

© 2024 г. Д.Н. ИБРАГИМОВ, канд. физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.com),  
К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)  
(Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет);  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КРОТОВА<sup>1</sup>

Разработан метод исследования задачи быстродействия для линейной дискретной системы, позволяющий в общем случае улучшать известные верхние оценки времени быстродействия и находить гарантирующие процессы управления. Получены достаточные условия, при которых имеет место сходимость к оптимальному решению в задаче. Метод реализован в виде эффективного численного алгоритма.

*Ключевые слова:* задача быстродействия, линейные дискретные системы, последовательные глобальные улучшения.

**DOI:** 10.31857/S0005231024110013, **EDN:** YMLONE

### 1. Введение

Задача быстродействия известна достаточно давно как задача оптимального управления, в которой роль функционала качества играет время, затрачиваемое системой на достижение некоторого заданного терминального состояния [1–3]. При рассмотрении систем с непрерывным временем данная задача естественным образом вкладывается в общую проблематику классической теории оптимального управления. Так, в случае линейных непрерывных систем применение принципа максимума Понтрягина [1] гарантирует получение решения задачи в виде релейной функции управления.

Системы с дискретным временем имеют в этом смысле ряд фундаментальных отличий [4–6]. Если большую часть задач теории оптимального управления дискретными системами удастся решить посредством дискретного принципа максимума [6, 7] и/или метода динамического программирования [8], то для решения задачи быстродействия эти подходы оказываются неприменимы даже при наличии ограничений на линейную структуру рассматриваемой

---

<sup>1</sup> Теорема 1 доказана Д.Н. Ибрагимовым за счет средств проекта Российского научного фонда № 25-21-00018 <https://rscf.ru/project/25-21-00018> в МАИ (НИУ). Теоремы 2 и 3 доказаны К.А. Царьковым за счет средств проекта Российского научного фонда № 22-11-00042 <https://rscf.ru/project/22-11-00042> в ИПУ РАН.

системы. Основными причинами здесь являются нерегулярность экстремума для почти всех начальных состояний, неединственность оптимальной траектории и дискретный характер функционала качества [9, 10]. Использование многих современных результатов теории оптимального управления дискретными системами [11, 12] по отношению к указанной задаче также оказывается некорректным, а известные работы, касающиеся непосредственно задачи быстрогодействия для систем с дискретным временем, охватывают только ряд частных случаев [13, 14]. С практической точки зрения актуальным является получение результатов, которые могут быть использованы в случае линейной системы произвольной размерности с выпуклым множеством геометрических ограничений на управление. При рассмотрении таких систем результаты упомянутых выше работ либо труднореализуемы в вычислительном плане, либо вовсе применимы лишь при существенных дополнительных предположениях.

В настоящей статье разрабатывается эффективный численный алгоритм поиска оптимального по быстродействию управления для линейных дискретных систем. Одной из наиболее известных и хорошо зарекомендовавших себя численных схем решения различных линейных задач оптимального управления является метод Кротова [15, 16]. В его основе лежат разработанные В.Ф. Кротовым, В.И. Гурманом и М.М. Хрустальевым достаточные условия глобальной оптимальности [17] и принцип расширения экстремальных задач [18]. Ряд работ также посвящен реализации этого метода в случае дискретных и дискретно-непрерывных управляемых систем, см. [19, 20]. Метод Кротова представляет собой итерационный процесс построения последовательных улучшений некоторого выбранного заранее управления заданной динамической системой. Важнейшей особенностью метода является его нелокальность. Последнее означает, что в процессе применения итераций новые управления не обязаны быть близки к найденным на предыдущих шагах ни в смысле какого-либо расстояния в пространстве допустимых управлений, ни в смысле значений оптимизируемого функционала качества. В случае линейных систем эта особенность проявляется наиболее явно, поскольку зачастую оптимальное управление удастся определить уже за одну первую итерацию применения метода Кротова, исходя из любого начального приближения [19, 21].

В данной работе метод Кротова применяется для поиска оптимального по быстродействию управления при известных оценках на время быстрогодействия. Для построения оценок предлагается использовать несколько альтернативных подходов. В общем случае в этих целях могут быть использованы результаты работ [9, 10, 22], хотя во многих ситуациях их вычислительная сложность оказывается значительной. Поэтому в разделе 3 предлагается новый подход к построению оценок времени быстрогодействия для случая, когда матрица рассматриваемой линейной системы является диагонализируемой. После того как указанные оценки построены, возможно осуществить переход к задаче с фиксированным временем функционирования системы. Этот переход подробно описан в разделе 4. Затем к полученной задаче применяется

метод Кротова (раздел 5). В разделе 6 сформулирован общий численный алгоритм исследования задачи быстродействия. Раздел 7 содержит ряд примеров, иллюстрирующих эффективность и особенности применения алгоритма при решении конкретных задач.

В сравнении с предыдущими работами одного из авторов [9, 10, 22] не предполагается получение аналитических условий оптимальности процесса управления в задаче быстродействия. Вместо этого предлагается конструкция численной процедуры, позволяющей в ряде случаев приближенно находить оптимальные по быстродействию процессы. В сравнении с [22], где предлагалось построение двусторонних оценок времени быстродействия на основе геометрических методов, оценки в этой статье строятся аналитически, но для более узкого класса систем. Полностью новой является идея использования метода глобальных улучшений Кротова при исследовании задачи быстродействия в дискретном времени. До этого метод Кротова применялся одним из авторов при исследовании некоторых задач оптимального управления непрерывными системами [23].

В рамках настоящей работы ограничимся рассмотрением стационарных линейных дискретных систем с невырожденной матрицей и выпуклым компактным множеством геометрических ограничений на управление. Условие невырожденности используется для обоснования сходимости предлагаемой итерационной процедуры. Условие стационарности несущественно и принято для простоты.

## 2. Постановка задачи и общая идея решения

Рассмотрим линейную стационарную систему с дискретным временем

$$(1) \quad x(k+1) = Ax(k) + u(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\},$$

где  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  – состояние системы,  $u(k) \in U$  – управление,  $U$  – выпуклое компактное множество в  $\mathbb{R}^n$  такое, что  $0 \in \text{int}U$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – заданная невырожденная матрица ( $\det A \neq 0$ ). Начальное условие для системы (1) фиксировано:

$$(2) \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Требуется вычислить минимальное число шагов  $N_{\min}$ , за которое возможно перевести систему (1) из заданного начального состояния  $x_0$  в начало координат и построить оптимальный процесс  $\{x^*(k), u^*(k-1)\}_{k=1}^{N_{\min}}$ , удовлетворяющий условию  $x^*(N_{\min}) = 0$ . Число  $N_{\min}$  будем далее называть временем быстродействия системы (1) с начальным условием (2) и будем предполагать, что поставленная задача разрешима, т.е.  $N_{\min} < \infty$ .

Исследование задачи будем проводить в два обособленных этапа. Дадим сперва их краткое описание.

На первом этапе производится оценка времени быстрогодействия  $N_{\min}$ . В некоторых ситуациях  $N_{\min}$  возможно вычислить точно, но в общем случае предполагается построение двусторонней оценки

$$(3) \quad \overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}},$$

где равенство  $\overline{N_{\min}} = \underline{N_{\min}}$  не исключается. Для этой цели могут быть использованы теоретические результаты из [9, 10] и алгоритмические подходы из [22]. В следующем разделе предлагается новый подход к построению оценки (3) в том случае, когда матрица  $A$  в системе (1) имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов.

На втором этапе решается задача оптимального управления при фиксированном времени  $N$  функционирования системы (1)–(2) относительно функционала  $\|x(N)\|^2$  квадрата евклидовой нормы вектора  $x(N)$ , где  $N$  принимает значения  $\overline{N_{\min}}, \dots, \underline{N_{\min}}$ . Наименьшее  $N$ , при котором минимальное значение  $\|x^*(N)\|^2$  равно нулю, дает время быстрогодействия  $N_{\min} = N$ , а соответствующее  $\{x^*(k), u^*(k-1)\}_{k=1}^N$  представляет собой искомый оптимальный процесс. Метод поиска оптимального процесса сформулирован и обоснован в разделах 4 и 5. Раздел 6 посвящен совместной алгоритмической реализации описанных этапов.

### 3. Оценка времени быстрогодействия

Как продемонстрировано в [9, 10, 22], вычисление величины  $N_{\min}$  может быть сведено к построению класса множеств 0-управляемости  $\{\Xi(N)\}_{N=0}^{\infty}$ . Здесь  $\Xi(N) \subset \mathbb{R}^n$  – множество тех начальных состояний, из которых систему (1) возможно перевести в начало координат за  $N$  шагов, т.е.

$$(4) \quad \Xi(N) := \begin{cases} \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \exists u(0), \dots, u(N-1) \in U : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0, \end{cases}$$

где через  $x(N)$  обозначено решение системы (1) при  $x(0) = \xi$ .

Поскольку задача быстрогодействия для заданного начального состояния (2) предполагается разрешимой, то верно включение

$$x_0 \in \bigcup_{N=0}^{\infty} \Xi(N).$$

Поэтому с учетом (4) имеет место

$$(5) \quad N_{\min} = \min\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \Xi(N)\}.$$

Процесс построения  $\{\Xi(N)\}_{N=0}^{\infty}$  является весьма трудоемкой процедурой, что обусловлено следующим представлением множеств 0-управляемости.

*Лемма 1* [9, лемма 1]. Пусть последовательность  $\{\Xi(N)\}_{N=0}^{\infty}$  определяется согласно (4) и  $\det A \neq 0$ . Тогда для всех  $N \in \mathbb{N}$  верно соотношение

$$\Xi(N) = - \sum_{k=1}^N (A^{-k}U),$$

где символ суммы означает сложение множеств по Минковскому.

Операция сложения множеств, как правило, труднореализуема с вычислительной точки зрения. Пусть, к примеру,  $U$  представляет собой многогранник в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда каждое множество  $\Xi(N)$  также является многогранником [24, следствие 19.3.2] и описательная сложность многогранников  $\Xi(N)$  (т.е. число их вершин) растет экспоненциально по  $N$  [25, теорема 4.1.2].

Однако при некоторых дополнительных предположениях относительно матрицы  $A$  и множества  $U$  возможно вычислить двустороннюю априорную оценку  $N_{\min}$  без необходимости построения последовательности  $\{\Xi(N)\}_{N=0}^{\infty}$  явным образом. Ниже рассматривается один из таких случаев.

Введем вспомогательные обозначения. Пусть  $u_{\max} > 0$  и  $\lambda \neq 0$  – некоторые действительные числа. Рассмотрим отображение  $F(\cdot; u_{\max}, \lambda): \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$ , заданное в виде

$$(6) \quad F(\alpha; u_{\max}, \lambda) = \begin{cases} \frac{|\alpha|}{u_{\max}}, & |\lambda| = 1, \\ - \frac{\ln \left( 1 - \frac{|\alpha|}{u_{\max}} (|\lambda| - 1) \right)}{\ln |\lambda|}, & |\lambda| \neq 1. \end{cases}$$

Для произвольного  $\varphi \in \mathbb{R}$  через  $A_{\varphi} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  обозначим матрицу поворота

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

а через  $\mathcal{B}_R$  – замкнутый шар радиуса  $R$  с центром в нуле в  $\mathbb{R}^2$ . Также введем обозначение для  $m$ -арного декартова произведения произвольных множеств  $V_1, \dots, V_m$ :

$$\bigotimes_{i=1}^m V_i := V_1 \times \dots \times V_m.$$

*Лемма 2.* Пусть в системе (1) выполнено условие  $N_{\min} < \infty$ , найдутся числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1} \neq 0$ ,  $r_1, \dots, r_{n_2} > 0$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2} \in \mathbb{R}$  такие, что

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_{n_1} & & \\ \vdots & & & r_1 A_{\varphi_1} & \vdots \\ 0 & & \dots & & r_{n_2} A_{\varphi_{n_2}} \end{pmatrix},$$

и числа  $u_{1,\max}, \dots, u_{n_1,\max}, R_{1,\max}, \dots, R_{n_2,\max} > 0$  такие, что

$$U = \bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u_{i,\max}; u_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R_{j,\max}},$$

где  $n_1, n_2 \geq 0$  и  $n_1 + 2n_2 = n$ .

Тогда включение  $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})^T \in \Xi(N)$  справедливо в том и только том случае, когда верно неравенство

$$N \geq \max \left\{ \max_{i=1, n_1} F(x_{0,i}; u_{i,\max}, \lambda_i); \max_{j=1, n_2} F \left( \sqrt{x_{0, n_1+2j-1}^2 + x_{0, n_1+2j}^2}; R_{j,\max}, r_j \right) \right\}.$$

Для удобства читателя доказательства утверждений из этого и последующих разделов отнесены в Приложение.

Отметим, что в рамках леммы 2 допустимы значения  $n_2 = 0$  или  $n_1 = 0$ . В этом случае в матрице  $A$  соответствующие блоки отсутствуют, а все ее собственные значения являются либо действительными, либо существенно комплексными.

*Следствие 1.* При выполнении предположений леммы 2 в силу (5) имеет место точное равенство

$$N_{\min} = \left\lceil \max \left\{ \max_{i=1, n_1} F(x_{0,i}; u_{i,\max}, \lambda_i); \max_{j=1, n_2} F \left( \sqrt{x_{0, n_1+2j-1}^2 + x_{0, n_1+2j}^2}; R_{j,\max}, r_j \right) \right\} \right\rceil,$$

где  $\lceil \alpha \rceil$  означает минимальное целое число не меньшее, чем  $\alpha$ :

$$\lceil \alpha \rceil := \min \{ k \in \mathbb{Z} : \alpha \leq k \}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Результат следствия 1 применим только к узкому классу систем  $(A, U)$ , описываемых условиями леммы 2. Но его можно использовать для получения двусторонних оценок времени быстрогодействия в случае произвольной диагоналируемой матрицы  $A$  и выпуклого множества  $U$ . В этих целях предлагается рассмотреть вспомогательные системы вида (1), удовлетворяющие условиям леммы 2, и воспользоваться следующим утверждением.

*Лемма 3.* Пусть справедливо включение  $\underline{U} \subset U \subset \overline{U}$ , где  $\underline{U}, U, \overline{U} \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклые и компактные множества, содержащие 0, задача быстрогодействия для  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  разрешима для систем  $(A, \underline{U})$ ,  $(A, U)$ ,  $(A, \overline{U})$ , а величины  $\underline{N}_{\min}$ ,  $N_{\min}$ ,  $\overline{N}_{\min}$  – оптимальные значения критерия в задаче быстрогодействия для данных систем соответственно. Тогда

$$\overline{N}_{\min} \leq N_{\min} \leq \underline{N}_{\min}.$$

Известно, что любая матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , обладающая  $n$  линейно независимыми собственными векторами, может быть приведена к виду, представленному в лемме 2, при помощи преобразования подобия [26, теорема 3.4.5]. Столбцы матрицы данного преобразования  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  представляют собой либо собственные векторы для действительных собственных значений, либо их мнимые и действительные части для комплексных собственных значений. Аналогичное линейное преобразование можно применить ко всей системе  $(A, U)$  в целом, перейдя к эквивалентной системе  $(S^{-1}AS, S^{-1}U)$  так, как это продемонстрировано в [27]. А именно, справедлив следующий результат.

*Лемма 4* [27, лемма 2]. Пусть  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\det S \neq 0$ ,  $(A, U)$  – система вида (1), через  $\{\tilde{\Xi}(N)\}_{N=0}^{\infty}$  обозначен класс множеств 0-управляемости системы  $(S^{-1}AS, S^{-1}U)$ . Тогда

$$\Xi(N) = S\tilde{\Xi}(N), \quad N \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

В рамках рассматриваемой задачи множество  $S^{-1}U$  может быть оценено сверху и снизу множествами  $\underline{U}, \overline{U} \subset \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющими условиям леммы 2. В сочетании с леммой 3 это приводит к искомым оценкам величины  $N_{\min}$  в исходной задаче быстрогодействия. Более точно, имеет место следующее.

*Теорема 1.* Пусть в системе (1) для заданного начального состояния  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  верно, что  $N_{\min} < \infty$ , матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов,  $\det A \neq 0$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – матрица перехода в вещественный жорданов базис матрицы  $A$ :

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_{n_1} & & \\ \vdots & & & r_1 A_{\varphi_1} & \vdots \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & r_{n_2} A_{\varphi_{n_2}} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедлива следующая оценка  $N_{\min}$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \max \left\{ \max_{i=1, n_1} F(y_{0,i}; u''_{i,\max}, \lambda_i); \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \max_{j=1, n_2} F \left( \sqrt{y_{0, n_1+2j-1}^2 + y_{0, n_1+2j}^2}; R''_{j,\max}, r_j \right) \right\} \right] \leq N_{\min} \leq \\ & \leq \left[ \max \left\{ \max_{i=1, n_1} F(y_{0,i}; u'_{i,\max}, \lambda_i); \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \max_{j=1, n_2} F \left( \sqrt{y_{0, n_1+2j-1}^2 + y_{0, n_1+2j}^2}; R'_{j,\max}, r_j \right) \right\} \right], \end{aligned}$$

где  $y_0 = S^{-1}x_0$ , а числа  $u'_{i,\max}, u''_{i,\max}, R'_{j,\max}, R''_{j,\max} > 0$ ,  $i = \overline{1, n_1}$ ,  $j = \overline{1, n_2}$ , определяются из условия

$$\bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u'_{i,\max}; u'_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R'_{j,\max}} \subset S^{-1}U \subset \bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u''_{i,\max}; u''_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R''_{j,\max}}.$$

Теорема 1 позволяет получить априорные оценки величины  $N_{\min}$  для начального состояния  $x_0$  только в случае, когда у матрицы системы  $A$  существует  $n$  линейно независимых собственных векторов. Данный факт существенен, так как результатов, аналогичных лемме 2, получить не удастся, если вещественная жорданова форма матрицы  $A$  содержит жордановы клетки, соответствующие кратным собственным значениям. Это связано со сложностью построения множеств, инвариантных относительно такого рода линейного преобразования.

*Замечание 1.* В утверждении теоремы 1 фигурируют величины  $u'_{i,\max}, u''_{i,\max}, R'_{j,\max}, R''_{j,\max}$ , определяющие значения двусторонней оценки времени быстрогодействия  $N_{\min}$ . Согласно лемме 3, наибольшая точность нижней оценки будет достигаться при минимальных допустимых значениях  $u''_{i,\max}, R''_{j,\max}$ , которые могут быть вычислены в ходе решения следующих задач выпуклого программирования:

$$(7) \quad u''_{i,\max} = \max_{u \in S^{-1}U} |u_i|, \quad i = \overline{1, n_1},$$

$$(8) \quad R''_{j,\max} = \max_{u \in S^{-1}U} \sqrt{u_{n_1+2j-1}^2 + u_{n_1+2j}^2}, \quad j = \overline{1, n_2}.$$

Определение наилучших с точки зрения верхней оценки значений параметров  $u'_{1,\max}, \dots, u'_{n_1,\max}, R'_{1,\max}, \dots, R'_{n_2,\max}$  представляет собой существенно более сложную проблему. Это связано с необходимостью решения минимаксной задачи, зависящей от начального состояния  $x_0$ . Однако, если известен некий набор допустимых значений этих параметров, при котором выполняется

$$\underline{U} = \bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u'_{i,\max}; u'_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R'_{j,\max}} \subset S^{-1}U,$$

то можно зафиксировать все параметры, кроме одного, а последний выбрать в результате решения одной из двух следующих оптимизационных задач:

$$(9) \quad u'_{i_0,\max} = \max \left\{ u > 0: \bigotimes_{i=1}^{i_0-1} [-u'_{i,\max}; u'_{i,\max}] \times [-u; u] \times \right. \\ \left. \times \bigotimes_{i=i_0+1}^{n_1} [-u'_{i,\max}; u'_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R'_{j,\max}} \subset S^{-1}U \right\}, \quad i_0 = \overline{1, n_1},$$



$$(10) \quad R'_{j_0, \max} = \max \left\{ R > 0: \bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u'_{i, \max}; u'_{i, \max}] \times \bigotimes_{j=1}^{j_0-1} \mathcal{B}_{R'_{j, \max}} \times \mathcal{B}_R \times \right. \\ \left. \times \bigotimes_{j=j_0+1}^{n_2} \mathcal{B}_{R'_{j, \max}} \subset S^{-1}U \right\}, \quad j_0 = \overline{1, n_2}.$$

#### 4. Задача с фиксированным временем

Пусть для некоторого целого  $N$  выполняется двусторонняя оценка  $\overline{N_{\min}} \leq N \leq \underline{N_{\min}}$ , где значения  $\overline{N_{\min}} \leq \underline{N_{\min}}$  получены на основе результатов из [9, 10, 22] или предыдущего раздела. Отметим, что метод построения оценок здесь несущественен, так как в дальнейших рассуждениях будут использованы только их числовые значения.

Введем обозначения  $\mathcal{U} := \{k \mapsto u(k) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow U\}$ ,  $\mathcal{X} := \{k \mapsto x(k) : \{0, 1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid x(0) = x_0\}$  и рассмотрим задачу

$$(11) \quad J(x(N)) = \|x(N)\|^2 \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}.$$

Если  $N_{\min}$  – время быстрогодействия для (1)–(2), то минимум в задаче (11) при  $N \geq N_{\min}$  достигается и равен нулю. Если же  $N = N_{\min}$ , то все решения задачи (11) являются решениями (оптимальными управлениями, порождающими оптимальные процессы) в исходной задаче быстрогодействия для системы (1) с начальным условием (2).

Известно [9, 28, 29], что оптимальные управления в задаче (11) в случае  $N \geq N_{\min}$  являются особыми в том смысле, что необходимые условия оптимальности в виде дискретного принципа максимума оказываются бессодержательны в вопросе их поиска. Различные методы регуляризации, предложенные в [9, 10, 15, 18, 28, 29], позволяют решить эту проблему, но приводят, как правило, к существенным трудностям вычислительного характера. Поэтому будем подходить к решению задачи (11) с позиции построения глобально минимизирующей последовательности. Поступим следующим образом.

Пусть некоторое (не оптимальное) управление  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  уже задано, этому управлению соответствует траектория  $\hat{x} \in \mathcal{X}$  – решение системы рекуррентных соотношений (1) при  $u = \hat{u}$  с начальным условием (2) – и качество данного управления  $\hat{u}$  численно характеризуется значением  $J(\hat{x}(N))$ . Построим при этих предположениях новое управление  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ , которому соответствует новая траектория  $\tilde{x} \in \mathcal{X}$  и для которого качество управления  $J(\tilde{x}(N))$  удовлетворяет неравенству

$$(12) \quad J(\tilde{x}(N)) < J(\hat{x}(N)).$$

Если это сделать удалось и  $J(\tilde{x}(N)) > 0$ , то переобозначим  $\tilde{u}$  через  $\hat{u}$  и повторим процедуру. Для построения улучшения  $\tilde{u}$  по заданному управлению  $\hat{u}$  будем использовать метод, предложенный В.Ф. Кротовым и развитый затем в разных направлениях в многочисленных работах его учеников и последователей (см., к примеру, [16, 18–21, 23, 30]).

В [16, 19, 21] было отмечено, что в случае линейных по состоянию систем и линейного терминального функционала качества метод Кротова демонстрирует наибольшую скорость улучшения. Более того, в этом случае существенно упрощается и сам процесс построения улучшений, так как оказывается возможным применить наиболее простую, линейную, реализацию метода. С целью использования этих преимуществ рассмотрим сперва преобразование регуляризации, позволяющее свести задачу (11) относительно системы (1) и начального условия (2) к эквивалентной задаче с линейным по состоянию функционалом.

Для  $x \in \mathbb{R}^n$  положим  $X := xx^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Тогда для любого  $k$  имеем

$$(13) \quad \begin{aligned} X(k+1) &:= x(k+1)x(k+1)^T = (Ax(k) + u(k))(Ax(k) + u(k))^T = \\ &= AX(k)A^T + Ax(k)u(k)^T + u(k)x(k)^T A(k)^T + u(k)u(k)^T \end{aligned}$$

и  $X(0) = x_0x_0^T$ . Рассмотрим задачу

$$(14) \quad \mathcal{J}(X(N)) = \text{tr}[X(N)] \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}.$$

Ясно, что  $\mathcal{J}(X(N)) = \mathcal{J}(x(N)x(N)^T) = J(x(N))$ , а задача (14) эквивалентна задаче (11).

Напомним конструкцию классических необходимых условий оптимальности в задаче (14) (см., к примеру, [31]). Составим функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H(x, X, \psi, \Psi, u) = \langle \psi, Ax + u \rangle + \text{tr} [\Psi (AXA^T + Axu^T + ux^T A^T + uu^T)]$$

и систему двойственных уравнений

$$\begin{aligned} \psi(k) &= A^T \psi(k+1) + 2A^T \Psi(k+1)u(k), \quad \psi(N) = 0, \\ \Psi(k) &= A^T \Psi(k+1)A, \quad \Psi(N) = -I, \end{aligned}$$

где  $\psi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $I$  – единичная матрица размеров  $n \times n$ . Если управление  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  оптимально в задаче (14), то выполнены следующие соотношения дискретного векторно-матричного принципа максимума:

$$(15) \quad \begin{aligned} H(\hat{x}(k), \hat{X}(k), \hat{\psi}(k+1), \hat{\Psi}(k+1), \hat{u}(k)) &= \\ &= \max_{v \in U} H(\hat{x}(k), \hat{X}(k), \hat{\psi}(k+1), \hat{\Psi}(k+1), v), \end{aligned}$$

$$(16) \quad \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + \hat{u}(k), \quad \hat{x}(0) = x_0,$$

$$(17) \quad \begin{aligned} \hat{X}(k+1) &= A\hat{X}(k)A^T + A\hat{x}(k)\hat{u}(k)^T + \hat{u}(k)\hat{x}(k)^T A^T + \hat{u}(k)\hat{u}(k)^T, \\ \hat{X}(0) &= x_0x_0^T, \end{aligned}$$

$$(18) \quad \hat{\psi}(k) = A^T \hat{\psi}(k+1) + 2A^T \hat{\Psi}(k+1)\hat{u}(k), \quad \hat{\psi}(N) = 0,$$

$$(19) \quad \hat{\Psi}(k) = A^T \hat{\Psi}(k+1)A, \quad \hat{\Psi}(N) = -I,$$

где  $k$  принимает все возможные значения из множества  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ .

В соотношениях (15)–(19)  $\hat{X}(k)$  и  $\hat{\Psi}(k)$  выполняют роль вспомогательных переменных регуляризации и в дальнейшем их можно убрать из рассмотрения. Действительно, в силу (19) имеет место

$$\hat{\Psi}(k) = -(A^T)^{N-k} A^{N-k} = -(A^{N-k})^T A^{N-k},$$

а для любого  $k$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} & H(\hat{x}(k), \hat{X}(k), \hat{\psi}(k+1), \hat{\Psi}(k+1), v) = \\ & = \left\langle \hat{\psi}(k+1), A\hat{x}(k) + v \right\rangle + \\ & \quad + \operatorname{tr} \left[ \hat{\Psi}(k+1) \left( A\hat{X}(k)A^T + A\hat{x}(k)v^T + v\hat{x}(k)^T A^T + vv^T \right) \right] = \\ & = \langle \hat{\psi}(k+1) + 2\hat{\Psi}(k+1)A\hat{x}(k), v \rangle + \langle v, \hat{\Psi}(k+1)v \rangle + \hat{H}_0(k) = \\ & = \langle \hat{\psi}(k+1) - 2(A^{N-k-1})^T A^{N-k}\hat{x}(k), v \rangle - \langle v, (A^{N-k-1})^T A^{N-k-1}v \rangle + \hat{H}_0(k), \end{aligned}$$

где

$$\hat{H}_0(k) = \langle \hat{\psi}(k+1), A\hat{x}(k) \rangle + \operatorname{tr}[\hat{\Psi}(k+1)A\hat{X}(k)A^T]$$

не зависит от  $v$ .

Поэтому система соотношений дискретного принципа максимума (15)–(19) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} (20) \quad & \langle \hat{\psi}(k+1) - 2(A^{N-k-1})^T A^{N-k}\hat{x}(k), \hat{u}(k) \rangle - \langle \hat{u}(k), (A^{N-k-1})^T A^{N-k-1}\hat{u}(k) \rangle = \\ & = \max_{v \in U} \left( \langle \hat{\psi}(k+1) - 2(A^{N-k-1})^T A^{N-k}\hat{x}(k), v \rangle - \langle v, (A^{N-k-1})^T A^{N-k-1}v \rangle \right), \end{aligned}$$

$$(21) \quad \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + \hat{u}(k), \quad \hat{x}(0) = x_0,$$

$$(22) \quad \hat{\psi}(k) = A^T \hat{\psi}(k+1) - 2(A^{N-k})^T A^{N-k-1}\hat{u}(k), \quad \hat{\psi}(N) = 0.$$

Важно отметить, что эта регуляризованная система не эквивалентна в вычислительном плане вырожденной системе соотношений дискретного принципа максимума для задачи (11) и теоретически позволяет находить оптимальные по быстродействию управления в исходной задаче. Однако, как уже было сказано, определение оптимального управления непосредственно из условий (20)–(22) сопряжено с серьезными вычислительными трудностями. Поэтому в соответствии с указанным выше подходом будем искать улучшения  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$  заданного (неоптимального) управления  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  в смысле неравенства (12), используя полученные регулярные конструкции.

## 5. Метод Кротова

Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  – некоторое произвольное управление,  $\hat{x} \in \mathcal{X}$  удовлетворяет уравнению (21), а  $\hat{\psi} \in \mathcal{X}'$  удовлетворяет двойственному уравнению (22).

Здесь  $\mathcal{X}' := \{k \mapsto \psi(k) : \{0, 1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \psi(N) = 0\}$ . Рассмотрим функцию  $\hat{\varphi} : \{0, \dots, N\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  вида

$$\hat{\varphi}(k, x) = \langle \hat{\psi}(k), x \rangle - \|A^{N-k}x\|^2.$$

Для  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  и  $x, u \in \mathbb{R}^n$  введем следующие обозначения, согласованные с [15, 16]:

$$\begin{aligned} \hat{R}(k, x, u) &= \hat{\varphi}(k+1, Ax+u) - \hat{\varphi}(k, x), \\ \hat{G}(x) &= \hat{\varphi}(N, x) - \hat{\varphi}(0, x_0) + J(x). \end{aligned}$$

Здесь выбор обозначений  $\hat{\varphi}$ ,  $\hat{R}$ ,  $\hat{G}$  связан с тем, что эти функции определяются элементом  $\hat{\psi} \in \mathcal{X}'$ , т.е., в конечном счете, выбранным произвольно управлением  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ . Ясно, что по построению для любых значений  $k, x$  и  $u$  имеет место

$$\begin{aligned} \hat{R}(k, x, u) &= H\left(x, xx^T, \hat{\psi}(k+1), -(A^{N-k-1})^T A^{N-k-1}, u\right) - \hat{\varphi}(k, x), \\ \hat{G}(x) &\equiv -\langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle + \|A^N x_0\|^2. \end{aligned}$$

Следующий результат представляет собой основное утверждение об улучшении. Теоремы об улучшении были впервые сформулированы В.Ф. Кротовым (см., к примеру, [16, теорема 1]).

*Теорема 2.* Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ ,  $\hat{x} \in \mathcal{X}$ ,  $\hat{\psi} \in \mathcal{X}'$  удовлетворяют соотношениям (21) и (22). Пусть  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$  удовлетворяет условию

$$(23) \quad \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) = \max_{v \in U} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), v) \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\},$$

где  $\tilde{x}(0) = x_0$  и для  $k = 0, \dots, N-1$

$$(24) \quad \tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + \tilde{u}(k).$$

Тогда имеет место нестрогое улучшение в задаче (12), т.е.

$$J(\tilde{x}(N)) \leq J(\hat{x}(N)).$$

*Замечание 2.* Пусть  $\hat{u}$  и  $\hat{x}$  взяты из теоремы 2. Тогда пара  $(\hat{x}, \hat{u})$  удовлетворяет соотношениям дискретного принципа максимума (20)–(22) в том и только том случае, когда для  $\tilde{u} = \hat{u}$  выполняется условие (23) при  $\tilde{x} = \hat{x}$ , т.е. имеет место

$$\hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) = \max_{v \in U} \hat{R}(k, \hat{x}(k), v), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

*Замечание 3.* Условие (23) эквивалентно условию

$$\tilde{u}(k) \in \text{Arg max}_{v \in U} \left( \langle \hat{\psi}(k+1), v \rangle - 2(A^{N-k-1})^T A^{N-k} \tilde{x}(k), v \right) - \|A^{N-k-1}v\|^2.$$

В качестве элементарного следствия отметим, каким образом результат теоремы 2 связан с решениями экстремальных задач (11) и (14).

*Следствие 2.* Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  – оптимальное управление в задачах (11) и (14), а  $\hat{x} \in \mathcal{X}$  и  $\hat{\psi} \in \mathcal{X}'$  удовлетворяют соотношениям (21), (22). Тогда для любого  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ , удовлетворяющего условию (23), выполняется равенство  $J(\tilde{x}(N)) = J(\hat{x}(N))$ .

Утверждение теоремы 2 о наличии нестрогого неравенства  $J(\tilde{x}(N)) \leq J(\hat{x}(N))$  останется справедливым и в том случае, если условие  $\det A \neq 0$  в исходной задаче не выполняется. Но для систем вида (1) с невырожденной матрицей  $A$  возможно установить более тесную связь между неулучшаемостью в смысле неравенства (12) в теореме 2 и экстремальными в задаче (14).

*Теорема 3.* Пусть в системе (1) матрица  $A$  невырождена,  $\hat{u}$  и  $\hat{x}$  взяты из теоремы 2. Тогда существует единственная пара  $(\tilde{x}, \tilde{u})$ , удовлетворяющая условиям (23) и (24), а равенство  $J(\tilde{x}(N)) = J(\hat{x}(N))$  имеет место в том и только том случае, когда пара  $(\hat{x}, \hat{u})$  удовлетворяет соотношениям дискретного принципа максимума (20)–(22).

Итак, в рамках рассматриваемой задачи можно гарантировать наличие строгого неравенства (12) при выборе нового управления  $\tilde{u}$  из условия (23), если и только если данное управление  $\hat{u}$  не является экстремальным в задаче (14). Непосредственно из этого вытекает возможность построения итерационного алгоритма приближенного поиска оптимального управления в исходной задаче быстрого действия.

Пусть задано управление  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ . Построим последовательность управлений  $u^{(l)} \in \mathcal{U}$  следующим способом. Положим  $u^{(0)} = \hat{u}$ . Пусть для некоторого  $l \geq 0$  управление  $u^{(l)}$  уже построено. Тогда для каждого  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  в качестве  $u^{(l+1)}(k)$  возьмем решение экстремальной задачи

$$\langle \psi^{(l)}(k+1) - 2(A^{N-k-1})^T A^{N-k} x^{(l+1)}(k), v \rangle - \|A^{N-k-1}v\|^2 \rightarrow \max_{v \in U},$$

где

$$\psi^{(l)}(N) = 0, \quad x^{(l+1)}(0) = x_0$$

и для  $k = 0, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} \psi^{(l)}(k) &= A^T \psi^{(l)}(k+1) - 2(A^{N-k})^T A^{N-k-1} u^{(l)}(k), \\ x^{(l+1)}(k+1) &= Ax^{(l+1)}(k) + u^{(l+1)}(k). \end{aligned}$$

Из теоремы 3 и замечания 3 с учетом компактности множества  $U$  и однозначной разрешимости последнего уравнения получаем

*Следствие 3.* Пусть матрица  $A$  невырождена. Тогда для любого начального приближения  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  построенная выше последовательность процессов управления  $(x^{(l)}, u^{(l)})$  имеет сходящуюся в  $\mathbb{R}^{2nN+n}$  подпоследовательность, а всякий процесс  $(\tilde{x}, \tilde{u})$ , являющийся частичным пределом последовательности  $\{(x^{(l)}, u^{(l)})\}$ , удовлетворяет соотношениям дискретного принципа максимума (20)–(22).

## 6. Алгоритмическая реализация

В соответствии с полученными результатами имеем следующий алгоритм приближенного решения задачи быстрогодействия для системы (1)–(2).

0. Вычислить двустороннюю оценку времени быстрогодействия  $\overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}$ . В том случае, когда матрица  $A$  имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов, искомая оценка может быть найдена по теореме 1 с учетом замечания 1. Положить  $N = \overline{N_{\min}}$ . Задать величины допустимых погрешностей вычислений  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ .

1. Положить  $u^{(0)} = 0, l = 0, \mathcal{A}(k) = A^{N-k}, k = 0, \dots, N$ .

2. Найти решение  $x^{(l)}$  системы уравнений

$$x(k+1) = Ax(k) + u^{(l)}(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad x(0) = x_0.$$

3. Найти решение  $\psi^{(l)}$  системы уравнений

$$\psi(k) = A^T \psi(k+1) - 2\mathcal{A}(k)^T \mathcal{A}(k+1)u^{(l)}(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad \psi(N) = 0.$$

4. Последовательно найти для каждого  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  решение  $u^{(l+1)}(k)$  экстремальной задачи

$$\langle \psi^{(l)}(k+1) - 2\mathcal{A}(k+1)^T \mathcal{A}(k)x^{(l+1)}(k), v \rangle - \|\mathcal{A}(k+1)v\|^2 \rightarrow \max_{v \in U},$$

где значения  $x^{(l+1)}(k)$  вычисляются по формулам

$$x^{(l+1)}(k+1) = Ax^{(l+1)}(k) + u^{(l+1)}(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad x^{(l+1)}(0) = x_0.$$

5. Проверить условие внутренней остановки

$$\|x^{(l+1)}(N)\| - \|x^{(l)}(N)\| < \varepsilon_1,$$

в случае выполнения положить  $\tilde{u} = u^{(l+1)}$  и перейти к шагу 7.

6. Увеличить  $l$  на единицу и перейти к шагу 3.

7. Проверить условие внешней остановки

$$\|\tilde{x}(N)\| = \|x^{(l+1)}(N)\| < \varepsilon_2,$$

при выполнении положить  $N_{\min} = N$  и закончить расчеты, иначе, при выполнении неравенства  $N < \underline{N_{\min}}$ , увеличить  $N$  на единицу и перейти к шагу 1. Если  $N = \underline{N_{\min}}$ , то закончить расчеты, положив  $N_{\min} = \underline{N_{\min}}$ .

Поскольку матрица  $A$  в системе (1) невырождена, то алгоритм позволяет при каждом  $N = \overline{N_{\min}}, \dots, \underline{N_{\min}}$  приближенно найти управление, порождающее процесс, для которого выполнены соотношения дискретного принципа максимума (20)–(22).

Найденное по окончании работы алгоритма значение  $N_{\min}$  имеет смысл верхней оценки времени быстроедействия для системы (1)–(2), а управление  $\tilde{u}$ , вообще говоря, следует считать только гарантирующим. Однако если в задаче (14) дискретный принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности, то тогда с точностью до  $\varepsilon_2$ -погрешности расчетов  $N_{\min}$  совпадает со временем быстроедействия (т.е. при достаточно малом  $\varepsilon_2$  не может отличаться от времени быстроедействия более чем на единицу), а  $\tilde{u}$  порождает оптимальный по быстроедействию процесс в системе (1)–(2). В случае  $N_{\min} = \overline{N_{\min}}$  значение  $N_{\min}$  заведомо является временем быстроедействия, при этом  $\tilde{u}$  – оптимальное по быстроедействию управление.

Шаги 1–6 алгоритма заменяют собой численный метод решения задачи минимизации функционала  $J$  по совокупности переменных  $u(0), \dots, u(N-1)$  при заданном значении  $N$ . Вместо решения одной задачи с квадратичным функционалом вида (11) размерности  $nN$  на множестве  $U^N$  предлагается несколько раз последовательно решить  $N$  задач размерности  $n$  на множестве  $U$  с квадратичным функционалом, записанным на шаге 4. Вычислительная практика показывает, что второй подход оказывается эффективнее в тех случаях, когда значение  $N$  достаточно велико. Сложность решения задачи на шаге 4 зависит от структуры множества  $U$ . Например, если  $U$  является многогранником, то соответствующая оптимизационная задача может быть решена методом эллипсоидов с полиномиальной временной сложностью [32]. Отметим также, что характерные значения  $N$  достаточно велики в том случае, если исследуемая задача была получена путем высокоточной дискретизации некоторой задачи в непрерывном времени.

## 7. Примеры

Для иллюстрации результатов использования предложенного подхода к решению конкретных задач в этом разделе ограничимся случаем  $n = 2$  как наиболее удобным для изображения траекторий управляемого процесса в фазовом пространстве и в то же время достаточно содержательным с точки зрения разнообразия постановок задач и особенностей их решения. Начнем с одного академического примера, допускающего во многом аналитическое исследование.

*Пример 1.* Рассмотрим систему вида (1)–(2)

$$x(k+1) = Ax(k) + u(k), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} + r \\ \gamma^{-1} \end{pmatrix}, \quad \gamma \in (0; r), \quad r > 0.$$

Множество  $U \subset \mathbb{R}^2$ , определяющее геометрические ограничения, имеет вид

$$U = \{(u_1, u_2) \mid u_1^2 + u_2^2 \leq r^2\}.$$

Требуется решить для этой системы задачу быстродействия.

Ясно, что  $N_{\min} \geq 2$ , поскольку точка

$$Ax_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} + r \\ 1 \end{pmatrix}$$

находится от нуля на расстоянии большем, чем  $r$ , а значит, за один шаг перевести систему в начало координат невозможно.

В то же время при любом  $\gamma$  можно положить  $u^*(0) = (-r, 0)^T$  и получить

$$x^*(1) = Ax_0 + u^*(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Ax^*(1) = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} \\ \gamma \end{pmatrix},$$

причем точка  $Ax^*(1)$  находится на расстоянии  $r$  от нуля, так что найдется  $u^*(1)$ , для которого  $x^*(2) = Ax^*(1) + u^*(1) = 0$ . Следовательно, в этой задаче  $N_{\min} = 2$  и процесс  $\{x^*(k), u^*(k-1)\}_{k=0}^2$  является оптимальным.

Опробуем на этом примере алгоритм из раздела 6. На нулевом шаге определим двустороннюю оценку  $\overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}$ . Поскольку матрица  $A$  является диагональной и невырожденной, то для построения искомой оценки по теореме 1 достаточно вычислить значения четырех параметров  $u'_{1,\max}, u'_{2,\max}, u''_{1,\max}, u''_{2,\max}$  так, чтобы выполнялось двойное включение

$$[-u'_{1,\max}; u'_{1,\max}] \times [-u'_{2,\max}; u'_{2,\max}] \subset U \subset [-u''_{1,\max}; u''_{1,\max}] \times [-u''_{2,\max}; u''_{2,\max}].$$

Для выполнения первого из них положим

$$u'_{1,\max} = u'_{2,\max} = r/\sqrt{2},$$

а наилучшие значения  $u''_{i,\max}$  с учетом замечания 1 определим из решения задачи (7):

$$u''_{1,\max} = u''_{2,\max} = r.$$

При этом в силу теоремы 1 имеет место

$$\left[ \max_{i=1,2} F(x_{0,i}; r, \lambda_i) \right] \leq N_{\min} \leq \left[ \max_{i=1,2} F(x_{0,i}; r/\sqrt{2}, \lambda_i) \right],$$

где  $x_{0,1} = \sqrt{r^2 - \gamma^2} + r$ ,  $x_{0,2} = \gamma^{-1}$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \gamma$ , а функция  $F$  определяется формулой (6). В частности, для любых значений  $r > 0$  и  $\gamma \in (0; r)$

$$N_{\min} \geq [F(x_{0,1}; r, \lambda_1)] = \left[ \frac{\sqrt{r^2 - \gamma^2} + r}{r} \right] = 2.$$

Если, для определенности,  $r = 0,5$ ,  $\gamma = 0,1$ , то из верхней оценки находим

$$N_{\min} \leq [2,8] = 3.$$



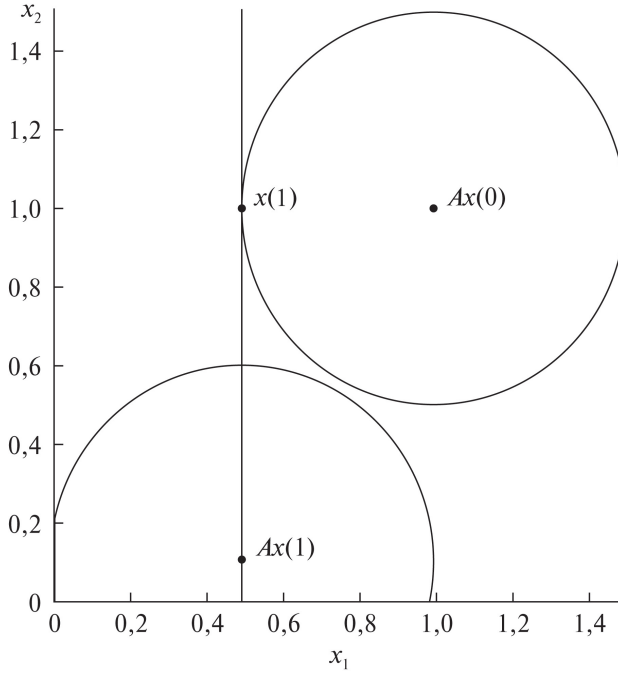


Рис. 1. Первая итерация алгоритма в примере 1.

Положим  $N = 2$ ,  $u^{(0)}(k) \equiv 0$ . На шаге 2 алгоритма убеждаемся, что нулевое управление не является оптимальным:

$$x^{(0)}(1) = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} + r \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^{(0)}(2) = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} + r \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \|x^{(0)}(2)\| > 0.$$

На шаге 3 фиксируем  $\psi^{(0)}(k) \equiv 0$  и переходим к шагу 4.

На шаге 4 необходимо последовательно решить две экстремальные задачи при  $k = 0$  и при  $k = 1$ . В частности, при  $k = 0$  имеем задачу

$$u_1^2 + \gamma^2 u_2^2 + 2\sqrt{r^2 - \gamma^2}u_1 + 2\gamma^2 u_2 \rightarrow \min_{u_1^2 + u_2^2 \leq r^2}.$$

Для  $r = 0,5$ ,  $\gamma = 0,1$  из ее решения получаем (см. рис. 1)

$$u^{(1)}(0) \approx (-0,4999, -0,01)^T \Rightarrow x^{(1)}(1) \approx (0,49, 0,99)^T.$$

При тех же значениях  $r$  и  $\gamma$  для  $k = 1$  находим

$$u^{(1)}(1) \approx (-0,49, -0,1)^T \Rightarrow x^{(1)}(2) \approx 0.$$

Таким образом, уже на первой итерации применения алгоритма приближенно построено гарантирующее управление в задаче быстрогодействия для

заданной системы. Поскольку  $N = 2$  совпадает с нижней оценкой времени быстрогодействия, можно заключить, что это гарантирующее управление является оптимальным и  $N_{\min} = 2$ .

Убедимся, что вторая итерация не приводит к ухудшению результата. На второй итерации в качестве исходного управления имеем построенное только что управление  $u^{(1)}$ . На шаге 3 находим ( $r = 0,5$ ,  $\gamma = 0,1$ )

$$\psi^{(1)}(2) = 0, \quad \psi^{(1)}(1) \approx (1, 0,02)^T.$$

На шаге 4 соответственно получаем

$$u^{(2)}(0) \approx (-0,4992, -0,028)^T \Rightarrow x^{(2)}(1) \approx (0,491, 0,972)^T,$$

$$u^{(2)}(1) \approx (-0,4905, -0,97)^T \Rightarrow x^{(2)}(2) \approx 0.$$

Интересно отметить особенности геометрического содержания проведенных построений.

Для этого предположим сперва, что управление в системе строится так, чтобы на каждом шаге получать ближайшую к нулю точку из множества достижимости. Поскольку

$$x(1) = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} + r \\ 1 \end{pmatrix} + u(0),$$

то соответствующее управление  $u^*(0)$  является решением задачи

$$\|x(1)\|^2 = (\sqrt{r^2 - \gamma^2} + r + u_1)^2 + (1 + u_2)^2 \rightarrow \min_{u_1^2 + u_2^2 \leq r^2},$$

в частности, при  $r = 0,6$ ,  $\gamma = 0,1$  имеем

$$u^*(0) \approx (-0,352, -0,355)^T \Rightarrow x^*(1) \approx (0,639, 0,645)^T.$$

Но тогда (см. рис. 2)

$$Ax(1) \approx \begin{pmatrix} 0,639 \\ 0,064 \end{pmatrix},$$

а эта точка находится на расстоянии большем, чем  $0,6 > r$  от нуля. Поэтому никакое управление  $u^*(1)$  не позволит перевести систему в ноль на втором шаге.

Заметим теперь, что первая итерация алгоритма из раздела 6 также реализует поиск ближайших точек из множеств достижимости, но не в смысле евклидовой метрики (ср. рис. 1 и 2), а в смысле расстояний, порождаемых нормами

$$\|x\|_{A,N,k}^2 = \|A^{N-k-1}x\|^2.$$

В частности, при  $k = N - 1$  норма  $\|\cdot\|_{A,N,k}$  совпадает с евклидовой при любых  $N$  и  $A$ ,  $\det A \neq 0$ . В свою очередь вторая итерация минимизирует указанное расстояние уже не до нуля, а до некоторой другой точки, определяемой

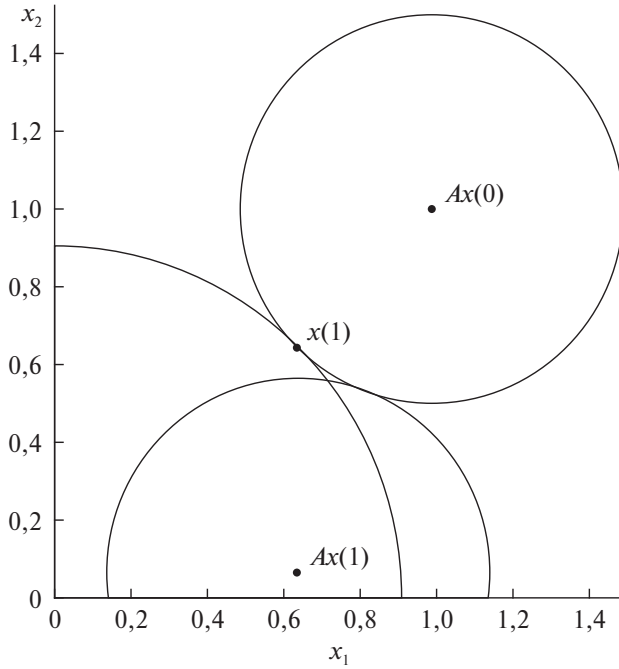


Рис. 2. Поиск ближайших к нулю точек в примере 1.

вектором двойственных переменных  $\psi(k)$ . Последнее позволяет скорректировать структуру оптимального управления в том случае, когда на первой итерации не удалось подсчитать ответ достаточно точно. Как будет видно из дальнейшего, такая ситуация может возникнуть, если множество  $U$  имеет достаточно сложную структуру, а точка  $x_0$  лежит на границе множества 0-управляемости  $\Xi(N_{\min})$ .

*Пример 2.* Рассмотрим систему вида (1)–(2), где

$$A = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} \cos(1) + \sin(1) & -2 \sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) - \sin(1) \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} -37,8 \\ -26,1 \end{pmatrix}.$$

Геометрические ограничения заданы множеством

$$U = \{u \mid \langle u, Hu \rangle \leq 1\}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется решить задачу быстродействия.

Построим оценку  $\overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}$ . Матрица  $A$  обладает парой комплексно-сопряженных собственных значений, равных по модулю величине  $r_1 = 4/5$ . Матрица перехода в вещественный жорданов базис имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

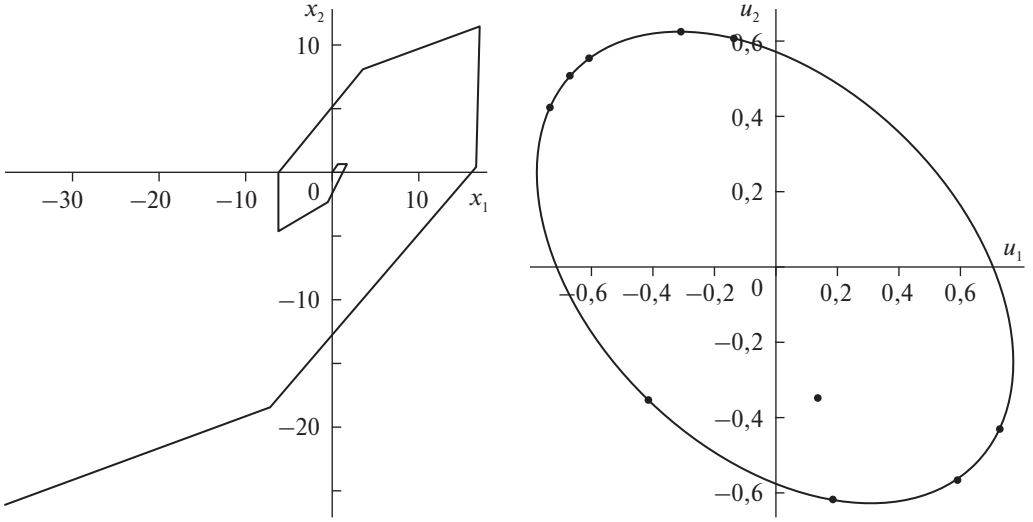


Рис. 3. Гарантирующий (оптимальный) процесс в примере 2.

Таким образом, рассматриваемая система удовлетворяет условиям теоремы 1 для случая  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 1$ . Радиусы вписанного  $\underline{U}$  и описанного  $\overline{U}$  шаров для эллипса  $S^{-1}U$  определяются однозначно и могут быть найдены численно:

$$\underline{U} = \mathcal{B}_{R'_{1,\max}}, \quad R'_{1,\max} = 0,3449, \quad \overline{U} = \mathcal{B}_{R''_{1,\max}}, \quad R''_{1,\max} = 1,2965.$$

Используя найденные значения  $R'_{1,\max}$ ,  $R''_{1,\max}$  в теореме 1, получаем, что

$$8 \leq N_{\min} \leq 13.$$

Применим алгоритм из раздела 6, проведя соответствующие расчеты численно. Зафиксируем найденную двустороннюю оценку  $8 \leq N_{\min} \leq 13$  и положим  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-16}$ . При этих значениях погрешностей для  $N = 8$  и  $N = 9$  условие внутренней остановки выполняется на 33-й и 9-й итерациях соответственно, однако условие внешней остановки выполняется только для  $N = 10$ . При  $N = 10$  условие внутренней остановки выполняется уже на первой итерации. При этом оказывается найден процесс управления  $\{x^{(1)}(k), u^{(1)}(k-1)\}_{k=0}^{10}$ , представленный на рис. 3 (на этом и последующих рис. 4, 6–8 и 10 слева приведена траектория процесса в фазовом пространстве, а справа – значения управлений на фоне множества геометрических ограничений  $U$ ). Для этого процесса имеет место  $\|x^{(1)}(N)\| < \varepsilon_2$ . Для сравнения, при  $N = 8$  было найдено  $\|x^{(33)}(N)\| \approx 0,5$ , а при  $N = 9$  было найдено  $\|x^{(9)}(N)\| \approx 0,2$ . Отметим, что вычисления до внутренней остановки при  $N = 11, 12, 13$  за одну итерацию приводят к определению процесса, для которого выполняется условие внешней остановки  $\|x^{(1)}(N)\| < \varepsilon_2$ , и при этом имеет место  $u^{(1)}(10) \approx \dots \approx u^{(1)}(N) \approx 0$ .

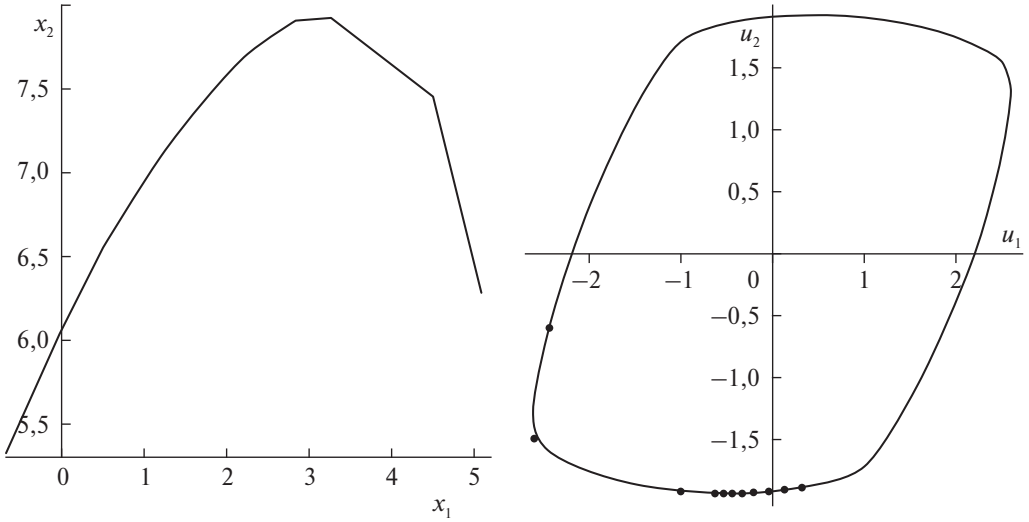


Рис. 4. Процесс  $(x^{(1)}, u^{(1)})$  в примере 3 при  $N = 11$ .

Формальный итог применения алгоритма из раздела 6 оказывается следующим: с точностью до  $\varepsilon_2$ -погрешности вычислений верхняя оценка времени быстроедействия  $N_{\min}$  может быть уменьшена с  $\underline{N}_{\min} = 13$  до  $\underline{N}_{\min} = 10$ , при этом гарантирующее управление и соответствующая ему траектория имеют вид, представленный на рис. 3.

Чтобы оценить качество полученных результатов, можно использовать численные процедуры условной минимизации для непосредственного решения гладких конечномерных задач  $\|x(9)\|^2 \rightarrow \min$  и  $\|x(10)\|^2 \rightarrow \min$  при наличии конечного числа гладких ограничений типа неравенств на переменные  $u(k)$ . Поскольку размерности соответствующих задач не слишком велики, их удастся решить достаточно точно. В первом случае минимальное значение примерно равно  $0,041 \approx 0,2^2$ , во втором случае оно равняется нулю. Следовательно,  $N_{\min} = 10$  и представленный на рис. 3 гарантирующий процесс в действительности является оптимальным.

*Пример 3.* Рассмотрим систему вида (1)–(2), где

$$A = \begin{pmatrix} 31/20 & -3/20 \\ 1/10 & 6/5 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 5,08 \\ 6,28 \end{pmatrix}.$$

Геометрические ограничения заданы множеством

$$U = \left\{ (u_1, u_2) \mid \frac{4^{2/3}|u_1 - \sqrt{3}u_2|^{4/3}}{16} + \frac{6^{2/3}|\sqrt{3}u_1 + u_2|^{4/3}}{36} \leq 1 \right\}.$$

Как и ранее, требуется решить задачу быстроедействия.

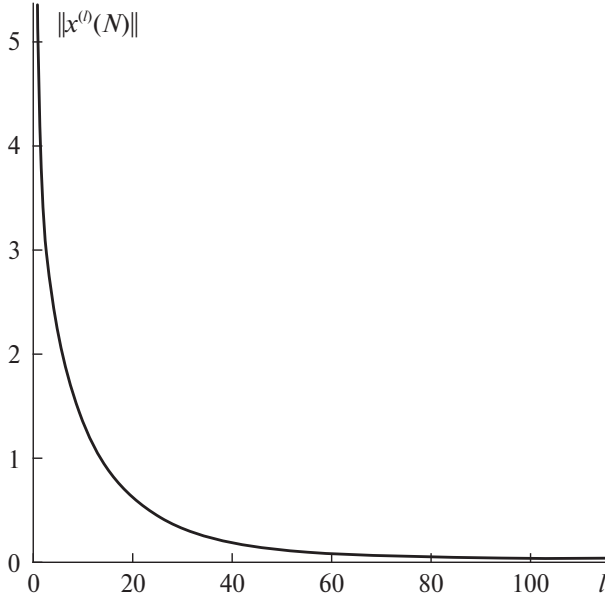


Рис. 5. Сходимость внутренних итераций в примере 3 при  $N = 11$ .

Построим оценку  $\overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}$ . Матрица  $A$  обладает парой вещественных собственных значений  $\lambda_1 = 3/2$ ,  $\lambda_2 = 5/4$ . Матрица перехода в вещественный жорданов базис имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система удовлетворяет условиям теоремы 1 для случая  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 0$ . Параметры вписанного  $\underline{U}$  и описанного  $\overline{U}$  прямоугольников для множества  $S^{-1}U$  определим численно:

$$\underline{U} = [-u'_{1,\max}; u'_{1,\max}] \times [-u'_{2,\max}; u'_{2,\max}], \quad u'_{1,\max} = 0,3883, \quad u'_{2,\max} = 1,4057,$$

$$\overline{U} = [-u''_{1,\max}; u''_{1,\max}] \times [-u''_{2,\max}; u''_{2,\max}], \quad u''_{1,\max} = 0,8834, \quad u''_{2,\max} = 2,4839.$$

Используя теорему 1, получаем оценку

$$3 \leq N_{\min} \leq 17.$$

Применим численно алгоритм из раздела 6 при  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$  и  $\varepsilon_2 = 0,001$ . Впервые условие внешней остановки оказывается выполнено при  $N = 11$ . Распишем процесс выполнения внутренних итераций при  $N = 11$  более подробно. На первой внутренней итерации находим процесс управления  $\{x^{(1)}(k), u^{(1)}(k-1)\}_{k=0}^{11}$ , представленный на рис. 4. Для этого процесса  $\|x^{(1)}(N)\| \approx 5,37$ . Применение повторных итераций ( $l = 1, 2, \dots$ ) приводит к уменьшению значения  $\|x^{(l+1)}(N)\|$ . График зависимости  $\|x^{(l)}(N)\|$  от  $l$  приведен на рис. 5. Процесс управления  $(x^{(116)}, u^{(116)})$  изображен на рис. 6.

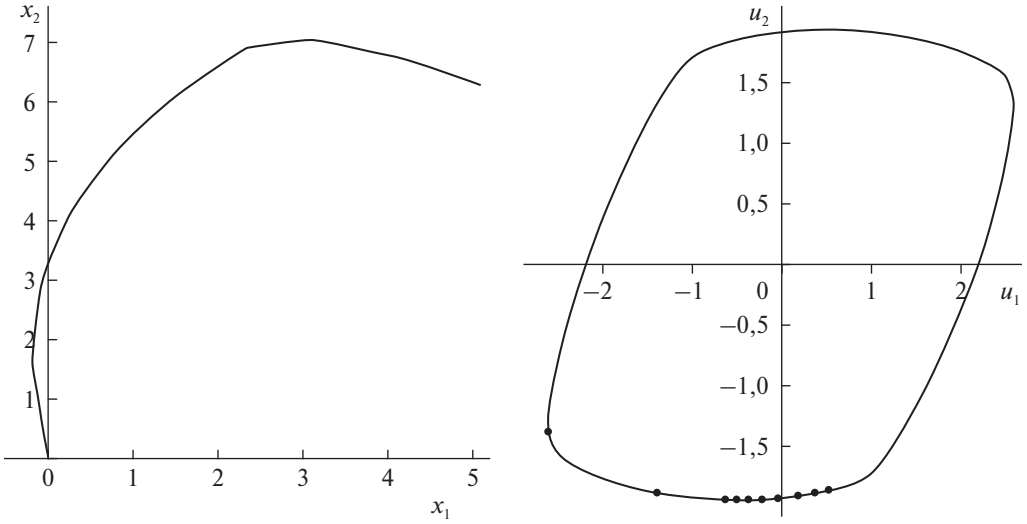


Рис. 6. Гарантирующий процесс в примере 3.

Низкая точность двусторонней оценки и медленная сходимость алгоритма в этом примере обусловлены тем, что рассматриваемая система не является устойчивой, а начальное условие лежит вблизи границы множества достижимости. Тем не менее по результатам работы алгоритма с точностью до  $\varepsilon_2$ -погрешности получена новая верхняя оценка времени быстрогодействия  $\underline{N}_{\min} = 11$  и построено соответствующее этому значению гарантирующее управление. Однако эта оценка не совпадает со временем быстрогодействия, поскольку минимальное значение функционала в конечномерной задаче  $\|x(10)\|^2 \rightarrow \min$  равно нулю, и в действительности  $N_{\min} = 10$ .

*Пример 4.* Рассмотрим систему вида (1)–(2), где

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 9,33 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

В этом примере рассмотрим геометрические ограничения смешанного типа, заданные множеством

$$U = \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right]^2 \cap \mathcal{B}_1,$$

где  $\mathcal{B}_1$  – круг единичного радиуса с центром в нуле. Решим при этих условиях задачу быстрогодействия.

Построим оценку  $\overline{N}_{\min} \leq N_{\min} \leq \underline{N}_{\min}$ . Матрица  $A$  обладает парой комплексно-сопряженных собственных значений, равных по модулю величине  $r_1 = 1$ . При этом она уже находится в своей вещественной жордановой форме, в связи с чем  $S = I$ . Таким образом, рассматриваемая система удовлетворяет условиям теоремы 1 для случая  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 1$ . Радиусы вписанного  $\underline{U}$  и

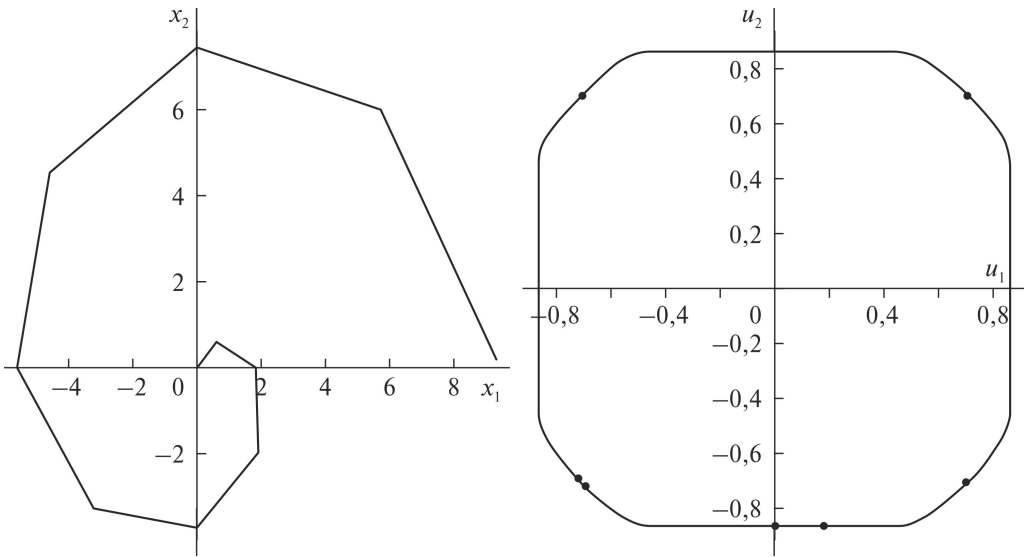


Рис. 7. Оптимальный процесс в примере 4.

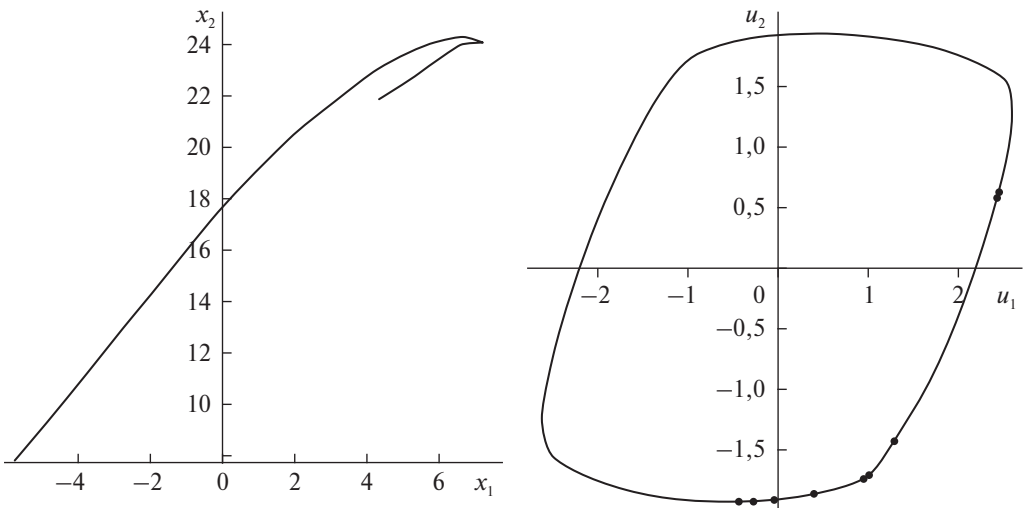


Рис. 8. Процесс  $(x^{(1)}, u^{(1)})$  в примере 5.

описанного  $\bar{U}$  шаров для множества  $S^{-1}U$  определяются однозначно и могут быть найдены численно:

$$\underline{U} = \mathcal{B}_{R'_{1,\max}}, \quad R'_{1,\max} = \sqrt{3}/2, \quad \bar{U} = \mathcal{B}_{R''_{1,\max}}, \quad R''_{1,\max} = 1.$$

Используя теорему 1, получаем оценку

$$10 \leq N_{\min} \leq 11.$$



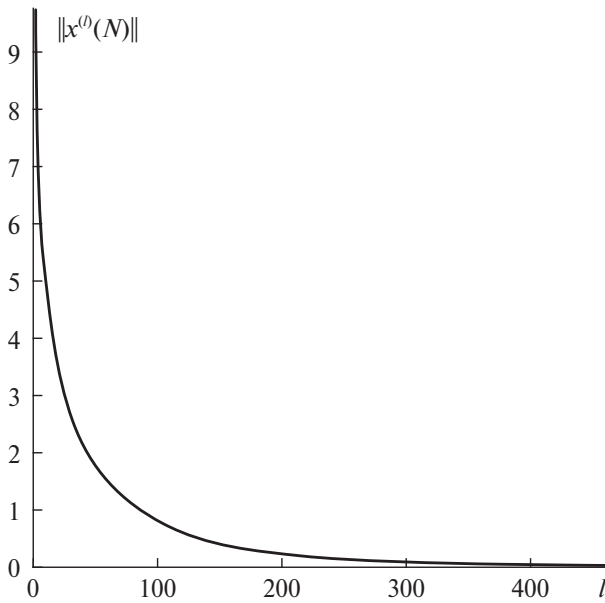


Рис. 9. Сходимость итераций к оптимальному решению в примере 5.

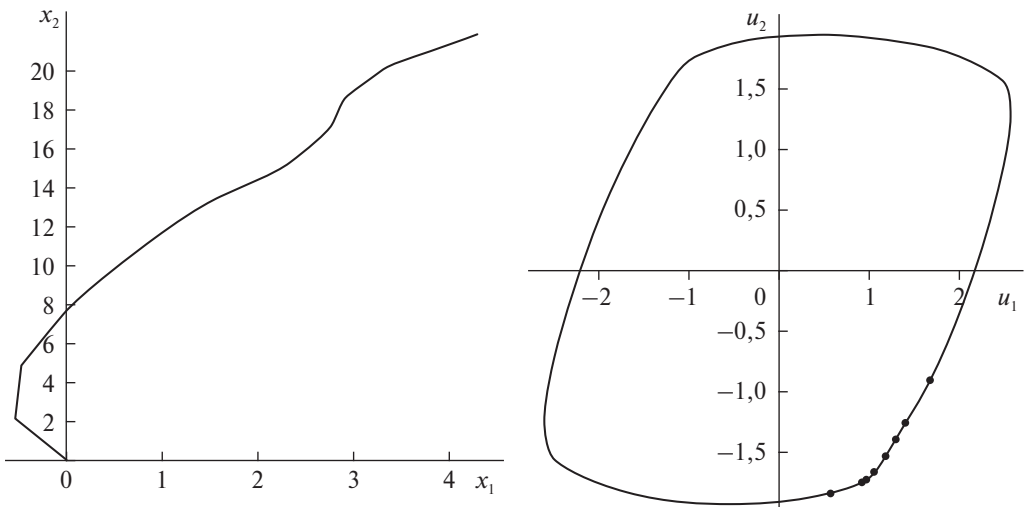


Рис. 10. Приближение к оптимальному процессу в примере 5.

Применим алгоритм из раздела 6 при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$ . При  $N = 10$  на первой внутренней итерации находим процесс управления  $\{x^{(1)}(k), u^{(1)}(k-1)\}_{k=0}^{10}$ , представленный на рис. 7, для которого имеет место  $\|x^{(1)}(N)\| < \varepsilon_2$ .

Поскольку  $N = 10$  является нижней оценкой времени быстродействия, то процесс, представленный на рис. 7, оптимален с точностью до  $\varepsilon_2$ -погрешности вычислений.

*Пример 5.* Рассмотрим систему вида (1)–(2), где

$$A = \begin{pmatrix} 33/20 & -1/5 \\ 4/5 & 17/20 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 4,31 \\ 21,85 \end{pmatrix}.$$

Геометрические ограничения заданы тем же множеством, что и в примере 3. Рассмотрим для этого примера задачу быстродействия.

Особенность данной постановки состоит в том, что матрица  $A$  не имеет двух линейно независимых собственных векторов. Поэтому здесь для построения оценок времени быстродействия нельзя применить теорему 1. Тем не менее имеется возможность использовать средства определения времени быстродействия, разработанные в [22]. В силу [22] имеет место точное равенство  $N_{\min} = 10$ .

Применим алгоритм из раздела 6, считая двустороннюю оценку времени быстродействия  $N_{\min}$  заданной в виде  $10 \leq N_{\min} \leq 10$  и полагая  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_2 = 0,01$ . На первой внутренней итерации находим процесс управления  $\{x^{(1)}(k), u^{(1)}(k-1)\}_{k=0}^{10}$ , представленный на рис. 8. Как и в примере 3, этот процесс далек от оптимального – для него  $\|x^{(1)}(N)\| \approx 9,73$ . Поэтому актуально применение повторных итераций, которое приводит к результатам, изображенным на рис. 9 и 10.

Поскольку время быстродействия известно точно, полученный результат является  $\varepsilon_2$ -приближением к оптимальному решению поставленной задачи.

## 8. Заключение

В статье построен алгоритм исследования задачи быстродействия для линейных дискретных систем с невырожденной матрицей. Алгоритм позволяет уточнять известные верхние оценки на время быстродействия и находить соответствующие этим оценкам гарантирующие процессы управления. При выполнении некоторых дополнительных предположений результатом работы алгоритма является построение оптимального решения в задаче быстродействия.

Предложенный алгоритм относится к классу методов решения конечномерных экстремальных задач с ограничениями на основе процедуры понижения размерности. Поскольку средний коэффициент снижения размерности в рассматриваемой задаче определяется временем быстродействия, эффективность алгоритма возрастает с его увеличением.

В дальнейшем планируется распространить полученные результаты на случай систем с вырожденной матрицей, а также использовать предложенный подход для непосредственного вычисления времени быстродействия, а не только его верхней оценки. Актуальным также является получение новых содержательных утверждений о сходимости и определение скорости сходимости алгоритма в общем случае.

Лемма 5. Пусть  $V_1, V'_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $V_2, V'_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ . Тогда

$$V_1 \times V_2 + V'_1 \times V'_2 = (V_1 + V'_1) \times (V_2 + V'_2).$$

*Доказательство.* Включение  $y \in V_1 \times V_2 + V'_1 \times V'_2$  по определению суммы Минковского и декартова произведения справедливо в том и только том случае, когда найдутся  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$ ,  $v'_1 \in V'_1$ ,  $v'_2 \in V'_2$  такие, что

$$y = (v_1, v_2) + (v'_1, v'_2) = (v_1 + v'_1, v_2 + v'_2).$$

Но последнее эквивалентно включению  $y \in (V_1 + V'_1) \times (V_2 + V'_2)$ . Лемма 5 доказана.

*Доказательство леммы 2.* Согласно предположениям  $\det A \neq 0$  и для любого  $k \in \mathbb{N}$  верны соотношения

$$A^{-k} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-k} & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_{n_1}^{-k} & & \\ \vdots & & & r_1^{-k} A_{-k\varphi_1} & \vdots \\ 0 & & & \dots & r_{n_2}^{-k} A_{-k\varphi_{n_2}} \end{pmatrix},$$

$$A^{-k}U = \bigotimes_{i=1}^{n_1} \left[ -|\lambda_i|^{-k} u_{i,\max}; |\lambda_i|^{-k} u_{i,\max} \right] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} r_j^{-k} \mathcal{B}_{R_{j,\max}}.$$

Поэтому из определения (4) и лемм 1, 5 для произвольного  $N \in \mathbb{N}$  вытекает представление

$$(II.1) \quad \Xi(N) = \bigotimes_{i=1}^{n_1} \left[ -\sum_{k=1}^N |\lambda_i|^{-k} u_{i,\max}; \sum_{k=1}^N |\lambda_i|^{-k} u_{i,\max} \right] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^N r_j^{-k} \mathcal{B}_{R_{j,\max}}.$$

Отсюда следует, что включение  $x_0 \in \Xi(N)$  равносильно тому, что для всех  $i = \overline{1, n_1}$  и  $j = \overline{1, n_2}$  выполнены соотношения

$$(II.2) \quad |x_{0,i}| \leq \sum_{k=1}^N |\lambda_i|^{-k} u_{i,\max} = \begin{cases} Nu_{i,\max}, & |\lambda_i| = 1, \\ u_{i,\max} \frac{1 - |\lambda_i|^{-N}}{|\lambda_i| - 1}, & |\lambda_i| \neq 1, \end{cases}$$

$$(II.3) \quad \sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2} \leq \sum_{k=1}^N r_j^{-k} R_{j,\max} = \begin{cases} NR_{j,\max}, & r_j = 1, \\ R_{j,\max} \frac{1 - r_j^{-N}}{r_j - 1}, & r_j \neq 1. \end{cases}$$

Условие (П.2) эквивалентно неравенству

$$N \geq \begin{cases} \frac{|x_{0,i}|}{u_{i,\max}}, & |\lambda_i| = 1, \\ -\frac{\ln\left(1 - \frac{|x_{0,i}|}{u_{i,\max}}(|\lambda_i| - 1)\right)}{\ln|\lambda_i|}, & |\lambda_i| \neq 1, \end{cases} = F(x_{0,i}; u_{i,\max}, \lambda_i).$$

Условие (П.3) эквивалентно неравенству

$$N \geq \begin{cases} \frac{\sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2}}{R_{j,\max}}, & r_j = 1, \\ -\frac{\ln\left(1 - \frac{\sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2}}{R_{j,\max}}(r_j - 1)\right)}{\ln r_j}, & r_j \neq 1, \end{cases} = \\ = F\left(\sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2}; R_{j,\max}, r_j\right).$$

Полученные выражения корректны, поскольку имеет место

$$\left(1 - \frac{|x_{0,i}|}{u_{i,\max}}(|\lambda_i| - 1)\right) > 0, \quad i = \overline{1, n_1}, \\ \left(1 - \frac{\sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2}}{R_{j,\max}}(r_j - 1)\right) > 0, \quad j = \overline{1, n_2}.$$

Действительно, при  $|\lambda_i| \leq 1$  и  $r_j \leq 1$  эти соотношения выполняются автоматически. Если же  $|\lambda_i| > 1$  или  $r_j > 1$ , то их можно получить, перейдя в (П.1) к пределу по  $N \rightarrow \infty$  и используя предположение  $N_{\min} < \infty$ , в силу которого верно, что  $x_0 \in \cup_{N=0}^{\infty} \Xi(N)$  (см. детальное обоснование в [27]).

Таким образом, условия (П.2) и (П.3) выполняются в точности тогда, когда

$$N \geq \max \left\{ \max_{i=\overline{1, n_1}} F(x_{0,i}; u_{i,\max}, \lambda_i); \right. \\ \left. \max_{j=\overline{1, n_2}} F\left(\sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2}; R_{j,\max}, r_j\right) \right\},$$

и тем самым лемма 2 доказана.

*Доказательство леммы 3.* Из (4) следует, что для любого  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  выполняется включение

$$\underline{\Xi}(N) \subset \Xi(N) \subset \overline{\Xi}(N),$$

где  $\underline{\Xi}(N)$ ,  $\Xi(N)$ ,  $\overline{\Xi}(N)$  – множества 0-управляемости за  $N$  шагов систем  $(A, \underline{U})$ ,  $(A, U)$ ,  $(A, \overline{U})$  соответственно. Поэтому неравенство  $\overline{N}_{\min} \leq N_{\min} \leq \underline{N}_{\min}$  вытекает непосредственно из (5). Лемма 3 доказана.

*Доказательство теоремы 1.* Обозначим через  $\{\tilde{\Xi}(N)\}_{N=0}^{\infty}$  класс множеств 0-управляемости системы  $(\Lambda, S^{-1}U)$ . Согласно лемме 4 верно представление

$$\Xi(N) = S\tilde{\Xi}(N).$$

Отсюда следует, что включение  $x_0 \in \Xi(N)$  верно тогда и только тогда, когда справедливо  $y_0 = S^{-1}x_0 \in \tilde{\Xi}(N)$ . Таким образом, с учетом (5) значение времени быстрогодействия для систем  $(A, U)$  и  $(\Lambda, S^{-1}U)$  совпадает при начальных состояниях  $x_0$  и  $y_0$  соответственно.

Положим

$$\underline{U} = \bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u'_{i,\max}; u'_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R'_{j,\max}}, \quad \overline{U} = \bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u''_{i,\max}; u''_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R''_{j,\max}}.$$

Поскольку  $0 \in \text{int}U$ , а само множество  $U$  ограничено, то это же верно для множества  $S^{-1}U$ . Следовательно, найдутся такие значения  $u'_{i,\max}$ ,  $u''_{i,\max}$ ,  $R'_{j,\max}$ ,  $R''_{j,\max} > 0$ , для которых имеет место  $\underline{U} \subset S^{-1}U \subset \overline{U}$ .

Далее, в силу следствия 1 значение времени быстрогодействия  $\underline{N}_{\min}$  для системы  $(\Lambda, \underline{U})$  и начального состояния  $y_0$  имеет вид

$$\underline{N}_{\min} = \left[ \max \left\{ \max_{i=1, n_1} F(y_{0,i}; u'_{i,\max}, \lambda_i); \max_{j=1, n_2} F \left( \sqrt{y_{0, n_1+2j-1}^2 + y_{0, n_1+2j}^2}; R'_{j,\max}, r_j \right) \right\} \right].$$

Аналогично, значение времени быстрогодействия  $\overline{N}_{\min}$  для системы  $(\Lambda, \overline{U})$  и начального состояния  $y_0$  имеет вид

$$\overline{N}_{\min} = \left[ \max \left\{ \max_{i=1, n_1} F(y_{0,i}; u''_{i,\max}, \lambda_i); \max_{j=1, n_2} F \left( \sqrt{y_{0, n_1+2j-1}^2 + y_{0, n_1+2j}^2}; R''_{j,\max}, r_j \right) \right\} \right].$$

Для завершения доказательства остается применить лемму 3.

*Лемма 6.* Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ ,  $\hat{x} \in \mathcal{X}$  – решение (21),  $\hat{\psi} \in \mathcal{X}'$  – решение (22). Тогда

$$(II.4) \quad \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \hat{R}(k, x, \hat{u}(k)) \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\},$$

$$(II.5) \quad \hat{G}(\hat{x}(N)) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \hat{G}(x).$$

*Доказательство.* Равенство (П.5) очевидно выполняется, поскольку

$$\hat{G}(x) \equiv -\langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle + \|A^N x_0\|^2.$$

В силу (22) при всех  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  имеем

$$\begin{aligned} \hat{R}(k, x, \hat{u}(k)) &= \langle \hat{\psi}(k+1), Ax + \hat{u}(k) \rangle - \|A^{N-k-1}(Ax + \hat{u}(k))\|^2 - \\ &\quad - \langle \hat{\psi}(k), x \rangle + \|A^{N-k}x\|^2 = \langle \hat{\psi}(k+1), \hat{u}(k) \rangle - \|A^{N-k-1}\hat{u}(k)\|^2, \end{aligned}$$

поэтому (П.4) также выполняются. Лемма 6 доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Пусть выполнены все перечисленные в теореме 2 условия. Исходя из введенных в разделе 5 обозначений, в силу леммы 6 имеем

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}(N)) &= \hat{G}(\tilde{x}(N)) - \hat{\varphi}(N, \tilde{x}(N)) + \hat{\varphi}(0, x_0) = \\ &= \hat{G}(\tilde{x}(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} \left( \hat{\varphi}(k+1, \tilde{x}(k+1)) - \hat{\varphi}(k, \tilde{x}(k)) \right) = \\ &= \hat{G}(\tilde{x}(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) \stackrel{(23)}{\leq} \\ &\stackrel{(23)}{\leq} \hat{G}(\tilde{x}(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \hat{u}(k)) \stackrel{(П.4)}{\leq} \\ &\stackrel{(П.4)}{\leq} \hat{G}(\tilde{x}(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) \stackrel{(П.5)}{\leq} \\ &\stackrel{(П.5)}{\leq} \hat{G}(\hat{x}(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) = J(\hat{x}(N)). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

*Доказательство теоремы 3.* Покажем, что в случае невырожденной матрицы  $A$  существует единственная пара  $(\tilde{x}, \tilde{u})$ , удовлетворяющая (23), (24). Поскольку  $\tilde{x}$  в силу (24) определяются по  $\tilde{u}$  однозначно, то достаточно показать, что при любых значениях  $\tilde{x}(k)$  существует единственное  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ , удовлетворяющее условию (23). Действительно, если это так, то при  $k=0$  однозначно определено  $\tilde{u}(0) \in U$ , по которому однозначно определяется  $\tilde{x}(1)$ , затем  $\tilde{u}(1)$  и т.д. Но  $\tilde{u}$  из условия (23) находится при каждом  $k=0, \dots, N$  путем решения экстремальной задачи

$$\hat{R}(k, \tilde{x}(k), v) \rightarrow \max_{v \in U},$$

которая в силу замечания 3 эквивалентна задаче

$$f(v) := \langle \hat{\psi}(k+1) - 2(A^{N-k-1})^T A^{N-k} \tilde{x}(k), v \rangle - \|A^{N-k-1}v\|^2 \rightarrow \max_{v \in U}.$$

Покажем, что решение этой задачи существует и единственно при любом  $\tilde{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ . Поскольку матрица квадратичной формы  $(A^{N-k-1})^T A^{N-k-1}$  положительно определена при  $\det A \neq 0$ , то строгий глобальный максимум функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  при отсутствии ограничения  $v \in U$  достигается в точке

$$v^* = \frac{1}{2} A^{k+1-N} (A^{k+1-N})^T \hat{\psi}(k+1) - A\tilde{x}(k).$$

Возможны два случая:  $v^* \in U$  или  $v^* \notin U$ . В первом случае  $v^*$  – единственное решение рассматриваемой экстремальной задачи с ограничениями. Во втором случае условный максимум достигается в некоторой другой точке  $v' \in U$ , поскольку функция  $f$  непрерывна, а множество  $U$  компактно. Положим  $\alpha = f(v') = \max_{v \in U} f(v)$ . Тогда множество уровня  $V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) \geq \alpha\}$  представляет собой непустой строго выпуклый компакт. При этом  $V \cap U = \{v'\}$ . Действительно, по определению  $v' \in V \cap U$ , и если бы существовала точка  $v'' \in V \cap U$ ,  $v'' \neq v'$ , то и отрезок  $[v', v'']$  целиком содержался бы в множестве  $V \cap U$ , так как множества  $V$  и  $U$  выпуклы. Но множество  $V$  строго выпукло, поэтому  $\frac{1}{2}(v' + v'') \in \text{int} V$ , т.е.  $f(v'/2 + v''/2) > \alpha$ ,  $v'/2 + v''/2 \in U$ , что противоречит определению числа  $\alpha$ . Таким образом, во втором случае  $v'$  – единственное решение задачи  $f(v) \rightarrow \max_{v \in U}$ .

Далее, предположим, что пара  $(\hat{x}, \hat{u})$  не удовлетворяет соотношениям дискретного принципа максимума (20)–(22). В силу замечания 2 это означает, что найдется  $r \in \{0, \dots, N-1\}$  такое, что

$$\hat{R}(r, \hat{x}(r), \hat{u}(r)) < \max_{v \in U} \hat{R}(r, \hat{x}(r), v).$$

Возьмем наименьшее такое  $r$ . Тогда в силу однозначной определенности  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$  имеет место

$$\tilde{u}(k) = \hat{u}(k), \quad k = 0, 1, \dots, r-1,$$

и, следовательно,  $\tilde{x}(r) = \hat{x}(r)$ . Поэтому

$$\hat{R}(r, \hat{x}(r), \hat{u}(r)) < \max_{v \in U} \hat{R}(r, \hat{x}(r), v) = \max_{v \in U} \hat{R}(r, \tilde{x}(r), v) = \hat{R}(r, \tilde{x}(r), \tilde{u}(r)).$$

Отсюда, возвращаясь к доказательству теоремы 2, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) &= \sum_{k=0}^{r-1} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) + \hat{R}(r, \tilde{x}(r), \tilde{u}(r)) + \\ &+ \sum_{k=r+1}^{N-1} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) > \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$J(\tilde{x}(N)) < J(\hat{x}(N)).$$

Если же пара  $(\hat{x}, \hat{u})$  удовлетворяет соотношениям дискретного принципа максимума, то в силу однозначной разрешимости условий (23), (24) имеет место  $\tilde{x} = \hat{x}$  и  $\tilde{u} = \hat{u}$ . Поэтому  $J(\tilde{x}(N)) = J(\hat{x}(N))$ . Теорема 3 полностью доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
3. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
4. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
5. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их приложения в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
6. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
7. *Holtzman J.M., Halkin H.* Directional convexity and the maximum principle for discrete systems // J. SIAM Control. 1966. V. 4. No. 2. P. 263–275.
8. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
9. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // АиТ. 2017. № 10. С. 3–32.
10. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // АиТ. 2019. № 3. С. 3–25.
11. *Lin X. Zhang W.* A maximum principle for optimal control of discrete-time stochastic Systems with multiplicative noise // IEEE Trans. Automatic Control. 2015. V. 60. No. 4. P. 1121–1126.
12. *Kurzanskiy A., Varaiya P.* Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems // IEEE Trans. Automatic Control. 2007. V. 52. No. 1. P. 26–38.
13. *Краснощеченко В.И.* Симплекс-метод для решения задачи быстрогодействия при наличии ограничения на скалярное управление и фазовых ограничений // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 6. Доступ в журн. <http://engjournal.ru/catalog/it/asu/1252.html>
14. *Сазанова Л.А.* Устойчивость оптимального синтеза в задаче быстрогодействия // Известия вузов. Математика. 2002. № 2. С. 46–57.
15. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
16. *Коннов А.И., Кротов В.Ф.* О глобальных методах последовательного улучшения управляемых процессов // АиТ. 1999. № 10. С. 77–88.
17. *Хрусталеv М.М.* Необходимые и достаточные условия для задачи оптимального управления // ДАН. 1973. Т. 211. № 1. С. 59–62.
18. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука. Физматлит, 1997.



19. *Трушкова Е.А.* Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // *АиТ.* 2011. № 6. С. 151–159.
20. *Расина И.В.* Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов // *АиТ.* 2012. № 10. С. 3–17.
21. *Кротов В.Ф., Булатов А.В., Батурина О.В.* Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // *АиТ.* 2011. № 6. С. 64–78.
22. *Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю.* О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстрогодействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ.* 2021. № 12. С. 48–72.
23. *Хрусталева М.М., Царьков К.А.* Метод последовательного улучшения в задачах оптимизации вероятностных критериев для линейных по состоянию диффузионно-скачкообразных систем // *АиТ.* 2023. № 6. С. 100–121.
24. *Рокаффеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
25. *Weibel C.* Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. Suisse: EPFL, 2007.
26. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
27. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ.* 2023. № 2. С. 3–34.
28. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1981.
29. *Гурман В.И.* Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука. Физматлит, 1977.
30. *Дыхта В.А.* Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // *АиТ.* 2014. № 11. С. 19–37.
31. *Athans M.* The Matrix Minimum Principle // *Inform. Control.* 1967. V. 11. P. 592–606.
32. *Козлов М.К., Тарасов С.П., Хачиян Л.Г.* Полиномиальная разрешимость выпуклого квадратичного программирования // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1980. Т. 20. № 5. С. 1319–1323.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 30.01.2024

После доработки 13.09.2024

Принята к публикации 20.09.2024