

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2023 г. А.С. БУГАЕВ, академик РАН (bugaev@cos.ru)

(Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)),

М.В. ЯШИНА, д-р техн. наук (mv.yashina.madi.ru)

(Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет;

Московский технический университет связи и информатики;

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет)),

А.Г. ТАТАШЕВ, д-р физ.-мат. наук (a-tatashev@yandex.ru)

(Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет;

Московский технический университет связи и информатики)

О СКОРОСТИ ПОТОКА НА РЕГУЛЯРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ОТКРЫТОЙ ОДНОМЕРНОЙ СЕТИ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ УЗЛОВ¹

Исследуется система, относящаяся к классу динамических систем, называемому контурными сетями или сетями Буслаева. Этот класс разработан с целью создания моделей трафика на сетевых структурах, для которых могут быть получены аналитические результаты. Контурные сети могут иметь и другие приложения. В системе, называемой открытой цепочкой контуров, отрезки, называемые кластерами, движутся по определенным правилам по окружностям (контурам), каждый из которых имеет общие точки (узлы) с двумя соседними контурами, кроме крайнего левого и крайнего правого контура, имеющих по одному соседнему. Найдены результаты о средней скорости движения кластеров с учетом задержек при прохождении узлов. Полученные результаты обобщают результаты, полученные ранее для частного случая рассматриваемой системы.

Ключевые слова: динамические системы, математические модели трафика, контурные сети.

DOI: 10.31857/S0005231023090064, EDN: JTGACT

1. Введение

Класс математических моделей трафика образуют модели, в которых частицы движутся на одномерной или двумерной решетке. Такие модели могут интерпретироваться как клеточные автоматы [1] или процессы с запретами [2]. В дискретной транспортной модели Нагеля–Шрекенберга, введенной

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (FSFM-2023-0003).

в [3] и затем исследовавшейся рядом авторов, на бесконечной или замкнутой одномерной решетке, представляющей собой последовательность клеток (ячеек), движутся частицы по соответствующим правилам. Аналитические результаты для простых вариантов моделей такого класса были получены, например, в [14–19]. Модели этого класса с сетевыми структурами исследовались в основном имитационным моделированием.

В [7] (препринт этой статьи был опубликован в 1999 г.) исследовалось движение частиц по замкнутой решетке в предположении, что на каждом такте частица перемещается на ячейку вперед, если ячейка впереди свободна, и остается на месте, если эта ячейка занята. Если такой системе поставить в соответствие клеточный автомат такой, что ячейке, занятой частицей, соответствует клетка, находящаяся в состоянии 1, а свободной ячейке соответствует клетка автомата, находящаяся в состоянии 0, то этот автомат, как отмечается в [7], будет представлять собой элементарный клеточный автомат 184 в классификации С. Вольфрама [1]. Как установлено в [7], в случае если отношение числа частиц к числу ячеек (плотность частиц) не превышает $1/2$, то при любом начальном состоянии с некоторого момента времени все частицы перемещаются на каждом такте без задержек (свободное движение, самоорганизация). Для плотности, превышающей $1/2$, в [7] установлено, что средняя скорость частиц (отношение среднего числа частиц, перемещающихся в единицу времени, к числу всех частиц) равна $(1 - \rho)/\rho$, где ρ — плотность. Аналогичные результаты для той же модели были получены независимо в [5], где, кроме того, была найдена верхняя граница времени достижения системой предельного режима. В [6] получены аналитические результаты для более общей транспортной модели. В этой модели частица с некоторой вероятностью перемещается из ячейки i в ячейку $i + 1$ и при этом учитываются состояния ячеек с $i - 1$ по $i + 2$ (ячейки нумеруются в направлении движения). Поведение системы исследовалась в [6] в частных случаях. В [8] получена формула для средней скорости частиц в стохастической транспортной модели, в которой на каждом такте частица с заданной вероятностью движется на ячейку вперед, если ячейка впереди свободна. Некоторые обобщения результатов [5, 7, 8] получены в [9], где рассматривается динамическая система с непрерывным пространством состояний, которая в частных случаях эквивалентна системам, рассматриваемым в [5, 7, 8]. В [10] рассматривается стохастическая модель трафика, в которой частицы движутся по незамкнутой решетке, содержащей конечное число ячеек. Частицы появляются на одном конце решетки, перемещаются в направлении к противоположному концу и после достижения его покидают решетку. В [10] разработан матричный подход к анализу этой системы.

В [11] была предложена двумерная модель трафика, в которой частицы движутся на двумерной тороидальной решетке в перпендикулярных направлениях (модель BML). Частицы одного типа движутся по горизонтальным рядам, а частицы второго типа — по вертикальным рядам. Правила движения частиц можно считать двумерным аналогом правила элементарного

клеточного автомата 189. Эта аналогия отмечается в [11]. В [11–18] рассмотрены различные варианты модели ВМЛ, получены некоторые аналитические результаты (прежде всего, условия самоорганизации или полной остановки движения — затора).

В [19] введен граф с переменной конфигурацией частиц. Разработанный подход позволяет моделировать явления, возникающие в сложных сетях (например, в транспортных, в социальных).

Книга [20] является монографией по математическому моделированию автотранспортных потоков. По изложенному в этой книге материалу можно видеть, что известно достаточно мало подходов к аналитическому исследованию математических моделей автотранспортных потоков с сетевой структурой. Это обуславливает актуальность разработки новых таких подходов, одним из которых является построение моделей на основе сетей Буслаева.

В [21] было введено понятие кластерного движения в транспортных моделях. В дискретном варианте кластеры представляют собой группы частиц, располагающихся в соседних ячейках и перемещающихся одновременно. В этом случае движение частиц соответствует правилу элементарного клеточного автомата 240. В непрерывном варианте кластеры представляют собой движущиеся отрезки и называются кластерами по аналогии с дискретным вариантом.

А.П. Буслаев разработал понятие контурных сетей [22]. Контурная сеть представляет собой динамическую систему, содержащую систему контуров, причем соседние контуры имеют общие точки, называемые узлами. В дискретном варианте контур представляет собой замкнутую последовательность ячеек. В непрерывном варианте контур представляется в виде окружности. На контурах движутся по определенным правилам частицы или кластеры. При прохождении частицами узлов возникают задержки, обусловленные тем, что более одной частицы не могут одновременно проходить узел. Основными задачами исследования контурных сетей являются нахождение средней скорости частиц (кластеров), условия попадания системы в состояние свободного движения (начиная с некоторого момента все кластеры перемещаются без задержек в текущий момент и в будущем) или коллапса (с некоторого момента ни одна частица не перемещается). Аналитические результаты получены для двухконтурных сетей с одним [23] или с двумя [24] общими узлами и для контурных сетей с регулярными периодическими структурами [25–30].

В [26] рассматривалась контурная сеть, называемая открытой цепочкой контуров. В [26] рассматривался вариант открытой цепочки с непрерывным пространством состояний и непрерывным временем. Система содержит контуры, каждый из которых имеет два соседних, кроме крайнего левого и крайнего правого контуров, которые имеют по одному соседнему контуру. Соседние контуры имеют общий узел. На каждом контуре имеется кластер. Предполагалось, что длина контура одинакова для всех контуров, а два узла делят контур на равные части. Контуры также имеют одинаковую длину. До-

казано, что если длина кластера не превосходит половину длины контура, то система с некоторого момента находится в состоянии свободного движения, т.е. все кластеры перемещаются без задержек, а если длина кластера больше половины длины контура, то все кластеры движутся с одной и той же средней скоростью, меньшей скорости свободного движения и не зависящей от начального состояния системы, причем получена формула для средней скорости кластеров. В [27] найдена средняя скорость кластеров для варианта открытой цепочки с дискретным пространством состояний и дискретным временем в предположении, что контуры имеют одинаковую длину (одно и то же число ячеек на контуре) и делятся узлами пополам, но длины кластеров различны для случая, когда длина всех кластеров больше половины длины контура. Приведены примеры, показывающие, что в общем случае кластеры могут двигаться с неодинаковыми средними скоростями, при этом средняя скорость может зависеть от начального состояния системы. В [30] найдено предельное распределение (инвариантная мера) для открытой цепочки с одинаковыми по длине контурами и неодинаковыми по длине кластерами.

В [23], где рассматривалась несимметричная двухконтурная система с одним узлом, представляющая собой частный случай неоднородной открытой цепочки контуров, для которого число контуров равно двум, приводится следующий пример возможного приложения результатов по контурным сетям. Пусть в течение рабочего дня к двум подразделениям предприятия постоянно подвозятся со склада сырье или топливо, которые доставляются транспортными средствами, например вагонетками, по узкоколейным путям. Склад находится в точке пересечения этих путей. Транспортное средство, подошедшее к складу во время загрузки другого транспортного средства, ожидает окончания обслуживания и затем начинает загружаться. Предположим, что i -е транспортное средство проходит путь от склада до подразделения и обратно за время $c_i - l_i$ с учетом времени разгрузки в подразделении, а загрузка транспортного средства на складе длится l_i единиц времени, $i = 1, 2$. Тогда процесс перемещения транспортных средств моделируется системой рассматриваемого вида с длинами контуров c_1 и c_2 и длинами кластеров соответственно l_1 и l_2 в предположении, что при отсутствии задержек каждый кластер движется с единичной скоростью.

Этот пример можно обобщить. Предположим, что имеется три подразделения предприятия, два склада и три транспортных средства, каждое из которых подвозит грузы к подразделению, к которому это транспортное средство относится. К подразделению 1 грузы подвозятся со склада 1. К подразделению 3 грузы подвозятся со склада 2. К подразделению 2 грузы подвозятся поочередно с обоих складов. Процесс работы транспортных средств моделируется неоднородной трехконтурной открытой цепочкой такой, что каждый контур соответствует пути транспортного средства, а каждый из двух узлов соответствует одному из складов.

В настоящей работе доказана теорема о поведении системы в случае, когда длина контура и движущегося по нему кластера зависит от номера контура,

а контуры могут делиться узлами на неодинаковые по длине части в предположении, что кластеры имеют достаточно большие длины. Получена формула для средней скорости кластеров, являющаяся обобщением формулы, найденной в [27] для рассматриваемого там частного случая.

2. Описание системы

Рассматривается динамическая система, рис. 1, содержащая N окружностей, называемых *контурами*. Длина контура i равна c_i , $i = 1, \dots, N$. На контуре i задана система координат $[0, c_i]$, $i = 1, \dots, N$. Контуры i и $i + 1$ имеют общую точку, называемую *узлом* $(i, i + 1)$, $i = 1, \dots, N - 1$. Координата узла $(i, i + 1)$ равна 0 на контуре i и равна $d_{i+1} > 0$ на контуре $i + 1$, $i = 1, \dots, N - 2$. Считаем, что координата узла $(N - 1, N)$ равна 0 как на контуре $N - 1$, так и на контуре N . На контуре i находится движущийся отрезок длиной l_i , называемый *кластером* i , $i = 1, \dots, N$. Направление оси координат контура i совпадает с направлением движения кластера, $i = 1, \dots, N$. Если нет задержек, то кластер движется со скоростью 1, т.е. кластер i совершает полный оборот за c_i единиц времени, $i = 1, \dots, N$. Если в момент времени $t \geq 0$ координата передней точки кластера i равна $x_i(t)$, то кластер i располагается в этот момент на дуге $(x_i(t) - l_i, x_i(t))$ (вычитание по модулю c_i) $i = 1, \dots, N$. *Состояние* системы в момент t представляет собой вектор $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$, где $x_i(t)$ — координата передней точки кластера i , $i = 1, \dots, N$. Будем говорить, что в момент t кластер i занимает узел $(i, i + 1)$, если $0 < x_i(t) < l_i$, $i = 1, \dots, N - 1$. Будем говорить, что в момент t кластер i занимает узел $(i - 1, i)$, если $d_i < x_i(t) < d_i + l_i$ (при $d_i + l_i < c_i$), рис. 2, или $0 \leq x_i(t) < d_i + l_i - c_i$ (при $d_i + l_i \geq c_i$), рис. 3, $i = 2, \dots, N - 1$, рис. 4, $0 < x_i(t) < l_i$, $i = N$. Будем говорить, что в момент t кластер i находится у узла $(i, i + 1)$, если $x_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, N - 1$. Будем говорить, что в момент t кластер i находится у узла $(i - 1, i)$, если $x_i(t) = d_i$, $i = 2, \dots, N - 1$; $x_N(t) = 0$. Состояние *допустимо*, если при нахождении системы в этом состоянии ни один узел не занят двумя кластерами. Состояние системы в момент времени $t = 0$ (*начальное состояние*) задается и должно быть допустимым. Задержка кластера возникает, если кластер находится у узла, занятого в текущий момент кластером соседнего контура. Задержка закончится в момент, когда этот узел перестанет быть занятым. Если кластеры

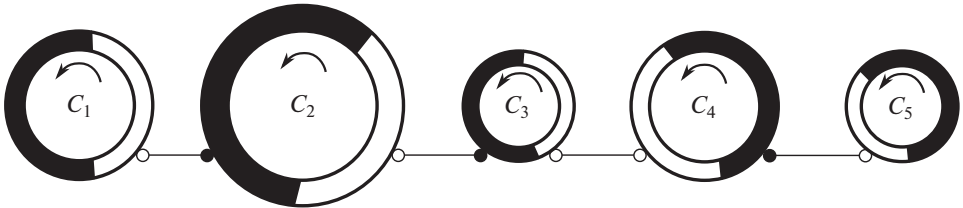


Рис. 1. Открытая цепочка контуров, $N = 5$, c_i — длина контура i , l_i — длина кластера i , $i = 1, \dots, 5$.

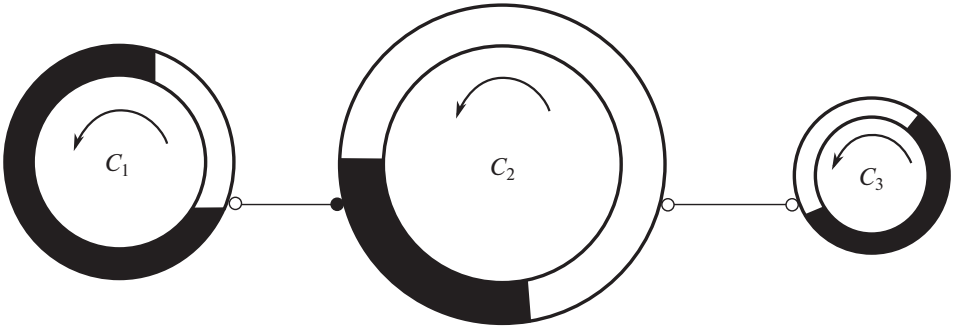


Рис. 2. Кластер 2 занимает узел $(1, 2)$, $l_2 + d_2 < c_2$. Задержка кластера 1 у узла $(1, 2)$.

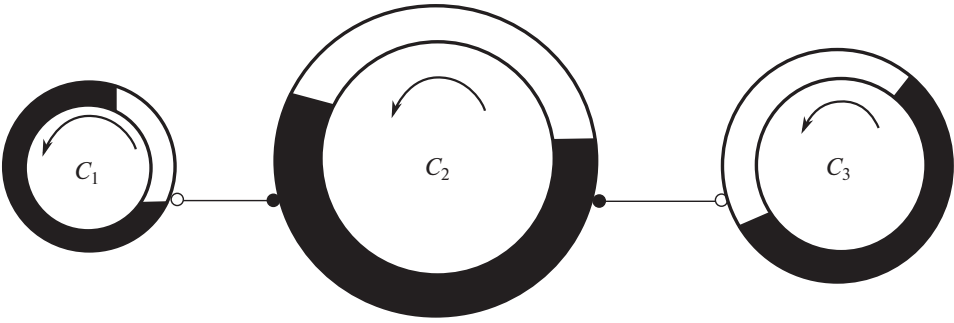


Рис. 3. Кластер 2 занимает узел $(1, 2)$, $l_2 + d_2 > c_2$. Задержка кластера 1 у узла $(1, 2)$.

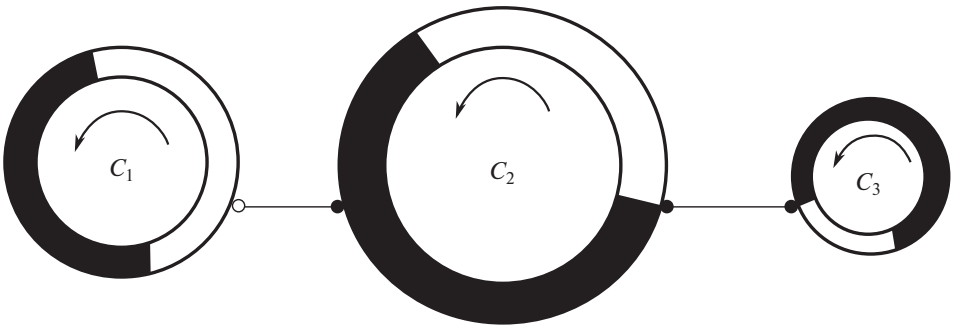


Рис. 4. Конкуренция кластеров 2 и 3.

i и $i + 1$ одновременно находятся у узла $(i, i + 1)$, то возникает конкуренция этих кластеров (рис. 4) и первым через узел проходит кластер, выбираемый в соответствии с детерминированным или стохастическим правилом разрешения конкуренции. При выполнении условий доказанной в разделе 4 теоремы 1 для любого правила разрешения конкуренции реализуется один и тот же не зависящий от начального состояния предельный цикл в пространстве состояний системы, на котором не возникает конкуренций одновременно подошедших к узлу кластеров.

3. Предельные циклы. Средняя скорость

Так как система детерминированная и ее поведение в будущем определяется состоянием в текущий момент, имеем, что если в некоторый момент времени состояние системы повторится, то с этого момента состояния системы будут периодически повторяться, образуя цикл (предельный цикл).

Пусть $H_i(t)$ — суммарное расстояние, проходимое кластером i в интервале времени $(0, t)$. Тогда предел

$$v_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H_i(t)}{t},$$

если этот предел существует, называется средней скоростью кластера i , $i = 1, \dots, N$. Ясно, что если реализуется цикл, то данный предел существует и равен отношению расстояния, проходимого кластером i к периоду цикла.

4. Поведение системы

В разделе 4 докажем утверждения о поведении системы.

Лемма 1. Если

$$(1) \quad \frac{l_i}{c_i} + \frac{l_{i+1}}{c_{i+1}} > 1$$

для некоторых i и $i + 1$ ($1 \leq i \leq N - 1$), то средняя скорость хотя бы одного из кластеров i и $i + 1$ меньше 1.

Доказательство. Предположим, что при некотором i $v_i = v_{i+1} = 1$ и, следовательно, кластеры i и $i + 1$ ($1 \leq i \leq N - 1$) движутся без задержек. Тогда первое слагаемое в левой части неравенства (1) представляет собой предел при $t \rightarrow \infty$ отношения к t суммарного времени, в течение которого узел $(i, i + 1)$ занят кластером i в интервале времени $(0, t)$, а второе слагаемое равно пределу при $t \rightarrow \infty$ отношения к t суммарного времени, в течение которого узел $(i, i + 1)$ занят кластером $i + 1$ в интервале времени $(0, t)$. Следовательно, сумма этих слагаемых не может быть больше 1, так как узел не может быть занят двумя кластерами одновременно. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Следующая теорема характеризует поведение системы при достаточно больших длинах кластеров (большой нагрузке).

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$(2) \quad l_i > \max(d_i, c_i - d_i), \quad i = 2, \dots, N - 1,$$

$$(3) \quad l_1 + l_i > c_i, \quad i = 2, \dots, N,$$

$$(4) \quad l_i + l_N > c_i, \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

и хотя бы одно из двух условий

$$(5) \quad \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} > 1,$$

$$(6) \quad \frac{l_{N-1}}{c_{N-1}} + \frac{l_N}{c_N} > 1.$$

Тогда при любом детерминированном или стохастическом правиле разрешения конкуренции реализуется один и тот же предельный цикл, на котором не возникает конкуренции одновременно подходящих к узлу кластеров. Период этого цикла равен

$$(7) \quad T = l_1 + l_N + 2 \sum_{j=2}^{N-1} l_j - \sum_{j=2}^{N-1} c_j.$$

Средняя скорость кластера i равна

$$(8) \quad v_i = \frac{c_i}{l_1 + l_N + 2 \sum_{j=2}^{N-1} l_j - \sum_{i=2}^{N-1} c_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Доказательство. Предположим, что выполняются условия (2)–(5). В соответствии с леммой 1 на предельном цикле происходит задержка хотя бы одного из кластеров 1 и 2.

Предположим, что в некоторый момент времени t_1 начинается задержка кластера 2 у узла (1, 2). Тогда имеем $0 < x_1(t_1) < l_1$ и движение кластера 2 возобновляется в момент $t_0 = t_1 + l_1 - x_1(t_1)$, при этом

$$(9) \quad x_1(t_0) = l_1, \quad x_2(t_0) = d_2.$$

Предположим, что в момент времени t_1 начинается задержка кластера 1 у узла (1, 2). Если в момент $t_2 > t_1$ эта задержка заканчивается, то $x_1(t_2) = 0$, $x_2(t_2) = d_2 + l_2 - c_2$. Для момента $t_3 = t_2 + c_2 - l_2$ имеем $x_2(t_3) = d_2$. В соответствии с (3) выполняется неравенство $c_2 - l_2 < l_1$, следовательно, кластер 1 в момент t_2 занимает узел (1, 2) и в этот момент начинается задержка кластера 2 у узла (1, 2). Убедимся, что задержка кластера 1, начинающаяся в момент t_1 , закончится. Если задержка кластера 1 никогда не закончится, то он с момента t_1 будет находиться у узла (1, 2). По индукции можно доказать, что тогда и при $2 \leq i \leq N - 1$ кластер i с некоторого момента находится в текущий момент и в будущем у узла $(i, i + 1)$. Но тогда в некоторый момент t система окажется в состоянии, для которого $x_{N-1}(t) = 0$, $x_N(t) = l_N - \frac{c_N}{2}$, после чего кластер $N - 1$ начнет перемещаться. Таким образом, в некоторый момент возобновляется движение одного из кластеров. Пусть t_4 — наименьшее значение $t_4 > t_0$ такое, что в момент t_4 возобновляется движение кластера $1 \leq i_0 \leq N - 1$, а кластеры $1, 2, \dots, i_0 - 1$ в этот момент не перемещаются.

Тогда в момент

$$t_4 + \sum_{k=0}^{i_0-j-1} (d_{i_0-k} + l_{i_0-j} - c_{i_0-k})$$

возобновляется движение кластера $j = 1, \dots, i_0 - 1$. В частности, в момент

$$t_4 + \sum_{j=0}^{i_0-2} (d_{i_0-j} + l_{i_0-j} - c_{i_0-j})$$

возобновляется движение кластера 1.

Таким образом, для некоторого t_0 выполняется (9).

В момент времени $t_0 - l_1$ кластер 2 находился у узла $(1, 2)$ и сразу после этого момента стал занимать этот узел. При выполнении (2) каждый из кластеров $i = 2, \dots, N - 1$ занимает хотя бы один узел. Таким образом, кластер 2 в момент $t_0 - l_1$ занимает узел $(2, 3)$, и по индукции доказывается, что в момент $t_0 - l_1$ каждый из кластеров $i = 2, \dots, N - 1$ занимает в этот момент узел $(i, i + 1)$. Следовательно, выполняются неравенства

$$(10) \quad d_i + l_i - c_i \leq x_i(t_0) \leq d_i, \quad i = 3, \dots, N - 1.$$

Из (2), (3), (9), (10) следует, что в момент t_0 система находится в состоянии

$$x(t_0) = (l_1, d_2, \dots, d_{N-1}, 0).$$

В момент времени t_0 начинается движение кластера 2 и продолжается движение кластера 1. Движение кластера i возобновляется в момент

$$t(i) = t_0 + \sum_{j=2}^{i-1} (l_j - d_j), \quad i = 3, \dots, N,$$

и этот кластер застаёт этот узел занятым и ждет его освобождения. В соответствии с (2), (4) каждый кластер $i = 1, \dots, N$, подойдя к узлу $(i, i + 1)$, ждет его освобождения. В момент времени $u_0 + a$

$$(11) \quad a = l_N + \sum_{j=2}^{N-1} (l_j - d_j),$$

система оказывается в состоянии

$$x(t_0 + a) = (0, \dots, 0, l_N).$$

Движение кластера i возобновляется в момент времени

$$u(i) = t_0 + a + \sum_{j=i+1}^{N-1} (d_j + l_j - c_j), \quad i = 2, \dots, N - 1.$$

В соответствии с (2), (3) в момент

$$u(1) = t_0 + \sum_{i=2}^{N-1} (d_i + l_i - c_i)$$

возобновляется движение кластера 1 и в момент $u_0 = t_0 + a + b$ система оказывается в состоянии

$$(12) \quad x(u_0) = x(t_0 + a + b) = (l_1, d_2, \dots, d_{N-1}, 0) = u(t_0),$$

$$(13) \quad b = l_1 + \sum_{i=2}^{N-1} (d_i + l_i - c_i).$$

Из (11), (13) имеем

$$(14) \quad a + b = l_1 + l_N + 2 \sum_{j=2}^{N-1} l_j - \sum_{i=2}^{N-1} c_i.$$

Таким образом, осуществляется цикл с периодом $a + b$, в течение которого не возникает конкуренции одновременно оказывающихся у одного и того же узла кластеров, и каждый кластер совершает в течение цикла один оборот. Отсюда, учитывая (14), получаем утверждение теоремы для случая выполнения условий (2)–(5).

В доказательстве не учитывалось правило разрешения конкуренции. Поэтому в силу симметрии условие (5) следует заменить на условие (6). Теорема доказана.

Следствие 1. При выполнении условия теоремы значения периода (7) реализуемого цикла и средних скоростей (8) кластеров не зависят от d_2, \dots, d_{N-1} .

Утверждение следует из теоремы 1.

Предположим, что

$$(15) \quad c_1 = \dots = c_N = 1, \quad d_2 = \dots = d_{N-1} = \frac{1}{2},$$

$$l_i > \frac{1}{2}, \quad i = 1, \dots, N,$$

т.е. все контуры имеют одинаковую длину, которую без ограничения общности можно принять за единицу, причем два узла на контуре делят контур пополам и длина каждого кластера превышает половину длины контура. При выполнении условий (15) формулы (7), (8) принимают вид [21]

$$(16) \quad T = l_1 + l_N + 2 \sum_{i=2}^{N-1} l_i - N + 2,$$

$$(17) \quad v_i = \frac{1}{l_1 + l_N + 2 \sum_{i=2}^{N-1} l_i - N + 2}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Заметим, что в данном случае средняя скорость одинакова для всех кластеров. В [22] показано на примерах, что для дискретной открытой цепочки с контурами одинаковой длины и набором значений длин кластеров, среди которых могут быть как значения не больше, так и значения больше половины длины контура, средние скорости кластеров могут зависеть от начального состояния, а также средние скорости могут быть неодинаковыми для разных кластеров при одном и том же начальном состоянии системы. Приведем пример для рассматриваемой непрерывной цепочки.

Пример 1. Пусть выполняется условие (15), $N = 3$, $l_1 = l_3 = 0,75$, $l_2 = 0,25$. Пусть $(0,75, 0,5, 0,25)$ — начальное состояние. Тогда любой кластер каждый раз оказывается у узла в момент времени, когда узел не занят. Действительно, имеем

$$x(0) = (0,75, 0,5, 0,75), \quad x(0,5) = (0,25, 0, 0,25), \quad x(1) = (0,75, 0,5, 0,75) = x(0).$$

Таким образом, данное начальное состояние принадлежит циклу со скоростью 1. Если же начальным является состояние $(0,25, 0,5, 0,75)$, то имеем

$$\begin{aligned} x(0) &= (0,25, 0,5, 0,75), & x(0,5) &= (0,75, 0,5, 0,25), & x(1) &= (0,25, 0, 0,75), \\ x(1,5) &= (0,75, 0, 0,25), & x(2) &= (0,25, 0,5, 0,75) = x(0). \end{aligned}$$

То есть за цикл с периодом 2 кластеры 1 и 3 движутся без задержек и совершают по два оборота, а кластер 2 совершает за это время только один оборот и, следовательно, $v_1 = 1$, $v_2 = 1/2$, $v_3 = 1$. Таким образом, при одном начальном состоянии скорость каждого из трех кластеров равна 1, а при другом начальном состоянии только скорость кластеров 1 и 3 равна 1, а средняя скорость кластера 2 равна $1/2$.

Если выполняется условие (15) и условие $l_1 = \dots = l_n = l > 1/2$, то формулы (16), (17) имеют полученный в [18] вид

$$\begin{aligned} T &= 2(N-1)l - N + 2, \\ v_i &= \frac{1}{2(N-1)l - N + 2}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Если выполняются условия (15) и $l_1 = \dots = l_N = l \leq 1/2$, то, как доказано, в [19], система попадает в состояние свободного движения из любого начального состояния.

Таким образом, для открытой цепочки с одинаковыми по длине контурами и одинаковыми по длине кластерами средняя скорость одинакова для всех кластеров и не зависит от начального состояния системы в отличие от соответствующей замкнутой цепочки с одинаковыми по длине контурами и различными по длине кластерами [27], для которой средняя скорость кластеров зависит от начального состояния. Для случая, когда выполняется неравенство $l > 1/2$, в [23] найдено предельное распределение состояний (инвариантная мера) открытой цепочки с одинаковыми по длине контурами и одинаковыми по длине кластерами.

5. Заключение

Доказана теорема о поведении динамической системы, называемой открытой цепочкой контуров и принадлежащей классу контурных сетей. Ранее такая система рассматривалась в предположении, что все контуры имеют одну и ту же длину и узлы делят контуры на части одинаковой длины. В настоящей работе предполагается, что длины контуров могут различаться. Контур может делиться также на части различной длины. Система рассматривается в предположении, что находящийся на контуре кластер имеет достаточно большую длину. Доказано, что в рассматриваемых предположениях предельный цикл системы единственен. Найдены средние скорости кластеров и период предельного цикла. Результаты работы могут использоваться при моделировании трафика, а также иметь другие приложения, в частности при моделировании инфокоммуникационных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wolfram S.* Statistical mechanics of cellular automata // *Rev. Mod. Phys.* 1983. V. 55. P. 601–644. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.55.601>
2. *Spitzer F.* Interaction of Markov processes // *Advances in Mathematics.* 1970. V. 5. No. 2. P 246–290.
3. *Nagel K., Schreckenberg M.* A cellular automaton model for freeway traffic // *J. Phys. I.* 1992. V. 2. No. 12. P. 2221–2229. <https://doi.org/10.1051/jp1:1992277>
4. *Schreckenberg M., Schadschneider A., Nagel K., Ito N.* Discrete stochastic models for traffic flow // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 51. P. 2939–2949. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.2939>
5. *Blank M.L.* Exact analysis of dynamical systems arising in models of traffic flow // *Russian Mathematical Surveys.* 2000. V. 55. No. 3. P. 562–563. <https://doi.org/10.1070/RM2000v055n03ABEH000295>
6. *Gray L., Griffeth D.* The ergodic theory of traffic jams // *J. Stat. Phys.* 2001. V. 105. No. 3/4. P. 413–452.
7. *Belitsky V., Ferrari P.A.* Invariant measures and convergence properties for cellular automaton 184 and related processes // *J. Stat. Phys.* 2005. V. 118. No. 3/4. P. 589–623. <https://doi.org/10.1007/s10955-004-8822-4>
8. *Kanai M., Nishinari K., Tokihiro T.* Exact solution and asymptotic behaviour of the asymmetric simple exclusion process on a ring // *J. Phys. A: Mathematical and General.* 2006. V. 39. No. 29. 9071. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/29/004>
9. *Blank M.* Metric properties of discrete time exclusion type processes in continuum. *J. Stat. Phys.* 2010. V. 140. No. 1. P. 170–197. <https://doi.org/10.1007/s10955-010-9983-y>
10. *Evans M.R., Rajewsky N., Speer E.R.* Exact solution of a cellular automaton for traffic // *J. Stat. Phys.* 2010. V. 95. P. 45–56. <https://doi.org/10.1023/A:1004521326456>
11. *Biham O., Middleton A.A., Levine D.* Self-organization and a dynamic transition in traffic-flow models // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 46. No. 10. P. R6124–R6127. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.46.R6124>

12. *Angel O., Holroyd A.E., Martin J.B.* The Jammed Phase of the Biham-Middleton-Levine Traffic Model // *Electronic Communications in Probability*. 2005. V. 10. Paper 17. P. 167–178. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0504001>
13. *D'Souza R.M.* Coexisting phases and lattice dependence of a cellular automata model for traffic flow // *Physical Review E*. 2005. V. 71. 0066112.
14. *D'Souza R.M.* BML revisited: Statistical physics, computer simulation and probability // *Complexity*. 2006. V. 12. No. 2. P. 30–39.
15. *Austin T., Benjamini I.* For what number must self organization occur in the Biham-Middleton-Levine traffic model from any possible starting configuration? // *arXiv preprint math/0607759*, 2006.
16. *Pan Wei, Xue Yu, Zhao Rui, Lu Wei-Zhen.* Biham–Middleton–Levine model in consideration of cooperative willingness // *Chin. Phys. B*. 2014. V. 23. No. 5. 058902. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/23/5/058902>
17. *Wenbin Hu, Liping Yan, Huan Wang, Bo Du, Dacheng Tao.* Real-time traffic jams prediction inspired by Biham, Middleton and Levine (BML) // *Information Sciences*. 2017. P. 209–228. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2016.11.023>
18. *Moradi H.R., Zardadi A., Heydarbeygi Z.* The number of collisions in Biham–Middleton–Levine model on a square lattice with limited number of cars // *Appl. Math. E-Notes*. 2019. V. 19. P. 243–249.
19. *Malecky K.* Graph cellular automata with relation-based neighbourhoods of cells for complex systems modelling: A case of traffic simulation // *Symmetry* 2017. V. 9, 322. <https://doi.org/10.3390/sym9120322>
20. *Гасников А.В. и др.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Издание 2-е, испр. и доп. Под ред. А.В. Гасникова. М.: МЦНМО, 2013. 429 с.
21. *Bugaev A.S., Buslaev A.P., Kozlov V.V., Yashina M.V.* Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling // 2011 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), Washington, USA, 5–7 October 2011. P. 477–481. <https://doi.org/10.1109/ITSC.2011.6082805>
22. *Kozlov V.V., Buslaev A.P., Tatashev A.G.* On synergy of totally connected flows on chainmails // *Proc. of the 13th International Conference of Computational and Applied Methods in Science and Engineering, Almeria, Spain, 24–27 June 2013*. V. 3. P. 861–874.
23. *Мышкис П.А., Таташев А.Г., Яшина М.В.* Кластерное движение в двухконтурной системе с приоритетным правилом разрешения конфликта // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2020. № 3. С. 3–13.
Myshkis P.A., Tatashev A.G., Yashina M.V. Cluster motion in a two-contour system with priority rule for conflict resolution // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2020. V. 59. No. 3. P. 311–321. <https://doi.org/10.1134/S1064230730030119>
24. *Yashina M., Tatashev A.* Spectral cycles and average velocity of clusters in discrete two-contours system with two nodes // *Math. Meth. Appl. Sci*. 2020. V. 43. No. 7. P. 4303–4316. <https://doi.org/10.1002/mma.6194>
25. *Buslaev A.P., Tatashev A.G., Yashina M.V.* Qualitative properties of dynamical system on toroidal chainmails // *AIP Conference Proceedings*. 2013. V. 1558. P. 1144–1147. <https://doi.org/10.1063/1.4825710>

26. *Buslaev A.P., Tatashev A.G.* Spectra of local cluster flows on open chain of contours // Eur. J. Pure Appl. Math. 2018. V. 11. No. 3. P. 628–641.
<https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.11i3.3292>
27. *Yashina M., Tatashev A.* Discrete open Buslaev chain with heterogeneous loading // 2019 7th International Conference on Control, Mechatronics and Automation (ICCSMA), 6–8 Nov. 2019, Delft, Netherlands. P. 283–288.
<https://doi.org/10.1109/ICCSMA46720.2019.8988654>
28. *Бугаев А.С., Яшина М.В., Таташев А.Г., Фомина М.Ю.* О спектре скоростей насыщенных потоков на регулярной открытой одномерной сети / XI Всероссийской мультikonференции по проблемам управления МКПУ-2021, материал XIV мультikonференции: в 4 т. Ростов-на-Дону, 2021. С. 41–44.
29. *Бугаев А.С., Таташев А.Г., Яшина М.В.* Спектр непрерывной замкнутой симметричной цепочки с произвольным числом контуров // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 4. С. 21–44.
Bugaev A.S., Tatashev A.G., Yashina M. Spectrum of a continuous closed symmetric chain with an arbitrary number of contours // Mathematical Models and Computer Simulation. 2021. V. 13. No.6. P. 1014–1027. Translated from Matematicheskoe Modelirovanie. 2021. V. 33. No. 4. P. 21–44.
<https://doi.org/10.1134/S207004822106003X>
30. *Yashina M.V., Tatashev A.G.* Invariant measure for continuous open chain of contours with discrete time // Computational and Mathematical Methods. e1197. First published: 28 September 2021. <https://doi.org/10.1002/cmm4.1197>

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.Н. Граничным.

Поступила в редакцию 15.05.2022

После доработки 30.06.2023

Принята к публикации 20.07.2023