

© 2024 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Предлагается новый подход к решению задачи подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных дискретных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу. Подход основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменными являются матрица обратной связи и матрица наблюдателя. Выписан градиентный метод для отыскания динамической обратной связи по выходу и дано его обоснование.

Ключевые слова: линейные системы, дискретное время, внешние возмущения, обратная связь по выходу, наблюдатель, оптимизация, уравнение Ляпунова, градиентный метод, метод Ньютона.

DOI: 10.31857/S0005231024120012, **EDN:** XUOEAO

1. Введение

В работе [1] был предложен и обсужден новый подход к решению задачи подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных непрерывных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу с использованием наблюдателя Люенбергера [2, 3]. Этот подход, восходящий к работе [4], основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменными являются матрица обратной связи и матрица наблюдателя; далее эта задача решается градиентным методом.

Небольшой обзор литературы по соответствующей проблематике был дан в [1] (см., например, [5], а также приведенную там обширную библиографию). В [6] был предложен подход к решению этой же задачи путем ее сведения к решению задачи полуопределенного программирования в терминах линейных матричных неравенств (ЛМН) [7, 8]; при этом пришлось произвести ряд закруглений для того, чтобы линеаризовать матричные неравенства и установить окончательный результат в терминах ЛМН, что привело к излишнему консерватизму полученных условий.

Среди идейно близких публикаций также следует отметить недавние работы [9, 10], в которых был предложен перспективный подход к решению обсуждаемой задачи, основанный на нахождении решений параметризованных матричных уравнений Риккати.

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1], распространяя предложенные в ней подходы на системы управления в дискретном времени. Важной практически-ориентированной особенностью предлагаемого подхода является возможность ограничения величины матриц наблюдателя и динамического регулятора.

Всюду далее \mathbb{S}^n – пространство симметричных матриц размера $n \times n$ с вещественными элементами, $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $\|\cdot\|_F$ – фробениусова норма матрицы, T – символ транспонирования, tr – след матрицы, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение Фробениуса для матриц, I – единичная матрица соответствующей размерности, $\lambda_i(A)$ – собственные значения матрицы A , а $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$ – радиус устойчивости шуровской матрицы A .

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления

$$(1) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Dw_k, \\ y_k &= C_1x_k + D_1w_k, \\ z_k &= C_2x_k, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, начальным условием x_0 , наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^\ell$, оптимизируемым выходом $z_k \in \mathbb{R}^r$, управлением $u_k \in \mathbb{R}^p$ и внешним возмущением¹ $w_k \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:

$$\|w_k\| \leq \delta \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots$$

Будем предполагать, что пара (A, B) управляема, а пара (A, C_1) наблюдаема.

Состояние x_k системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y_k . Задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) эллипсоида, содержащего оптимизируемый выход z_k .

Построим наблюдатель, описываемый линейным разностным уравнением, включающим в себя рассогласование выхода y_k и его прогноза $C_1\hat{x}_k$:

$$(2) \quad \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C_1\hat{x}_k), \quad \hat{x}_0 = 0,$$

где $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ – матрица наблюдателя.

Согласно (1), (2) невязка $e_k = x_k - \hat{x}_k$ будет удовлетворять разностному уравнению

$$e_{k+1} = (A - LC_1)e_k + (D - LD_1)w_k, \quad e_0 = x_0.$$

¹ Несмотря на то, что природа возмущений в состоянии и наблюдаемом выходе системы, вообще говоря, различна, удобно считать их одними и теми же, полагая что матрицы D и D_1 “вырезают” из вектора w_k разные “куски”; общий случай также может быть рассмотрен ценой некоторого усложнения.

Замкнув систему (1) обратной связью с помощью динамического регулятора

$$(3) \quad u_k = K\hat{x}_k, \quad K \in \mathbb{R}^{p \times n},$$

получаем систему

$$(4) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= (A + BK)x_k - BKe_k + Dw_k, \\ e_{k+1} &= (A - LC_1)e_k + (D - LD_1)w_k, \\ z_k &= C_2x_k \end{aligned}$$

с регулируемым выходом z_k .

Как и в непрерывном случае, синтез статического регулятора по выходу вида $u_k = Ky_k$ не всегда возможен: матрица $A + BKC_1$ может оказаться не стабилизируемой выбором K , тогда как динамический регулятор (3) может быть построен (при малоограничительных требованиях управляемости и наблюдаемости системы; подробнее см. раздел 3).

3. Подход к решению

Воспользуемся методом инвариантных эллипсоидов (подробнее см. [8, 13]). Напомним, что эллипсоид

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0$$

называется *инвариантным* для линейной дискретной динамической системы

$$(5) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \quad \|w_k\| \leq 1, \\ z_k &= Cx_k \end{aligned}$$

с шуровской матрицей A , если любая траектория системы, исходящая из точки x_0 , лежащей в эллипсоиде \mathcal{E}_x , при всех внешних возмущениях $w_k: \|w_k\| \leq 1$ в любой момент времени будет находиться в этом эллипсоиде.

Инвариантный эллипсоид обладает свойством притягиваемости: траектория системы, исходящая из точки вне инвариантного эллипсоида, стремится к нему с течением времени.

Легко видеть, что если \mathcal{E}_x – инвариантный эллипсоид с матрицей P , то линейный выход z_k системы (5) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ будет принадлежать эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^r: \quad z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1\},$$

называемому *ограничивающим* (а при $x_0 \notin \mathcal{E}_x$ – стремиться к нему).

Оценивая влияния внешних возмущений на выход системы, естественно интересоваться минимальными ограничивающими эллипсоидами; в качестве критерия минимальности ограничивающего эллипсоида часто принимается величина $\text{tr } CPC^T$, равная сумме квадратов его полуосей. Хорошо известен следующий результат (см., например, [8]).

Теорема 1. Пусть матрица A шуровская, $\rho = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$, пара (A, D) управляема, а матрица $P(\alpha) \succ 0$, $\rho^2 < \alpha < 1$ удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова

$$(6) \quad \frac{1}{\alpha} A P A^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0.$$

Тогда задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде для системы (5) сводится к минимизации одномерной функции

$$f(\alpha) = \text{tr} C P(\alpha) C^T$$

на интервале $\rho^2 < \alpha < 1$.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, если α^* – точка минимума в задаче из теоремы 1, и x_0 удовлетворяет условию $x_0^T P^{-1}(\alpha^*) x_0 \leq 1$, то гарантируется очевидная равномерная оценка

$$\|z_k\|^2 \leq \|C P(\alpha^*) C^T\| \leq \text{tr} C P(\alpha^*) C^T = f(\alpha^*), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Во-вторых, уравнение (6) представимо в виде

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} A \right) P \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} A \right)^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0$$

и согласно [8, лемма 1.2.6] имеет единственное положительно-определенное решение тогда и только тогда, когда матрица $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} A$ шуровская, т.е.

$$\rho \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} A \right) < 1.$$

Вернемся к системе (4); введя составной вектор

$$g_k = \begin{pmatrix} x_k \\ e_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

запишем ее в матричном виде и введем в рассмотрение матрицы $A_{K,L}$, D_L и C :

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{g}_k &= \underbrace{\begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix}}_{A_{K,L}} g_k + \underbrace{\begin{pmatrix} D \\ D - LD_1 \end{pmatrix}}_{D_L} w_k, \quad g_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \\ z_k &= \underbrace{\begin{pmatrix} C_2 & 0 \end{pmatrix}}_C g_k. \end{aligned}$$

Заклучим состояние g_k системы (7) в инвариантный эллипсоид

$$\mathcal{E}_g = \{g \in \mathbb{R}^{2n} : g^T P^{-1} g \leq 1\},$$

порожденный матрицей $P \in \mathbb{S}^{2n}$, и будем минимизировать размер соответствующего ограничивающего эллипсоида

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^r: \quad z^\top (\mathcal{C}P\mathcal{C}^\top)^{-1} z \leq 1\}$$

по выходу z_k с матрицей $\mathcal{C}P\mathcal{C}^\top$. В качестве критерия его минимальности прием критерий следа, т.е. величину $\text{tr } \mathcal{C}P\mathcal{C}^\top$.

Заметив, что матрица $A_{K,L}$ представима в виде

$$\begin{aligned} A_{K,L} &= \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}}_A + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}}_{M_1} K \underbrace{\begin{pmatrix} I & -I \end{pmatrix}}_{N_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}}_{M_2} L \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -C_1 \end{pmatrix}}_{N_2}, \end{aligned}$$

в соответствии с теоремой 1 приходим к задаче минимизации функции $\text{tr } \mathcal{C}P\mathcal{C}^\top$ при ограничении

$$(8) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{\alpha} (A + M_1 K N_1 + M_2 L N_2) P (A + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)^\top - \\ &\quad - P + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} D_L D_L^\top = 0 \end{aligned}$$

относительно матричных переменных $0 \prec P \in \mathbb{S}^{2n}$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

В качестве критерия качества выберем функцию

$$(9) \quad f(K, L, \alpha) = \text{tr } \mathcal{C}P\mathcal{C}^\top + \chi_K \|K\|_F^2 + \chi_L \|L\|_F^2,$$

в которой помимо компоненты, определяющей размер ограничивающего эллипсоида по критерию следа, содержатся штрафы за величину матриц регулятора и наблюдателя (при этом коэффициенты $\chi_K, \chi_L > 0$ регулируют их важность); в то же время их наличие гарантирует коэрцитивность минимизируемой функции по K и L (см. раздел 4).

Замечание 1. Обратим внимание, что блочная матрица $A_{K,L}$ имеет те же собственные значения, что и стоящие на ее диагонали матрицы $A + BK$ и $A - LC_1$. В свою очередь, существование матриц K и L таких, чтобы матрицы $A + BK$ и $A - LC_1$ были устойчивыми, вытекает из свойств управляемости и наблюдаемости исходной системы.

В силу замечания 1 заведомо существуют матрицы K_0 и L_0 такие, что матрица A_{K_0, L_0} шуровская. Матрицы (K, L) , обладающие этим свойством, будем называть *стабилизирующей матричной парой*.

4. Оптимизация функции $f(K, L, \alpha)$

Итак, исходная задача синтеза динамической обратной связи при помощи наблюдателя, подавляющей воздействие внешних возмущений на выход z_k системы (1), свелась к задаче минимизации функции $f(K, L, \alpha)$, определяемой соотношением (9), при ограничении

$$(10) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L} P A_{K,L}^T - P + \frac{\delta^2}{1-\alpha} D_L D_L^T = 0$$

по переменным $P \in \mathbb{S}^{2n}$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ и скалярному параметру $\alpha > 0$. Запись $f(K, L, \alpha)$ подчеркивает, что при заданных K , L и α матрица P находится из уравнения Ляпунова (10); тем самым независимыми переменными являются K , L и α .

Установленные в [11] свойства функции $f(\alpha) = \text{tr} C P C^T$ (при некоторой фиксированной стабилизирующей паре (K, L)), могут быть полностью перенесены на рассматриваемый случай. В частности, функция $f(\alpha)$ определена, положительна и строго выпукла на интервале $\rho^2(A_{K,L}) < \alpha < 1$, а ее значения стремятся к бесконечности на концах этого интервала.

Минимизацию функции $f(\alpha)$ можно эффективно осуществлять при помощи метода Ньютона. А именно, зададимся некоторым начальным приближением $\rho^2(A_{K,L}) < \alpha_0 < 1$, например $\alpha_0 = (1 + \rho^2(A_{K,L}))/2$ и применим итерационный процесс

$$(11) \quad \alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)}.$$

При этом согласно [11]

$$f'(\alpha) = \text{tr} Y \left(\frac{\delta^2}{(1-\alpha)^2} D_L D_L^T - \frac{1}{\alpha^2} A_{K,L} P A_{K,L}^T \right),$$

$$f''(\alpha) = 2 \text{tr} Y \left(\frac{\delta^2}{(1-\alpha)^3} D_L D_L^T + \frac{1}{\alpha^3} A_{K,L} (P - X) A_{K,L}^T \right),$$

где P , Y и X – решения дискретных уравнений Ляпунова (10),

$$\frac{1}{\alpha} A_{K,L}^T Y A_{K,L} - Y + C^T C = 0$$

и

$$\frac{1}{\alpha} A_{K,L} X A_{K,L}^T - X + \frac{\delta^2}{(1-\alpha)^2} D_L D_L^T - \frac{1}{\alpha^2} A_{K,L} P A_{K,L}^T = 0$$

соответственно.

Следующая теорема гарантирует глобальную сходимость алгоритма.

Теорема 2 [11]. *В методе (11) справедливы оценки*

$$|\alpha_j - \alpha^*| \leq \frac{f''(\alpha_0)}{2^j f''(\alpha^*)} |\alpha_0 - \alpha^*|, \quad |\alpha_{j+1} - \alpha^*| \leq c |\alpha_j - \alpha^*|^2,$$

где $c > 0$ – некоторая константа (она может быть выписана явно).

Первая оценка гарантирует глобальную сходимость метода (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом $1/2$), а вторая – квадратичную сходимость в окрестности решения.

Перейдем к минимизации функции

$$f(K, L) \doteq \min_{\alpha} f(K, L, \alpha),$$

предварительно исследовав ее свойства.

Лемма 1 [1]. *Функция $f(K, L)$ определена и положительна на множестве \mathcal{S} стабилизирующих матричных пар.*

Множество определения \mathcal{S} функции $f(K, L)$ может быть невыпуклым и несвязным, причем, как и в непрерывном случае, его границы могут быть негладкими (см. [12]).

Лемма 2. *Функция $f(K, L, \alpha)$ определена при $(K, L) \in \mathcal{S}$ и для $\rho^2(A_{K,L}) < \alpha < 1$. На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями*

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} f(K, L, \alpha) &= \operatorname{tr} Y \left(\frac{\delta^2}{(1-\alpha)^2} D_L D_L^T - \frac{1}{\alpha^2} A_{K,L} P A_{K,L}^T \right), \\ (12) \quad \frac{1}{2} \nabla_K f(K, L, \alpha) &= \frac{1}{\alpha} M_1^T Y A_{K,L} P N_1^T + \chi_K K, \end{aligned}$$

$$(13) \quad \frac{1}{2} \nabla_L f(K, L, \alpha) = \frac{1}{\alpha} M_2^T Y A_{K,L} P N_2^T - \frac{\delta^2}{1-\alpha} (0 \quad I) Y D_L D_1^T + \chi_L L,$$

где матрица Y является решением дискретного уравнения Ляпунова

$$(14) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L}^T Y A_{K,L} - Y + C^T C = 0.$$

Минимум функции $f(K, L, \alpha)$ достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется необходимыми условиями

$$\nabla_K f(K, L, \alpha) = 0, \quad \nabla_L f(K, L, \alpha) = 0, \quad \nabla_{\alpha} f(K, L, \alpha) = 0.$$

При этом $f(K, L, \alpha)$ как функция от α строго выпукла на $\rho^2(A_{K,L}) < \alpha < 1$ и достигает минимума во внутренней точке этого интервала.

Доказательство этого и последующего утверждений приведены в Приложении.

Далее – для получения простых количественных оценок в лемме 3 – в минимизируемую функцию (9) вводится регуляризирующая добавка ε следующим образом:

$$f(K, L, \alpha) = \operatorname{tr} P(C^T C + \varepsilon I) + \chi_K \|K\|_F^2 + \chi_L \|L\|_F^2 \rightarrow \min_{K, L, \alpha}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Требование необходимости ее введения можно существенно ослабить, но цель сейчас состоит в получении наиболее простых и наглядных результатов.

Лемма 3. На множестве \mathcal{S} функция $f(K, L)$ коэрцитивна (т.е. стремится к бесконечности на его границе), причем справедливы следующие оценки:

$$(15) \quad \begin{aligned} f(K, L) &\geq \frac{\delta^2}{1 - \rho^2(A_{K,L})} \frac{\varepsilon}{1 - \sigma_{\min}^2(A_{K,L})} \|D_L\|_F^2, \\ f(K, L) &\geq \chi_K \|K\|^2, \\ f(K, L) &\geq \chi_L \|L\|^2. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{(K, L) \in \mathcal{S} : f(K, L) \leq f(K_0, L_0)\}.$$

Из леммы 3 вытекает очевидное

Следствие 1. Для любых $(K_0, L_0) \in \mathcal{S}$ множество \mathcal{S}_0 ограничено.

С другой стороны, у функции $f(K, L)$ на множестве \mathcal{S}_0 существует точка минимума (как у непрерывной – в силу свойств решения уравнения Ляпунова – функции на компактном множестве), но множество \mathcal{S}_0 не имеет общих точек с границей \mathcal{S} в силу (15). Выше было показано, что $f(K, L)$ дифференцируема на \mathcal{S}_0 . Следовательно, справедливо

Следствие 2. Существует точка минимума (K_, L_*) на множестве \mathcal{S} , и в ней градиент функции $f(K, L)$ обращается в нуль.*

Градиенты функции $f(K, L)$ по K и по L не являются липшицевыми на множестве \mathcal{S} стабилизирующих регуляторов, однако можно показать, что они обладают этим свойством на его подмножестве \mathcal{S}_0 .

Полученные свойства минимизируемой функции и ее производных позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость.

5. Алгоритм решения

Предлагаются следующий итеративный подход к решению задачи (8)–(9). В его основе лежит попеременное применение градиентного метода по переменным K и L и минимизация по параметру α по методу Ньютона.

Алгоритм минимизации $f(K, L, \alpha)$:

1. Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $0 < \tau_K, \tau_L < 1$ и начальной стабилизирующей матричной парой (K_0, L_0) .

Вычисляем величину

$$\alpha_0 = \frac{1 + \rho^2(\mathcal{A} + M_1 K_0 N_1 + M_2 L_0 N_2)}{2}.$$

2. На j -й итерации имеем величины K_j , L_j и α_j .
Вычисляем градиент $H_j^K = \nabla_K f(K_j, L_j, \alpha_j)$.

3. Делаем шаг градиентного метода по K :

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j^K H_j^K,$$

при этом длину шага $\gamma_j^K > 0$ подбираем дроблением γ_K до выполнения условий:

а. K_{j+1} обращает матрицу $(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L_j N_2) / \sqrt{\alpha_j}$ в шуровскую;

б. $f(K_{j+1}) \leq f(K_j) - \tau_K \gamma_j^K \|H_j^K\|^2$.

4. Имея величину K_{j+1} , вычисляем градиент $H_j^L = \nabla_L f(K_{j+1}, L_j, \alpha_j)$.

5. Делаем шаг градиентного метода по L :

$$L_{j+1} = L_j - \gamma_j^L H_j^L,$$

при этом длину шага $\gamma_j^L > 0$ подбираем дроблением γ_L до выполнения условий:

а. L_{j+1} обращает матрицу $(\mathcal{A} + M_1 K_{j+1} N_1 + M_2 L N_2) / \sqrt{\alpha_j}$ в шуровскую;

б. $f(L_{j+1}) \leq f(L_j) - \tau_L \gamma_j^L \|H_j^L\|^2$.

6. Для полученных K_{j+1} , L_{j+1} решаем задачу минимизации $f(K_{j+1}, L_{j+1}, \alpha)$ по α и получаем α_{j+1} . Переходим к п. 2.

Условие остановки:

$$\|H_j^K\| \leq \varepsilon, \quad \|H_j^L\| \leq \varepsilon.$$

В этом случае текущую пару (K_j, L_j) принимаем за приближенное решение и завершаем работу алгоритма.

Важным моментом является выбор пробного шага градиентного метода. Весьма перспективным является его выбор из следующих соображений. Пусть для некоторых K , L , α и $P \succ 0$ выполняется

$$\frac{1}{\alpha} (\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2) P (\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)^T - P + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} D_L D_L^T = 0.$$

Рассмотрим приращение по K :

$$K \rightarrow K - \gamma H^K, \quad H^K = \nabla_K f(K, L, \alpha),$$

и найдем, для каких γ матрица $\mathcal{A} + M_1 (K - \gamma H^K) N_1 + M_2 L N_2$ останется устойчивой (шуровской).

Для этого достаточно потребовать, чтобы P оставалась матрицей квадратичной функции Ляпунова для $\mathcal{A} + M_1 (K - \gamma H^K) N_1 + M_2 L N_2$, т.е.

$$(\mathcal{A} + M_1 (K - \gamma H^K) N_1 + M_2 L N_2) P (\mathcal{A} + M_1 (K - \gamma H^K) N_1 + M_2 L N_2)^T - P \prec 0$$

или

$$\begin{pmatrix} P & \mathcal{A} + M_1 (K - \gamma H^K) N_1 + M_2 L N_2 \\ (\mathcal{A} + M_1 (K - \gamma H^K) N_1 + M_2 L N_2)^T & P^{-1} \end{pmatrix} \succ 0.$$

Последнему соотношению можно придать вид

$$\begin{pmatrix} P & A_{K,L} \\ A_{K,L}^T & P^{-1} \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 0 & M_1 H^K N_1 \\ (M_1 H^K N_1)^T & 0 \end{pmatrix} \succ 0,$$

откуда, согласно [14],

$$0 < \gamma^K < \min_{\lambda_i > 0} \lambda_i \left(\begin{pmatrix} P & A_{K,L} \\ A_{K,L}^T & P^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & M_1 H^K N_1 \\ (M_1 H^K N_1)^T & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Аналогичным образом предлагается выбирать пробный шаг при оптимизации по переменной L :

$$0 < \gamma^L < \min_{\lambda_i > 0} \lambda_i \left(\begin{pmatrix} P & A_{K,L} \\ A_{K,L}^T & P^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & M_2 H^L N_2 \\ (M_2 H^L N_2)^T & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где $H^L = \nabla_L f(K, L, \alpha)$.

6. Пример: управление двухмассовой системой

Рассмотрим *двухмассовую систему* – систему из двух твердых тел с массами m_1 и m_2 , соединенных пружиной с коэффициентом упругости k , скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (рис. 1). К левому телу приложено управление u ; на каждое из тел воздействуют внешние возмущения w_1 и w_2 .

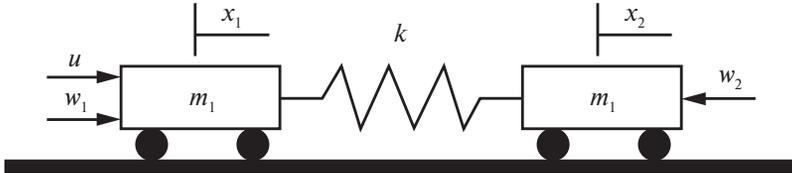


Рис. 1. Двухмассовая система.

Обозначим через x_1, v_1 координату и скорость левого тела, а через x_2, v_2 – правого тела. Наблюдению доступен зашумленный двумерный выход

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + w_3 \end{pmatrix},$$

а в качестве регулируемого выхода рассмотрим

$$z = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Будем полагать ограниченным в каждый момент времени объединенный вектор внешних возмущений:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \|w\| \leq 0,2.$$

При единичных параметрах двухмассовой системы и интервале дискретизации $\Delta = 0,1$ приходим к системе вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0,9950 & 0,0050 & 0,0998 & 0,0002 \\ 0,0050 & 0,9950 & 0,0002 & 0,0998 \\ -0,0997 & 0,0997 & 0,9950 & 0,0050 \\ 0,0997 & -0,0997 & 0,0050 & 0,9950 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0000 \\ 0,0998 \\ 0,0002 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0,0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0050 & 0 \\ 0,0998 & 0,0002 & 0 \\ 0,0002 & 0,0998 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зададимся некоторой начальной стабилизирующей парой

$$K_0 = (-6,9566 \quad 2,6036 \quad -4,1281 \quad -5,8682), \quad L_0 = \begin{pmatrix} 3,2037 & -0,6077 \\ 3,5790 & 0,3961 \\ 3,3299 & 0,1006 \\ -7,0446 & 5,3352 \end{pmatrix}$$

и положим

$$\chi_K = \chi_L = 0,1.$$

Итеративная процедура в соответствии со сформулированным выше алгоритмом приводит к матрице динамического регулятора

$$K^* = (-1,0311 \quad 0,6922 \quad -1,8064 \quad 0,0088), \quad \|K^*\| = 2,1921,$$

матрице наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 1,1630 & -0,1759 \\ 1,8237 & 0,3432 \\ 2,0765 & 0,0714 \\ -3,7874 & 2,6783 \end{pmatrix}, \quad \|L^*\| = 5,2735$$

и соответствующему ограничивающему эллипсу с матрицей

$$CP^*C^T = \begin{pmatrix} 0,3974 & 0,1478 \\ 0,1478 & 0,4115 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } CP^*C^T = 0,8089;$$

при этом $\alpha^* = 0,9714$. Динамика изменения критерия $f(K, L)$ показана на рис. 2.

Положив теперь

$$\chi_K = \chi_L = 0,01,$$

находим матрицу динамического регулятора

$$K'^* = (-1,3591 \quad 0,8130 \quad -2,5922 \quad 0,0186), \quad \|K'^*\| = 3,0378,$$

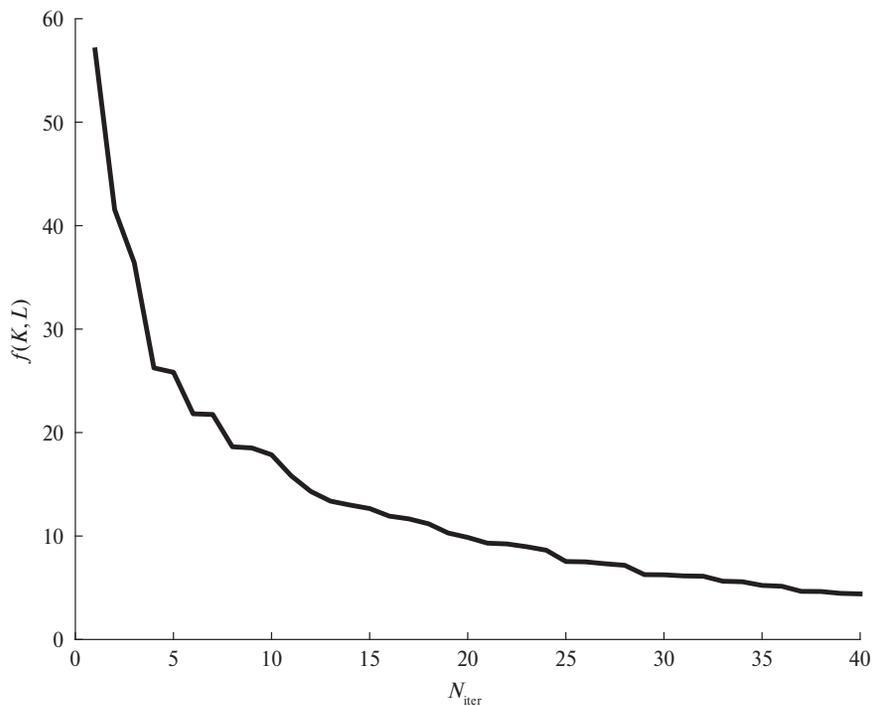


Рис. 2. Оптимизационная процедура при $\chi_K = \chi_L = 0,1$.

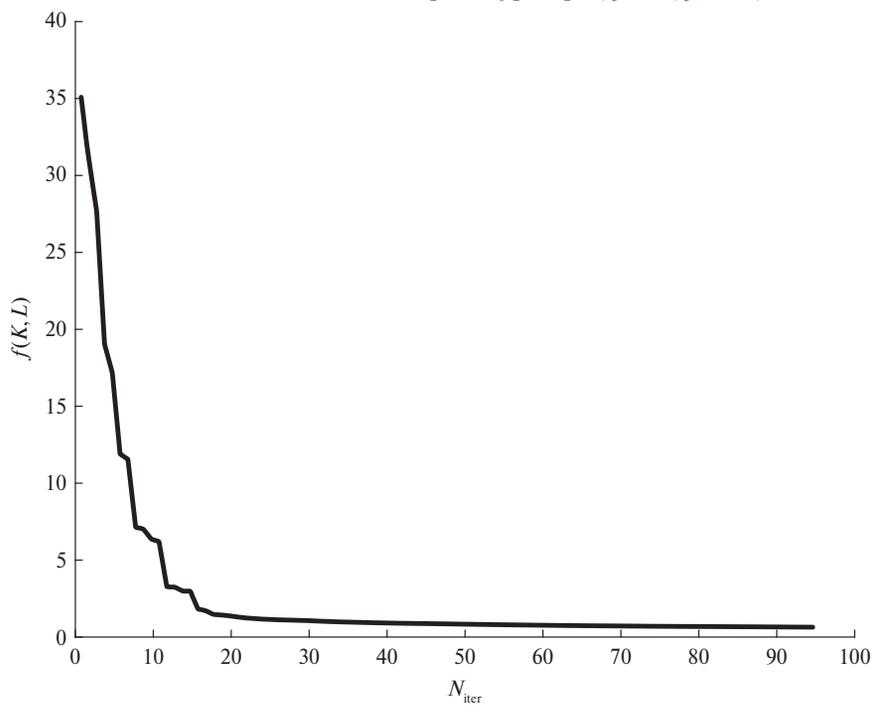


Рис. 3. Оптимизационная процедура при $\chi_K = \chi_L = 0,01$.

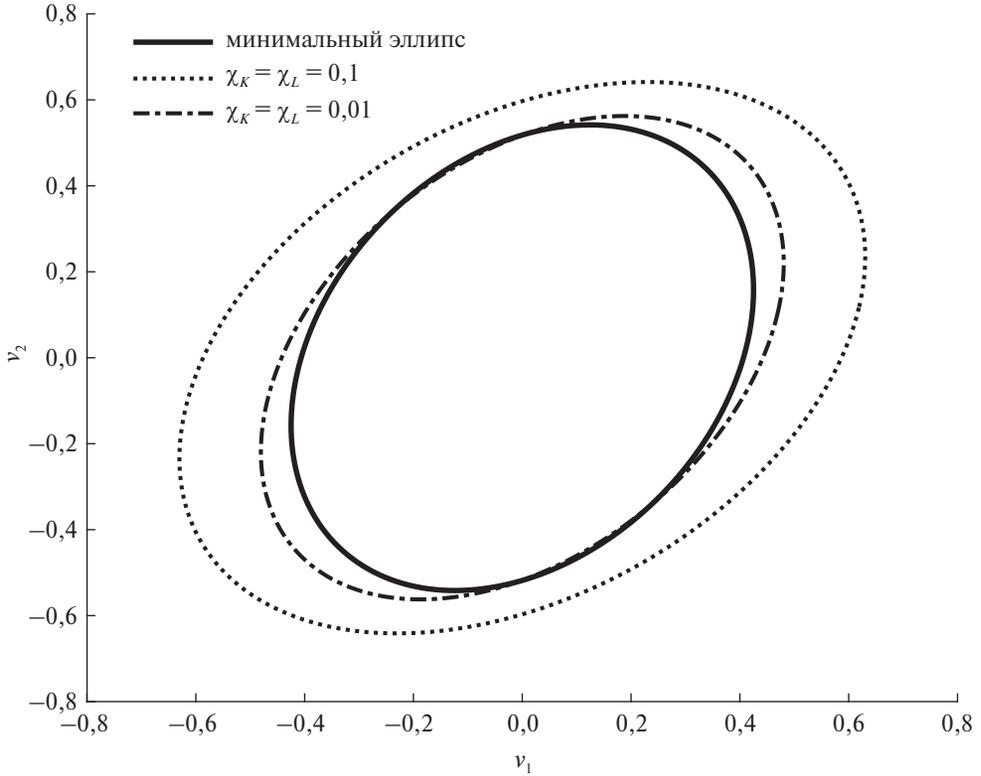


Рис. 4. Ограничивающие эллипсы.

матрицу наблюдателя

$$L'^* = \begin{pmatrix} 0,6899 & -0,0066 \\ 2,7589 & 0,5861 \\ 3,0458 & 0,1396 \\ -5,3792 & 3,8014 \end{pmatrix}, \quad \|L'^*\| = 7,4014$$

и соответствующий ограничивающий эллипс с матрицей

$$CP'^*C^T = \begin{pmatrix} 0,2310 & 0,1056 \\ 0,1056 & 0,3163 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } CP'^*C^T = 0,5473;$$

при этом $\alpha^* = 0,9677$. Динамика изменения критерия $f(K, L)$ показана на рис. 3.

Как видно, уменьшение штрафных коэффициентов привело к ожидаемому результату: размер ограничивающего эллипса уменьшился (примерно на треть); “платой” за это явился рост нормы матриц динамического регулятора и наблюдателя (приблизительно на 40%).

Для сравнения, воспользовавшись для решения этой же задачи подходом, предложенным в [10], находим матрицу динамического регулятора

$$\widehat{K} = (-15,2436 \quad 10,0353 \quad -10,7619 \quad -8,9984), \quad \|\widehat{K}\| = 23,0188,$$

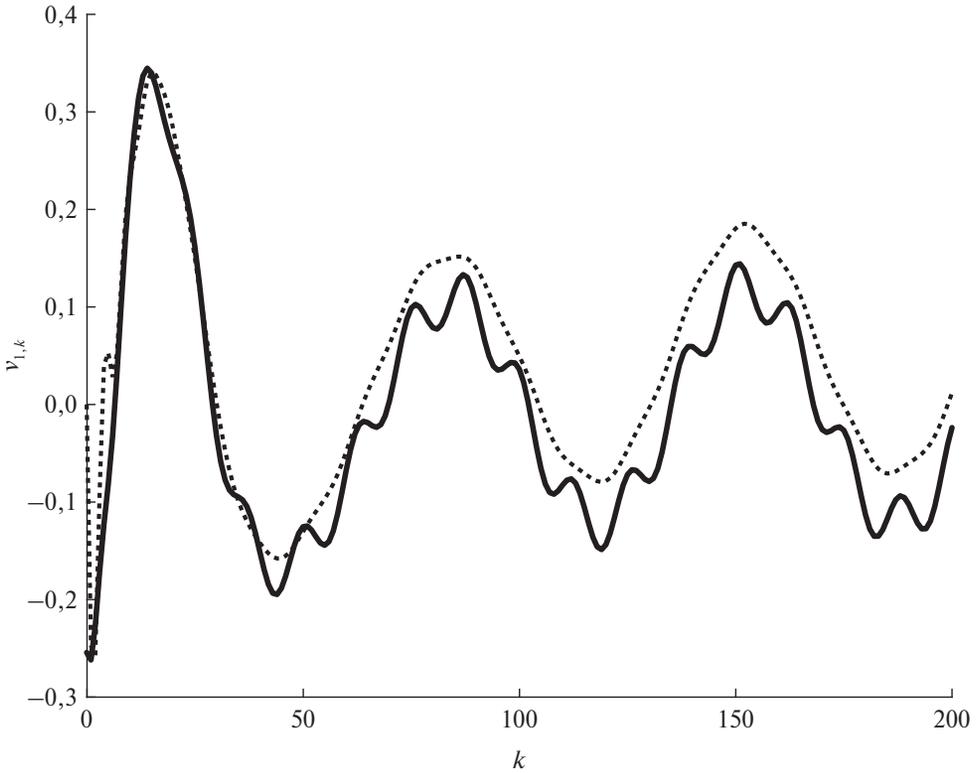


Рис. 5. Динамика координаты v_1 (сплошная линия) и ее оценки \hat{v}_1 (точечная линия).

и матрицу наблюдателя

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 3,0329 & 0,0004 \\ 14,9866 & 0,0818 \\ 20,9524 & 0,0080 \\ 6,6502 & 0,0405 \end{pmatrix}, \quad \|\hat{L}\| = 26,7774,$$

соответствующие минимальному ограничивающему эллипсу с матрицей

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0,1807 & 0,0672 \\ 0,0672 & 0,2935 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } \hat{R} = 0,4742.$$

Как видно, построенный ограничивающий эллипс с матрицей CP'^*C^T превышает оптимальный (с матрицей \hat{R}) всего лишь на 15%, тогда как соответствующие матрицы регулятора и наблюдателя отличаются по норме в несколько раз (для матрицы регулятора – почти на порядок).

На рис. 4 сплошной линией показан оптимальный ограничивающий эллипс, предоставляемый методом [10]; точечной линией показан полученный в соответствии с предлагаемой оптимизационной процедурой ограничивающий эллипс при $\chi_K = \chi_L = 0,1$, а штрихпунктиром – при $\chi_K = \chi_L = 0,01$.

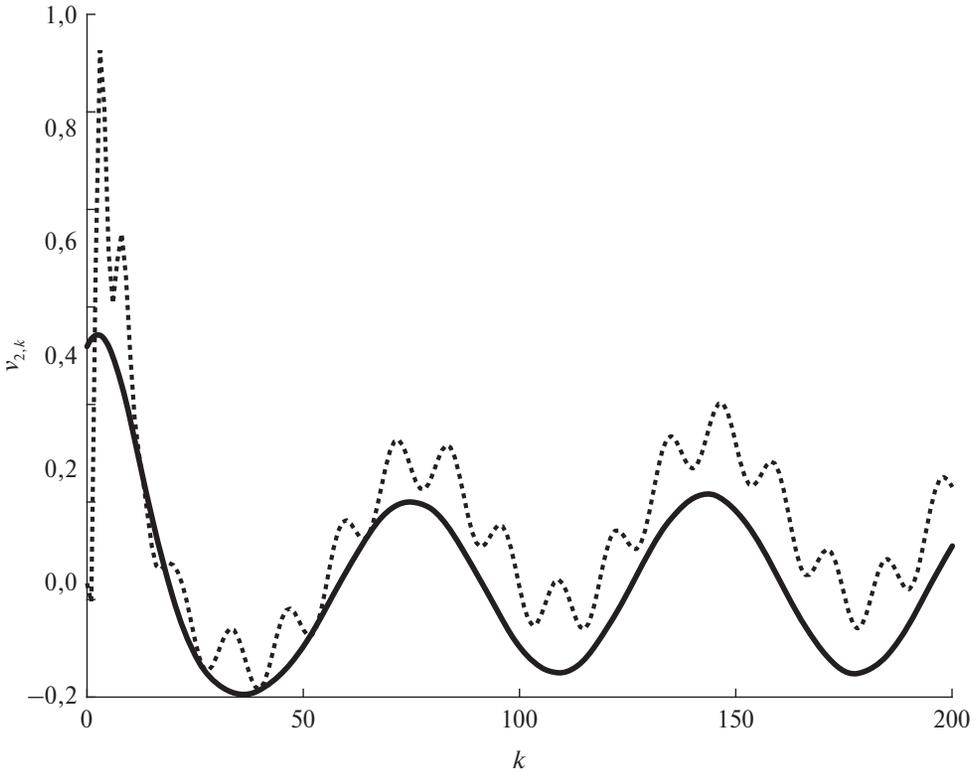


Рис. 6. Динамика координаты v_2 (сплошная линия) и ее оценки \hat{v}_2 (точечная линия).

На рис. 5 и 6 сплошной линией показаны истинные траектории оцениваемых координат системы (при некотором начальном условии и допустимом внешнем возмущении), а точечной линией — их оценки, предоставляемые построенной парой (K^*, L^*) .

7. Заключение

Предложен новый подход к задаче подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных дискретных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу. Подход основан на сведении исходной задачи к задаче матричной оптимизации, далее она решается градиентным методом. Конечно, возможно использование заметно более быстрых методов минимизации первого порядка, чем градиентный метод (в частности — метод сопряженных градиентов). Подробная проверка более эффективных методов предполагается в будущем; пока важна принципиальная возможность и эффективность нового подхода. Его практически-ориентированной особенностью является возможность ограничения величины матрицы наблюдателя и матрицы регулятора.

Одним из возможных направлений для дальнейших исследований является обобщение предлагаемого подхода на различные робастные постановки задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2. Дифференцирование по α производится в соответствии с результатами, приведенными в разделе 4.

Для дифференцирования по K функции (9) при ограничении в виде дискретного уравнения Ляпунова

$$(П.1) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L} P A_{K,L}^T - P + \frac{\delta^2}{1-\alpha} D_L D_L^T = 0$$

относительно матрицы P инвариантного эллипсоида придадим величине K приращение ΔK и обозначим соответствующее приращение P через ΔP :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} (\mathcal{A} + M_1(K + \Delta K)N_1 + M_2LN_2)(P + \Delta P)(\mathcal{A} + M_1(K + \Delta K)N_1 + M_2LN_2)^T - \\ - (P + \Delta P) + \frac{\delta^2}{1-\alpha} D_L D_L^T = 0. \end{aligned}$$

Оставляя обозначение ΔP для главной части приращения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} (A_{K,L} P A_{K,L}^T + A_{K,L} P (M_1 \Delta K N_1)^T + M_1 \Delta K N_1 P A_{K,L}^T + A_{K,L} \Delta P A_{K,L}^T) - \\ - (P + \Delta P) + \frac{\delta^2}{1-\alpha} D_L D_L^T = 0. \end{aligned}$$

После вычитания уравнения (П.1) из этого уравнения имеем:

$$(П.2) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L} \Delta P A_{K,L}^T - \Delta P + \frac{1}{\alpha} (A_{K,L} P (M_1 \Delta K N_1)^T + M_1 \Delta K N_1 P A_{K,L}^T) = 0.$$

Вычислим приращение функции $f(K, L, \alpha)$ по K , линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned} \Delta_K f(K, L, \alpha) &= f(K + \Delta K, L, \alpha) - f(K, L, \alpha) = \\ &= \text{tr } \mathcal{C}(P + \Delta P)\mathcal{C}^T + \chi_K \|K + \Delta K\|_F^2 - (\text{tr } \mathcal{C}P\mathcal{C}^T + \chi_K \|K\|_F^2) = \\ &= \text{tr } \mathcal{C}\Delta P\mathcal{C}^T + \chi_K (\langle K + \Delta K, K + \Delta K \rangle - \langle K, K \rangle) = \\ &= \text{tr } \mathcal{C}\Delta P\mathcal{C}^T + \chi_K (\text{tr } K^T \Delta K + \text{tr } (\Delta K)^T K) = \text{tr } \Delta P\mathcal{C}^T \mathcal{C} + 2\chi_K \text{tr } K^T \Delta K. \end{aligned}$$

Из двойственных уравнений Ляпунова (П.2) и (14) имеем (см. [11, лемма П.1.1])

$$\text{tr } \Delta P\mathcal{C}^T \mathcal{C} = \frac{2}{\alpha} \text{tr } Y M_1 \Delta K N_1 P A_{K,L}^T$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_K f(K, L, \alpha) &= \frac{2}{\alpha} \text{tr } Y M_1 \Delta K N_1 P A_{K,L}^T + 2\chi_K \text{tr } K^T \Delta K = \\ &= 2 \left\langle \frac{1}{\alpha} M_1^T Y A_{K,L} P N_1^T + \chi_K K, \Delta K \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к соотношению (12).

Перейдем к дифференцированию функции $f(K, L, \alpha)$ по L : придадим величине L приращение ΔL и обозначим соответствующее приращение P через ΔP :

$$\frac{1}{\alpha}(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2(L + \Delta L)N_2)(P + \Delta P)(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2(L + \Delta L)N_2)^T - (P + \Delta P) + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \begin{pmatrix} D \\ D - (L + \Delta L)D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ D - (L + \Delta L)D_1 \end{pmatrix}^T = 0.$$

Оставляя обозначение ΔP для главной части приращения, получаем

$$\frac{1}{\alpha}(A_{K,L} P A_{K,L}^T + A_{K,L} P (M_2 \Delta L N_2)^T + M_2 \Delta L N_2 P A_{K,L}^T) - (P + \Delta P) + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \left[D_L D_L^T - \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} D_L^T - D_L \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix}^T \right] = 0.$$

После вычитания уравнения (II.1) из этого уравнения имеем

$$(II.3) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L} \Delta P A_{K,L}^T - \Delta P + \frac{1}{\alpha} (A_{K,L} P (M_2 \Delta L N_2)^T + M_2 \Delta L N_2 P A_{K,L}^T) - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} D_L^T + D_L \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix}^T \right] = 0.$$

Вычислим приращение функции $f(K, L, \alpha)$ по L , линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned} \Delta_L f(K, L, \alpha) &= f(K, L + \Delta L, \alpha) - f(K, L, \alpha) = \\ &= \text{tr } \mathcal{C}(P + \Delta P) \mathcal{C}^T + \chi_L \|L + \Delta L\|_F^2 - (\text{tr } \mathcal{C} P \mathcal{C}^T + \chi_L \|L\|_F^2) = \\ &= \text{tr } \mathcal{C} \Delta P \mathcal{C}^T + \chi_L (\langle L + \Delta L, L + \Delta L \rangle - \langle L, L \rangle) = \\ &= \text{tr } \mathcal{C} \Delta P \mathcal{C}^T + \chi_L (\text{tr } L^T \Delta L + \text{tr } (\Delta L)^T L) = \text{tr } \Delta P \mathcal{C}^T \mathcal{C} + 2\chi_L \text{tr } L^T \Delta L. \end{aligned}$$

Из двойственных уравнений (II.3) и (14) имеем

$$\text{tr } \Delta P \mathcal{C}^T \mathcal{C} = 2 \text{tr } Y \left[\frac{1}{\alpha} M_2 \Delta L N_2 P A_{K,L}^T - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} D_L^T \right]$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_L f(K, L, \alpha) &= \\ &= 2 \text{tr } Y \left[\frac{1}{\alpha} M_2 \Delta L N_2 P A_{K,L}^T - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} D_L^T \right] + 2\chi_L \text{tr } L^T \Delta L = \\ &= 2 \text{tr} \left[\frac{1}{\alpha} N_2 P A_{K,L}^T Y M_2 \Delta L - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} D_1 D_L^T Y \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \Delta L \right] + 2\chi_L \text{tr } L^T \Delta L = \\ &= 2 \left\langle \frac{1}{\alpha} M_2^T Y A_{K,L} P N_2^T - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} (0 \ I) Y D_L D_1^T + \chi_L L, \Delta L \right\rangle, \end{aligned}$$

откуда и следует формула (13).

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим последовательность стабилизирующих матричных пар $\{K_j, L_j\} \in \mathcal{S}$ такую, что

$$(K_j, L_j) \rightarrow (K, L) \in \partial\mathcal{S},$$

т.е. $\rho(A_{K,L}) = 1$. Это означает, что для любого $\epsilon > 0$ найдется число $N = N(\epsilon)$ такое, что неравенство

$$|\rho(A_{K_j, L_j}) - \rho(A_{K, L})| = 1 - \rho(A_{K_j, L_j}) < \epsilon$$

справедливо для всех $j \geq N(\epsilon)$.

Пусть P_j – решение дискретного уравнения Ляпунова (10), ассоциированного с парой (K_j, L_j) :

$$\frac{1}{\alpha_j} A_{K_j, L_j} P_j A_{K_j, L_j}^T - P_j + \frac{\delta^2}{1 - \alpha_j} D_{L_j} D_{L_j}^T = 0,$$

а Y_j – решение двойственного к нему дискретного уравнения Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha_j} A_{K_j, L_j}^T Y_j A_{K_j, L_j} - Y_j + \mathcal{C}^T \mathcal{C} + \epsilon I = 0.$$

Тогда (см. [12, лемма П.1])

$$\begin{aligned} f(K_j, L_j) &= \text{tr } P_j (\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \epsilon I) + \chi_K \|K_j\|_F^2 + \chi_L \|L_j\|_F^2 \geq \text{tr } P_j (\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \epsilon I) = \\ &= \text{tr } Y_j \frac{\delta^2}{1 - \alpha_j} D_{L_j} D_{L_j}^T \geq \frac{\delta^2}{1 - \alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \text{tr}(D_{L_j} D_{L_j}^T) \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{1 - \alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \epsilon I)}{1 - \sigma_{\min}^2(A_{K_j, L_j})} \text{tr}(D_{L_j} D_{L_j}^T) \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{1 - \rho^2(A_{K_j, L_j})} \frac{\epsilon}{1 - \sigma_{\min}^2(A_{K_j, L_j})} \|D_{L_j}\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{\epsilon} \frac{\epsilon}{1 - \sigma_{\min}^2(A_{K_j, L_j})} \|D_{L_j}\|_F^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

поскольку

$$\rho^2(A_{K_j, L_j}) < \alpha_j < 1.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} f(K_j, L_j) &= \text{tr } P_j (\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \epsilon I) + \chi_K \|K_j\|_F^2 + \chi_L \|L_j\|_F^2 \geq \\ &\geq \chi_K \|K_j\|_F^2 \geq \chi_K \|K_j\|^2 \xrightarrow{\|K_j\| \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f(K_j, L_j) &= \text{tr } P_j (\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \epsilon I) + \chi_K \|K_j\|_F^2 + \chi_L \|L_j\|_F^2 \geq \\ &\geq \chi_L \|L_j\|_F^2 \geq \chi_L \|L_j\|^2 \xrightarrow{\|L_j\| \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации // *АиТ*. 2022. № 3. С. 7–32.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Observer-Aided Output Feedback Synthesis as an Optimization Problem // *Autom. Remote Control*. 2022. V. 83. No. 3. P. 303–324.
2. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007.
3. Luenberger D.G. An Introduction to Observers // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1971. V. AC-16. No. 6. P. 596–620.
4. Levine W., Athans M. On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1970. V. 15. No. 1. P. 44–48.
5. Fatkhullin I., Polyak B. Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // *SIAM J. Control Optim.* 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.
6. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // *АиТ*. 2008. № 5. С. 72–90.
Polyak B.T., Topunov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // *Autom. Remote Control*. 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.
7. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
8. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
9. Peregudin A., Furtat I. New Duality Relations in Linear Systems and Optimal Control Under Bounded Disturbances // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2024. V. 69. No. 8. P. 5569–5576.
10. Dogadin E., Peregudin A., Shirokih D. Optimal Control for Discrete-Time Systems under Bounded Disturbances // *Proc. 2024 American Control Conf. (ACC)*. Toronto, Canada, 2024. P. 1940–1945.
11. Хлебников М.В. Сравнение гарантирующего и калмановского фильтров // *АиТ*. 2023. № 4. С. 64–95.
Khlebnikov M.V. A Comparison of Guaranteeing and Kalman Filters // *Autom. Remote Control*. 2023. V. 84. No. 4. P. 434–459.
12. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // *АиТ*. 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // *Autom. Remote Control*. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
13. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // *АиТ*. 2021. № 1. С. 3–54.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // *Autom. Remote Control*. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.

14. Поляк В.Т., Щербakov П.С. Техника D-разбиения при решении линейных матричных неравенств // *АиТ*. 2006. № 11. С. 159–174.
Polyak V.T., Shcherbakov P.S. The D-Decomposition Technique for Linear Matrix Inequalities // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 11. P. 1847–1861.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 10.06.2024

После доработки 26.09.2024

Принята к публикации 22.10.2024