

© 2023 г. А.В. ПЕСТЕРЕВ, д-р физ.-мат. наук (alexanderpesterev.ap@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Исследуется устойчивость аффинной системы с переключениями, возникающей при применении управления в виде вложенных сатураторов для стабилизации цепочки двух интеграторов. Использование обратной связи в виде вложенных сатураторов позволяет легко учесть ограниченность ресурса управления и обеспечить выполнение желаемых характеристик переходного процесса, таких как заданная скорость экспоненциального убывания отклонения вблизи положения равновесия и ограничение на максимальную скорость приближения к положению равновесия при больших начальных отклонениях. Доказана глобальная устойчивость замкнутой системы.

Ключевые слова: стабилизация цепочки двух интеграторов, аффинная система с переключениями, глобальная устойчивость, вложенные сатураторы.

DOI: 10.31857/S0005231023090052, **EDN:** JSXFFD

1. Введение

Гибридными системами называют динамические системы, которые демонстрируют как непрерывное, так и дискретное поведение, т.е. системы, состояния которых могут меняться как непрерывно, так и скачками [1]. Система с переключениями представляет собой гибридную динамическую систему, состоящую из семейства подсистем и закона переключения, определяющего в каждый момент времени, какая из подсистем является активной [2]. Системы такого рода встречаются во многих задачах управления механическими, технологическими и другими процессами в различных областях науки и техники [1, 2]. Одна из важных проблем, возникающих при исследовании систем с переключениями, — проблема устойчивости [2–4]. Решению этой проблемы применительно к рассматриваемой системе с переключениями и посвящена настоящая работа.

Исследуемая в статье аффинная система с переключениями возникает при применении управления специального вида, а именно обратной связи в виде вложенных сатураторов, для стабилизации цепочки двух интеграторов. Задача стабилизации цепочек интеграторов широко обсуждалась в литературе в течение нескольких последних десятилетий (см., например, [5–7] и приведенные там ссылки). Интерес к данной проблематике обусловлен тем, что

во многих приложениях исходные модели, например модели механических планарных систем, заданы в виде цепочек интеграторов; более того, управления, разработанные для цепочек интеграторов, легко обобщаются на более широкие классы систем.

Управление с помощью обратных связей в виде вложенных сатураторов исследовалось в ряде работ по стабилизации цепочек интеграторов (см., например, [5, 6, 8–11] и приведенные там ссылки). Однако автору не известны работы, результаты которых могли бы быть использованы для установления устойчивости системы с рассматриваемой в статье обратной связью. Общий случай n -мерного интегратора обсуждается, например, в [5, 6]. Но глобальная устойчивость системы, замкнутой обратной связи в виде n вложенных сатураторов, была доказана только для случая, когда предельные значения вложенных функций насыщения удовлетворяют определенным неравенствам [5, Theorem 2.1], которые не выполняются для применяемой в настоящем исследовании обратной связи. Глобальная устойчивость интегратора второго порядка, стабилизируемого с помощью обратной связи в виде вложенных сатураторов, но с обратным порядком аргументов (см. более подробно в следующем разделе), доказана в [8, 9]. Используемый в этих работах прием не применим в случае рассматриваемой в статье обратной связи.

Обратная связь рассматриваемого вида применялась ранее в ряде работ. В [10, 11]), например, решались оптимизационные задачи выбора коэффициентов обратной связи, а в [12–14] на ее основе были синтезированы контроллеры для стабилизации интеграторов более высокого порядка. В указанных работах устойчивость системы, замкнутой такой обратной связью, молчаливо подразумевалась; однако, доказательство этого факта отсутствовало. Цель настоящей работы — устранить данный недостаток и доказать глобальную устойчивость системы. Интерес к использованию обратной связи в виде вложенных сатураторов для стабилизации интегратора второго порядка объясняется рядом замечательных свойств полученной замкнутой системы, о которых будет сказано в следующем разделе.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу стабилизации интегратора 2-го порядка

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = U(x),$$

где $x \equiv [x_1, x_2]^T$, с помощью непрерывной обратной связи с ограниченным ресурсом управления $U_{\max} = k_4$: $U(x) = -k_3(x_2 + k_2 \text{sat}(k_1 x_1))$ при $|U(x)| \leq k_4$ и $U(x) = -k_4 \text{sign}(k_3(x_2 + k_2 \text{sat}(k_1 x_1)))$ при $|U(x)| > k_4$. В компактном виде управление $U(x)$ записывается в виде вложенных сатураторов как

$$(2) \quad U(x) = -k_4 \text{sat} \left(\frac{k_3}{k_4} (x_2 + k_2 \text{sat}(k_1 x_1)) \right),$$

где $\text{sat}(\cdot)$ – негладкая функция насыщения: $\text{sat}(w) = w$ при $|w| \leq 1$ и $\text{sat}(w) = \text{sign}(w)$ при $|w| > 1$. Преимущества обратной связи в виде вложенных са-

тураторов в том, что при ее использовании автоматически выполняется не только ограничение на ресурс управления, но и на максимальную скорость приближения к положению равновесия: если положить $k_2 = V_{\max}$, то при любом начальном удалении $\dot{x}_1(t) \leq V_{\max}$ коль скоро $x_2(0) \leq V_{\max}$ [11]. Кроме того, соответствующим выбором коэффициентов k_1 и k_3 легко обеспечить желаемый тип положения равновесия (узел, полюс или центр) и любое желаемое значение экспоненциальной скорости убывания отклонения в окрестности точки равновесия [11].

Как уже упоминалось во введении, в [8, 9] доказана глобальная устойчивость интегратора второго порядка с помощью обратной связи вида (2), но с обратным, по сравнению с (2), порядком аргументов, т.е. аргументом внутреннего сатуратора является скорость x_2 , а аргументом внешнего сатуратора — отклонение x_1 (в [9] аргумент внешнего сатуратора дополнительно зависит от квадрата скорости x_2^2). Доказательство глобальной устойчивости в обеих работах основано на существовании функции Ляпунова в виде суммы квадратичного и интегрального членов. Для системы (1), (2), однако, указанный прием не применим, так как функцию Ляпунова такого вида не удастся найти.

2.1. Эквивалентное представление в виде аффинной системы с переключениями

Покажем сначала, что система (1), (2) является аффинной системой с переключениями. Рассмотрим разбиение плоскости (x_1, x_2) на пять множеств (рис. 1). К множеству D_1 отнесем все точки, в которых оба сатуратора не насыщены:

$$D_1 = \{(x_1, x_2) : |x_1| < 1/k_1, |x_2 + k_1 x_1| < k_4/k_3\}$$

(наклонная полоса, ограниченная пунктирными линиями на рис. 1). В множество D_2 включим все точки, в которых насыщен внутренний сатуратор,

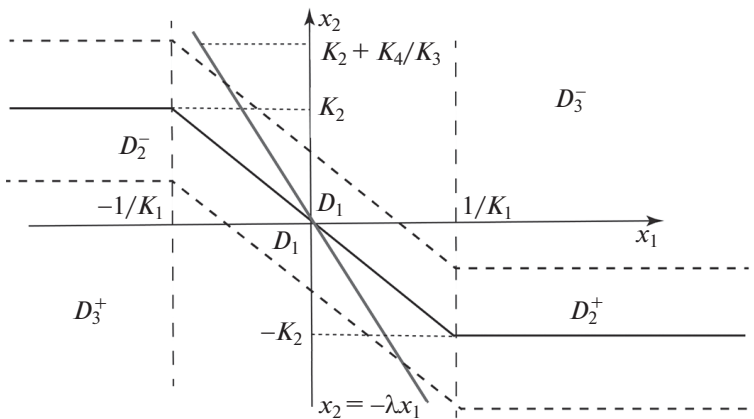


Рис. 1

а внешний сатуратор не достигает насыщения:

$$D_2 = \{(x_1, x_2) : |x_1| \geq 1/k_1, |x_2 + k_2 \text{sign}(x_1)| < k_4/k_3\}.$$

Как видно из рисунка, D_2 включает в себя два непересекающихся множества D_2^- и D_2^+ , лежащие в левой и правой полуплоскостях соответственно (две горизонтальные полосы на рис. 1). Множество

$$D_3 = \{(x_1, x_2) : |x_2 + k_2 \text{sat}(k_1 x_1)| > k_4/k_3\}$$

включает в себя все точки, в которых достигает насыщения внешний сатуратор. Как и D_2 , D_3 состоит из двух непересекающихся множеств D_3^- и D_3^+ , лежащих выше и ниже линии $x_2 = -\text{sat}(k_1 x_1)$ (сплошная ломаная линия на рис. 1), в которых $U_1(x) \equiv -k_4$ и $U_1(x) \equiv +k_4$ соответственно.

Из формулы (2) видно, что $U(x)$ – кусочно-линейная функция:

$$(3) \quad U(x) = \begin{cases} -k_3 x_2 - k_1 k_2 k_3 x_1, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ -k_3(x_2 - k_2), & (x_1, x_2) \in D_2^-, \\ -k_3(x_2 + k_2), & (x_1, x_2) \in D_2^+, \\ -k_4, & (x_1, x_2) \in D_3^-, \\ +k_4, & (x_1, x_2) \in D_3^+, \end{cases}$$

а замкнутая система (1), (2) представляет собой систему, состоящую из пяти линейных систем, переключения между которыми зависят от состояния согласно формулам (3). Задача настоящей работы – доказать глобальную устойчивость этой системы.

Стандартный метод доказательства устойчивости линейных систем с переключениями, заключающийся в нахождении общей квадратичной функции Ляпунова для всех систем, в данном случае не применим, так как начало координат является точкой равновесия только для первой системы с областью определения D_1 . Остальные же четыре системы, хотя и линейные, не имеют вообще положений равновесия, т.е. здесь имеем дело с *аффинной системой с переключениями*. Также не удастся применить стандартный метод доказательства устойчивости нелинейных систем общего вида с помощью функции Ляпунова (как, например, в [9]), так как функцию Ляпунова рассматриваемой системы не удалось найти.

2.2. Представление системы в безразмерном виде

Прежде чем приступить к доказательству глобальной устойчивости, упростим задачу, уменьшив количество параметров системы. Очевидно, что свойство устойчивости рассматриваемой системы не зависит от конкретных значений ресурса управления k_4 и максимальной скорости k_2 , так что можно положить их равными единице. Действительно, переход к безразмерным переменным $\tilde{x}_1 = k_4 x_1 / k_2^2$, $\tilde{x}_2 = x_2 / k_2$ и времени $\tilde{t} = k_4 t / k_2$ приводит систему (1), (2) к виду

$$(4) \quad \frac{d\tilde{x}_1}{d\tilde{t}} = \tilde{x}_2, \quad \frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{t}} = -\text{sat}(\tilde{k}_3(\tilde{x}_2 + \text{sat}(\tilde{k}_1 \tilde{x}_1))),$$

где $\tilde{k}_1 = k_1 k_2^2 / k_4$ и $\tilde{k}_3 = k_2 k_3 / k_4$, с единичным безразмерным ресурсом управления $\tilde{k}_4 = 1$ и единичной максимальной скоростью $\tilde{k}_2 = 1$. Всюду далее будем полагать все переменные и константы безразмерными и использовать для них прежнее обозначение (без тильды). Как и прежде, производные относительно безразмерного времени будем обозначать с помощью точки над символами. Кроме того, без потери общности для упрощения выкладок будем выбирать коэффициенты k_1 и k_3 из однопараметрического семейства, параметризованного показателем экспоненциальной скорости убывания отклонения в окрестности нуля λ :

$$(5) \quad k_1 = \lambda/2, \quad k_3 = 2\lambda, \quad \lambda > 0.$$

При таком выборе коэффициентов система (1), замкнутая обратной связью (2), принимает вид

$$(6) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\text{sat}(2\lambda(x_2 + \text{sat}(\lambda x_1/2))).$$

В области D_1 имеем линейную систему

$$(7) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\lambda^2 x_1 - 2\lambda x_2,$$

характеристическое уравнение которой имеет два одинаковых корня $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda$; т.е. начало координат является устойчивым вырожденным узлом. В остальных областях имеем следующие системы уравнений:

$$(8) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -2\lambda(x_2 - 1), \quad (x_1, x_2) \in D_2^-,$$

$$(9) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -2\lambda(x_2 + 1), \quad (x_1, x_2) \in D_2^+,$$

$$(10) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -1, \quad (x_1, x_2) \in D_3^-,$$

$$(11) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 1, \quad (x_1, x_2) \in D_3^+.$$

Уравнение (6) представляет из себя эквивалентную запись системы с переключениями (7)–(11).

3. Доказательство глобальной устойчивости

Докажем сначала, что при исследовании устойчивости системы можно ограничиться рассмотрением траекторий, начинающихся в области D_1 .

Утверждение. Система (7)–(11) глобально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда любая траектория, начинающаяся в D_1 , асимптотически стремится к нулю.

Необходимость утверждения очевидна. Для доказательства достаточности довольно показать, что, каковы бы ни были начальные условия, траектория через конечное время окажется в области D_1 . Докажем последнее. Действительно, из уравнений (10) и (11) видно, что в D_3^- и D_3^+ траекториями системы являются параболы

$$(12) \quad x_1 = \mp \frac{1}{2} x_2^2 + C.$$

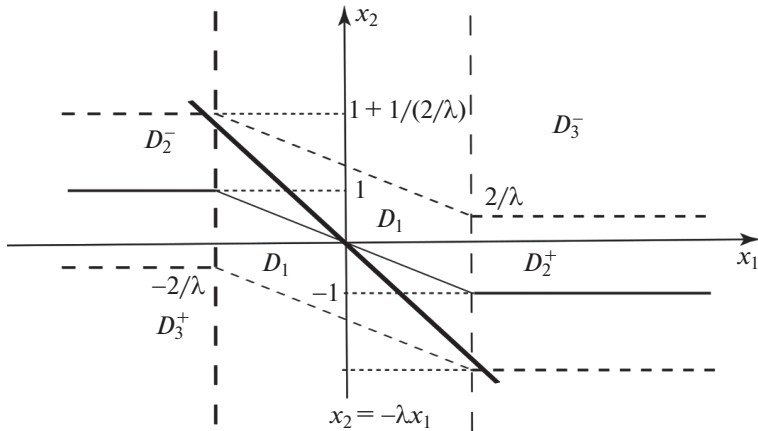


Рис. 2

Так как ни одна из парабол не может целиком лежать в D_3^- или D_3^+ (см. рис. 1) и при этом движение происходит с постоянным ускорением, система через конечное время неизбежно попадает либо в D_1 , либо в D_2 . Далее, из уравнений (8) и (9) видно, что в D_2^- (D_2^+) имеем $x_2(t) \rightarrow 1$ ($x_2(t) \rightarrow -1$), и при этом движение происходит в положительном (отрицательном) направлении оси x_1 , откуда следует, что за конечное время система неизбежно попадет в область D_1 . Таким образом, при любых начальных условиях не более чем после двух переключений, система оказывается в области D_1 . Далее рассматриваются только траектории с начальной точкой в D_1 .

Теорема 1. Система (6) глобально асимптотически устойчива при любых $\lambda > 0$.

Доказательство. Выясним, может ли система попасть из D_1 в D_2 . Рассмотрим для определенности границу между D_1 и D_2^+ . Из первого уравнения (9) видно, что траектория может пересечь границу только в области положительных значений x_2 , т.е. когда полуширина $1/2\lambda$ полосы D_2 больше единицы, как в случае, показанном на рис. 2, что имеет место только при $\lambda < 1/2$. Так как правая часть второго уравнения (9) при этом отрицательна, через конечное время координата $x_2(t)$ поменяет знак, направление движения вдоль оси x_1 изменится на обратное и система вернется в D_1 . Заметим, что участок асимптоты $x_2 = -\lambda x_1$ (жирная линия на рис. 2) линейной системы (7) при $|x_1| \leq 2/\lambda$ целиком лежит в D_1 . Так как траектория системы не может пересечь асимптоту, находясь в D_1 , решение асимптотически стремится к нулю. Аналогично рассматривается случай отрицательных значений x_1 . Таким образом, при малых $\lambda < 1/2$ система глобально устойчива и при этом любая траектория, с начальными условиями в D_1 может пересечь границу между областями (D_1 и D_2) не более двух раз.

Найдем условия, при которых возможны переключения из D_1 в D_3 . Граница между областями (пунктирные линии на рис. 1) определена отрезками

прямым

$$(13) \quad x_2 = -\frac{\lambda}{2}x_1 \pm \frac{1}{2\lambda}, \quad -\frac{2}{\lambda} \leq x_1 \leq \frac{2}{\lambda},$$

где знак плюс перед вторым слагаемым соответствует верхней границе (границе между D_1 и D_3^-), а знак минус — нижней границе. Траектория может пересечь границу, только если угол наклона траектории меньше наклона границы $\lambda/2$. Из уравнений (10) и (11) находим, что модуль тангенса угла наклона траектории на границе равен $1/x_2$, откуда следует, что пересечение траекторией верхней (нижней) границы возможно только в точках, ординаты которых удовлетворяют неравенству $x_2 > 2/\lambda$ ($x_2 < -2/\lambda$), т.е. в области

$$(14) \quad |x_2| > 2/\lambda.$$

Так как максимальное значение $|x_2|$ в D_1 достигается в двух угловых точках с ординатами $\pm(1 + 1/(2\lambda))$, то пересечение границы невозможно при $\lambda \leq 3/2$.

Таким образом, доказана глобальная устойчивость системы и для всех $\lambda \leq 3/2$. Более того, доказано следующее нетривиальное утверждение.

Лемма 1. Пусть $1/2 \leq \lambda \leq 3/2$. Тогда D_1 является инвариантной областью системы с переключениями (6).

Заметим, что D_1 в этом случае является одновременно и инвариантной областью линейной системы (7). Докажем теперь, что система глобально устойчива и при любых больших значениях λ . Из вышеприведенных выкладок следует, что при $\lambda > 3/2$ система может попасть из D_1 только в D_3 . Рассмотрим для определенности верхнюю часть фазовой плоскости, где $U(x) < 0$. Константа C в правой части (12) зависит от координат точки перехода системы из D_1 в D_3^- . Обозначив через x_{2*} ординату точки пересечения границы (абсцисса однозначно определяется из уравнения границы (13)), находим

$$C \equiv C(x_{2*}) = \frac{1}{2} \left(x_{2*}^2 - \frac{4x_{2*}}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} \right).$$

Подставляя формулу для C в (12) и решая полученное квадратное уравнение, находим ординату (обозначим ее через x_{2**}) второй точки пересечения границы (13) параболы, в которой происходит переключение между системами (10) и (7):

$$(15) \quad x_{2**} = \frac{4}{\lambda} - x_{2*}.$$

С учетом неравенств

$$\frac{2}{\lambda} < x_{2*} \leq 1 + \frac{1}{2\lambda}$$

из (15) следует, что x_{2**} удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2}{\lambda} > x_{2**} \geq -1 + \frac{7}{2\lambda} > -1 + \frac{1}{2\lambda},$$

т.е. вторая точка пересечения с линией (13) принадлежит границе между D_3^- и D_1 и, следовательно, траектория, выходящая из D_1 в D_3 , не может

попасть в D_2 . Таким образом, при $\lambda > 3/2$ возможны переключения только между тремя системами с областями определения D_1 , D_3^- и D_3^+ . Аналогично находится связь двух последовательных точек пересечения границы между D_1 и D_3^+ :

$$(16) \quad x_{2**} = -\frac{4}{\lambda} - x_{2*}, \quad -\frac{2}{\lambda} < x_{2*} \leq -1 - \frac{1}{2\lambda}.$$

Так как никакая траектория не может иметь самопересечений и не уходит в бесконечность, для доказательства глобальной устойчивости системы достаточно доказать, что не существует замкнутой траектории (цикла) [15]. Допустим противное: пусть существует замкнутая траектория. Из вышеприведенного анализа следует, что такая траектория состоит из четырех сегментов: двух участков в области D_1 , одного участка в D_3^+ и одного участка в D_3^- , причем движение по такой траектории происходит по часовой стрелке.

Покажем, что существует положительно определенная функция, убывающая на каждом из четырех участков траектории, и, следовательно, траектория не может быть замкнутой. Заметим, что речь идет не о функции Ляпунова системы (6), так как от искомой функции не требуется отрицательность ее производной в силу (6) на всей траектории. Ищется функция, изменение которой на всем сегменте траектории, целиком лежащем в одной из областей D_1 , D_3^- или D_3^+ , отрицательно. В качестве кандидата на роль такой функции возьмем квадратичную функцию Ляпунова $F = \lambda^3 x^T P x$ (множитель λ^3 введен для удобства записи) линейной системы (7), где P – положительно определенная матрица второго порядка, удовлетворяющая линейному матричному неравенству (л.м.н.) $A^T P + P A < 0$ [16], и A – матрица линейной системы (7),

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

В [17] показано, что матрицу P можно представить в виде

$$(17) \quad P = \begin{pmatrix} \lambda & q_1/2 \\ q_1/2 & q_2/\lambda \end{pmatrix},$$

где $q_1, q_2 > 0$ принадлежат эллипсу Ω (рис. 3), определенному неравенством

$$(18) \quad (q_2 - q_1 - 1)^2 + (q_1 - 2)^2 \leq 4.$$

Посмотрим, найдутся ли $(q_1, q_2) \in \Omega$ такие, что на каждом из четырех сегментов траектории функция F убывает.

Производная функции F в силу системы (7) отрицательна по определению, что гарантирует убывание функции F на двух участках траектории, лежащих в области D_1 . На участках траектории, лежащих в D_3 , отрицательность производной F очевидно не гарантируется, но далее покажем, что интегральное изменение F на каждом из этих участков отрицательно, т.е.

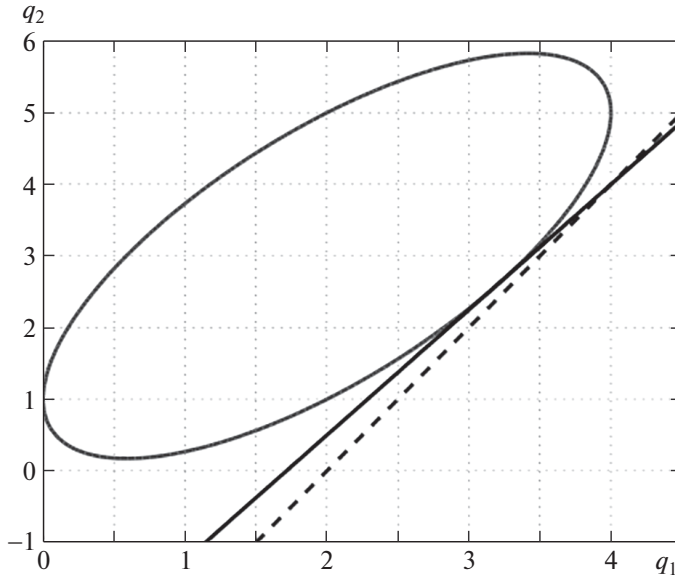


Рис. 3

значение функции в точке границы при переходе из D_1 в D_3 больше, чем ее значение при последующем возврате из D_3 в D_1 .

Подставляя правую часть (17) в F , получим $F(x) = \lambda^2(\lambda^2 x_1^2 + \lambda q_1 x_1 x_2 + q_2 x_2^2)$. Выразив x_1 из уравнения границы (13) и подставив его в правую часть формулы для функции F , получим значения F на верхней границе D_1 :

$$(19) \quad F(x_2) = c_1 x_2^2 - c_2 x_2 + 1,$$

где $c_1 = \lambda^2(q_2 - 2q_1 + 4)$ и $c_2 = \lambda(4 - q_1)$. Из неравенства (18) следует что $q_1 < 4$ и, значит, $c_2 > 0 \forall q_1, q_2 \in \Omega$. Легко также показать, что эллипс (18) не имеет пересечений с прямой $q_2 - 2q_1 - 4 = 0$ (пунктирная линия на рис. 3) и целиком лежит выше ее; следовательно, $c_1 > 0 \forall q_1, q_2 \in \Omega$. Найдём изменение ΔF функции F на сегменте траектории в D_3^- . В начальной и конечной точках сегмента с учетом (19) и (15) имеем соответственно

$$F(x_{2*}) = c_1 x_{2*}^2 - c_2 x_{2*} + 1, \quad F(x_{2**}) = c_1 (4/\lambda - x_{2*})^2 - c_2 (4/\lambda - x_{2*}) + 1.$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x_{2**}) - F(x_{2*}) = c_1 (16/\lambda^2 - 8x_{2*}/\lambda) + 2c_2 x_{2*} - 4c_2/\lambda = \\ &= (2c_2 - 8c_1/\lambda)x_{2*} + 16c_1/\lambda^2 - 4c_2/\lambda = -(8q_2 - 14q_1 + 24)(\lambda x_{2*} - 2). \end{aligned}$$

Легко проверить, что прямая $8q_2 - 14q_1 + 24 = 0$ (сплошная линия на рис. 3) касается эллипса Ω и лежит ниже его, так что первый множитель положителен. Так как согласно (14) $x_{2*} > 2/\lambda$, второй множитель также положителен, так что $\Delta F < 0$ при любых $(q_1, q_2) \in \Omega$.

Повторяя вычисления для нижней границы области D_1 с учетом (16), находим

$$(20) \quad F(x_2) = c_1 x_2^2 + c_2 x_2 + 1$$

и

$$(21) \quad \begin{aligned} \Delta F &= c_1(4/\lambda + x_{2*})^2 - c_2(4/\lambda + x_{2*}) - c_1 x_{2*}^2 - c_2 x_{2*} = \\ &= (8q_2 - 14q_1 + 24)(\lambda x_{2*} + 2). \end{aligned}$$

Согласно (14) на нижней границе $x_{2*} < -2/\lambda$, второй множитель в (21) отрицателен, следовательно, изменение функции F на сегменте траектории, целиком лежащем в D_3^+ , также отрицательно. Таким образом, при любых $(q_1, q_2) \in \Omega$ значение квадратичной функции Ляпунова линейной системы (7) убывает после прохождения каждого сегмента траектории, откуда следует, что траектория не может быть замкнутой кривой. Теорема доказана.

Численные примеры, иллюстрирующие характер поведения траекторий интегратора (1), стабилизируемого с помощью обратной связи (2), можно найти в [10, 11].

4. Заключение

Рассматривается задача устойчивости аффинной системы второго порядка, состоящей из пяти подсистем с зависящими от состояния переключениями, при этом только одна из подсистем имеет устойчивое положение равновесия. Исследуемая система возникает при применении обратной связи в виде вложенных сатураторов для стабилизации цепочки двух интеграторов. К преимуществам рассматриваемой обратной связи относятся ее непрерывность и ограниченность, а также возможность задать ряд желаемых характеристик переходного процесса. С помощью соответствующего выбора значений четырех параметров, от которых зависит обратная связь, легко обеспечивается желаемый тип положения равновесия и любое желаемое значение экспоненциальной скорости убывания отклонения вблизи положения равновесия, а также выполнение ограничения на максимальную скорость приближения к положению равновесия, что особенно важно при больших начальных отклонениях от положения равновесия. Главный результат работы — доказательство глобальной устойчивости исследуемой аффинной системы с переключениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Goebel R., Sanfelice R.G., Teel A.R.* Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness. Princeton University Press, 2012.
2. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston: Birkhauser, 1973.
3. *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. V. 54. P. 308–322.

4. *Pyatnitskiy E., Rapoport L.* Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control systems // IEEE Trans. Circuits Systems I: Fundamental Theory and Applications. 1996. V. 43. No. 3. P. 219–229.
5. *Teel A.R.* Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls // Sys. & Cont. Lett. 1992. V. 18. No. 3. P. 165–171.
6. *Teel A.R.* A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation // Trans. Autom. Contr., IEEE, 1996. V. 41. No. 9. P. 1256–1270.
7. *Kurzanski A.B., Varaiya P.* Solution Examples on Ellipsoidal Methods: Computation in High Dimensions. Cham, Switzerland: Springer, 2014.
8. *Olfati-Saber R.* Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles, Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
9. *Hua M.-D., Samson C.* Time sub-optimal nonlinear pi and pid controllers applied to longitudinal headway car control // Int. J. Control. 2011. V. 84. P. 1717–1728.
10. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V., Matrosov I.V.* On Optimal Selection of Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // Communicat. Comput. Inform. Sci. (CCIS). 2020. V. 1340. P. 236–249.
11. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* Optimizing coefficients of a controller in the point stabilization problem for a robot-wheel // Lect. Notes Comput. Sci. V. 13078. Cham, Switzerland: Springer, 2021. P. 191–202.
12. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* The Best Ellipsoidal Estimates of Invariant Sets for a Third-Order Switched Affine System // Lect. Notes Comput. Sci. V. 13781 Cham, Switzerland: Springer, 2022. P. 66–78.
13. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* Global Stability of a Switched Affine System // Proc. of the 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). 2022. P. 1–4.
14. *Пестерев А.В., Морозов Ю.В.* Стабилизация тележки с обратным маятником // АИТ. 2022. № 1. С. 95–112.
Pesterev A.V., Morozov Yu.V. Stabilization of a cart with inverted pendulum // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 1. P. 78–91.
15. *Andronov A.A., Leontovich E., Gordon I.I., Maier A.* Qualitative Theory of Second-order Dynamic Systems. Wiley, 1973.
16. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
17. *Пестерев А.В.* Построение наилучшей эллипсоидальной аппроксимации области притяжения в задаче стабилизации движения колесного робота // АИТ. 2011. № 3. С. 51–68.
Pesterev A.V. Construction of the Best Ellipsoidal Approximation of the Attraction Domain in Stabilization Problem for a Wheeled Robot // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 3. P. 512–528.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 17.03.2023

После доработки 13.06.2023

Принята к публикации 29.06.2023