Автоматика и телемеханика, № 9, 2023

Управление в технических системах

© 2023 г. **Ю.Г. БУЛЫЧЕВ, д-р техн. наук (profbulychev@yandex.ru)**
(АО «Концерн Радиоэлектронные технологии», Москва)

КОСВЕННЫЙ МЕТОД ОДНОПОЗИЦИОННОЙ КООРДИНАТОМЕТРИИ С УЧЕТОМ ИНВАРИАНТОВ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СИНГУЛЯРНЫХ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

С учетом инвариантов движения и сингулярных ошибок измерений (представимых в заданном конечномерном функциональном пространстве соответствующей линейной комбинацией с неизвестными спектральными коэффициентами) решена задача однопозиционной косвенной координатометрии по сглаженным измерениям пеленга и радиальной скорости объекта. Рассмотрена возможность применения развиваемого метода к различным моделям движения и наблюдения. Приводятся аналитические соотношения для оценки точностных характеристик и методических ошибок. Дана сравнительная оценка вычислительных затрат.

Ключевые слова: однопозиционная координатометрия, косвенный метод, пеленг, радиальная скорость, инвариант, первый интеграл, условие несмещенности, условие инвариантности, критерий оптимальности, метод множителей Лагранжа, апостериорная дисперсия ошибки оценивания.

DOI: 10.31857/S0005231023090076, **EDN:** JTGGNE

1. Введение

Вопросы, связанные с однопозиционной (активной и пассивной) координатометрией при решении широкого круга задач локации и навигации, остаются актуальными и по настоящее время. Как правило, эти методы реализуются с учетом прямых и косвенных измерений пеленгов, разностей фаз, доплеровских частот, относительных мощностей сигналов и их различных производных. При этом используется дополнительная информация от различных источников подсвета, отражателей (естественного и искусственного происхождения), внешних управляющих систем, а также априорные данные о структуре и некоторых параметрах излучаемого сигнала, скорости объекта, начальной или конечной точке его маршрута, наличии участков барражирования, маневра и др. (вот лишь некоторые источники [1–33]).

Решение задач, связанных с однопозиционной координатометрией в условиях помех различного типа, вполне укладывается в схему оптимального калмановского оценивания в стохастической постановке (как правило, с расширением пространства состояний) с использованием прямых и псевдоизмерений

[9, 10, 17–26, 30, 36]. Однако для широкого класса задач (например, связанных с экспресс- и постобработкой траекторных и телеметрических данных в полигонных и командно-измерительных комплексах, слежением за маневрирующими объектами в реальном времени и др. [2, 7, 8, 11]) на практике зачастую используются достаточно простые неоптимальные косвенные методы координатометрии, реализуемые на сглаженных измерениях. Они основаны на использовании простых детерминированных моделей движения (линейных, кусочно-линейных, полиномиальных, кусочно-полиномиальных, дифференциальных, кусочно-дифференциальных, групповых, кусочно-групповых и многих других), известных аналитических зависимостей, связывающих оцениваемые и измеряемые параметры, а также простых процедур сглаживания наблюдений на базе метода наименьших квадратов (МНК) и его различных модификаций. Такие методы уступают оптимальным методам фильтрации (линейной и нелинейной) в плане потенциальной точности, однако легко реализуемы на практике в реальном времени в условиях качественных сглаженных измерений и при их численной реализации не возникает проблем, связанных с переходными процессами, сходимостью и жесткими требованиями к объему и качеству исходной априорной информации (что зачастую характерно для оптимальных методов, например, при учете эффектов «размазывания точности» или «жесткости» [9, 32]). Так, для указанных выше комплексов, в которых традиционно реализуется многоэтапная обработка информации, применение косвенных методов используется на этапе экспресс-обработки, а оптимальные методы, как правило, реализуются на этапе постобработки.

Известны косвенные методы однопозиционной координатометрии, не использующие пеленги, но оперирующие с периодическими импульсными радиосигналами и ориентированные на возможность измерения непрерывного смещения частоты принимаемого сигнала в точке наблюдения, обусловленного движением либо источника излучения, либо наблюдателя [3, 7]. Принципиальным недостатком этих методов является необходимость учета априорной информации о величине скорости объекта (либо источника, либо наблюдателя), что для практики зачастую является неприемлемым. Кроме того, задача координатометрии ограничивается нахождением дальности и курсового угла для модели прямолинейного равномерного движения, что не позволяет оценить все параметры местоположения объекта для произвольного момента времени. Попытка снять ограничение, связанное со скоростью, предпринята в [27], однако в этом случае возникает необходимость отслеживания эволюции доплеровской частоты с учетом непрерывного накопления (подсчета) импульсов принимаемого сигнала в точке наблюдения. Очевидно, что речь идет только о высокоскоростных объектах и жестких ограничениях на условия наблюдения, при этом также используется модель прямолинейного равномерного движения. Общим недостатком косвенных методов, рассмотренных в [3, 7, 27], также является техническая сложность их практической реализации.

Известны угломерно-доплеровские методы однопозиционного определения параметров движения (см., например, [3, 4, 7, 9, 29]), использующие не только прямые измерения (радиальную скорость и пеленг), но и косвенные (производные различного порядка), а также не привлекающие указанную выше априорную информацию. Данные методы ориентированы на простейшие модели движения (например, орбитальную), не учитывают возможность построения нескольких независимых каналов координатометрии и появление сингулярных ошибок первичных измерений, обесценивающих информацию, содержащуюся в косвенных измерениях (производных от радиальной скорости и пеленга).

Заслуживает внимания метод [29], который оперирует с производными до второго порядка включительно и позволяющий формировать адаптивные алгоритмы координатометрии на базе нескольких параллельных алгоритмов, соответствующих инвариантам движения объекта. Однако анализ показал, что полученные в [29] аналитические соотношения и соответствующие им алгоритмы являются зависимыми и избыточными, при этом они ориентированы также только на модель прямолинейного равномерного движения.

В настоящей работе развивается косвенный метод однопозиционной координатометрии, инвариантный к сингулярным ошибкам заданного класса (представимых в заданном конечномерном функциональном пространстве соответствующей линейной комбинацией с неизвестными спектральными коэффициентами), позволяющий на базе полного набора инвариантов (для широкого класса моделей движения) формировать семейство независимых квазиоптимальных решений и с их помощью формировать результирующую оценку параметров движения объекта. Показан сравнительный вычислительный эффект.

Эффективность применения инвариантов для решения целого класса прикладных целевых задач однопозиционной и многопозиционной локации и навигации на основе косвенных методов наглядно продемонстрирована в [8, 11, 33, 37]. Здесь показана возможность децентрализации, распараллеливания и сокращения вычислительных затрат при обработке измерений в системах различного типа на основе инвариантов непрерывных групп Ли преобразований (НЛГЛП) и первых интегралов, применяемых для описания движения различных объектов.

2. Постановка задачи

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат на отдельном участке наблюдения движение объекта описывается некоторым операторным уравнением (например, в векторно-алгебраической или векторно-дифференциальной форме)

$$\mathbf{G}\left(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}\right) = 0 \quad \forall\, t \in [0, T]\,, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{\rho} = [x, y, z]^{\mathrm{T}}$ – вектор координат объекта ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$), $\boldsymbol{\eta}$ – вектор неизвестных вещественных параметров.

Полагаем, что координаты x, y, z являются гладкими и требуемое число раз дифференцируемыми функциями, а вектору $\boldsymbol{\rho}$ ставится в соответствие вектор сферических координат $\boldsymbol{\varsigma} = [r, \lambda, \varphi]^{\mathrm{T}}$, где r – наклонная дальность, λ – долгота, φ – широта. В качестве $\mathbf{X} = \left[r^{(1)}, \lambda, \varphi\right]^{\mathrm{T}}$ примем вектор прямых измерений (где $r^{(1)} = dr/dt$), а в качестве $\mathbf{Y}$ – вектор косвенных измерений, координатами которого являются производные от $r^{(1)}, \lambda, \varphi$ различных порядков, необходимые для реализации одного из вариантов развиваемого метода. Выберем сетку («скользящее окно», далее называемое просто «окном») $\{t_{n+i}, i = \overline{-m, m}\}$, где $n \geq m$, $m \in \{1, 2, \ldots\}$, $t_{n+i} \in [0, T]$, $2m + 1$ – объем «окна». Вводя обозначение $\mu \in \left\{r^{(1)}, \lambda, \varphi\right\}$, воспользуемся следующим аддитивным уравнением наблюдения

$$\mathbf{H}_\mu = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{s}_\mu + \boldsymbol{\xi}_\mu, \tag{2.2}$$

где

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_{n+i}, i = \overline{-m, m}]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{s}_\mu = [s_{\mu,n+i}, i = \overline{-m, m}]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\xi}_\mu = [\xi_{\mu,n+i}, i = \overline{-m, m}]^{\mathrm{T}}, \quad \mu_{n+i} = \mu\,(t_{n+i}),$$
$$s_{\mu,n+i} = s_\mu\,(t_{n+i}), \quad \xi_{\mu,n+i} = \xi_\mu\,(t_{n+i}).$$

В (2.2) под $s_\mu(t)$ понимается сингулярная ошибка

$$s_\mu(t) = \mathbf{D}_\mu^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Theta}_\mu(t), \tag{2.3}$$

где

$\mathbf{D}_\mu = \left[d_{\mu k}, k = \overline{0, K}\right]^{\mathrm{T}}$ – вектор неизвестных спектральных коэффициентов,

$\boldsymbol{\Theta}_\mu(t) = \left[\theta_{\mu k}(t), k = \overline{0, K}\right]^{\mathrm{T}}$ – вектор заданных базисных функций.

Для представления $\mu = \mu(t)$ также воспользуемся спектральной моделью

$$\mu(t) = \mathbf{A}_\mu^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Psi}_\mu(t), \tag{2.4}$$

где

$\mathbf{A}_\mu = \left[a_{\mu b}, b = \overline{0, B}\right]^{\mathrm{T}}$ – вектор неизвестных коэффициентов,

$\boldsymbol{\Psi}_\mu(t) = \left[\psi_{\mu b}(t), b = \overline{0, B}\right]^{\mathrm{T}}$ – вектор заданных базисных функций.

Под $\boldsymbol{\xi}_\mu$ понимается вектор случайных погрешностей с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $\mathbf{K}_\mu = [k_{\mu,n+i,n+j}, i, j = \overline{-m, m}]$.

Модели (2.1)–(2.4) находят широкое применение при решении различных локационных и навигационных задач. Применяя для каждого участка наблюдения свою модель (2.1), можно описать сложные траектории, например, характерные для маневрирующих объектов. В частности, весьма перспективен подход, основанный на описании таких траекторий простейшими группами Ли преобразований (например, сдвига, вращения и растяжения [8, 11, 31, 33–37]).

Требуется на основе набора инвариантов уравнения (2.1) (в частности, первых интегралов движения или инвариантов НЛГЛП) с учетом (2.2)–(2.4) и принятых ограничений развить косвенный метод координатометрии, не требующий расширения пространства состояний, устойчивый к сингулярной ошибке и обеспечивающий построение результирующей оценки параметров движения объекта по расширенному вектору прямых и косвенных измерений $\mathbf{Z} = \left[\mathbf{X}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, координаты которого оцениваются с минимальными апостериорными дисперсиями.

3. Принцип определения параметров движения на основе инвариантов

Поставим в соответствие уравнению (2.1) скалярный инвариант $I = I\left(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\gamma}_I\right)$ (где $\boldsymbol{\gamma}_I$ – вектор, состоящий из некоторых производных от координат вектора $\boldsymbol{\rho}$), который на решениях $\boldsymbol{\rho}(t)$ и $\boldsymbol{\gamma}_I(t)$ уравнения (2.1) удовлетворяет условию

$$I\left(t, \boldsymbol{\rho}(t), \boldsymbol{\gamma}_I(t)\right) = C = \mathrm{const} \quad \forall\, t \in [0, T]\,. \tag{3.1}$$

При переходе в (3.1) к сферическим координатам получаем

$$Q\left(t, \boldsymbol{\varsigma}(t), \boldsymbol{\gamma}_Q(t)\right) = C = \mathrm{const} \quad \forall\, t \in [0, T]\,, \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{\gamma}_Q$ – вектор, состоящий из некоторых производных от координат вектора $\boldsymbol{\varsigma}$.

Способ нахождения инвариантов целиком определяется видом уравнения (2.1).

Найдем полную производную по t левой и правой частей уравнения (3.2):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\varsigma}} \left(\frac{d\boldsymbol{\varsigma}}{dt}\right)^{\mathrm{T}} + \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\gamma}_Q} \left(\frac{d\boldsymbol{\gamma}_Q}{dt}\right)^{\mathrm{T}} = 0 \quad \forall\, t \in [0, T]\,. \tag{3.3}$$

Раскрывая в (3.3) все производные, приходим к уравнению

$$W\left(t, \boldsymbol{\varsigma}, \boldsymbol{\gamma}_W\right) = 0 \quad \forall\, t \in [0, T]\,, \tag{3.4}$$

где $\boldsymbol{\gamma}_W$ – вектор, содержащий всевозможные производные от r, λ, φ.

Разрешая это уравнение относительно r, получаем искомую формулу для определения дальности до объекта

$$r = W^{-1}\left(t, \mathbf{Z}\right). \tag{3.5}$$

Если уравнению (2.1) поставить в соответствие набор независимых инвариантов $I_l = I_l\left(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\gamma}_I\right)$ (где $l = \overline{1, L}$), то по аналогии с (3.1)–(3.5) получим набор формул

$$r\,[l] = W_{[l]}^{-1}\left(t, \mathbf{Z}_{[l]}\right), \quad l = \overline{1, L}. \tag{3.6}$$

Данный набор может быть использован для адаптивного варианта оценивания с целью повышения точности оценивания дальности с учетом ошибок измерений. Так, если для фиксированного t вектор $\mathbf{Z}_{[l]}$ оценивается с ошибкой, характеризуемой нулевым математическим ожиданием и соответствующей корреляционной матрицей $\mathbf{K}_{\mathbf{Z}}$, то дисперсию оценивания дальности можно найти по формуле

$$\sigma_{r[l]}^2 = \mathbf{H}_{[l]}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{\mathbf{Z}[l]} \mathbf{H}_{[l]}, \quad l = \overline{1, L}, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{H}_{[l]}$ – вектор-столбец частных производных от (3.6) по элементам вектора $\mathbf{Z}_{[l]}$, вычисленных на математических ожиданиях этих элементов.

В качестве оптимального варианта оценивания дальности выбирается тот, для которого

$$l^* = \arg\min_{l} \sigma_{r[l]}^2, \quad l^* \in \{1, 2, \ldots, L\}\,. \tag{3.8}$$

Для определения декартовых координат объекта достаточно воспользоваться зависимостями

$$x\,[l^*] = r\,[l^*] \cos\varphi \cos\lambda, \quad y\,[l^*] = r\,[l^*] \cos\varphi \sin\lambda, \quad z\,[l^*] = r\,[l^*] \sin\varphi, \tag{3.9}$$

где вместо угловых координат λ и φ подставляются либо прямые измерения, либо их сглаженные значения.

Вместо (2.1) можно воспользоваться более общим случаем, если полагать, что на заданном участке наблюдения используется набор вероятных моделей $\mathbf{G}_k\left(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}\right) = 0$, где $k = \overline{0, K}$. В этом случае алгоритм (3.7)–(3.9) принимает вид

$$\begin{cases} \sigma_{r[k,l]}^2 = \mathbf{H}_{[k,l]}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{\mathbf{Z}[k,l]} \mathbf{H}_{[k,l]}, \quad k = \overline{1, K}, \quad l = \overline{1, L_k}, \\ [k^*, l^*] = \arg\min\limits_{[k,l]} \sigma_{r[k,l]}^2, \quad k^* \in \{1, 2, \ldots, K\}\,, \quad l^* \in \{1, 2, \ldots, L_k\}\,, \\ x\,[k^*, l^*] = r\,[k^*, l^*] \cos\varphi \cos\lambda, \\ y\,[k^*, l^*] = r\,[k^*, l^*] \cos\varphi \sin\lambda, \\ z\,[k^*, l^*] = r\,[k^*, l^*] \sin\varphi. \end{cases} \tag{3.10}$$

Алгоритм (3.10) позволяет распараллелить вычислительный процесс с учетом числа используемых инвариантов и обеспечить адаптацию процедуры оценивания параметров движения объекта к условиям наблюдения.

4. Примеры построения и использования инвариантов

Пусть на отдельно взятом участке наблюдения уравнению (2.1) соответствует НЛГЛП общего вида [32–34]:

$$T_a: \quad \boldsymbol{\rho}' = \mathbf{f}\,(a, \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0) \quad \forall\, a \in \Delta_a \subset R^1, \tag{4.1}$$

где $\boldsymbol{\rho}' = [x', y', z']^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{f}\,(a, \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0) = [f_x, f_y, f_z]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_0$ – вектор числовых параметров группы, a – вещественный групповой параметр, такой, что при $a = a_0$ (где $a_0 \in \Delta_a$) выполняется условие $\mathbf{f}\,(a_0, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}_0) = \boldsymbol{\rho}$.

Модель (4.1) позволяет описать траекторию движения объекта, а если групповой параметр рассматривать как функцию времени $a = a\,(t, \boldsymbol{\chi}_0)$ (где $\boldsymbol{\chi}_0$ – вектор в общем случае неизвестных числовых параметров), то можно описать временной закон движения по этой траектории. Если провести замену координат $\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$, то с учетом (2.1) получаем: $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{f}\,(a, \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0) = = \mathbf{G}\,(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\,,\ \boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\chi}_0]^{\mathrm{T}}$.

Инварианты $I = I\,(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}_0)$ модели (4.1), не зависящие от параметров t, $\boldsymbol{\rho}_0$ и $\boldsymbol{\chi}_0$, находятся путем решения следующего линейного уравнения в частных производных

$$XI\,(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}_0) = \phi_x \frac{\partial I}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial I}{\partial y} + \phi_z \frac{\partial I}{\partial z} = 0, \tag{4.2}$$

где $X = \phi_x \partial/\partial x + \phi_y \partial/\partial y + \phi_z \partial/\partial z$ – инфинитезимальный оператор НЛГЛП, координаты которого находятся по формулам $\phi_x = \partial f_x/\partial a$, $\phi_y = \partial f_y/\partial a$, $\phi_z = \partial f_z/\partial a$ в точке $a = a_0$.

С учетом (4.2) для нахождения инвариантов, учитывающих временной характер движения по траектории (4.1) и различные производные от вектора $\boldsymbol{\rho}$, строится расширенный оператор и соответствующее ему уравнение в частных производных [8, 11, 31–34].

Покажем реализацию развиваемого метода на примере группы сдвига. Пусть

$$T_{a=t}: \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\eta}_0 t \ \forall\, a = t \in \Delta_a = [0, T] \subset R^1,$$

где $\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{V}_0 = [V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}]^{\mathrm{T}}$ – вектор скорости объекта, движущегося прямолинейно и равномерно. В этом случае имеем $\phi_x = V_{x0}$, $\phi_y = V_{y0}$, $\phi_z = V_{z0}$ и два независимых инварианта $I_{[1]} = xV_{y0} - yV_{x0} = xy^{(1)} - yx^{(1)}$ и $I_{[2]} = xV_{z0} - -zV_{x0} = xz^{(1)} - zx^{(1)}$, при этом с учетом (3.1) получаем $\gamma_{I[1]}(t) = \gamma_{I[1]} = = \left[x^{(1)}, y^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}$ и $\gamma_{I[2]}(t) = \gamma_{I[2]} = \left[x^{(1)}, z^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}$. Принимая во внимание (3.2) путем несложных, но громоздких преобразований, находим

$$Q_{[1]}\left(t, \varsigma(t), \boldsymbol{\gamma}_{Q[1]}(t)\right) = r^2 \lambda^{(1)} \cos^2\varphi,$$

$$Q_{[2]}\left(t, \varsigma(t), \boldsymbol{\gamma}_{Q[2]}(t)\right) = r^2 \left(\varphi^{(1)} \cos\lambda + \lambda^{(1)} \sin\lambda \sin\varphi \cos\varphi\right),$$

где

$$\boldsymbol{\gamma}_{Q[1]} = \left[\varphi^{(1)}\right] \text{ и } \boldsymbol{\gamma}_{Q[2]} = \left[\lambda^{(1)}, \varphi^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Соответственно с учетом (3.3) и (3.4) имеем

$$W_{[1]} = 2r^{(1)}\lambda^{(1)} + r\left(\lambda^{(2)} - 2\lambda^{(1)}\varphi^{(1)}\operatorname{tg}\varphi\right),$$
$$W_{[2]} = 2r^{(1)}\varphi^{(1)} + r\left(\varphi^{(2)} + \left(\lambda^{(1)}\right)^2 \sin\varphi\cos\varphi\right),$$

где

$$\boldsymbol{\gamma}_{W[1]} = \left[r^{(1)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \varphi^{(1)}\right]^{\mathrm{T}} \text{ и } \boldsymbol{\gamma}_{W[1]} = \left[r^{(1)}, \lambda^{(1)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}\right]^{\mathrm{T}}.$$

В конечном итоге, конкретизируя (3.5) и (3.6), находим две независимые формулы для определения наклонной дальности

$$r\,[1] = \frac{2r^{(1)}\lambda^{(1)}\cos\varphi}{2\lambda^{(1)}\varphi^{(1)}\sin\varphi - \lambda^{(2)}\cos\varphi}, \tag{4.3}$$

$$r\,[2] = -\frac{2r^{(1)}\varphi^{(1)}}{\varphi^{(2)} + \left(\lambda^{(1)}\right)^2\sin\varphi\cos\varphi}. \tag{4.4}$$

В частных случаях $\varphi = \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$ и $\lambda = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0$ непосредственно из (4.3) и (4.4) вытекают известные формулы дальнометрии (см., например, дифференциально-геометрический метод [4]):

$$r\,[1] = -2r^{(1)}\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)}, \quad r\,[2] = -2r^{(1)}\varphi^{(1)}/\varphi^{(2)}.$$

Для получения других формул дальнометрии можно использовать три новых инварианта $I_{[3]} = x^{(1)} = V_{x0}$, $I_{[4]} = y^{(1)} = V_{y0}$ и $I_{[5]} = z^{(1)} = V_{z0}$. Им соответствуют следующие независимые формулы определения дальности

$$r\,[3] = \frac{r^{(2)}\cos\varphi - 2r^{(1)}\varphi^{(1)}\sin\varphi}{\varphi^{(2)}\sin\varphi + \left[\left(\lambda^{(1)}\right)^2 + \left(\varphi^{(1)}\right)^2\right]\cos\varphi}, \tag{4.5}$$

$$r\,[4] = \frac{r^{(2)}\sin\varphi + 2r^{(1)}\varphi^{(1)}\cos\varphi}{\left(\varphi^{(1)}\right)^2\sin\varphi - \varphi^{(2)}\cos\varphi}, \tag{4.6}$$

$$r\,[5] = \frac{r^{(2)}}{\left(\varphi^{(1)}\right)^2 + \left(\lambda^{(1)}\right)^2\cos^2\varphi}. \tag{4.7}$$

В отличие от [29] набор формул (4.3)–(4.7) является необходимым и достаточным для построения параллельного алгоритма независимой адаптивной дальнометрии, при этом полученные соотношения записаны в компактной (неизбыточной) форме.

З а м е ч а н и е 1. Поскольку для всех формул (4.3)–(4.7) нет полного совпадения наборов измеряемых параметров, то с учетом (3.7)–(3.10) появляется возможность организации пяти независимых каналов вычисления дальности и адаптации к изменяющимся условиям наблюдения.

З а м е ч а н и е 2. Долгота λ не входит в явном виде ни в одну из формул, что позволяет эффективно бороться с постоянными систематическими ошибками, присутствующими в измерениях координаты λ. Широта φ присутствует в явном виде во всех формулах.

З а м е ч а н и е 3. Для более сложных моделей движения, использующих НЛГЛП общего вида, аналогично группе сдвига находятся всевозможные инварианты, соответствующие как траектории, так и временному закону движения объекта по данной траектории, а также независимые выражения для определения дальности.

З а м е ч а н и е 4. Для маневрирующего объекта необходимо использовать составную модель на основе допустимого набора НЛГЛП частного вида (например, сдвига, вращения и растяжения), при этом выбор той или иной частной НЛГЛП на некотором участке наблюдения соответствует решению задачи идентификации с минимизацией выбранной решающей функции (например, невязки метода наименьших квадратов). Такой подход с использованием группы вращения рассмотрен в [31], где предлагается аппроксимировать траекторию объекта кусками окружностей разного радиуса.

Если модель (2.1) представляет собой некоторое дифференциальное уравнение, то отыскание всех возможных инвариантов для динамического случая осуществляется в рамках известной теории группового анализа [34–36]. Однако на практике зачастую достаточно ограничиться частными инвариантами движения, а именно так называемыми первыми интегралами дифференциального уравнения. Продемонстрируем это на примере кругового орбитального движения: $\mathbf{G}\left(t,\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}\right)=\boldsymbol{\rho}^{(2)}+\eta_0 R_0^{-3}\boldsymbol{\rho}=0$, где $\boldsymbol{\eta}=\left[R_0,\eta_0\right]^{\mathrm{T}}$, R_0 и η_0 – радиус и гравитационный параметр Земли соответственно. Известно, что инвариантами (первыми интегралами) данного движения являются выражения $I_{[1]}=xy^{(1)}-yx^{(1)}$ и $I_{[2]}=xz^{(1)}-zx^{(1)}$, которые по внешнему виду совпадают с рассмотренными выше инвариантами группы сдвига, однако теперь производные $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ и $z^{(1)}$ не являются константами и ранее использованные инварианты $I_{[3]}=x^{(1)}=V_{x0}$, $I_{[4]}=y^{(1)}=V_{y0}$, $I_{[5]}=z^{(1)}=V_{z0}$ теперь не применимы. С учетом этого в качестве формул определения дальности для динамического случая можно принять только выражения (4.3) и (4.4).

З а м е ч а н и е 5. Развиваемый однопозиционный косвенный метод можно обобщить и на класс стохастических моделей, для которых применение классических инвариантов зачастую весьма ограничено, но есть возможность использовать так называемые ε-инварианты (эпсилон-инварианты [37]). Для них условие инвариантности выполняется приближенно (с точностью до ε), и, следовательно, в этом случае решение задачи координатометрии может быть выполнено приближенно.

5. Учет флуктуационных ошибок измерений

Покажем на примере группы сдвига и условия $\varphi = \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$ реализацию алгоритма (3.7) и (3.8). Несложно убедиться, что в данном частном случае из всего набора формул (4.3)–(4.7) информативными являются только две:

$$r\,[1] = -2r^{(1)}\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)}, \quad r\,[2] = -r^{(2)}/\left(\lambda^{(1)}\right)^2.$$

Соответственно имеем два вектора измеряемых параметров $\mathbf{Z}_{[1]} = \left[r^{(1)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}\right]^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{Z}_{[2]} = \left[r^{(2)}, \lambda^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}$. С целью уменьшения громоздкости последующих записей примем матрицы $\mathbf{K}_{\mathbf{Z}[1]}$ и $\mathbf{K}_{\mathbf{Z}[2]}$ диагональными, т.е.

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Z}[1]} = \operatorname{diag}\left[\sigma^2_{r^{(1)}}, \sigma^2_{\lambda^{(1)}}, \sigma^2_{\lambda^{(2)}}\right] \text{ и } \mathbf{K}_{\mathbf{Z}[2]} = \operatorname{diag}\left[\sigma^2_{r(2)}, \sigma^2_{\lambda(1)}\right].$$

Учитывая, что $x = r\cos\lambda$ и $y = r\sin\lambda$, в соответствии с (3.7) находим

$$\sigma^2_{r[1]} = 4\left(\lambda^{(2)}\right)^{-2}\left\{\left(\lambda^{(1)}\right)^2\sigma^2_{r^{(1)}} + \left(r^{(1)}\right)^2\left[\sigma^2_{\lambda^{(1)}} + \left(\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)}\right)^2\sigma^2_{\lambda^{(2)}}\right]\right\}, \tag{5.1}$$

$$\sigma^2_{r[2]} = \left(\lambda^{(1)}\right)^{-4}\left[\sigma^2_{r^{(2)}} + 4\left(r^{(2)}\right)^2\left(\lambda^{(1)}\right)^{-4}\sigma^2_{\lambda^{(1)}}\right], \tag{5.2}$$

при этом в качестве приоритетной выбирается та формула определения дальности, для которой

$$l^* = \arg\min_l \sigma^2_{r[l]}, \quad l^* \in \{1, 2\}. \tag{5.3}$$

Непосредственно из (5.1)–(5.3) следует, что разрабатываемый метод, оперирующий с производными до второго порядка включительно, можно эффективно применять только на сглаженных измерениях, при этом рассматривается класс высокоскоростных объектов, для которых обеспечивается необходимое приращение угловых координат и радиальной скорости на заданном интервале наблюдения [29].

6. Автокомпенсационный алгоритм сглаживания первичных измерений

Рассмотрим с учетом (2.1)–(2.4) алгоритм автокомпенсационного несмещенного сглаживания применительно к параметру $\mu \in \left\{r^{(1)}, \lambda, \varphi\right\}$ и его производным $\mu^{(q)}$ (где $q \in \{0, 1, 2\}$) в точке t_n с использованием «окна» $\{t_{n+i}, i = \overline{-m, m}\}$. Будем опираться на общий подход оценивания значений линейных функционалов, изложенный в [38, 39].

Оценку $\mu^{(q)*}$ для $\mu^{(q)}$ ищем в виде

$$\mu^{(q)*} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}_{\mu q}\mathbf{H}_\mu, \tag{6.1}$$

где $\mathbf{P}_{\mu q} = [p_{\mu q,n+i}, i = \overline{-m,m}]^{\mathrm{T}}$ – вектор неизвестных весовых коэффициентов, которые выбираются из условия минимизации дисперсии $\sigma^2_{\mu q}$ оценки $\mu^{(q)*}$.

Поскольку эта оценка относится к классу линейных, то

$$\sigma^2_{\mu q} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}_{\mu q}\mathbf{K}_\mu \mathbf{P}_{\mu q}. \tag{6.2}$$

Кроме того, потребуем выполнения условий несмещенности оценки ($\mu^{(q)} - \mathbf{P}^{\mathrm{T}}_{\mu q}\boldsymbol{\mu} = 0$) и ее инвариантности к сингулярной ошибке ($\mathbf{P}^{\mathrm{T}}_{\mu q}\mathbf{s}_\mu = 0$). Для решения сформулированной задачи условной оптимизации используется метод множителей Лагранжа с решающей функцией

$$J\left(\mathbf{P}_{\mu q}, \boldsymbol{\zeta}_{\mu q}, \boldsymbol{\omega}_{\mu q}\right) = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}_{\mu q}\mathbf{K}_\mu \mathbf{P}_{\mu q} + \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}_{\mu q}\Theta^{\mathrm{T}}_\mu \mathbf{P}_{\mu q} + \left[\left(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}_\mu\right)^{(q)} - \mathbf{P}^{\mathrm{T}}_{\mu q}\boldsymbol{\Psi}_\mu\right]\boldsymbol{\omega}_{\mu q}, \tag{6.3}$$

где $\boldsymbol{\zeta}_{\mu q}$ и $\boldsymbol{\omega}_{\mu q}$ – вектор-столбцы множителей Лагранжа, $\boldsymbol{\Theta}_\mu = \left[\theta_{\mu k}\left(t_{n+i}\right), i = \overline{-m,m},\ k = \overline{0,K}\,\right]$ – базисная матрица сингулярной ошибки, $\boldsymbol{\Psi}_\mu = \left[\psi_{\mu b}\left(t_{n+i}\right),\ i = \overline{-m,m},\ b = \overline{0,B}\,\right]$ – базисная матрица параметра $\mu = \mu(t)$.

Вектор $\mathbf{P}_{\mu q}$, минимизирующий $\sigma^2_{\mu q}$ и обеспечивающий выполнение условий несмещенности и инвариантности, имеет вид

$$\mathbf{P}_{\mu q} = \boldsymbol{\Lambda}_\mu \mathbf{K}^{-1}_\mu \boldsymbol{\Psi}_\mu \left(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}_\mu \boldsymbol{\Lambda}_\mu \mathbf{K}^{-1}_\mu \boldsymbol{\Psi}_\mu\right)^{-1} \boldsymbol{\Psi}^{(q)}_{\mu n}, \tag{6.4}$$

где $\boldsymbol{\Lambda}_\mu = E_{2m+1} - \mathbf{K}^{-1}_\mu \Theta_\mu \left(\Theta^{\mathrm{T}}_\mu \mathbf{K}^{-1}_\mu \Theta_\mu\right)^{-1}\Theta^{\mathrm{T}}_\mu$, E_{2m+1} – единичная матрица размером $(2m+1)\times(2m+1)$, $\boldsymbol{\Psi}^{(q)}_{\mu n} = d^q \boldsymbol{\Psi}_\mu(t)/dt^q|_{t=t_n}$.

Дисперсия оценки $\mu^{(q)*}$ находится по правилу

$$\sigma^2_{\mu q} = \left(\boldsymbol{\Psi}^{(q)}_{\mu n}\right)^{\mathrm{T}} \left[\left(\mathbf{K}^{-1}_\mu \boldsymbol{\Psi}_\mu\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\Lambda}_\mu\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Psi}_\mu\right]^{-1} \mathbf{H}_\mu \left(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}_\mu \boldsymbol{\Lambda}_\mu \mathbf{K}^{-1}_\mu \boldsymbol{\Psi}_\mu\right)^{-1} \boldsymbol{\Psi}^{(q)}_{\mu n}, \tag{6.5}$$

где

$$\mathbf{H}_\mu = \left(\mathbf{K}^{-1}_\mu \boldsymbol{\Psi}_\mu\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\Lambda}_\mu\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_\mu \boldsymbol{\Lambda}_\mu \mathbf{K}^{-1}_\mu \boldsymbol{\Psi}_\mu.$$

Несложно показать, что математическое ожидание методической ошибки, обусловленной не учетом «хвоста» ряда (2.4), равно

$$\varepsilon_{\mu q} = \Delta^{(q)}_{\mu n} - \mathbf{P}^{\mathrm{T}}_{\mu q}\boldsymbol{\Delta}_{\mu n}, \tag{6.6}$$

где $\Delta_\mu = \Delta_\mu(t)$ – «хвост» ряда, а $\Delta^{(q)}_{\mu n}$ – его q-я производная в точке $t = t_n$, $\boldsymbol{\Delta}_{\mu n} = \left[\Delta_\mu\left(t_{n+i}\right),\ i = \overline{-m,m}\right]^{\mathrm{T}}$.

В [38, с. 62] показано, что с ростом числа спектральных коэффициентов в модели сингулярной ошибки (2.3) алгоритм (6.1)–(6.6) обеспечивает сокращение вычислительных затрат до 47% по сравнению с традиционным расширенным методом наименьших квадратов. Это позволяет повысить оперативность решения задачи сглаживания.

С учетом (6.1)–(6.6) можно строить искомые оценки параметров движения объекта, инвариантные к сингулярным ошибкам измерений. Так, если воспользоваться формулами (4.3) и (4.4), то можно найти устойчивые оценки наклонной дальности для двух вариантов

$$r\,[1] = \frac{2\left(\mathbf{P}_{r1}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_r\right)\left(\mathbf{P}_{\lambda1}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_\lambda\right)\cos\left(\mathbf{P}_{\varphi0}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_\varphi\right)}{2\left(\mathbf{P}_{\lambda1}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_\lambda\right)\left(\mathbf{P}_{\varphi1}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_\varphi\right)\sin\left(\mathbf{P}_{\varphi0}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_\varphi\right) - \left(\mathbf{P}_{\lambda2}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_\lambda\right)\cos\left(P_{\varphi0}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_\varphi\right)}, \tag{6.7}$$

$$r\,[2] = -\frac{2\left(\mathbf{P}_{r1}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_r\right)\left(\mathbf{P}_{\varphi1}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_\varphi\right)}{\left(P_{\varphi2}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_\varphi\right) + \left(\mathbf{P}_{\lambda1}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_\lambda\right)^2\sin\left(\mathbf{P}_{\varphi0}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_\varphi\right)\cos\left(\mathbf{P}_{\varphi0}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_\varphi\right)}. \tag{6.8}$$

По аналогии с (6.7) и (6.8) определяются дальности для вариантов (4.5)–(4.7) и декартовы координаты (3.9) объекта наблюдения.

Результаты вычислительных экспериментов, представленные в [38, 39], показывают высокую эффективность автокомпенсационного алгоритма сглаживания в аномальных условиях измерений, что позволяет формировать устойчивые оценки производных от радиальной скорости и угловых координат, необходимые для успешного применения развитого однопозиционного косвенного метода координатометрии. Результаты моделирования адаптивного алгоритма (3.7) и (3.8) для случая прямолинейного равномерного движения объекта представлены в [29]. Они показывают, что метод применим к высокоточным измерениям, при этом достоверность результатов координатометрии существенно зависит от динамики объекта и условий его наблюдения.

7. Заключение

Развитый метод существенно расширяет сферу применения квазиоптимальных косвенных методов оперативного оценивания применительно к решению задачи однопозиционной координатометрии, устойчивых к сингулярным ошибкам измерений и условиям наблюдения высокоскоростных объектов. Данный метод как самостоятельно, так и в совокупности с традиционными статистическими методами (например, наименьших квадратов, максимального правдоподобия, максимума апостериорной плотности вероятности и различных методов динамической фильтрации) может быть эффективно использован как инструмент интеллектуально-аналитического совершенствования существующих и разработки перспективных однопозиционных систем активной и пассивной локации и навигации нового поколения.

У метода есть ограничения на классы используемых однопозиционных систем в плане точности измерений, условий наблюдения, а также на типы сопровождаемых объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы маневрирования кораблей / Под ред. М.И. Скворцова. М.: Воениздат, 1966.

2. *Брандин В.Н., Разоренов Г.Н.* Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978.
3. *Шебшаевич В.С.* Введение в теорию космической навигации. М.: Сов. радио, 1971.
4. *Громов Г.Н.* Дифференциально-геометрический метод навигации. М.: Радио и связь, 1986.
5. *Хвощ В.А.* Тактика подводных лодок. М.: Воениздат, 1989.
6. *Соловьев Ю.А.* Спутниковая навигация и ее приложения. М.: Экотрендз, 2003.
7. *Мельников Ю.П., Попов С.В.* Радиотехническая разведка. М.: Радиотехника, 2008.
8. *Булычев Ю.Г., Манин А.П.* Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000.
9. *Ярлыков М.С.* Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985.
10. *Сосулин Ю.Г., Костров В.В., Паршин Ю.Н.* Оценочно-корреляционная обработка сигналов и компенсация помех. М.: Радиотехника, 2014.
11. *Булычев Ю.Г., Васильев В.В., Джуган Р.В. и др.* Информационно-измерительное обеспечение натурных испытаний сложных технических комплексов. М.: Машиностроение – Полет, 2016.
12. *Гельцер А.А.* Однопозиционный метод определения местоположения источника радиоизлучения с использованием отражений сигналов от множества элементов рельефа и местных предметов // Автореф. дис. Том. гос. универ. систем управления и радиоэлектроники. 2012.
13. *Сиренко И.Л., Донец И.В., Рейзенкинд Я.А.* Однопозиционное определение координат и вектора скорости радиоизлучающих объектов // Радиотехника. 2019. № 10 (16). С. 28–32.
14. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С., Николас П.И.* Оценка наклонной дальности до цели с полиномиальным законом движения // Вестн. Казан. гос. универ-та. 2013. № 1. С. 67–74.
15. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С., Мозоль А.А.* Оценивание параметров движения объекта на базе стационарного квазиавтономного пеленгатора // ТиСУ. 2013. № 5. С. 92–99.
16. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С., Насенков И.Г.* Пассивная локация группы движущихся целей одним стационарным пеленгатором с учетом априорной информации // АиТ. 2017. № 1. С. 152–166.
Bulychev Y.G., Bulychev V.Y., Ivakina S.S., Nasenkov I.G. Passiv of Location of moving Tar gets with prior Information // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 1. P. 125–137.
17. *Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S.* Comparison of EKF, Pseudo-measurement and Particle Filters for a Bearing-only Target Tracking Problem // Proc. SPIE-Int. Soc. Optic. Eng. 2002. V. 4728. P. 240–250.
18. *Miller B.M., Stepanyan K.V., Miller A.B., Andreev K.V., Khoroshenkikh S.N.* Optimal filter selection for UAV trajectory control problems // Proc. 37 Conference on Inform. Techn. Syst. – 2013. Conf. Young Sci. Engin. IITP RAS, 1–6 September 2013, place City Kaliningrad, country-region Russia. 2013. P. 327–333.
19. *Miller B.M., Miller A.B.* Tracking of the UAV trajectory on the basis of of bearing-only observations // Sensors 2015 [Special Issue]. No. 15 (12). P. 29802–29820. https://doi.org/10.3390/s151229768

20. *Amelin K.S., Miller A.B.* An Algorithm for Refinement of the Position of a Light UAV on the Basis of Kalman Filtering of Bearing Measurements // Commun. Technol. Electron. 2014. V. 59. No. 6. P. 622–631.

21. *Karpenko S., Konovalenko I., Miller A., Miller B., Nikolaev D.* UAV Control on the Basis of 3D Landmark Bearing-Only Observations // Sensors 2015 [Special Issue]. No. 15 (12). P. 29802–29820. https://doi.org/10.3390/s151229768

22. *Karpenko S., Konovalenko I., Miller A., Miller B., Nikolaev D.* Visual navigation of the UAVs on the basis of 3D natural landmarks // Proc. SPIE. Eight Int. Conf. Machine Vision (ICMV 2015). 2015. V. 9875. P. 1–10. https://doi.org/10.111712.2228793

23. *Bar-Shalom Ya., Willet P.K., Tian X.* Tracking and Data Fusion: A Handbook of Algorithms, YBS Publishing, 2011. ISBN-13: 978-0964831278.

24. *Ried D.* An Algorithm for Tracking Multiple Targets // IEEE transact. Autom. Control. 1979. V. 24 (6). P. 843–854.

25. *Nardone S.C., Aidala V.J.* Observabiliti Criteria for Bearings-Only Target Motion Analysis // IEEE Transact. Aerospac. Electron. Syst. 1981. V. AES-17. 1981. P. 162–166.

26. *Katta G. Murty.* An algorithm for ranking all the assignments in order of increasing cost // Oper. Res. 1968. No. 16 (3). P. 682–687.

27. *Булычев Ю.Г., Мозоль А.А.* Однопозиционная пассивная локация и навигация с учетом эволюции периода радиосигнала в точке приема // РЭ. 2021. Т. 66. № 5. С. 468–475.

28. *Дятлов А.П., Дятлов П.А.* Доплеровские обнаружители подвижных объектов с использованием «постороннего» источника излучения // Специальная техника. 2010. № 5. С. 16–22.

29. *Булычев Ю.Г., Коротун А.А., Манин А.П.* Фильтрация параметров траекторий в угломерно-доплеровских системах локации // Радиотехника. 1990. № 12. С. 22–26.

30. *Жданюк Б.Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.

31. *Шлома А.М., Фролов С.М., Преображенский Л.А.* Адаптивная фильтрация параметров криволинейных траекторий // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1986. № 12. С. 56–60.

32. *Булычев Ю.Г., Елисеев А.В.* Проблема жесткости уравнений приближенной нелинейной фильтрации // АиТ. 1999. № 1. С. 35–45.
Bulychev Yu.G., Eliseev A.V. Rigidity problems of equations of approximate nonlinear filtering // Autom. Remote Control. 1999. No. 1. P. 35–45.

33. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С., Насенков И.Г.* Классификация инвариантов пассивной локации и их применение // ТиСУ. 2015. № 6. С. 71–81.

34. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.

35. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

36. *Павловский Ю.Н.* Агрегирование, декомпозиция, групповые свойства, декомпозиционные структуры динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. 1978. № 39. С. 53–62.

37. *Булычев Ю.Г., Бурлай И.В.* Системный подход к моделированию стохастических объектов с использованием инвариантов // АиТ. 2001. № 12. С. 11–20.
Bulychev Y.G., Burlaj I.V. A system approach to modeling stochastic objects with invariants // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 12. P. 1939–1946.
38. *Булычев Ю.Г., Елисеев А.В.* Вычислительная схема инвариантно несмещенного оценивания значений линейных операторов заданного класса // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. № 4. С. 580–592.
39. *Булычев Ю.Г.* Применение методов опорных интегральных кривых и обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания для исследования многомерной динамической системы // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 7. С. 1151–1169.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.А. Степановым.

Поступила в редакцию 18.05.2022

После доработки 22.03.2023

Принята к публикации 09.06.2023