (4).

Пример 1. Пусть банахово пространство X конечномерно, а x_0 является строгим минимумом функции f на множестве $\Phi(\sigma_0)$, т.е. выполняется условие (4). Тогда функция δ, удовлетворяющая оценке (5), определяется по формуле

$$\delta(r) = \min\Big\{f(x) - f(x_0) :\ x \in \Phi(\sigma_0),\ \|x - x_0\| \geqslant r\Big\}, \quad r \geqslant 0.$$

При этом минимум по пустому множеству считаем равным $+\infty$.

Очевидно, что для конечномерного пространства X в силу компактности каждого из множеств, имеющих вид $\Phi(\sigma_0) \cap \{x \in X : \|x - x_0\| \geqslant r\}$, так определенная функция δ удовлетворяет всем нужным требованиям. Пример разобран.

Рассмотрим случай, когда пространство X бесконечномерно, функция f является гладкой в окрестности точки x_0, а допустимое множество $\Phi(\sigma_0)$

определяется конечным числом гладких ограничений типа равенств и неравенств. В этом случае, если выполняется достаточное условие второго порядка в задаче (2) (см., например, [12, § 8] или [13, теорема 7.1]) и радиус $R > 0$ шара $B_R(x_0)$ достаточно мал, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что функция $\delta(r) = \varepsilon r^2$ удовлетворяет оценке (5). Вообще говоря, для существования функции δ, удовлетворяющей оценке (5), достаточно, чтобы выполнялись любые достаточные условия строгого минимума второго или более высоких порядков (см., например, [13, теоремы 7.3, 14.2, 14.3]) и число $R > 0$ было достаточно мало.

В то же время следующий контрпример показывает, что в бесконечномерном гильбертовом (тем более банаховом) пространстве X, если достаточные условия строго минимума второго или более высоких порядков в задаче (2) не выполнены, то подходящей функции δ может не существовать ни при каком значении $R > 0$. При этом утверждение леммы 1 даже в задаче без ограничений нарушается. Таким образом, предположение (5) является существенным.

Пример 2. Пусть $X = \ell_2$ – это, как обычно, пространство вещественных последовательностей с суммируемым квадратом и обычным скалярным произведением. Обозначим через $\{e_i\}$ стандартный базис в ℓ_2, т.е. последовательности, у которых на i-м месте стоит единица, а на остальных – нули. Через A обозначим положительный самосопряженный компактный линейный оператор $A : X \to X$, который определен бесконечной диагональной матрицей, содержащей i^{-1} на главной диагонали, $i = 1, 2, \dots$, и нули вне ее (см., например, [14, § 6.9]).

Пусть $\Sigma = \{i^{-1} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ с естественной топологией из $\mathbb{R}$, причем $\sigma_0 = 0$, $f(x) = \langle Ax, x\rangle$. Для $i \in \mathbb{N}$ положим $f_i(x) := f(x, i^{-1}) = \langle A_i x, x\rangle$, где A_i получено из A заменой на i-м месте на диагонали i^{-1} на $-i^{-1}$. Далее, положим $x_0 = 0$ и $\psi(\sigma) \equiv 0$. Зафиксируем произвольное $R > 0$ и для него положим $\Phi(\sigma) = B_R(0)\ \forall \sigma$ (т.е. ограничение $x \in \Phi(\sigma)$ отсутствует).

Здесь условие (7) выполняется тривиально. Условие (6) выполняется в силу того, что

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\widetilde{x})| &= |\langle Ax, x\rangle - \langle A\widetilde{x}, \widetilde{x}\rangle| \leqslant \\ &\leqslant |\langle Ax, x\rangle - \langle A\widetilde{x}, x\rangle| + |\langle A\widetilde{x}, x\rangle - \langle A\widetilde{x}, \widetilde{x}\rangle| \leqslant \|A\|\|x - \widetilde{x}\|(\|x\| + \|\widetilde{x}\|) \leqslant \\ &\leqslant 2R\|A\|\|x - \widetilde{x}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \|x - \widetilde{x}\| \to 0, \quad x, \widetilde{x} \in B_R(0). \end{aligned}$$

В качестве $\{\varphi(i^{-1})\}$ в условии (9) можно взять любую сходящуюся к нулю последовательность элементов из $B_R(0)$, например $\{i^{-1}Re_1\}$. Условие (3) выполняется, так как по построению $f_i \to f$ при $i \to \infty$ равномерно по $x \in B_R(0)$. Таким образом, в этом примере выполняются условия (3), (6), (7) и (9).

В то же время условие (5) нарушается, поскольку $\forall r > 0\ \inf\{f(x) : ||x|| = r\} = 0$, и соответствующей функции δ не существует. Покажем, что утверждение леммы 1 также нарушается. Действительно, значения $f(x)$ положительны при $x \neq 0$, $f(0) = 0$, однако $\inf\{f_i(x) : x \in B_R(0)\} = -R^2 i^{-1}$

для всех $i \in \mathbb{N}$, и этот инфимум достигается при $x_i := Re_i \in B_R(0)$. Точки $x_i = x(i^{-1})$ удовлетворяют условию (8) при $\psi = 0$, но последовательность $\{x_i\}$ к нулю не сходится, т.е. точка $x_0 = 0$ не является устойчивым решением задачи (2). Пример разобран.

Обратимся к предположению (6). Из теоремы Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции на компакте вытекает, что предположение (6) автоматически выполняется в конечномерном пространстве X.

Действительно, пусть X конечномерно. Тогда для произвольного фиксированного $R > 0$ замкнутый шар $B_R(x_0)$ компактен. Из условий $x \in \Phi(\sigma)$, $\widetilde{x} \in \Phi(\sigma_0)$ и предположения о том, что $\Phi(\sigma) \subset B_R(x_0)$ $\forall \sigma$, вытекает, что $x, \widetilde{x} \in B_R(x_0)$. В силу теоремы Кантора, примененной к функции f на компакте $B_R(x_0)$, получаем, что $|f(x) - f(\widetilde{x})| \to 0$ при $\|x - \widetilde{x}\| \to 0$, что доказывает (6).

Если же пространство X бесконечномерно, то предположение (6) уже существенно, даже если это пространство гильбертово. Приведем соответствующий пример.

Пример 3. Пусть $X = \ell_2$ – гильбертово пространство, как в примере 2, $\{e_i\} \subset \ell_2$ — стандартный базис. Положим $x_0 = e_1$, $R = 2$, $B := B_2(e_1)$, $\Sigma = \{i^{-1} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, причем $\sigma_0 = 0$ и $\psi(\sigma) \equiv 0$. Функция $f(x, \sigma)$ не зависит от σ и определяется по формуле

$$f(x,\sigma) = f(x) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \max\{0, 1 - 2i\|x - e_i\|\}, \quad x \in \ell_2, \quad \sigma \in \Sigma. \tag{13}$$

Поскольку носителями непрерывных функций $x \mapsto \max\{0, 1 - 2i\|x - e_i\|\}$ являются попарно непересекающиеся шары $B_{1/(2i)}(e_i)$, то функция $f : X \to \mathbb{R}$ корректно определена и непрерывна (в том числе на B).

Положим

$$\begin{aligned}
&\Phi(0) = \{e_1\} \cup \{u_i : i = 2, 3, \ldots\}, \quad \text{где} \quad u_i = \left(1 - \frac{1}{2i}\right)e_i;\\
&\Phi(i^{-1}) = \{a_i, b_i\},\\
&\qquad\qquad \text{где} \quad a_i = \left(1 - \frac{1}{2i}\right)e_1, \quad b_i = \left(1 - \frac{1}{2(i+1)i}\right)e_i, \quad i = 1, 2, \ldots;\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \delta(r) = r/2, \quad r \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Для проведения дальнейших построений вычислим значения функции f в некоторых точках. Поскольку $e_1, a_i \in B_{1/2}(e_1)$, то

$$f(e_1) = 1 - \max\{0, 1 - 2\|e_1 - e_1\|\} = 0, \tag{14}$$

$$f(a_i) = 1 - \max\{0, 1 - 2\|a_i - e_1\|\} = \frac{1}{i}. \tag{15}$$

Поскольку $u_i, b_i \in B_{1/(2i)}(e_i)$, то

$$f(u_i) = 1 - \max\{0, 1 - 2i\|u_i - e_i\|\} = 1, \tag{16}$$

$$f(b_i) = 1 - \max\{0, 1 - 2i\|b_i - e_i\|\} = 1 - \max\left\{0, 1 - \frac{1}{i+1}\right\} = \frac{1}{i+1}. \tag{17}$$

Покажем, что для заданных $X, f, \Phi, \Sigma, x_0, \sigma_0$ и R выполняются все предположения леммы 1, кроме предположения (6).

Предположение (3) выполняется, так как f не зависит от σ. Инфимум в задаче (1) конечен при любом $\sigma \neq \sigma_0$, так как множество $\Phi(\sigma)$ конечно, а инфимум в задаче (2) конечен в силу (14) и (16). Более того, $f(x_0) = f(e_1) = 0 < 1 = f(x)$ для любого $x \in \Phi(0)$: $x \neq x_0$, значит, выполняется (4). Соотношение (8) выполняется при $x(i^{-1}) = b_i \in \Phi(i^{-1})$, $i = 1, 2, \ldots$, $x(0) = e_1 \in \Phi(0)$ и $\psi = 0$. Неравенство (5) выполняется, поскольку

$$f(e_1) + \delta(\|u_i - e_1\|) \overset{(14)}{=} \delta(\|u_i - e_1\|) = \frac{\|u_i - e_1\|}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{2i}\right)^2} < 1 \overset{(16)}{=} f(u_i)$$

для любого $i = 2, 3, \ldots$. Отображение Φ полунепрерывно сверху в нуле, т.е. выполняется (7), поскольку $\|a_i - e_1\| \to 0$ и $\|b_i - u_i\| \to 0$ при $i \to \infty$. Наконец, соотношение (9) очевидно выполняется для $\varphi(i^{-1}) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Итак, все предположения леммы 1 выполняются за исключением (6). А это предположение (6) нарушается, поскольку $\|b_i - u_i\| \to 0$, $f(b_i) \to 0$ и $f(u_i) \to 1$ при $i \to \infty$. Утверждение леммы 1 также нарушается, поскольку $x(i^{-1}) = b_i \not\to e_1 = x_0$ при $i \to \infty$. Пример разобран.

Обратимся к предположению (7). Следующий пример показывает, что оно также существенно.

Пример 4. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathbb{R}$, $f(x, \sigma) \equiv x$, $x_0 = \sigma_0 = 0$, $R = 1$, $\Phi(\sigma) = [-1; 1]$ при $\sigma \neq 0$, $\Phi(0) = \{0\}$ и $\psi(\sigma) \equiv 0$. Тогда, очевидно, $x_0 = 0$ не является устойчивым решением задачи (2). Непосредственно проверяется, что в этом примере выполнены все предположения леммы 1, кроме предположения (7).

Отметим, что предположение (7) хотя и существенно, но выполняется для широкого класса задач, например, для всех конечномерных задач с ограничением типа включений при естественных предположениях непрерывности. Продемонстрируем это следующим примером.

Пример 5. Пусть X – конечномерное банахово пространство, Y – нормированное пространство, а Σ – метрическое пространство. Пусть $F : X \times \Sigma \to Y$ – непрерывное отображение и $C \subset Y$ – непустое замкнутое множество.

Для $\sigma \in \Sigma$ положим

$$\Phi(\sigma) = \{x \in X : F(x, \sigma) \in C\} \cap B_R(x_0) \neq \varnothing. \tag{18}$$

Тогда многозначное отображение Φ удовлетворяет предположению (7). В самом деле, для проверки (7) в силу [11, теорема 2.3.2] достаточно показать, что Φ – замкнутое отображение. Напомним, что многозначное отображение $\Phi : \Sigma \rightrightarrows B_R(x_0)$ называется замкнутым, если его график $\operatorname{gph}\Phi := \{(\sigma, x) \in \in \Sigma \times B_R(x_0) : x \in \Phi(\sigma)\}$ замкнут.

Итак, пусть последовательность точек $(\sigma_i, x_i) \in \operatorname{gph}\Phi$ сходится к точке $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{x}) \in \Sigma \times B_R(x_0)$. Проверим, что $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{x}) \in \operatorname{gph}\Phi \Leftrightarrow \widetilde{x} \in \Phi(\widetilde{\sigma}) \Leftrightarrow F(\widetilde{x}, \widetilde{\sigma}) \in C$. По предположению имеем $F(x_i, \sigma_i) \in C$, $\sigma_i \to \widetilde{\sigma}$ и $x_i \to \widetilde{x}$ при $i \to \infty$. Но тогда в силу непрерывности F имеет место $F(x_i, \sigma_i) \to F(\widetilde{x}, \widetilde{\sigma})$, $i \to \infty$. Поэтому $F(\widetilde{x}, \widetilde{\sigma})$ – предельная точка для последовательности элементов $F(x_i, \sigma_i) \in C$. В силу замкнутости множества C получаем $F(\widetilde{x}, \widetilde{\sigma}) \in C$, т.е. $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{x}) \in \operatorname{gph}\Phi$. Значит, отображение Φ замкнуто и выполняется (7). Пример разобран.

Аналогичные рассуждения справедливы и для более общей задачи с ограничением $F(x, \sigma) \in C(\sigma)$, т.е. $\Phi(\sigma) = \{x \in X : F(x, \sigma) \in C(\sigma)\} \cap B_R(x_0)$, в случае, когда $C : \Sigma \to Y$ – полунепрерывное сверху в точке σ_0 замкнутозначное многозначное отображение.

Основным предположением, которое необходимо проверять для применения леммы 1, является (9). Понятно, что оно существенно.

Пример 6. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\sigma = [0; 1]$, $f(x, \sigma) \equiv x^2$, $x_0 = \sigma_0 = 0$, $R = 1$, $\Phi(\sigma) = \{1\}$ при $\sigma > 0$, $\Phi(0) = [-1; 1]$ и $\psi(\sigma) \equiv 0$. В этом примере очевидно выполняются все предположения леммы 1, кроме условия (9). При этом точка $x_0 = 0$ естественно не является устойчивым решением задачи (2).

Предположение (9) тесно связано с понятием неявной функции. Ниже, при рассмотрении конечномерных задач в разделе 5, будет сформулировано одно из возможных условий, при котором оно выполняется. Здесь же отметим, что в том случае, когда множество ограничений от параметра σ не зависит, т.е. $\Phi(\sigma) \equiv \Phi(\sigma_0)$, условие (9) выполняется при $\varphi(\sigma) \equiv x_0$.

Примеры, аналогичные разобранным в этом разделе примерам 3, 4, 6 и последующим далее примерам 7, 9, можно построить для произвольного заранее фиксированного $R > 0$.

4. Устойчивость множества решений

Рассмотрим теперь случай, когда в задаче (2) минимум непрерывной функции f достигается не обязательно в единственной точке x_0, но на заданном непустом множестве $X_0 \subset \Phi(\sigma_0)$, т.е. имеет место

$$f(x) = \min\{f(\xi, \sigma_0) : \ \xi \in \Phi(\sigma_0)\} \quad \Leftrightarrow \quad x \in X_0.$$

Отметим, что такое множество X_0 замкнуто в силу непрерывности функции f и замкнутости множества $\Phi(\sigma_0)$.

Следующий пример показывает, что даже в одномерном случае в задаче без ограничений $f(x) \to \min$, $x \in B_R(x_0)$, если выпуклое множество решений X_0 задачи (2) не одноточечно, то ни одна точка из X_0 может не быть устойчивым решением в смысле определения 1.

Пример 7. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\Sigma = \{i^{-1} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $x_0 = 0$, $R = 1$, $\psi = 0$, функция $f(x)$ равна нулю при $x \in [-1/2; 1/2]$, строго монотонно убывает на отрезке $[-1; -1/2]$, строго монотонно возрастает на отрезке $[1/2; 1]$ и непрерывна на $[-1; 1]$. Ограничения в рассматриваемой задаче (2) отсутствуют и функция f достигает минимума на множестве $X_0 = [-1/2; 1/2]$.

Зададим функции $f_i(x) = f(x, i^{-1})$ непрерывными на отрезке $[-1; 1]$ и достигающими нулевого минимума в единственной точке $x_i \in [-1/2; 1/2]$, причем множество $\{x_i\}$ всюду плотно в отрезке $[-1/2; 1/2]$. Кроме того, будем считать, что $f_i \rightrightarrows f$ при $i \to \infty$ равномерно на $[-1; 1]$. Тогда для каждой точки $x \in [-1/2; 1/2]$ из последовательности $\{x_i\}$ можно выделить сходящуюся к ней подпоследовательность. Такие функции f_i, как легко видеть, существуют.

Для функций f_i, которые равномерно сходятся к f на отрезке $[-1; 1]$, рассмотрим задачу без ограничений $f_i(x) \to \min$, $x \in [-1; 1]$. По построению в ней минимум достигается в единственной точке x_i, и предельными точками множества $\{x_i\}$ является целый отрезок X_0 длины единица. Значит, к любой точке из множества X_0 можно как угодно приблизиться минимумами возмущенных функций f_i, т.е. ни одна из этих точек не является устойчивым решением задачи (2). Пример разобран.

Несмотря на этот пример, можно получить достаточные условия, при которых минимумы $x(\sigma)$ с точностью до ψ возмущенных функций $f(x, \sigma)$ на множествах $\Phi(\sigma)$ сходятся в смысле расстояния dist от точки $x(\sigma)$ до множества X_0. Напомним, что

$$\operatorname{dist}(\xi, X_0) := \inf\{\|\xi - x\| : \ x \in X_0\}, \quad \xi \in X.$$

Вначале положим

$$f_0 := \inf\{f(x, \sigma_0) : \ x \in \Phi(\sigma_0)\}.$$

Будем предполагать, что в дополнение к имеющимся предположениям и условиям (3), (6) и (7) выполняется

$$f(x) \geqslant f_0 + \delta\big(\operatorname{dist}(x, X_0)\big) \quad \forall x \in \Phi(\sigma_0), \tag{19}$$

где функция δ задана выше при формулировке неравенства (5). При этом предположение (4) и тем более усиливающее его предположение (5) могут не выполняться.

Введем также дополнительное предположение относительно функции f о ее равномерной непрерывности на X_0:

$$f(x) \to f_0 \quad \text{при} \quad \operatorname{dist}(x, X_0) \to 0, \quad x \in B_R(x_0). \tag{20}$$

Лемма 2. Пусть для любого $\sigma \in \Sigma$ существует $\varphi(\sigma) \in \Phi(\sigma)$ такое, что

$$\operatorname{dist}(\varphi(\sigma), X_0) \to 0 \quad \textit{при} \quad \sigma \to \sigma_0 \tag{21}$$

и справедливы предположения (3), (6), (7), (19) *и* (20). *Тогда для любых $x(\sigma) \in \Phi(\sigma)$, $\sigma \neq \sigma_0$, удовлетворяющих условию* (8), *имеет место*

$$\operatorname{dist}(x(\sigma), X_0) \to 0 \quad \textit{при} \quad \sigma \to \sigma_0.$$

Доказательство леммы 2. Не теряя общности, будем считать, что $f_0 = 0$, $x_0 = 0$ и, значит, $B_R(x_0) = B_R(0)$. Пусть утверждение леммы нарушается. Тогда существуют такие последовательности $\{\sigma_i\}$ и $\{x_i\}$, что $\sigma_i \to \sigma_0$, $\forall i \ x_i = x(\sigma_i) \in \Phi(\sigma_i)$ и выполнено (8), но последовательность $\{\operatorname{dist}(x_i, X_0)\}$ к нулю уже не стремится. Отсюда существует такое число ε, что $0 < 2\varepsilon < R$ и, после перехода к подпоследовательности, имеет место $\operatorname{dist}(x_i, X_0) \geqslant 2\varepsilon$ для всех i.

Положим $\psi_i = \psi(\sigma_i)$, т.е. определим ψ_i так же, как при доказательстве леммы 1. В силу (7) существуют такие точки $\widetilde{x}_i \in \Phi(\sigma_0)$, что $\|x_i - \widetilde{x}_i\| \to 0$. Значит, при всех достаточно больших i имеет место $\operatorname{dist}(\widetilde{x}_i, X_0) \geqslant \varepsilon$. Отсюда в силу предположения (19) $f(\widetilde{x}_i) \geqslant \delta(\operatorname{dist}(\widetilde{x}_i, X_0)) \geqslant \delta(\varepsilon) > 0$. Значит, существует такое $\delta_0 > 0$, что $f(\widetilde{x}_i) \geqslant 2\delta_0$ для всех больших i. Отсюда в силу (6) имеем $f(x_i) \geqslant \frac{3}{2}\delta_0$ для всех достаточно больших i. Следовательно, поскольку в силу (3) функции $f_i = f(\cdot, \sigma_i)$ сходятся равномерно к функции f на $B_R(0)$, то $f_i(x_i) \geqslant \delta_0$ при всех больших i.

В силу свойств функции ψ имеем $\psi_i \to 0$, $i \to \infty$. Поэтому в силу (3) существует такое натуральное i_0, что для всех $i \geqslant i_0$ имеет место

$$|f_i(x) - f(x)| + \psi_i \leqslant \frac{\delta_0}{4} \quad \forall x \in B_R(0).$$

В силу (21) существует последовательность $\varphi_i \in \Phi(\sigma_i)$, для которой имеет место $\operatorname{dist}(\varphi_i, X_0) \to 0$. Поэтому, увеличивая натуральное i_0, из (20) при $x = \varphi_i$ получаем, что $f(\varphi_i) \leqslant \frac{\delta_0}{4}$. Из полученных неравенств при $i \geqslant i_0$, так же, как в лемме 1, находим, что $f_i(x_i) \leqslant \delta_0/2$. Но по проведенному построению $f_i(x_i) \geqslant \delta_0 > 0$, т.е. получено противоречие. Лемма доказана.

Таким образом, из примера 7 и леммы 2 вытекает, что при естественных требованиях, хотя решение с точностью до ψ возмущенной задачи $x(\sigma)$ ни к одной точке из множества X_0 может не сходиться, тем не менее оно сходится в смысле расстояния dist ко всему множеству X_0.

Замечание 1. Если $X_0 = \{x_0\}$, то леммы 1 и 2 эквивалентны. Действительно, в этом случае предположение (5) совпадает с (19), поскольку $\operatorname{dist}(x, X_0) = \|x - x_0\|$; предположение (9) совпадает с (21), поскольку $\varphi(\sigma) \to x_0 \Leftrightarrow \operatorname{dist}(\varphi(\sigma), X_0) \to 0$; а предположение (20) равносильно непрерывности f в точке x_0. Остальные предположения лемм 1 и 2 совпадают дословно.

Предположение (19) по своему смыслу полностью совпадает с предположением (5). В частности, для конечномерного пространства X имеет место следующий аналог примера 1.

Пример 8. Пусть банахово пространство X конечномерно и выполняется условие

$$f(x) = f_0 \ \ \forall x \in X_0, \quad f(x) > f_0 \ \ \forall x \in \Phi(\sigma_0) \setminus X_0. \tag{22}$$

Тогда функция δ, удовлетворяющая оценке (19), определяется по формуле

$$\delta(r) = \min\Big\{ f(x) - f_0 : \ x \in \Phi(\sigma_0), \ \operatorname{dist}(x, X_0) \geqslant r \Big\}, \quad r \geqslant 0.$$

Обсудим предположение (20). Если X_0 состоит из единственной точки x_0, то (20) выполняется автоматически, что является следствием непрерывности функции f.

Если X конечномерно, то X_0 компактно, поскольку замкнуто и лежит в $B_R(x_0)$. Тогда (20) выполняется также автоматически, так как является следствием теоремы Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции на компакте.

Пусть теперь X бесконечномерно, а множество X_0 замкнуто и ограничено (так как оно принадлежит $B_R(x_0)$), но не компактно. Тогда предположение (20) существенно. Это демонстрирует следующий пример.

Пример 9. Предположим, что X, Σ, σ_0, ψ и $f(x, \sigma)$ те же, что и в примере 3. Пусть $x_0 = 0$, $R = 1$ и $B := B_1(0)$. Положим

$$a = \frac{3}{4} e_1; \quad \Phi(i^{-1}) = \left\{ \left(1 - \frac{1}{2i}\right) e_i, a \right\}, \ \ i \in \mathbb{N}; \quad \Phi(0) = B.$$

Здесь a выбрано так, что $f(a) = \frac{1}{2}$.

Из определения (13) функции f очевидно, что $X_0 = \{e_1, e_2, \ldots\}$ и $f_0 = 0$. Покажем, что выполняется (6).

Возьмем произвольные последовательности $\{x_i \in \Phi(i^{-1})\}$ и $\{\widetilde{x}_i \in \Phi(0)\}$, для которых $\|x_i - \widetilde{x}_i\| \to 0$. При каждом i, при котором $\|x_i - \widetilde{x}_i\| < 1/4$, рассмотрим два случая: $x_i = a$ и $x_i \neq a$. Пусть сначала $x_i = a$. Тогда, поскольку $\|a - \widetilde{x}_i\| < 1/4$, имеем $\widetilde{x}_i \in B_{1/2}(e_1)$. Следовательно,

$$f(\widetilde{x}_i) = 1 - \max\{0, 1 - 2\|\widetilde{x}_i - e_1\|\} = 2\|\widetilde{x}_i - e_1\| \leqslant 2\|\widetilde{x}_i - x_i\| + 2\|x_i - e_1\|.$$

Кроме того, поскольку $f(x_i) = f(a) = 2\|a - e_1\| = 2\|x_i - e_1\|$, то

$$f(x_i) = 2\|x_i - e_1\| \geqslant f(\widetilde{x}_i) - 2\|\widetilde{x}_i - x_i\|.$$

Пусть теперь $x_i \neq a$. Тогда $x_i = (1 - (2i)^{-1}) e_i$ и непосредственным вычислением (16) проверяется, что $f(x_i) = 1$. Поскольку наибольшее значение функции f равно единице, то и в этом случае имеем $f(x_i) \geqslant f(\widetilde{x}_i) \geqslant f(\widetilde{x}_i) - 2\|\widetilde{x}_i - x_i\|$. Таким образом, при каждом достаточно большом i имеем

$$f(x_i) \geqslant f(\widetilde{x}_i) - 2\|\widetilde{x}_i - x_i\| = f(\widetilde{x}_i) - 1(i^{-1}).$$

Значит, (6) выполняется.

Условие (19) выполняется при $\delta(r) = r$, $r \geqslant 0$. В самом деле, пусть $x \in B = \Phi(0)$. Возможно одно из двух: либо для некоторого $i \geqslant 1$ имеет место $x \in B_{1/(2i)}(e_i)$, либо $x \notin B_{1/(2i)}(e_i)$ для всех i. В первом случае $\operatorname{dist}(x, X_0) = \|x - e_i\| \leqslant 2i\|x - e_i\| = f(x)$, а во втором случае $\operatorname{dist}(x, X_0) \leqslant 1 = f(x)$ в силу $X_0 \subset B$.

Очевидно, что выполняются и остальные предположения леммы 2, кроме предположения (20), которое нарушается. Покажем это.

Действительно, для последовательности точек $x_i = \left(1 - \frac{1}{2i}\right)e_i$ имеет место $\operatorname{dist}(x_i, X_0) = \|x_i - e_i\| = (2i)^{-1} \to 0$ при $i \to \infty$, однако $f(x_i) = 1$ при всех i. Но по построению $f_0 = 0$ и, значит, $f(x_i) \not\to f_0$. Следовательно, (20) нарушается.

Покажем, что утверждение леммы 2 также нарушается. Действительно, для всех i имеем $f\left(\left(1 - \frac{1}{2i}\right)e_i\right) = 1$, а по построению $f(a) = \frac{1}{2}$. Следовательно, минимум функции f на множестве $\Phi(i^{-1})$ при всех i достигается в единственной точке a. Поскольку при этом $a \notin X_0$, то утверждение леммы 2 нарушается. Пример разобран.

Относительно предположения (21) справедливо замечание, вполне аналогичное приведенному в конце раздела 3. А именно, если множество ограничений в задаче (1) от параметра σ не зависит, то условие (21) выполняется при $\varphi(\sigma) \equiv x \in X_0$, где x – произвольная точка из множества X_0.

5. Конечномерные задачи и $\boldsymbol{\lambda}$-укорочения

Обратимся к теории конечномерных экстремальных задач с параметром $\sigma \in \Sigma$, где $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$. В ней пространство X имеет вид $X = \mathbb{R}^n$, а множества $\Phi(\sigma)$ определяются как

$$\Phi(\sigma) = \{x \in X : \; F(x, \sigma) = 0\} \cap B_R(x_0), \quad \sigma \in \Sigma. \tag{23}$$

Здесь $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — заданное непрерывное отображение, n, m – натуральные числа, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Будем считать, что все множества $\Phi(\sigma)$ непусты, $\sigma \in \Sigma$.

Рассмотрим задачу

$$f(x, \sigma) \to \min, \quad F(x, \sigma) = 0, \quad x \in B_R(x_0), \quad \sigma \in \Sigma. \tag{24}$$

Как и ранее, выделим отдельно задачу

$$f(x) = f(x, \sigma_0) \to \inf, \quad F(x, \sigma_0) = 0, \quad x \in B_R(x_0) \tag{25}$$

и будем считать, что x_0 является ее строгим решением. Получим для задачи (25) условия устойчивости решения x_0 в предположении, что $F(x, \sigma)$ представимо в виде $F(x, \sigma) = F(x) - \sigma$. В этом частном случае F – заданное непрерывное отображение $F = (F_1, \ldots, F_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, а Σ – это некоторая окрестность точки $\sigma_0 \in \mathbb{R}^m$ с заданной на Σ естественной метрикой из $\mathbb{R}^m$.

Перед тем как сформулировать соответствующее утверждение, приведем некоторые конструкции из [9]. В этом разделе координаты вектора $x \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать нижними индексами, т.е. положим $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Через D обозначим множество ненулевых n-мерных векторов d, у которых все координаты d_i неотрицательны, а через $\widehat{D} \subset D$ – множество всех ненулевых целочисленных векторов $z = (z_1, \ldots, z_n) \in D$. Для $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \widehat{D}$ и $d \in D$ положим

$$x^z := \prod_{k=1}^{n} x_k^{z_k}, \quad |x|^d := \prod_{k=1}^{n} |x_k|^{d_k}.$$

При этом будем считать, что $x_k^l = |x_k|^l = 1$ при $l = 0$. Вектор $z = (z_1, \ldots, z_n)$ – это мультииндекс монома x^z, а $z_1 + \ldots + z_n$ – его степень.

Начнем со случая $m = 1$. Пусть заданы непрерывная функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и вектор $\lambda \in \mathbb{R}^n$, причем $\lambda > 0$ (здесь и далее имеется ввиду покоординатное неравенство $\lambda_i > 0,\ i = \overline{1, n}$).

Определение 2. Функция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется λ-укорочением функции g в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует $\alpha > 0$, для которого выполнено:

1) *существует непустое конечное множество $\widehat{Z} \subset \widehat{D}$ такое, что*

$$p(x) = \sum_{z \in \widehat{Z}} p_z x^z, \quad p_z \in \mathbb{R}, \quad p_z \neq 0, \quad \langle \lambda, z \rangle = \alpha \quad \forall z \in \widehat{Z};$$

2) *существуют число $K > 0$, конечное множество $Z \subset D$ и непрерывная функция $\Delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такие, что функция g в некоторой окрестности точки x_0 представима в виде*

$$g(x) = g(x_0) + p(x - x_0) + \Delta(x - x_0),$$

причем

$$|\Delta(x - x_0)| \leqslant K \sum_{d \in Z} |x - x_0|^d, \quad \langle \lambda, d \rangle > \alpha \quad \forall d \in Z.$$

Приведем пример, иллюстрирующий определение 2.

Пример 10. Пусть $n = 2$, $x_0 = 0$ и

$$g(x) = \sin x_1^3 + 2x_1 \sin x_2 + x_2^3 + 3x_1 x_2^2 + 4x_1^2 x_2.$$

Имеем следующие λ-укорочения (единственные для каждого λ):

$$\begin{array}{lll} \lambda = (1,1) \;\Rightarrow\; p(x) = 2x_1x_2, & & \alpha = 2; \\ \lambda = (1,2) \;\Rightarrow\; p(x) = x_1^3 + 2x_1x_2, & & \alpha = 3; \\ \lambda = (2,1) \;\Rightarrow\; p(x) = 2x_1x_2 + x_2^3, & & \alpha = 3; \\ \lambda = (1,3) \;\Rightarrow\; p(x) = x_1^3, & & \alpha = 3; \\ \lambda = (3,1) \;\Rightarrow\; p(x) = x_2^3, & & \alpha = 3. \end{array}$$

Других λ-укорочений у данной функции g нет.

Определение 3. Отображение $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется λ-укорочением отображения $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в окрестности точки x_0, если компонента P_i является λ-укорочением компоненты F_i в окрестности этой же точки, $i = \overline{1,m}$.

Пусть задан вектор $h \in \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что λ-укорочение P регулярно по направлению h, если

$$P(h) = 0, \quad \operatorname{im} P'(h) = \mathbb{R}^m.$$

Построенные в условиях примера 10 λ-укорочения при $\lambda = (1,1)$ и $\lambda = (1,2)$ регулярны по направлениям $h = (0, \pm 1)$, при $\lambda = (1,1)$ и $\lambda = (2,1)$ регулярны по направлениям $h = (\pm 1, 0)$, а λ-укорочения, построенные при $\lambda = (1,3)$ и $\lambda = (3,1)$, не имеют регулярных направлений.

Из [9, теорема 1], вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть P для $\lambda > 0$ является λ-укорочением отображения F в окрестности точки x_0, которое регулярно по некоторому направлению $h \in \mathbb{R}^n$ и $F(x_0) = \sigma_0$. Тогда существуют такие окрестность $O(\sigma_0)$ точки σ_0 и положительные числа c и β, что для любого $\sigma \in O(\sigma_0)$ существует решение $\varphi = \varphi(\sigma)$ уравнения $F(x) = \sigma$, для которого справедлива оценка

$$\|\varphi(\sigma) - x_0\| \leqslant c\|\sigma - \sigma_0\|^{\beta}.$$

Теорема 1. Пусть заданы $R > 0$ и непрерывное отображение $F : B_R(x_0) \to \Sigma$. Рассмотрим зависящую от параметра σ задачу минимизации непрерывных функций $f(x, \sigma)$ с конечным числом непрерывных ограничений типа равенств

$$f(x,\sigma) \to \min, \quad F(x) = \sigma, \quad x \in B_R(x_0), \quad \sigma \in \Sigma. \tag{26}$$

Пусть существуют $h \in \mathbb{R}^n$, вектор $\lambda > 0$ и отображение $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такие, что P является λ-укорочением отображения F в окрестности точки x_0, регулярным по направлению h. Тогда для любой функции f, удовлетворяющей только условиям (3) и (4), точка x_0 является устойчивым решением задачи (26) при $\sigma = \sigma_0$.

Доказательство теоремы 1. Положим $\Phi(\sigma) = \{x : F(x) = \sigma\}$. Тогда для рассматриваемой задачи выполнены все предположения леммы 1. Действительно, справедливость (5) вытекает из конечномерности пространства X, условия (4) и примера 1. Справедливость (6) вытекает из конечномерности X и теоремы Кантора. Наконец, справедливость (7) вытекает из конечномерности X и того, что рассматривается задача с ограничениями только типа равенств, т.е. выполнены условия примера 5. При этом в (18) полагаем $C = \{0\}$.

Докажем условие (9). В силу предположения теоремы относительно λ-укорочения отображения F в окрестности точки x_0 выполняются все условия предложения 1 относительно решений уравнения $F(x) = \sigma$. Из него вытекает, что это уравнение в некоторой окрестности точки σ_0 имеет такое решение $\varphi(\sigma)$, что $\varphi(\sigma_0) = x_0$ и функция φ непрерывна в точке σ_0. Используя непрерывность функции φ и уменьшая при необходимости указанную окрестность, добьемся того, чтобы иметь $\varphi(\sigma) \in B_R(x_0)$ для всех σ из этой окрестности. Для остальных $\sigma \in \Sigma$ выберем $\varphi(\sigma) \in \Phi(\sigma)$ произвольно. Тогда по построению $\varphi(\sigma) \in \Phi(\sigma)$ $\forall \sigma \in \Sigma$ и, кроме того, $\varphi(\sigma) \to x_0$ при $\sigma \to \sigma_0$. Поэтому условие (9) выполняется. Для завершения доказательства остается применить лемму 1. Теорема доказана.

Приведем пример использования теоремы 1.

Пример 11. Пусть $n = 3$, $m = 2$, $x_0 = 0$, Σ – окрестность нуля в $\mathbb{R}^2$ и $\sigma_0 = 0$. Непосредственно проверяется, что при $\lambda = (9, 6, 4)$ отображение

$$F(x) = (x_1^2 + x_2^3, x_2^2 + x_3^3), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

является в окрестности нуля λ-укорочением самого себя, регулярным по направлению $h = (1, -1, -1)$.

Рассмотрим задачу (26), в которой функции $f(x, \sigma)$, $\sigma \in \Sigma$, могут быть произвольными непрерывными в некотором шаре радиуса $R > 0$ с центром в нуле в $\mathbb{R}^3$ и сходящимися при $\sigma \to 0$ равномерно на этом шаре к некоторой функции f, имеющей в нуле строгий минимум. Тогда в силу теоремы 1 решение $x_0 = 0$ задачи (26) при $\sigma = \sigma_0$ является устойчивым. Пример разобран.

В заключение приведем результат, использующий конструкции из раздела 4 и, в частности, лемму 2. Для этого предположим, что в задаче (25) минимум достигается не в точке x_0, а на заданном непустом множестве $X_0 \subset \Phi(\sigma_0)$, где $\Phi(\sigma)$ имеет вид (23). При этом $F(x, \sigma) = F(x) - \sigma$. Иными словами, выполняется

$$f(x) = f_0 = \min\{f(\xi, \sigma_0) : \ F(\xi) = \sigma_0, \ \xi \in B_R(x_0)\} \quad \Leftrightarrow \quad x \in X_0.$$

Последнее эквивалентно тому, что имеет место (22).

Теорема 2. Пусть заданы $R > 0$ и непрерывное отображение $F : B_R(x_0) \to \Sigma$. Рассмотрим зависящую от параметра σ задачу минимизации *непрерывных функций $f(x,\sigma)$ с конечным числом непрерывных ограничений типа равенств*

$$f(x,\sigma) \to \min, \quad F(x) = \sigma, \quad x \in B_R(x_0), \quad \sigma \in \Sigma$$

и множество $X_0 \subset B_R(x_0)$ такое, что $F(x) = \sigma_0$ и $f(x,\sigma_0) = f_0\ \forall x \in X_0$.

Пусть существуют $h \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{x} \in X_0$, вектор $\lambda > 0$ и отображение $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такие, что P является λ-укорочением отображения F в окрестности точки $\widetilde{x}$, регулярным по направлению h, причем $\widetilde{x} \in \operatorname{int} B_R(x_0)$, т.е. $\widetilde{x}$ не лежит на границе шара $B_R(x_0)$. Тогда для любой функции f, удовлетворяющей только условиям (3) и (22), справедлив результат леммы 2. А именно, для любых точек $x(\sigma) \in \Phi(\sigma)$, $\sigma \neq \sigma_0$, удовлетворяющих условию (8), имеет место

$$\operatorname{dist}(x(\sigma), X_0) \to 0 \quad \textit{при} \quad \sigma \to \sigma_0.$$

Доказательство теоремы 2. Для рассматриваемой задачи выполнены все предположения леммы 2. В самом деле, справедливость (6) и (7) установлена при доказательстве теоремы 1. Справедливость (19) вытекает из конечномерности пространства X, условия (22) и примера 8. Справедливость (20) вытекает из конечномерности X и теоремы Кантора. Доказательство условия (21) проведем аналогично доказательству условия (9) из предыдущей теоремы. А именно, в силу предположения относительно λ-укорочения получим для уравнения $F(x) = \sigma$ такое решение $\varphi(\sigma)$ в некоторой окрестности σ_0, что $\varphi(\sigma_0) = \widetilde{x}$ и функция φ непрерывна в точке σ_0. Вновь используя непрерывность функции φ и уменьшая при необходимости указанную окрестность, добьемся того, чтобы иметь $\varphi(\sigma) \in B_R(x_0)$ для всех σ из этой окрестности. Последнее возможно в силу предположения $\widetilde{x} \in \operatorname{int} B_R(x_0)$. Для остальных $\sigma \in \Sigma$ выберем $\varphi(\sigma) \in \Phi(\sigma)$ произвольно. Тогда по построению имеем $\varphi(\sigma) \in \Phi(\sigma)\ \forall \sigma \in \Sigma$ и, кроме того, $\varphi(\sigma) \to \widetilde{x} \in X_0$ при $\sigma \to \sigma_0$. Поэтому условие (21) выполняется. Для завершения доказательства остается применить лемму 2. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 1 непосредственно вытекает из теоремы 2 в том случае, когда $X_0 = \{x_0\}$. При этом в условиях теоремы 2 полагаем $\widetilde{x} = x_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Измаилов А.Ф.* Чувствительность в оптимизации. М.: Физматлит, 2006.
2. *Арутюнов А.В., Измаилов А.Ф.* Теория чувствительности для анормальных задач оптимизации с ограничениями типа равенств // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2003. Т. 43. № 2. С. 186–202.
3. *Измаилов А.Ф.* Чувствительность решений систем условий оптимальности при нарушении условий регулярности ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2007. Т. 47. № 4. С. 555–577.
4. *Bonnans J.F., Shapiro A.* Perturbation analysis of optimization problems. New York: Springer, 2000.

5. *Gfrerer H., Mordukhovich B.* Robinson Stability of Parametric Constraint Systems via Variational Analysis // SIAM J. Optim. 2017. V. 27. I. 1. P. 438–465.
6. *Guo S., Qi H., Zhang L.* Perturbation analysis of the euclidean distance matrix optimization problem and its numerical implications // Comput. Optim. Appl. 2023. V. 86. P. 1193–1227.
7. *Royset J.O.* Stability and Error Analysis for Optimization and Generalized Equations // SIAM J. Optim. 2020. V. 30. I. 1. P. 752–780.
8. *Backhoff J., Silva F.J.* Sensitivity results in stochastic optimal control: A Lagrangian perspective // ESAIM: Control, Optim. Calcul. Variat. 2017. V. 23. I. 1. P. 39–70.
9. *Арутюнов А.В.* Существование вещественных решений нелинейных уравнений без априорных предположений нормальности // Мат. заметки. 2021. Т. 109. Вып. 1. С. 3–18.
10. *Мышкис А.Д., Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: УРСС, 2016.
11. *Арутюнов А.В.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.: Физматлит, 2014.
12. *Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33. Вып. 6. С. 85–148.
13. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
14. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.–Ижевск: НИЦ «Рег. и хаот. дин.», Ин-т комп. исслед., 2020.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 22.06.2023

После доработки 15.01.2024

Принята к публикации 20.01.2024