

## Стохастические системы

© 2024 г. В.М. ВИШНЕВСКИЙ, д-р техн. наук (vishn@inbox.ru),  
К.А. ВЫТОВТОВ, д-р техн. наук (vytovtov\_konstan@mail.ru),  
Е.А. БАРАБАНОВА, д-р техн. наук (elizavetaalex@yandex.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО РЕЖИМА ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА СУММАРНЫЙ РАЗМЕР БУФЕРА<sup>1</sup>

Рассмотрен переходной режим двухфазной системы массового обслуживания (СМО) с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе и ограничением на суммарный размер буфера двух фаз. Найдены нестационарные вероятности состояний системы с использованием преобразования Лапласа. Проведен численный расчет и анализ характеристик производительности системы в переходном режиме с параметрами, соответствующими оптическим сетям нового поколения.

*Ключевые слова:* двухфазная СМО, переходной режим, преобразование Лапласа.

**DOI:** 10.31857/S0005231024010049

#### 1. Введение

Многофазные системы массового обслуживания, или так называемые тандемные сети, широко используются для описания работы телекоммуникационных систем, в которых процесс обработки заявок состоит из нескольких этапов [1]. К ним можно отнести, например, многокаскадные коммутационные системы или сеть базовых станций линейной топологии. При этом стационарный режим работы таких систем является хорошо изученным как для случая пуассоновского, так и коррелированного входного потока. Отметим лишь некоторые последние работы по данной теме [1–7].

В последние годы помимо исследования стационарного режима СМО продолжено исследование и переходного режима их работы. Например, при проектировании оптических телекоммуникационных сетей ввиду характерных для них высоких скоростей передачи информации важной задачей является исследование изменения характеристик производительности системы во времени и оценка времени переходного режима в случае перезагрузки системы или выхода из строя обслуживающих устройств [8]. Аналогичная ситуация складывается и при исследовании сетей нового поколения 5G и 6G [9]. В связи с актуальностью данной проблемы в последние годы увеличилось число

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00795, <https://rscf.ru/project/23-29-00795/>).

работ, посвященных изучению переходного режима работы СМО и их нестационарных марковских моделей [10–19]. Одной из первых работ, где автор ставит такую задачу для двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком, бесконечным буфером на первой фазе и нулевым буфером на второй фазе, является статья еще 1967 г. [20]. В дальнейших работах исследуются более сложные системы, такие как системы с временем обслуживания фазового типа [11, 12], тандемные сети различного вида [14, 15]. Следует отметить, что в большинстве данных работ авторы не приводят конечные выражения, позволяющие анализировать характеристики производительности СМО в переходном режиме, а пользуются готовыми численными методами существующих пакетов программ. Анализ устойчивости нестационарных марковских процессов с непрерывным временем, описывающих функционирование главных классов СМО с нестационарными входными потоками, в том числе изменяющихся по синусоидальному закону проведен в [10, 13, 18, 19]. В [21–23] проанализированы основные характеристики производительности однолинейных и многолинейных СМО с пуассоновским и коррелированным потоками в нестационарном режиме.

В настоящей работе исследуются нестационарные характеристики производительности двухфазной СМО с ограничением на суммарный объем буфера двух фаз. Одним из примеров реальной системы, модель которой представляет собой данная СМО, является станция технического обслуживания автомобилей с двумя этапами обслуживания: диагностикой и ремонтом. Автомобили, находящиеся в очереди на обслуживание на каждом этапе, размещаются на общей автомобильной стоянке с некоторым числом парковочных мест, что и определяет ограничение на суммарное количество автомобилей, одновременно находящихся на станции технического обслуживания. Стационарный режим данной СМО исследован в [24]. Исследование нестационарного режима такой системы в мировой литературе отсутствует, что определяет новизну настоящей статьи.

Структура статьи следующая. В разделе 3 приводятся дифференциальные уравнения, описывающие функционирование двухфазной СМО, для удобства записи которых вводятся новые функции. В разделе 4 представлено выражение для нахождения вероятностей состояний двухфазной СМО, содержащее вспомогательную матрицу, элементы которой находятся с использованием аппарата преобразования Лапласа. В разделе 5 приведены выражения для нахождения основных показателей производительности двухфазной СМО в переходном режиме. Численные результаты исследования представлены в разделе 6.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается двухфазная СМО с одним однолинейным обслуживающим устройством на каждой фазе. Входной поток является пуассоновским с интенсивностью  $\lambda$ , время обслуживания заявок устройствами первой и вто-

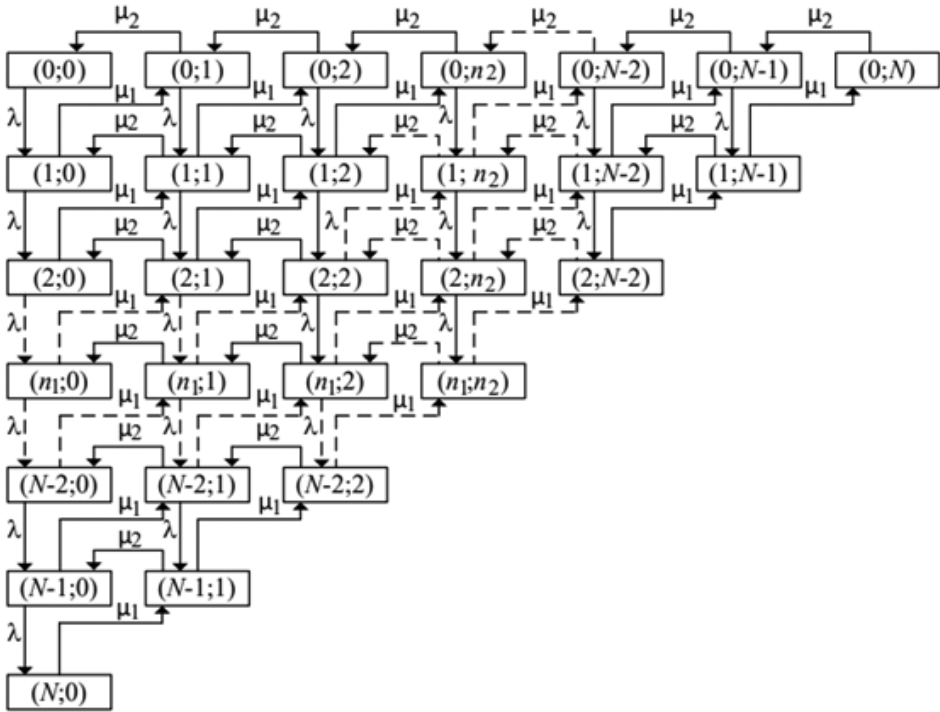


Рис. 1. Граф состояний системы.

рой фазы имеет экспоненциальное распределение с интенсивностями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. После завершения обслуживания заявки на первой фазе каждая заявка переходит на вторую фазу. Число заявок на первой и второй фазе может принимать значения  $n_1 = \overline{0, N}$ ,  $n_2 = \overline{0, N}$  соответственно, где  $N$  – максимальное число заявок в системе. При этом на суммарный размер буфера двух фаз системы накладывается ограничение, такое что  $n_1 + n_2 \leq N$  в любой момент времени. Новая заявка может поступить в систему только при условии  $n_1 + n_2 < N$  (рис. 1).

Целью данной работы является анализ характеристик производительности описанной выше системы в переходном режиме, таких как время переходного режима, вероятность потерь, пропускная способность, среднее число заявок в системе.

### 3. Построение дифференциальных уравнений, описывающих функционирование двухфазной СМО с ограничением на суммарный размер буфера

Марковский процесс, описывающий работу исследуемой СМО состоит из  $R = \frac{1}{2}(N^2 + 3N + 2)$  состояний системы  $S(n_1, n_2, t)$ , когда в момент времени  $t$  на первой фазе обслуживается  $n_1$  заявок, на второй фазе –  $n_2$  заявок, при этом  $n_1 + n_2 \leq N$  (рис. 1). Система дифференциальных уравнений для

такой СМО имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{dP(0,0,t)}{dt} = -\lambda P(0,0,t) + \mu_2 P(0,1,t), \quad (n_1, n_2 = 0); \\
 & \frac{dP(0,n_2,t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2)P(0,n_2,t) + \mu_2 P(0,n_2+1,t) + \mu_1 P(0,n_2-1,t), \\
 & \quad (n_1 = 0, n_2 = \overline{1, N-1}); \\
 & \frac{dP(0,N,t)}{dt} = -\mu_2 P(0,N,t) + \mu_1 P(1,N-1,t), \quad (n_1 = 0, n_2 = N); \\
 & \frac{dP(n_1,0,t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2)P(n_1,0,t) + \mu_2 P(n_1,1,t) + \lambda P(n_1-1,0,t), \\
 & \quad (n_1 = \overline{1, N-1}, n_2 = 0); \\
 & \frac{dP(N,0,t)}{dt} = -\mu_1 P(N,0,t) + \lambda P(N-1,0,t), \quad (n_1 = N, n_2 = 0); \\
 & \frac{dP(n_1,n_2,t)}{dt} = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1,n_2,t) + \mu_2 P(n_1,n_2+1,t) + \\
 & + \mu_1 P(n_1+1,n_2-1,t) + \lambda P(n_1-1,n_2,t), \quad (n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N); \\
 & \frac{dP(n_1,n_2,t)}{dt} = -(\mu_1 + \mu_2)P(n_1,n_2,t) + \mu_1 P(n_1+1,n_2-1,t) + \\
 & + \lambda P(n_1-1,n_2,t), \quad (n_1, n_2 > 0, n_1 + n_2 = N).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

При этом следует отметить, что хорошо известный подход к построению системы дифференциальных уравнений, предусматривающий использование различных форм записи уравнений при различных допустимых значениях  $n_1$  и  $n_2$ , является очень неудобным для расчета и анализа характеристик СМО в переходном режиме. Для удобства дальнейшего решения и анализа системы (1) введем функции

$$v_1(x, M) = \frac{|x - M + 0,5| + x - M + 0,5}{2|x - M + 0,5|},
 \tag{2}$$

$$v_2(x, K) = \frac{|K - x - 0,5| + K - x - 0,5}{2|K - x - 0,5|},
 \tag{3}$$

где  $M = \overline{0, N}$ ,  $K = \overline{0, N}$ . Тогда система (1) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{dP(n_1, n_2, t)}{dt} = -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N - 1) + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1)] \times \\
 & \quad \times P(n_1, n_2, t) + \mu_1 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N) P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \\
 & \quad + \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N - 1) P(n_1, n_2 + 1, t) + \\
 & \quad + \lambda v_1(n_1, 1) v_2(n_1 + n_2, N) P(n_1 - 1, n_2, t),
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где  $n_1 = \overline{0, N}$ ,  $n_2 = \overline{0, N}$ ,  $n_1 + n_2 \leq N$ . Описанная система может быть представлена в матричном виде:

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \mathbf{A}\vec{P}(t),
 \tag{5}$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений (4),  $\vec{P}(t) = \{P(n_1, n_2, t)\}^T$  – вектор-столбец вероятностей состояний системы. Для построения матрицы  $\mathbf{A}$  дополнительно введем функцию

$$(6) \quad \vartheta(n_k, n_l) = (N + 1)n_k + n_l - \frac{n_k(n_k - 1)}{2} + 1,$$

преобразующую число заявок  $n_k, n_l$  в первом и втором буфере соответственно в номер столбца или строки этой матрицы. Краткое описание функций (2), (3) и (6) приведено в Приложении. Тогда элементы матрицы системы (5), расположенные на главной диагонали, записываются в виде

$$(7) \quad A_{\vartheta(n_1, n_2), \vartheta(n_1, n_2)} = -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N) + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1)].$$

Остальные ненулевые элементы определяются соотношениями

$$(8) \quad \begin{aligned} A_{\vartheta(n_1, n_2), \vartheta(n_3, n_4)} &= \mu_1 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1); \\ A_{\vartheta(n_1, n_2), \vartheta(n_1, n_5)} &= \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N); \\ A_{\vartheta(n_1, n_2), \vartheta(n_6, n_2)} &= \lambda v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1). \end{aligned}$$

Здесь  $n_1 = \overline{0, N}$ ,  $n_2 = \overline{0, N}$ ,  $n_3 = n_1 + 1$ ,  $n_4 = n_2 - 1$ ,  $n_5 = n_2 + 1$ ,  $n_6 = n_1 - 1$ . Оставшиеся элементы  $A_{i,j}$  матрицы  $\mathbf{A}$  в (5) равны нулю. Новая функция (6) также необходима для упорядоченного построения вектора-столбца вероятностей состояний системы в момент времени  $t$  в уравнении (5). Действительно, в терминах  $n_k$  и  $n_l$  он имеет вид

$$(9) \quad \vec{P}(t) = \{p(0, 0, t), \dots, p(0, N, t), p(1, 0, t), \dots, \\ p(1, N - 1, t), \dots, p(N - 1, 0, t), p(N - 1, 1, t), p(N, 0, t)\}^T,$$

где  $\Gamma$  – оператор транспонирования. Однако для корректного решения (5) необходимо использовать не двумерный массив чисел  $n_k$  и  $n_l$  при указании состояния системы, а порядковый номер от 1 до  $R = \frac{1}{2}(N^2 + 3N + 2)$ . Для этого, используя функцию (6), окончательно получим

$$(10) \quad \vec{P}(t) = \{P(1, t), P(2, t), P(3, t), P(4, t), \dots, \\ P(\vartheta(n_k, n_l), t), \dots, P(\vartheta(N, 0), t)\}^T,$$

где  $P(\vartheta(n_k, n_l), t)$  соответствует  $p(n_k, n_l, t)$  в (9).

Таким образом, использование функций  $\vartheta(n_k, n_l)$ ,  $v_1(x, M)$ ,  $v_2(x, K)$  позволяет построить матрицу коэффициентов в (5) в общем виде для любого числа заявок  $N$ .

#### 4. Вероятности состояний двухфазной СМО в переходном режиме

Для связи вероятностей состояний системы в момент времени  $t$  с вероятностями состояний системы в некоторый начальный момент времени  $t_0$  введем матрицу  $\mathbf{L}$ , порядок которой на единицу больше порядка фундаментальной матрицы системы уравнений (4) и такую что

$$(11) \quad \vec{P}(t) = \mathbf{L}(t - t_0) \vec{P}(t_0),$$

где  $\vec{P}(t) = \{P(\vartheta(n_1, n_2), t)\}^T$  – вектор столбец вероятностей состояний системы в момент времени  $t$ .

Применим прямое преобразование Лапласа к системе уравнений (5):

$$(12) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d\vec{P}(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{A} \vec{P}(t) dt.$$

Тогда элемента матрицы  $\mathbf{L}(t - t_0)$  определяются следующей теоремой.

*Теорема 1. Элементы матрицы  $\mathbf{L}(t - t_0)$  двухфазной СМО с ограничением  $N$  на суммарный размер буфера двух фаз, описываемой системой уравнений (4), имеют вид*

$$(13) \quad L_{i,j}(t - t_0) = \sum_{k=1}^R (-1)^{l+j} \frac{\Delta_{j,l}(s_k)}{\left. \frac{d\Delta(s)}{ds} \right|_{s=s_k}} \exp(s_k(t - t_0)),$$

где  $\Delta(s)$  – определитель матрицы  $\mathbf{B} = \mathbf{A} - s\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов в (5),  $\mathbf{I}$  – единичная диагональная матрица,  $s = \alpha + i\beta$  – независимая переменная в комплексной области,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\Delta_{i,l}(s)$  – определитель минора элемента  $B_{i,l}$  матрицы  $\mathbf{B}$ ,  $s_k$  –  $k$ -й корень многочлена  $\Delta(s)$  в случае, когда все его корни простые,  $R = (N^2 + 3N + 2)/2$  – количество корней многочлена  $\Delta(s)$ , равное количеству дифференциальных уравнений в системе (4).

*Доказательство.* Учитывая, что  $\int_0^{\infty} e^{-st} \left( \frac{d\vec{P}(t)}{dt} \right) dt = s\vec{P}(s) - \vec{P}(0)$ , где  $\vec{P}(0)$  – вектор столбец начальных условий, а также то, что в данном случае  $\mathbf{A}$  – постоянная матрица, проведем преобразования

$$(14) \quad s\vec{P}(s) - \vec{P}(0) = \mathbf{A}\vec{P}(s) \Rightarrow \mathbf{A}\vec{P}(s) - s\vec{P}(s) = -\vec{P}(0) \Rightarrow (\mathbf{A} - s\mathbf{I})\vec{P}(s) = -\vec{P}(0).$$

В результате получаем систему линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$(15) \quad \mathbf{B}\vec{P}(s) = -\vec{P}(0)$$

с постоянными коэффициентами. С учетом (4) система (15) может быть записана в виде

$$(16) \quad -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N - 1) + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1) + s] P(n_1, n_2, s) + \\ + \mu_1 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N) P(n_1 + 1, n_2 - 1, s) + \\ + \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N - 1) P(n_1, n_2 + 1, s) + \\ + \lambda v_1(n_1, 1) v_2(n_1 + n_2, N) P(n_1 - 1, n_2, s) = P(n_1, n_2, 0),$$

где  $n_1 = \overline{0, N}$ ,  $n_2 = \overline{0, N}$ ,  $n_1 + n_2 \leq N$ . Тогда в соответствии с (7) и (8) ненулевые элементы матрицы  $\mathbf{B}$  записываются как

$$(17) \quad B_{\vartheta(n_1, n_2), \vartheta(n_1, n_2)}(s) = -[\lambda v_2(n_1 + n_2, N) + \mu_1 v_1(n_1, 1) + \mu_2 v_1(n_2, 1) + s]; \\ B_{\vartheta(n_1, n_2), \vartheta(n_3, n_4)}(s) = \mu_1 v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1); \\ B_{\vartheta(n_1, n_2), \vartheta(n_1, n_5)} = \mu_2 v_2(n_1 + n_2, N); \\ B_{\vartheta(n_1, n_2), \vartheta(n_6, n_2)}(s) = \lambda v_1(n_2, 1) v_2(n_1 + n_2, N + 1).$$

Для нахождения изображений элементов матрицы  $\mathbf{L}$  необходимо использовать линейно независимые начальные условия. Такими условиями являются:

$$(18) \quad P(N_1, N_2, 0) = 1(N_1 = \overline{0, N}, N_2 = \overline{0, N}, N_1 + N_2 \leq N); \\ P(n_1, n_2, 0) = 0(n_1 \neq N_1, n_2 \neq N_2).$$

Решения системы (16) при  $P(n_1, n_2, 0) = 1$  ( $n_1 = n_2 = 0$ ),  $P(n_1, n_2, 0) = 0$  ( $n_1 = \overline{1, N}$ ,  $n_2 = \overline{1, N}$ ,  $n_1 + n_2 \leq N$ ) дают первый столбец изображений элементов матрицы преобразования, решения системы (15) при  $P(0, 1, 0) = 1$  и остальных  $P(n_1, n_2, 0) = 0$  дают второй столбец изображений элементов матрицы преобразования. Аналогично находятся все столбцы изображений элементов матрицы преобразования  $\mathbf{L}(s - s_0)$ . Для получения изображения матрицы  $\mathbf{L}$  целесообразно использовать метод Крамера. В соответствии с этим методом элементы матрицы, являющиеся линейно независимыми решениями (16), представляют собой дроби вида

$$(19) \quad L_{l,j}(s - s_0) = (-1)^{l+j} \frac{\Delta_{j,l}(s)}{\Delta(s)},$$

где  $\Delta(s)$  – определитель матрицы  $\mathbf{B}$ ,  $\Delta_{j,l}(s)$  – минор элемента  $B_{jl}$  матрицы  $\mathbf{B}$ . Теперь рассмотрим обратное преобразование Лапласа. Прежде всего отметим, что изображение элемента матрицы преобразования вероятностей (19) представляет собой правильную дробь

$$(20) \quad L_{l,j}(s - s_0) = (-1)^{l+j} \frac{\Delta_{j,l}(s)}{\Delta(s)} = \\ = (-1)^{l+j} \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}.$$

Причем  $n < m$ , поскольку числитель – это определитель алгебраического дополнения элемента матрицы, определитель которой стоит в знаменателе. Тогда дробь в (20) может быть разложена на простые множители

$$(21) \quad L(s) = \frac{\Delta_{j,l}(s)}{\Delta(s)} = A_1 \frac{1}{s-s_1} + A_2 \frac{1}{s-s_2} + \dots + A_m \frac{1}{s-s_m} = \sum_{k=1}^m A_k \frac{1}{s-s_k}.$$

Для нахождения коэффициентов  $A_k$  умножим обе части (21) на  $(s-s_1)$  и получим

$$(22) \quad L(s) = \frac{\Delta_{j,l}(s)}{\Delta(s)} (s-s_1) = A_1 + (s-s_1) \sum_{k=2}^m A_k \frac{1}{s-s_k}.$$

Правая часть (22) при  $s \rightarrow s_1$  равна  $A_1$ , поскольку  $s-s_1 \rightarrow 0$ . Левая часть представляет собой неопределенность  $0/0$ , так как множитель  $s-s_1$  присутствует и в числителе, и в знаменателе. Раскроем эту неопределенность по правилу Лопиталя и получим левую часть в виде

$$(23) \quad \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\Delta_{j,l}(s)}{\Delta(s)} (s-s_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\Delta_{j,l}(s) + (s-s_1) \frac{d\Delta_{j,l}(s)}{ds}}{\frac{d\Delta(s)}{ds}} = \frac{\Delta_{j,l}(s_1)}{\left[ \frac{d\Delta(s)}{ds} \right] \Big|_{s=s_1}}.$$

Учитывая (22) и (23), получим

$$(24) \quad A_1 = \frac{\Delta_{j,l}(s_1)}{\left[ \frac{d\Delta(s)}{ds} \right] \Big|_{s=s_1}}.$$

Аналогично находим  $k$ -й коэффициент в (22) как

$$(25) \quad A_k = \frac{\Delta_{j,l}(s_k)}{\left[ \frac{d\Delta(s)}{ds} \right] \Big|_{s=s_k}}.$$

Таким образом, выражение (21) принимает вид

$$(26) \quad L(s) = \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_{j,l}(s_k)}{\left[ \frac{d\Delta(s)}{ds} \right] \Big|_{s=s_k}} \cdot \frac{1}{s-s_k}.$$

Применив к (26) обратное преобразование Лапласа и проведя математические преобразования

$$(27) \quad L(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_{j,l}(s_k)}{\left[ \frac{d\Delta(s)}{ds} \right] \Big|_{s=s_k}} \frac{\exp(st) ds}{s-s_k} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_{j,l}(s_k)}{\left[ \frac{d\Delta(s)}{ds} \right] \Big|_{s=s_k}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp(st) ds}{s-s_k} = \sum_{k=2}^m \frac{\Delta_{j,l}(s_k)}{\left[ \frac{d\Delta(s)}{ds} \right] \Big|_{s=s_k}} \exp(s_k t),$$

получим выражение для оригинала от изображения (26) в форме (12). Теорема доказана.



Подставив (27) и выражение (11), можно найти вероятности состояний двухфазной СМО в переходном режиме при заданных начальных условиях. Эти выражения позволяют рассчитать и провести анализ показателей производительности рассматриваемой системы в произвольный момент времени  $t$  как в переходном, так и в стационарном режимах: время до выхода системы в стационарный режим, вероятность потерь, пропускная способность, число заявок, обслуживаемых в каждой фазе.

## 5. Показатели производительности двухфазной СМО в переходном режиме

### 5.1. Время переходного режима

Время переходного режима — это время, за которое СМО переходит в стационарный режим. В соответствии с [22] время переходного режима определяется наименьшим по модулю значением действительной части полюса изображений вероятностей состояний:

$$(28) \quad \tau_{tr} = \frac{k}{\alpha_{\min}}.$$

Здесь  $\forall \alpha_j \in \Gamma: (\Gamma = \alpha_j, \alpha_j \geq \alpha_{\min} \implies \alpha_j = \alpha_{\min})$  и  $k > 0, k \in R$ . Значение  $k$  выбирается исходя из постановки конкретной задачи. В [22] было показано, что переходной режим можно считать завершённым при  $k = (3 \div 5)$ .

### 5.2. Вероятность потерь

Так как максимальное число заявок в системе  $n_1 + n_2 = N$ , то все заявки в состояниях  $(i, N - i)$ ,  $i = \overline{0, N}$  будут потеряны. Учитывая, что нахождение заявок в указанных состояниях являются независимыми событиями, сумма вероятностей этих состояний в момент времени  $t$

$$(29) \quad P_{loss}(t) = \sum_{i=0}^N P(i, N - i, t) = \sum_{i=0}^N P(\vartheta(i, N - i), t)$$

определяет вероятность потерь заявок.

### 5.3. Пропускная способность

Поскольку выражение (29) определяет результирующую вероятность потерь заявок в системе, то очевидно, что заявки, поступающие в систему, находящуюся в любых других состояниях, будут обслуживаться. Тогда пропускная способность в момент времени  $t$  в переходном режиме равна

$$(30) \quad A(t) = [1 - P_{loss}(t)] \lambda = \left[ 1 - \sum_{i=0}^N P(i, N - i, t) \right] \lambda = \\ = \left[ 1 - \sum_{i=0}^N P(\vartheta(i, N - i), t) \right] \lambda.$$

Так как пропускная способность фактически представляет собой интенсивность обслуживания системой поступивших в нее заявок, то тогда за время  $dt$  система обслуживает  $A(t)dt$  заявок. Следовательно, за время переходного режима число обслуженных заявок равно

$$(31) \quad Z_{service\ tr} = \int_{t_0}^{t_0+\tau_{tr}} \lambda \left[ 1 - \sum_{i=0}^N P(\vartheta(i, N-i), t) \right] dt,$$

а число потерянных заявок равно

$$(32) \quad Z_{loss\ tr} = \int_{t_0}^{t_0+\tau_{tr}} \lambda \sum_{i=0}^N P(\vartheta(i, N-i), t) dt.$$

Таким образом, сумма (31) и (32) дает  $\lambda\tau_{tr}$  – число заявок, поступивших за время переходного режима, что подтверждает правильность полученных соотношений.

#### 5.4. Число заявок, обслуживаемых на каждой фазе в переходном режиме

Пусть  $P(n_1, n_2, t)$  – вероятность нахождения  $n_1$  заявок на первой фазе и  $n_2$  – заявок на второй фазе в момент времени  $t$ , тогда число заявок на первой фазе при условии, что система находится в состоянии  $(n_1, n_2)$ , равно  $n_1 P(n_1, n_2, t)$ . Суммируя  $n_1 P(n_1, n_2, t)$  по всем возможным состояниям, получим среднее число заявок на первой фазе в момент времени  $t$  как

$$(33) \quad Z_{phase1}(t) = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N [n_1 P(n_1, n_2, t)] = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N [n_1 P(\vartheta(n_1, n_2), t)],$$

где  $n_1 + n_2 \leq N$ . Аналогично, среднее число заявок на второй фазе в момент времени  $t$  в переходном режиме равно

$$(34) \quad Z_{phase2}(t) = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N [n_2 P(n_1, n_2, t)] = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N [n_2 P(\vartheta(n_1, n_2), t)],$$

где  $n_1 + n_2 \leq N$ . Тогда среднее число заявок в системе в переходном режиме будет

$$(35) \quad Z(t) = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N [(n_1 + n_2) P(n_1, n_2, t)] = \\ = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N [(n_1 + n_2) P(\vartheta(n_1, n_2), t)],$$

где  $n_1 + n_2 \leq N$ .

## 6. Численное исследование переходного режима двухфазной СМО

Рассмотрим переходной режим работы двухфазной СМО, адекватно описывающей функционирование коммутатора полностью оптической сети. В представляемом численном эксперименте значения  $\lambda = 8 \cdot 10^6$  пакетов/с,  $\mu_1 = 15 \cdot 10^6$  пакетов/с,  $\mu_2 = 10 \cdot 10^6$  пакетов/с ( $\lambda < \mu_2 < \mu_1$ ) соответствуют реальным характеристикам современных оптических сетей [25]. Здесь  $n_1$  – число пакетов, находящихся в первой фазе обслуживания,  $n_2$  – число пакетов, находящихся во второй фазе обслуживания,  $N = n_1 + n_2 = 4$  – максимальное число пакетов в системе. Малый размер буфера в данном численном примере определяется техническими ограничениями современных оптических устройств.

Для анализа характеристик производительности рассматриваемой СМО прежде всего строится матрица  $\mathbf{A}$  в соответствии с (7) и (8), затем матрица  $\mathbf{B}$  в соответствии с (17). Далее записываются элементы матрицы  $\mathbf{L}(t)$  в соответствии с (13). Для этого находятся полюсы функций, описывающих элементы матрицы  $\mathbf{L}(s - s_0)$  в терминах преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, & s_1 &= -1,2 \cdot 10^7, & s_2 &= -2,8 \cdot 10^7, \\ s_{3,4} &= -3,9 \cdot 10^7 \pm i1,9 \cdot 10^7, & s_{5,6} &= -3,2 \cdot 10^7 \pm i9,9 \cdot 10^7, \\ s_{7,8} &= -2,8 \cdot 10^7 \pm i1,2 \cdot 10^7, & s_{9,10} &= -5,1 \cdot 10^7 \pm i1,4 \cdot 10^7, \\ s_{11,12} &= -1,5 \cdot 10^7 \pm i6,0 \cdot 10^7, & s_{13,14} &= -2,2 \cdot 10^7 \pm i4,0 \cdot 10^7. \end{aligned}$$

Один из этих полюсов равен нулю, все остальные имеют отрицательную действительную часть. Это свидетельствует о наличии стационарного режима в системе. Более того, 12 из 15 полюсов являются попарно комплексно-сопряженными, что свидетельствует о колебательном характере вероятностей состояний в переходном режиме. Действительно, экспонента от комплексного числа в (12) является комбинацией тригонометрических функций в соответствии с формулой Эйлера.

Исследование полюсов изображений вероятностей состояний также позволяет вычислить постоянную времени по формуле (28)  $\tau = 1/|\alpha_{\min}| = 1/5\,138\,202,473908113 = 1,9462 \cdot 10^{-7}$  с и время переходного режима  $\tau_{tr} = 5\tau = 9,731 \cdot 10^{-7}$  с.

На рис. 2 представлена зависимость вероятностей состояний от времени для рассматриваемого случая. На рисунке обозначено:  $P_{idle}(t)$  – вероятность того, что система свободна;  $P_{phase1}(t)$ ,  $P_{phase2}(t)$  – зависимости вероятностей состояний нахождения заявок только в первой и только во второй фазах обслуживания соответственно;  $P_{loss}(t)$  – вероятность потерь, вычисленная в соответствии с (29).

По рис. 2 видно, что время переходного режима, вычисленное по (28), соответствует времени выхода на стационарный режим по графикам вероятностей состояний. Колебательный характер переходного режима наглядно виден по зависимости вероятности нахождения заявок на первой фазе обслу-

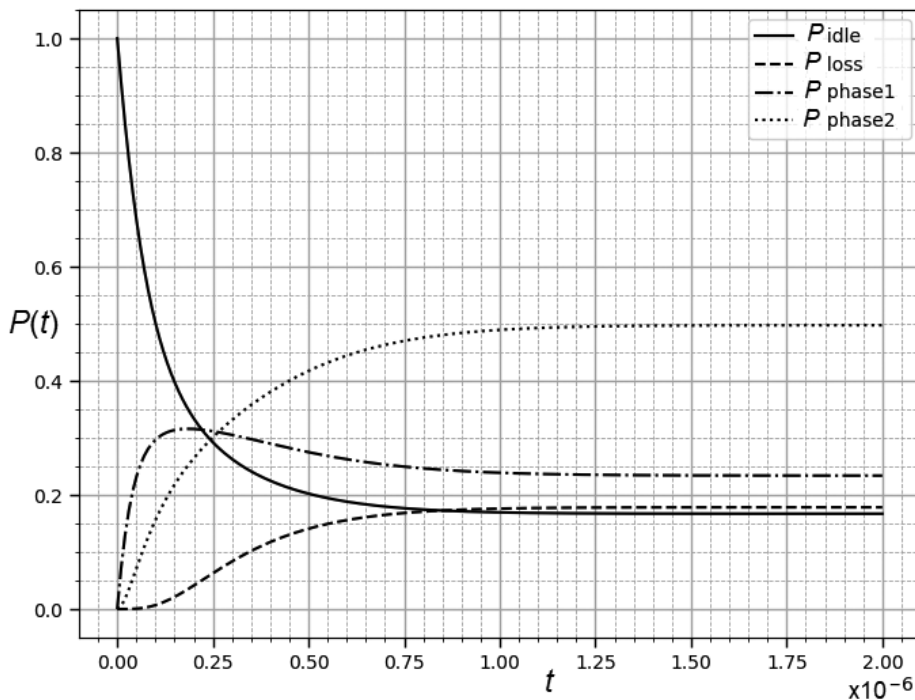


Рис. 2. Зависимость вероятностей состояний системы от времени в переходном режиме.

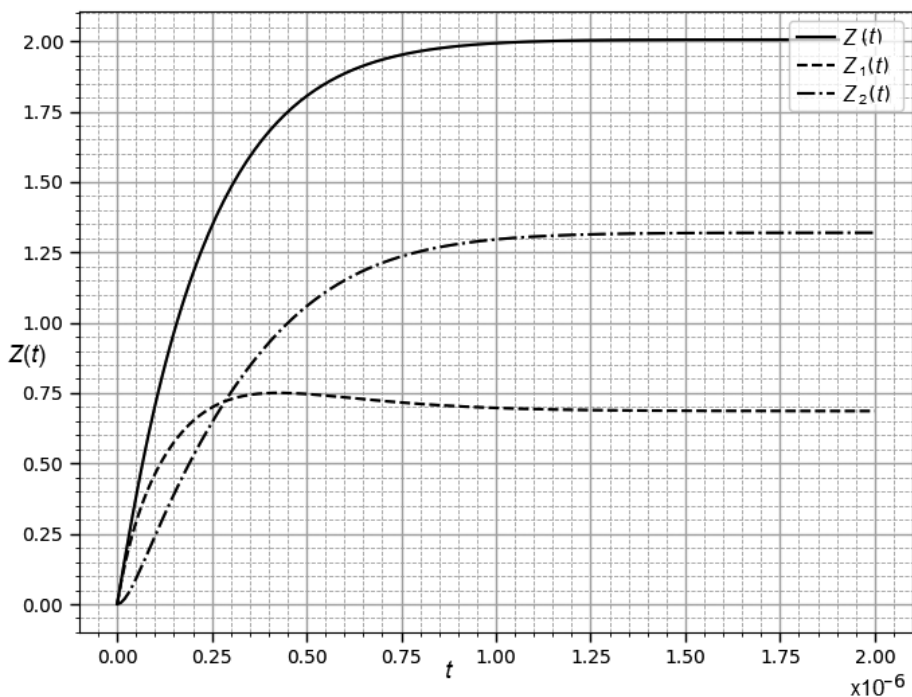


Рис. 3. Зависимость среднего числа заявок на каждой фазе от времени.

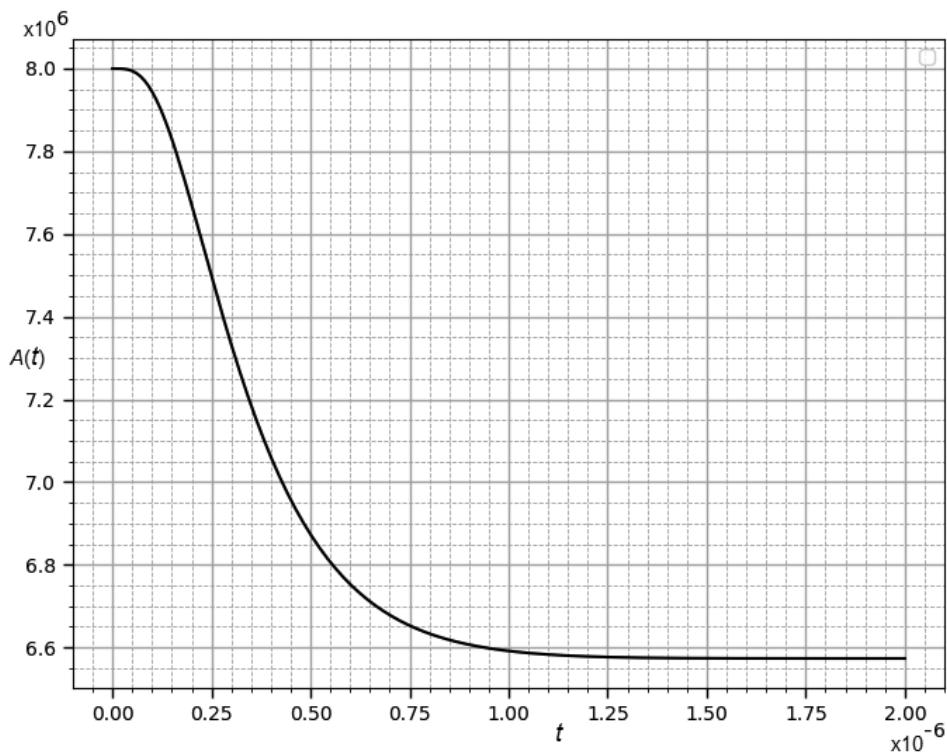


Рис. 4. Зависимость пропускной способности системы от времени в переходном режиме.

живания  $P_{phase1}(t)$  (рис. 3). Отметим, что вероятности состояний в стационарном режиме, полученные авторами с использованием предлагаемого подхода, равны стационарным вероятностям, рассчитанным с использованием хорошо известной методики [24]. Действительно, из рис. 2 видно, что  $\pi_{idle} = 0,167$ ,  $\pi_{loss} = 0,172$ ,  $\pi_{phase1} = 0,24$ ,  $\pi_{phase2} = 0,49$ , что соответствует стационарным вероятностям, рассчитанным по формулам (6) и (7), представленным в [24].

Далее показатели производительности рассматриваемой СМО рассчитываются в соответствии с разделом 5 данной работы.

На рис. 4 представлена зависимость пропускной способности системы от времени в переходном режиме, вычисленная в соответствии с (30). Пропускная способность системы в начальный момент времени равна  $8 \cdot 10^6$  пакетов/с и уменьшается до стационарного значения  $6,62 \cdot 10^6$  пакетов/с. Исследование изменений пропускной способности полностью оптического коммутатора в переходном режиме позволяет получить более точные оценки его производительности с учетом возможных перезагрузок коммутатора при смене маршрутов передачи информации в полностью оптических сетях.

На рис. 5 представлены зависимости от времени количества пакетов на первой и второй фазах, а также общего количества пакетов в системе в пе-

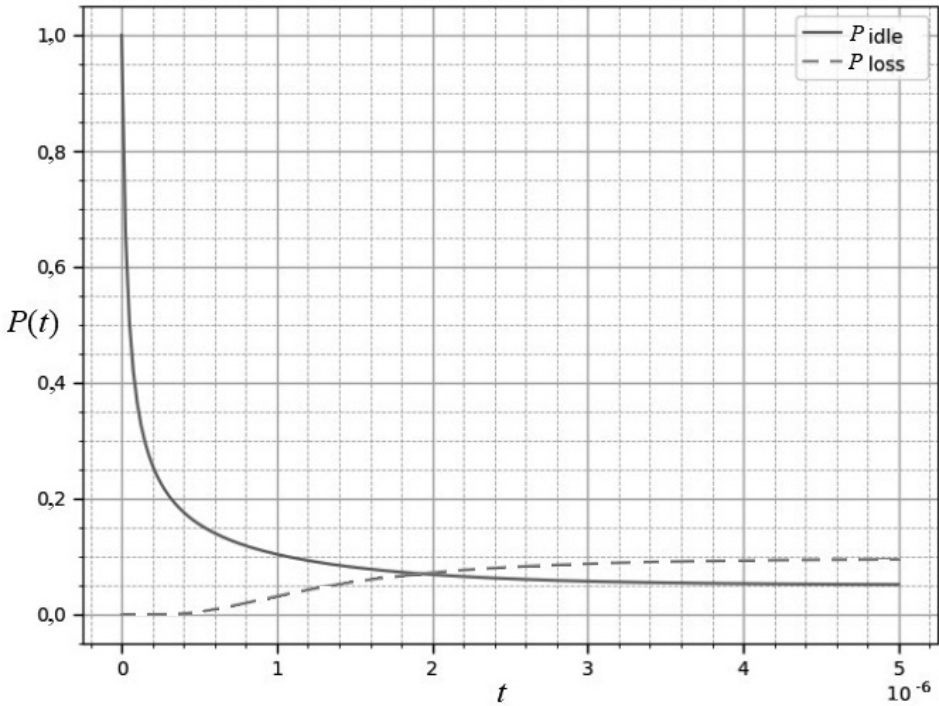


Рис. 5. Зависимость вероятностей состояний системы от времени в переходном режиме.

реходном режиме, вычисленных в соответствии с (33)–(35). Видно, что до момента  $t = 0,28 \cdot 10^{-7}$  с число пакетов на первой фазе превышает число пакетов на второй фазе. В то же время в стационарном режиме среднее число пакетов на первой фазе меньше, чем на второй фазе обслуживания, что очевидно, так как  $\mu_1 > \mu_2$ . Учитывая, что число заявок на первой и второй фазах исследуемой СМО соответствует числу пакетов, обрабатываемых на первом и втором каскадах полностью оптического коммутатора [8], полученные результаты позволяют оценить степень заполнения буферов коммутатора в течение переходного режима. Следует отметить, что исследование размера буфера полностью оптического коммутатора является необходимым для уменьшения вероятности потерь в связи с небольшим физическим размером оптического буфера и высокой скоростью передачи информации полностью оптических сетей.

При увеличении размерности буфера возрастает размерность матриц в (12), что требует дополнительных затрат вычислительных ресурсов. На рис. 4 представлен расчет двухфазной системы с объемом буфера  $N = 15$ : вероятности потерь  $P_{loss}(t)$  и вероятности того, что система является пустой,  $P_{idle}(t)$ . Из графика видно, что при увеличении размера буфера вероятность потерь в стационарном режиме уменьшилась —  $\pi_{loss} = 0,1$ , а время переходного режима увеличилось —  $\tau_{tr} = 4 \cdot 10^{-7}$  с.

## 7. Заключение

В данной работе рассмотрен и проанализирован переходной режим двухфазной СМО с пуассоновским входным потоком, экспоненциальным законом распределения времени обслуживания на каждой фазе и ограничением на суммарный размер буфера двух фаз. Ранее нестационарный режим такой системы не рассматривался в мировой литературе. Однако он представляет интерес для различных приложений, в частности при проектировании коммутаторов полностью оптической сети. Следует отметить, что исследование нестационарного режима полностью оптического коммутатора позволяет более точно оценить его характеристики производительности, существенно отличающиеся от стационарных значений в связи с высокой скоростью передачи информации полностью оптических сетей [8].

Представлена система дифференциальных уравнений, описывающих функционирование данной СМО, решение которой записано с использованием преобразования Лапласа. Получены характеристики производительности системы в переходном режиме, такие как вероятность потерь, пропускная способность, среднее число обслуживаемых заявок и время переходного режима. Очевидно, что с увеличением размера буфера получение численных решений характеристик двухфазной СМО с ограниченным буфером является трудоемкой в вычислительном отношении задачей и требует использования высокопроизводительных вычислительных систем или применения подходов на основе имитационного моделирования и машинного обучения [26].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Формально исключение определенных слагаемых в уравнениях (4) и сохранение оставшихся можно осуществить с помощью функции Хевисайда. Однако эта функция, по сути, является логической, а не аналитической и, следовательно, не позволяет записать выражение для вероятностей состояний системы в общем виде. В частности, при ее использовании в программном коде необходимо организовывать дополнительные циклы. Поэтому для возможности компактного аналитического представления системы уравнений (4) была введена функция

$$(П.1) \quad \sigma_1(x, x_0) = \frac{|x - x_0| + x - x_0}{2|x - x_0|},$$

которая является аналитической. Таким образом, функция, ограничивающая снизу допустимые состояния системы, имеет вид

$$(П.2) \quad v_1(x, M) = \frac{|x - M + 0,5| + x - M + 0,5}{2|x - M + 0,5|}.$$

Например, при  $M = 0$  функция  $v_1(x, M)$  имеет вид, представленный на рис. 6.

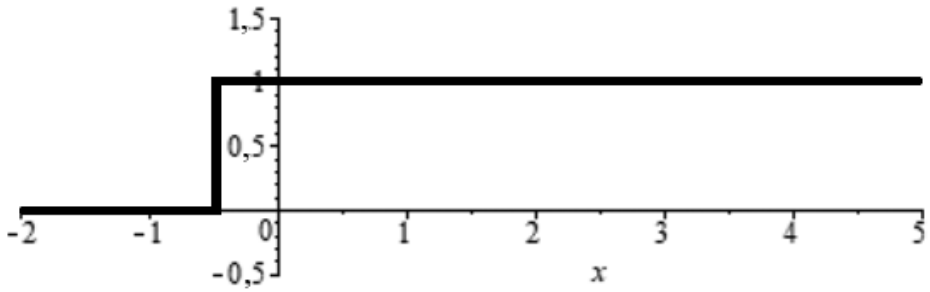


Рис. 6. Функция  $v_1(x, 0)$ .

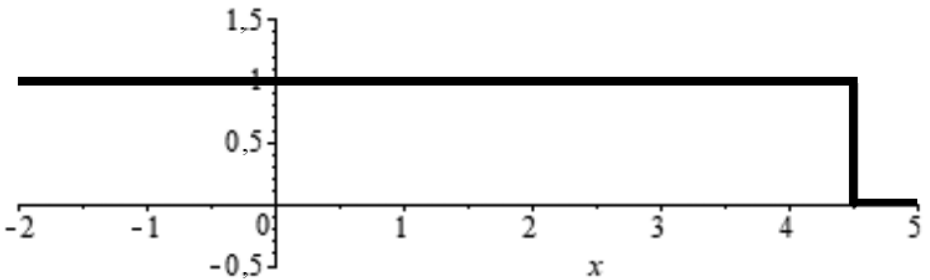


Рис. 7. Функция  $v_2(x, 4)$ .

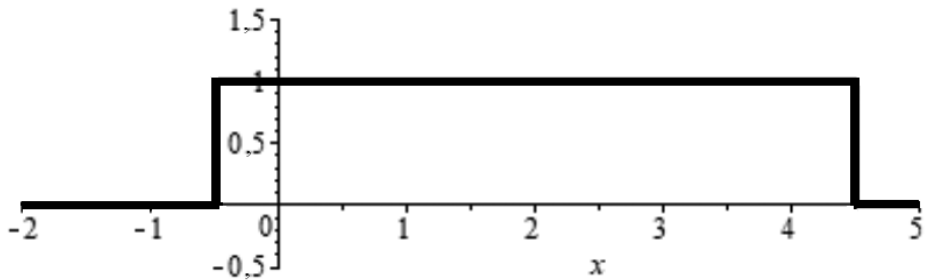


Рис. 8. Функция  $v(x, 0, 4)$ .

Смещение на 0,5 по оси времени выбрано в связи с тем, что в противном случае при состоянии  $x = M$  системы эта функция была бы неопределенна, а ее производная стремилась бы к бесконечности в этой точке. Аналогично с (П.1) введем функцию

$$(П.3) \quad \sigma_2(x, x_0) = \frac{|x_0 - x| + x_0 - x}{2|x_0 - x|}.$$

Таким образом, функция, ограничивающая сверху допустимые состояния системы, может быть записана в виде

$$(П.4) \quad v_2(x, K) = \frac{|K - x - 0,5| + K - x - 0,5}{2|K - x - 0,5|},$$



где  $K = \overline{0, N}$  – состояние системы. При  $K = 4$  функция  $v_2(x, M)$  имеет вид, представленный на рис. 7.

Очевидно, что функция, ограничивающая допустимый интервал значений от наименьшего  $M$  до наибольшего  $K$ , принимает вид

$$(П.5) \quad v(x, M, N) = v_1(x, M) v_2(x, N) = \\ = \frac{(|x - M + 0,5| + x - M + 0,5)(|K - x - 0,5| + K - x - 0,5)}{4|x - M + 0,5||K - x - 0,5|}.$$

Например, при  $M = 0$  и  $K = 4$  она имеет вид, представленный на рис. 8.

Применительно к решаемой задаче  $x$  может принимать значения  $n_1, n_2, n_1 + n_2$  и т.д. Преимуществом функций (П.2), (П.4) и (П.5) является отсутствие условий «если». Однако следует отметить, что такие условия все-таки существуют при раскрытии модуля. Тем не менее несмотря на то, что данные функции не ускоряют процесс вычисления, они позволяют проводить аналитическое исследование полученных выражений и упрощают программный код.

Для нахождения функции  $\vartheta(n_k, n_l)$  (см. (6)), которая преобразует пару чисел  $n_k, n_l$ , характеризующих состояние системы, в номер столбца матрицы  $\mathbf{A}$ , проанализируем следующую закономерность для  $N = 4$ : для  $n_k = 0$  значения  $n_l$  изменяются от 0 до  $N$ , а значения  $\vartheta(n_k, n_l)$  изменяются от 1 до  $N + 1$ ; для  $n_k = 1$  значения  $n_l$  изменяются от 0 до  $N - 1$ , а значения  $\vartheta(n_k, n_l)$  изменяются от  $N + 2$  до  $2N + 1$ ; для  $n_k = 2$  значения  $n_l$  изменяются от 0 до  $N - 2$ , а значения  $\vartheta(n_k, n_l)$  изменяются от  $2N + 2$  до  $3N$ ; для  $n_k = 3$  значения  $n_l$  изменяются от 0 до  $N - 3$ , а значения  $\vartheta(n_k, n_l)$  изменяются от  $3N + 1$  до  $4N - 2$ ; для  $n_k = 4$  имеем  $n_l = 0$  и  $\vartheta(n_k, n_l) = 4N - 1$ . Следовательно, в выражении для  $\vartheta(n_k, n_l)$  должно присутствовать слагаемое  $n_k(N + 1)$ , а также слагаемое  $n_l$ . Таким образом, для  $n_k = 0$ :

$$(П.6) \quad \vartheta(0, n_l) = (N + 1)n_k + n_l + 1 = (N + 1)n_k + n_l + 0 \cdot (-0,5) + 1,$$

для  $n_k = 1$ :

$$(П.7) \quad \vartheta(1, n_l) = (N + 1)n_k + n_l + 1 = (N + 1)n_k + n_l - 1 \cdot 0 + 1,$$

для  $n_k = 2$ :

$$(П.8) \quad \vartheta(2, n_l) = (N + 1)n_k + n_l + 0 = (N + 1)n_k + n_l - 2 \cdot 0,5 + 1,$$

для  $n_k = 3$ :

$$(П.9) \quad \vartheta(3, n_l) = (N + 1)n_k + n_l - 2 = (N + 1)n_k + n_l - 3 \cdot 1 + 1,$$

для  $n_k = 4$ :

$$(П.10) \quad \vartheta(4, n_l) = (N + 1)n_k + n_l - 5 = (N + 1)n_k + n_l - 4 \cdot 1,5 + 1,$$

для  $n_k = m$ :

$$(П.11) \quad \vartheta(m, n_l) = (N + 1)m + n_l - (m + 1) = (N + 1)m + n_l - m \frac{m - 1}{2} + 1.$$

Таким образом, выражения (П.6)–(П.11) связывают пару чисел в соответствующий порядковый номер элемента в строке (столбце) матрицы коэффициентов. Легко проверить, что соотношение (6) справедливо для любых  $N$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dudin A.N., Klimenok V.I., Vishnevsky V.M.* Methods to Study Queuing Systems with Correlated Arrivals. Berlin/Heidelberg: Springer, 2020.
2. *Rohit Singh Tomar, Dr.R.K. Shrivastav.* Three Phases of Service For A Single Server Queueing System Subject To Server Breakdown And Bernoulli Vacation // Int. J. Math. Trend. Techn. (IJMTT). 2020. V. 66 (5). P. 124–136.
3. *Murat Sagir, Vedat Saglam.* Optimization and analysis of a tandem queueing system with parallel channel at second station // Communications in Statistics — Theory and Methods. 2022. V. 51. No. 21. P. 1–14.
4. *Sudhesh R., Vaithiyathan A.* Stationary analysis of infinite queueing system with two — stage network server // RAIRO-Oper. Res. 55. 2021. P. 2349–2357.
5. *Al-Rawi Z.R., Al Shboul K.M.S.* A Single Server Queue with Coxian-2 Service and One-Phase Vacation (M/C-2/M/1 Queue) // Open J. Appl. Sci. 2021. V. 11. No. 6. P. 766–774.
6. *Serite Ozkar.* Two-commodity queueing-inventory system with phase-type distribution of service times // Annals of Operations Research. 2022. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10479-022-04865-3>.
7. *Anastasia Galileyskaya, Ekaterina Lisovskaya, Michele Pagano, and Svetlana Moiseeva.* Two-Phase Resource Queueing System with Requests Duplication and Renewal Arrival Process // LNCS. 2020. 12563. P. 350–364.
8. *Barabanova E.A., Vytovtov K.A., Vishnevsky V.M., Podlazov V.S.* High-capacity strictly non-blocking optical switches based on new dual principle // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 2091. No. 1. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2091/1/012040>.
9. *Ivanova D., Adou Y., Markova E., Gaidamaka Y., Samoylov K.* Mathematical Framework for Mixed Reservation- and Priority-Based Traffic Coexistence in 5G NR Systems // Mathematics. 2023. V. 11. No. 4. <https://doi.org/10.3390/math11041046>.
10. *Zeifman A.I., Razumchik R.V., Satin Y.A., Kovalev I.A.* Ergodicity bounds for the markovian queue with time-varying transition intensities, batch arrivals and one queue skipping policy // Appl. Math. Comput. 2021. V. 395. P. 125846.
11. *Kempa Wojciech M., Paprocka Iwona.* Transient behavior of a queueing model with hyper-exponentially distributed processing times and finite buffer capacity // Sensors. 2022. V. 22. No. 24. <https://doi.org/10.3390/s22249909>.
12. *Rubino G.* Transient analysis of Markovian queueing systems: a survey with focus on closed forms and uniformization / Queueing Theory 2: Advanced Trends; Wiley-ISTE: Hoboken. NJ. USA. 2021. P. 269–307.

13. *Zeifman A., Korolev V., Satin Y.* Review Two Approaches to the Construction of Perturbation Bounds for Continuous-Time Markov Chains // *Mathematics*. 2020. V. 8. <https://doi.org/10.3390/math8020253>.
14. *Sita Rama Murthy M., Srinivasa Rao K., Ravindranath V., Srinivasa Rao P.* Transient Analysis of K-node Tandem Queuing Model with Load Dependent Service Rates // *Int. J. Engin. Techno*. 2018. V. 7. No. 3.31. P. 141–149.
15. *Suhasini A.V.S., Rao K. Srinivasa, Reddy P.R.S.* Transient analysis of tandem queueing model with nonhomogenous poisson bulk arrivals having statedependent service rates // *Int. J. Advanc. Comput. Math. Sci*. 2012. V. 3. No. 3. P. 272–289.
16. *Neelam Singla, Garg P.C.* Transient and Numerical Solution of a Feedback Queueing System with Correlated Departures // *Amer. J. Numer. Anal*. 2014. V. 2. No. 1. P. 20–28.
17. *Shyam Sundar Sah, Ram Prasad Ghimire.* Transient Analysis of Queueing Model // *J. Inst. Engin*. 2015. V. 11. No. 1. P. 165–171.
18. *Зейфман А.И.* О нестационарной модели Эрланга // *А и Т*. 2009. V. 70. No. 12. P. 2003–2012.
19. *Ковалёв И.А., Сатин Я.А., Сущицина А.В., Зейфман А.И.* Об одном подходе к оцениванию скорости сходимости нестационарных марковских моделей систем обслуживания // *Информ. и её применение*. 2022. Т. 16. Вып. 3. С. 75–82.
20. *Prabhu N.U.* Transient Behaviour of a Tandem Queue // *Management Science*. 1967. V. 13. No. 9. P. 631–639. doi:10.1287/mnsc.13.9.631.
21. *Vyshnevsky V.M., Vytovtov K.A., Barabanova E.A., Semenova O.V.* Analysis of an MAF/M/1/N queue with periodic and non-periodic piecewise constant input rate // *Mathematics*. 2022. V. 10. No. 10. <https://www.mdpi.com/2227-7390/10/10/1684>.
22. *Vishnevsky V., Vytovtov K., Barabanova E., Semenova O.* Transient behavior of the MAF/M/1/N queueing system // *Mathematics*. 2021. V. 9. No. 2559. <https://doi.org/10.3390/math9202559>.
23. *Vytovtov K.A., Barabanova E.A., Vishnevsky V.M.* Modeling and Analysis of Multi-channel Queueing System Transient Behavior for Piecewise-Constant Rates // *LNCS*. Springer. 2023. V. 13766. P. 397–409.
24. *Jackson R.R.P.* Queueing Systems with Phase Type Service // *Oper. Res. Soc*. 1954. V. 5. No. 4. P. 109–120.
25. *Журавлёв А.П., Рюмишин К.Ю., Атакищев О.И., Титенко Е.А., Титенко М.А.* Параметры модуляции современных систем связи // *Т-Сопн: телекоммуникации и транспорт*. 2023. Том 17. No. 7. С. 13–20.
26. *Вишневецкий В.М., Семёнова О.В.* Методы машинного обучения для исследования стохастических моделей циклического опроса в широкополосных беспроводных сетях. М.: ИПУ, РАН. 2023. 120с.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.*

Поступила в редакцию 16.04.2023

После доработки 15.11.2023

Принята к публикации 21.12.2023