

© 2023 г. Д.Н. ИБРАГИМОВ, канд. физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.ru),
В.М. ПОДГОРНАЯ (vita1401@outlook.com)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СУПЕРЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ¹

Рассматривается задача быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным управлением. В случае суперэллипсоидальных ограничений на управление оптимальный процесс построен в явном виде на основе дискретного принципа максимума. Задача вычисления начальных условий сопряженной системы сведена к решению системы алгебраических уравнений. Для систем с произвольными выпуклыми ограничениями на управление предложен метод формирования гарантирующего решения на основе метода суперэллипсоидальной аппроксимации. Процедура суперэллипсоидальной аппроксимации сведена к решению ряда задач выпуклого программирования. Приведены примеры.

Ключевые слова: линейные дискретные системы, задача быстродействия, принцип максимума, суперэллипс, эллипсоидальные аппроксимации.

DOI: 10.31857/S0005231023090027, **EDN:** JSPHNN

1. Введение

Одним из естественных функционалов качества управления является время, затрачиваемое системой на достижение заданного терминального состояния. На практике полученная задача оптимального управления называется задачей быстродействия. Существенно, что задача быстродействия для линейных дискретных систем обладает рядом серьезных отличий от аналогичной задачи для непрерывных систем. В то время как в случае непрерывного времени решение, полученное на основе принципа максимума Понтрягина [1] для линейной системы, гарантирует релейный характер оптимального по быстродействию управления, аналогичный результат для системы с дискретным временем [2, 3] некорректен. Данный факт обусловлен дискретным функционалом качества, который предполагает иные критерии формирования траектории и управления.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-21-00293).

Прямой подход, основанный на минимизации нормы терминального состояния по всем управляющим воздействиям, оказывается трудноприменимым для систем высокой размерности с большим временным горизонтом и векторным управлением. Это обусловлено тем, что результирующая задача математического программирования характеризуется быстрым ростом числа ограничений и переменных оптимизации при увеличении числа шагов, необходимых для достижения системой нуля. При этом почти для всех начальных состояний экстремум в задаче быстрогодействия является нерегулярным [4], что также осложняет использование известных численных методов.

Рассмотрение условий оптимальности процесса при использовании различных классических подходов приводит к двум принципиально отличающимся методам решения задачи быстрогодействия. Метод динамического программирования Беллмана [5] позволяет построить оптимальное управление в позиционной форме. В случае, когда множество допустимых значений управлений представляет собой многогранник, вычисление каждого управляющего воздействия сводится к решению задачи линейного программирования [6]. Также в [6] продемонстрирован метод формирования оптимального управления в случае произвольных выпуклых ограничений на управление, основанный на проведении полиэдральной аппроксимации [7]. Такой подход обладает рядом недостатков, связанных в основном с вычислительными сложностями. Повышение точности гарантирующего решения в задаче быстрогодействия достигается за счет наращивания числа вершин полиэдральной аппроксимации, что в итоге приводит к экспоненциальному росту сложности соответствующих задач линейного программирования. По этой причине данный подход при реализации на стандартных вычислительных устройствах отличается либо малой точностью решения, либо сравнительно небольшим временным горизонтом особенно для систем большой размерности.

Напротив, сочетание условий оптимальности в задаче быстрогодействия с дискретным принципом максимума [1–3] позволяет формировать оптимальное программное управление [4]. Существенным условием применимости данных методов является строгая выпуклость множества допустимых значений управлений. Такое соотношение для вычисления начального состояния сопряженной системы в случае произвольной структуры ограничений на управление довольно трудно разрешить. В [8] представлен частный случай эллипсоидальной структуры множества допустимых значений управления, а также аналитическое решение задачи быстрогодействия для такой системы на основе необходимых и достаточных условий оптимальности, представленных в [4].

Естественным подходом является объединение идей построения гарантирующего решения из [6] на основе проведения эллипсоидальной аппроксимации множества допустимых значений управлений в сочетании с методами формирования программного управления согласно дискретному принципу максимума [4, 8]. Методика эллипсоидальной аппроксимации широко распространена в теории оптимального управления [9, 10]. Однако класс эллипсоидов не позволяет добиться произвольной точности аппроксимации исход-

ного множества, а следовательно, и точности решения задачи оптимального управления. В статье рассматривается класс суперэллипсоидальных множеств (точное определение приведено в разделе 2), которые допускают больший порядок точности при сохранении условий строгой выпуклости, что гарантирует простоту решения задачи быстродействия аналогично [8].

Суперэллипсы на плоскости известны достаточно давно как кривые Ламе [11] и имеют большое количество различных приложений в естественнонаучных и технических дисциплинах. Их активно применяют, например, в задачах геодезии и картографирования [12], в ботанике для моделирования роста растений [13] и описания естественных фигур [14], проектирования волноводов для антенных решеток [15, 16] или для моделирования сгибов различных конструкций [17]. Однако общее изучение свойств данных фигур с точки зрения их математических свойств, как правило, ограничивается двумерным случаем [12, 18]. Данный факт делает актуальным изучение свойств данного класса геометрических тел в пространстве произвольной размерности в терминах выпуклого анализа: описание их опорной функции, опорной точки и нормального конуса, решение различных аппроксимационных задач.

Целью данной работы является разработка метода формирования оптимального управления в явном виде для случая суперэллипсоидальной структуры множества допустимых значений управления, а также описание подхода построения суперэллипсоидальной аппроксимации произвольного выпуклого тела с максимально возможной точностью. Принципиальным отличием от результатов по данной тематике как классических [19–21], так и современных [22, 23] является рассмотрение произвольного векторного управления, на значения которого наложены выпуклые ограничения, и отсутствие ограничения на размерность фазового пространства, что является более общей постановкой задачи, расширяющей спектр возможных приложений.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 представлены нестандартные обозначения и предположения, которые используются в статье. В разделе 3 рассматривается задача быстродействия, описывается принцип максимума как основной инструмент ее решения и формулируется постановка задачи о суперэллипсоидальной аппроксимации множества допустимых значений управлений с целью формирования гарантирующего процесса. В разделе 4 представлено точное решение задачи быстродействия в случае суперэллипсоидальной структуры множества допустимых значений управлений. В разделе 5 описан метод сведения задачи об оптимальной в смысле меры Лебега суперэллипсоидальной аппроксимации выпуклого тела к ряду задач выпуклого программирования. В разделе 6 продемонстрированы примеры построения гарантирующего процесса в задаче быстродействия для систем различной размерности на основе полученных теоретических результатов. Даны оценки точности построенных процессов в сравнении с оптимальным решением.

2. Обозначения

Будем полагать, что фазовое пространство является евклидовым пространством \mathbb{R}^n со скалярным произведением, определяемым соотношением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Для произвольного $r \in [1; +\infty)$ введем на \mathbb{R}^n норму

$$\|x\|_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

При $r = 2$ норма $\|\cdot\|_2$ оказывается согласованной со скалярным произведением. Значение $r = 1$ с точки зрения теории является допустимым, но в рамках данной статьи рассматриваться не будет, что позволяет определить число $q > 1$ как двойственное по Гельдеру числу r :

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1.$$

Для произвольных множеств $\mathcal{X}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ и матрицы $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ через $\mathcal{X} + \mathcal{U}$ будем обозначать сумму по Минковскому

$$\mathcal{X} + \mathcal{U} = \{x + u : x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}\},$$

а через $D\mathcal{U}$ – образ множества \mathcal{U} при воздействии на него отображения D

$$D\mathcal{U} = \{Du : u \in \mathcal{U}\}.$$

Через $\partial\mathcal{U}$ и $\text{int } \mathcal{U}$ обозначим множества граничных и внутренних точек \mathcal{U} соответственно. Под $\text{cone } \{\mathcal{U}\}$ будем понимать коническую оболочку множества \mathcal{U} [24, § 2 гл. I].

Если множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым компактом, то для произвольной точки $u \in \mathcal{U}$ через $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$ обозначим нормальный конус множества \mathcal{U} в точке u [24, § 2 гл. I]:

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (p, u) = \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (p, \tilde{u}) \right\}.$$

Элементы нормального конуса $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$ называются векторами, опорными к \mathcal{U} в точке u . Заметим, что по построению $\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $u \in \text{int } \mathcal{U}$. Если также верно включение $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, то \mathcal{U} будем называть выпуклым телом [25, раздел 3 § 1 гл. IV] и для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ введем функционал Минковского [25, раздел 3 § 2 гл. III] или калибровочную функцию [24, § 4 гл. I]:

$$M(x, \mathcal{U}) = \inf \{ t > 0 : x \in t\mathcal{U} \} = \inf \left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in \mathcal{U} \right\}.$$

Под строго выпуклым множеством $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ будем понимать такое множество, что для любых $u^1, u^2 \in \mathcal{U}$, $\lambda \in (0; 1)$ верно включение $\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2 \in \text{int } \mathcal{U}$.

Будем называть суперэллипсом или суперэллипсоидальным множеством для некоторых $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$, $r > 1$ множество вида

$$(1) \quad \mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \leq 1 \right\}.$$

Для краткости будем полагать $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ и обозначать соответствующий суперэллипс через $\mathcal{E}_r(a)$. Под $\text{diag}(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ будем полагать диагональную матрицу, построенную из вектора $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{diag}(a) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

3. Постановка задачи

Рассматривается линейная дискретная система с ограниченным управлением (A, \mathcal{U}) :

$$(2) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}^n$ – управляющее воздействие, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица системы, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – множество допустимых значений управлений. Предполагается, что $\det A \neq 0$, \mathcal{U} – выпуклый компакт, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$.

Для системы (2) решается задача быстрогодействия, т.е. требуется перевести систему (A, \mathcal{U}) из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в начало координат за минимальное число шагов N_{\min} :

$$N_{\min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}.$$

Процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x^*(0)\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $x^*(N_{\min}) = 0$, будем называть оптимальным. Предполагается, что задача быстрогодействия для системы (A, \mathcal{U}) разрешима, т.е. $N_{\min} < \infty$. Подробно вопросы разрешимости задачи быстрогодействия для системы (2) рассмотрены в [26].

Построение оптимальных по быстрдействию процессов тесно связано с аппаратом множеств 0-управляемости [4, 6]. Для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначим через $\mathcal{X}(N) \subset \mathbb{R}^n$ множество 0-управляемости системы (2) за N шагов, т.е. множество тех начальных состояний, из которых

систему (2) можно перевести в 0 за N шагов посредством выбора допустимых управляющих воздействий:

$$(3) \quad \mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases}$$

Тогда согласно определению N_{\min} также справедливо представление:

$$(4) \quad N_{\min} = \min\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}(N)\}.$$

При этом управление, как продемонстрировано в [4, 6], оптимально тогда и только тогда, когда для всех $k = \overline{0, N_{\min} - 1}$ верно включение

$$x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k) \in \mathcal{X}(N_{\min} - k - 1).$$

В [4] получен ряд результатов для задачи быстродействия, которые можно представить в форме принципа максимума для строго выпуклого \mathcal{U} .

Теорема 1. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – строго выпуклое и компактное множество, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется согласно (3), процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x^*(0)\}_{k=1}^{N_{\min}}$ и траектория сопряженной системы $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{\min}-1}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= Ax^*(k) + u^*(k), \\ u^*(k) &= \alpha \arg \max_{u \in \mathcal{U}} ((A^{-1})^T \psi(k), u), \\ \psi(k+1) &= (A^{-1})^T \psi(k), \\ x^*(0) &= x_0, \\ -\psi(0) &\in \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})), \\ \alpha &= M(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})). \end{aligned}$$

Тогда

- 1) $\{x^*(k), u^*(k-1), x^*(0)\}_{k=1}^{N_{\min}}$ – оптимальный по быстродействию процесс системы (A, \mathcal{U}) ;
- 2) если $\alpha = 1$, то оптимальный процесс единственный;
- 3) $-\psi(k) \in \mathcal{N}(x^*(k), \alpha \mathcal{X}(N_{\min} - k))$, $k = \overline{0, N_{\min} - 1}$.

С вычислительной точки зрения вопрос применения теоремы 1 сводится к определению α и $\psi(0)$ из условий

$$(5) \quad \begin{aligned} -\psi(0) &\in \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})), \\ \alpha &= M(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})), \end{aligned}$$

что в случае произвольного строго выпуклого тела \mathcal{U} может быть нетривиальной задачей.

Основной целью данной статьи является построение эффективных методов разрешения условий (5) относительно $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\alpha > 0$ для частного случая, когда \mathcal{U} допускает представление

$$(6) \quad \mathcal{U} = B\mathcal{E}_r(a), \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det B \neq 0, \quad a_1, \dots, a_n > 0, \quad r > 1.$$

Другой целью статьи является разработка метода аппроксимации произвольного выпуклого тела \mathcal{U} вложенным в него множеством $\hat{\mathcal{U}}$ вида (6), минимизирующим меру Лебега разности двух множеств $\mu(\mathcal{U} \setminus \hat{\mathcal{U}})$, с целью построения гарантирующего решения в задаче быстрогодействия для системы (A, \mathcal{U}) .

4. Оптимальный процесс в случае суперэллипсоидальной структуры ограничений на управление

Покажем, что условия (5) можно свести к эквивалентной системе алгебраических уравнений в случае (6). Для этого приведем аналитическое описание множеств 0-управляемости и некоторые свойства строго выпуклых и суперэллипсоидальных множеств.

Лемма 1 [4, лемма 1]. Пусть $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (3). Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ верно представление

$$\mathcal{X}(N) = - \sum_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}.$$

Лемма 2 [27, лемма 3]. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – строго выпуклый компакт, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$. Тогда для любых различных $u^1, u^2 \in \mathcal{U}$ верно

$$\mathcal{N}(u^1, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(u^2, \mathcal{U}) = \emptyset.$$

Также из [27, леммы 5, 6] вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклые компакты, $u \in \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{X}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$.

Тогда

- 1) $\mathcal{N}(u + x, \mathcal{U} + \mathcal{X}) = \mathcal{N}(u, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$;
- 2) $\mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}) = (A^{-1})^T \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$.

Лемма 3 определяет преобразование нормального конуса выпуклых множеств при невырожденном линейном преобразовании и сложении по Минковскому. С учетом леммы 1 это позволяет описать произвольный нормальный конус любого множества 0-управляемости в терминах нормальных конусов множества \mathcal{U} или $\mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n)$ в случае (6). С другой стороны, лемма 2 устанавливает взаимнооднозначное соответствие между граничной точкой и ее нормальным конусом для строго выпуклого множества. Если данную зависимость описать в явном виде, то можно получить алгебраические уравнения, эквивалентные условиям (5).

Введем для произвольного $r > 1$ биективный оператор $I_r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, действующий по правилу

$$I_r(x) = (\text{sign}(x_1)|x_1|^{r-1}, \dots, \text{sign}(x_n)|x_n|^{r-1}).$$

Лемма 4. Пусть множество $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1). Тогда

1) для любого $x \in \partial\mathcal{E}_r(a)$

$$\mathcal{N}(x, \mathcal{E}_r(a)) = \{\gamma \text{diag}(a)^{-1} I_r(\text{diag}(a)^{-1} x) \in \mathbb{R}^n : \gamma > 0\};$$

2) для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственная

$$x^*(p) = \arg \max_{x \in \mathcal{E}_r(a)} (p, x) = \frac{\text{diag}(a) I_q(\text{diag}(a)p)}{\|\text{diag}(a)p\|_q^{q-1}}.$$

Доказательство леммы 4 и всех последующих утверждений приведено в Приложении.

Лемма 5. Пусть $\mathcal{U} = D\mathcal{E}_r(a)$, где $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det D \neq 0$. Тогда

1) для любого $u \in \partial\mathcal{U}$

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \{\gamma (D^{-1})^T \text{diag}(a)^{-1} I_r(\text{diag}(a)^{-1} D^{-1} u) \in \mathbb{R}^n : \gamma > 0\};$$

2) для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственная

$$u^*(p) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} (p, u) = \frac{D \text{diag}(a) I_q(\text{diag}(a) D^T p)}{\|\text{diag}(a) D^T p\|_q^{q-1}}.$$

Лемма 5, с одной стороны, позволяет вычислить оптимальное управление согласно теореме 1 в случае (6) при выборе $D = B$. С другой стороны, лемма 5 в сочетании с леммами 1 и 2 связывает точку на границе множества 0-управляемости с элементом ее нормального конуса при выборе $D = -A^{-k}B$, что делает возможным свести условия (5) к эквивалентным алгебраическим уравнениям. Сформулируем данный факт в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть \mathcal{U} определяется согласно (6), $x_0 \neq 0$, $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$. В таком случае $\psi(0)$ и α удовлетворяют условиям (5) тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$-x_0 = \alpha \sum_{k=1}^{N_{\min}} \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q(\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0))}{\|\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)\|_q^{q-1}}.$$

Система уравнений, представленная в теореме 2, имеет не единственное решение, поскольку правая часть инвариантна к домножению вектора $\psi(0)$ на любое положительное число. Для использования численных методов можно предложить модификацию данной системы, которая имеет единственное решение.

Следствие 1. Пусть \mathcal{U} определяется согласно (6), $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$. Тогда для любого $x_0 \neq 0$ существует единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} -x_0 = \alpha \sum_{k=1}^{N_{\min}} \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q (\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0))}{\|\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)\|_q^{q-1}}, \\ (\psi(0), \psi(0)) = 1, \end{cases}$$

которое также удовлетворяет условиям (5).

Пример 1. Рассмотрим процедуру вычисления $\psi(0)$, α , N_{\min} на основе следствия 1. Пусть параметры системы (2) в предположении (6) имеют следующие значения:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \\ r = \frac{4}{3}, \quad q = 4, \quad x_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)^T.$$

Предположим, что $N_{\min} = 2$, и составим систему уравнений, представленную в теореме 1:

$$\begin{aligned} & \frac{0,20(0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^3 + 0,91(0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^3}{((0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^4 + (0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} + \\ & + \frac{0,17(0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^3 + 0,17(0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^3}{((0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^4 + (0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{3\alpha}, \\ & \frac{0,81(0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^3 - 0,61(0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^3}{((0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^4 + (0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} + \\ & + \frac{-0,32(0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^3 + 0,39(0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^3}{((0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^4 + (0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{4}{3\alpha}. \end{aligned}$$

Дополнив данную систему соотношением $\psi_1(0)^2 + \psi_2(0)^2 = 1$ согласно следствию 1, получим следующее решение:

$$\psi_1(0) = -0,35, \quad \psi_2(0) = -0,94, \quad \alpha = 1,08.$$

Согласно (5) $\alpha = M(x_0, \mathcal{X}(2))$. Так как $\alpha > 1$, то по определению функционала Минковского $x_0 \notin \mathcal{X}(2)$. Получили противоречие, из которого следует, что $N_{\min} > 2$.

Предположим, что $N_{\min} = 3$, и составим систему уравнений, представленную в теореме 1:

$$\begin{aligned}
& \frac{0,20(0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^3 + 0,91(0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^3}{((0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^4 + (0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} + \\
& + \frac{0,17(0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^3 + 0,17(0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^3}{((0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^4 + (0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} + \\
& + \frac{0,004(0,004\psi_1(0) + 0,16\psi_2(0))^3 + 0,11(0,11\psi_1(0) - 0,14\psi_2(0))^3}{((0,004\psi_1(0) - 0,16\psi_2(0))^4 + (0,11\psi_1(0) - 0,14\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{3\alpha}, \\
& \frac{0,81(0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^3 - 0,61(0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^3}{((0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^4 + (0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} + \\
& + \frac{-0,32(0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^3 + 0,39(0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^3}{((0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^4 + (0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} + \\
& + \frac{0,17(0,004\psi_1(0) + 0,16\psi_2(0))^3 - 0,14(0,11\psi_1(0) - 0,14\psi_2(0))^3}{((0,004\psi_1(0) + 0,16\psi_2(0))^4 + (0,11\psi_1(0) - 0,14\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{4}{3\alpha}.
\end{aligned}$$

Дополнив данную систему соотношением $\psi_1(0)^2 + \psi_2(0)^2 = 1$ согласно следствию 1, получим следующее решение:

$$\psi_1(0) = -0,50, \quad \psi_2(0) = -0,87, \quad \alpha = 0,96.$$

Тогда $\alpha = M(x_0, \mathcal{X}(3)) < 1$, т.е. по определению функционала Минковского $x_0 \in \mathcal{X}(3)$. В силу (4) $N_{\min} = 3$.

Замечание 1. В примере 1 и везде далее численное решение систем алгебраических уравнений, построенных согласно следствию 1, осуществляется в программной среде Maple посредством встроенных процедур, основанных на методе Ньютона и его модификациях [28].

Теорема 2 и следствие 1 в совокупности с теоремой 1 позволяют полностью решить задачу быстродействия для линейной дискретной системы в случае суперэллипсоидальной структуры множества допустимых значений управлений (6). Разрешение условий (5) согласно следствию 1 эквивалентно численному решению системы алгебраических уравнений. Одновременно оптимальный процесс и траектория сопряженной системы могут быть вычислены по рекуррентным соотношениям, представленным в теореме 1. Оптимальное управление явным образом определяется п. 2 леммы 5.

5. Внутренняя суперэллипсоидальная аппроксимация выпуклого тела

Случай (6) является достаточно частным. Зачастую невозможно гарантировать даже строгую выпуклость множества \mathcal{U} . В связи с чем оказывается ак-

туальным проведение внутренней аппроксимации \mathcal{U} множеством $\hat{\mathcal{U}}$ вида (6). Переход в задаче быстрогодействия от исходной системы (A, \mathcal{U}) к вспомогательной системе $(A, \hat{\mathcal{U}})$ позволяет построить гарантирующее управление в исходной системе на основе методов, представленных в разделе 4 применительно к системе вспомогательной.

При этом погрешность гарантирующего решения в сравнении с оптимальным будет тем меньше, чем больше по включению аппроксимирующее множество $\hat{\mathcal{U}}$. Данный факт приводит к необходимости решения задачи оптимальной суперэллипсоидальной аппроксимации выпуклого компактного тела $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ множеством вида (6). В качестве критерия качества аппроксимации рассмотрим меру Лебега n -мерного множества $\mu(\cdot)$ [25, раздел 1 § 3 гл. V]. Результирующая оптимизационная задача примет вид

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{U} \setminus B\mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n)) &\rightarrow \min_{a_1, \dots, a_n, r, B}, \\ a_i &> 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ r &> 1, \\ B &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det B \neq 0, \\ \mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n) &\subset \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Данную задачу можно разбить на два отдельных этапа: подбор матрицы ориентации суперэллипса $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и подбор чисел $a_1, \dots, a_n > 0, r > 1$, параметризующих множество (1).

5.1. Подбор матрицы ориентации суперэллипсоидального множества

В общем случае поиск оптимального значения матрицы B может быть довольно трудоемкой оптимизационной задачей, условия разрешимости которой неизвестны в силу ее невыпуклости. Предложим эвристический метод выбора B в виде ортогональной матрицы. Поскольку преобразование поворота сохраняет меру Лебега, то справедливы равенства

$$\mu(\mathcal{U} \setminus B\mathcal{E}_r(a)) = \mu(B^{-1}(\mathcal{U} \setminus B\mathcal{E}_r(a))) = \mu(B^{-1}\mathcal{U} \setminus \mathcal{E}_r(a)),$$

которые позволяют свести исходную аппроксимационную задачу к задаче оптимальной внутренней аппроксимации произвольного выпуклого компактного тела $B^{-1}\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ суперэллипсом $\mathcal{E}_r(a)$. Учитывая симметрию множества $\mathcal{E}_r(a)$, допустимо предположить, что B^{-1} должна обеспечивать такой поворот множества \mathcal{U} , чтобы координатные оси совпали с какими-либо осями «симметрии» \mathcal{U} , например с главными осями инерции выпуклого тела \mathcal{U} [29, § 32 гл. VI].

В таком случае B должна удовлетворять условию

$$I_{\mathcal{U}} = B \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) B^{-1},$$

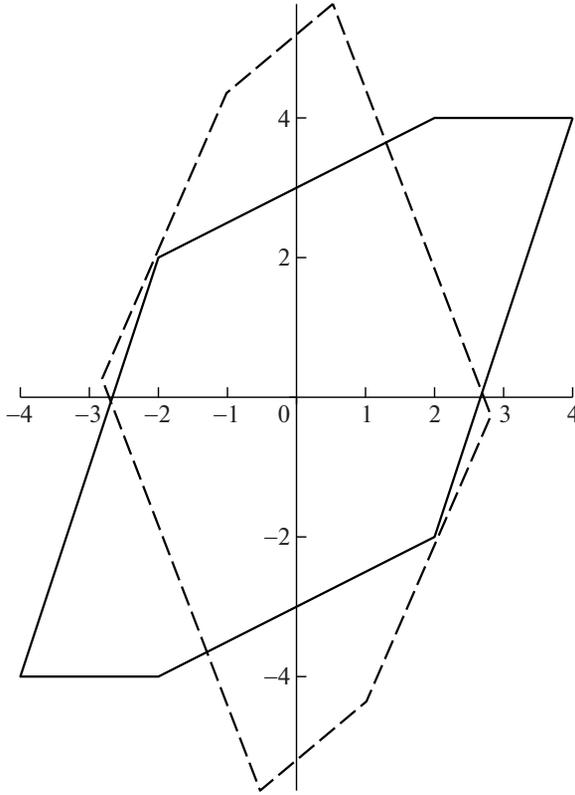


Рис. 1. Исходное множество \mathcal{U} (сплошная линия) и ориентированное вдоль осей инерции множество $B^{-1}\mathcal{U}$ (пунктирная линия).

где $I_{\mathcal{U}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – тензор инерции выпуклого тела $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$:

$$I_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} I_{11} & \dots & I_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{n1} & \dots & I_{nn} \end{pmatrix}, \quad I_{ij} = \begin{cases} \int_{\mathcal{U}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^2 dx_1 \dots dx_n, & i = j, \\ - \int_{\mathcal{U}} x_i x_j dx_1 \dots dx_n, & i \neq j. \end{cases}$$

Тогда согласно [30, теорема 3.1.11] B определяется единственным образом с точностью до перестановки своих столбцов и ее построение сводится к вычислению собственных векторов матрицы $I_{\mathcal{U}}$.

Пример 2. Вычислим матрицу B для многогранника $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тензор инерции $I_{\mathcal{U}}$ и матрица B имеют следующие численные значения:

$$I_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 153,28 & -85,03 \\ -85,03 & 121,20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,64 & -0,77 \\ 0,77 & 0,64 \end{pmatrix}.$$

Тогда ориентированное множество $B^{-1}\mathcal{U}$, для которого необходимо проводить дальнейшую суперэллипсоидальную аппроксимацию, имеет следующий вид:

$$B^{-1}\mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0,53 \\ 5,63 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,01 \\ 4,36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2,82 \\ 0,26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,53 \\ -5,63 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,01 \\ -4,36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,82 \\ -0,26 \end{pmatrix} \right\}.$$

Исходное множество \mathcal{U} и ориентированное множество $B^{-1}\mathcal{U}$ представлены на рис. 1.

5.2. Подбор параметров суперэллипсоидального множества

Далее будем полагать, что матрица B ориентации суперэллипса подобрана в форме матрицы поворота. Тогда исходная аппроксимационная задача сводится к следующей оптимизационной:

$$(7) \quad \begin{aligned} \mu(\mathcal{U} \setminus \mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n)) &\rightarrow \min_{a_1, \dots, a_n, r}, \\ a_i &> 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ r &> 1, \\ \mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n) &\subset \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Сформулируем ряд утверждений, позволяющих свести задачу (7) к эквивалентной задаче выпуклого программирования, которая может быть решена численно.

Лемма 6. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1). Тогда

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \frac{(2\Gamma(\frac{1}{r} + 1))^n}{\Gamma(\frac{n}{r} + 1)}.$$

Лемма 7. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), \mathcal{U} – выпуклое тело.

В таком случае включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ справедливо тогда и только тогда, когда для любых $x \in \mathbb{R}^n$ верно неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq M(x, \mathcal{U}).$$

На основе лемм 6 и 7 представим задачу (7) в эквивалентном виде.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), \mathcal{U} – выпуклое тело. Тогда оптимизационная задача (7) эквивалентна следующей

задаче:

$$(8) \quad \begin{aligned} a_1 \cdot \dots \cdot a_n \frac{(2\Gamma(\frac{1}{r} + 1))^n}{\Gamma(\frac{n}{r} + 1)} &\rightarrow \max_{a_1, \dots, a_n, r}, \\ \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} &\geq M(x, \mathcal{U}), \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n, \\ a_i &> 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ r &> 1. \end{aligned}$$

Вообще говоря, (8) не является задачей выпуклого программирования, а значит, в общем случае она не может быть решена стандартными оптимизационными методами [31]. Проведем ряд преобразований, которые позволят решить (8) численно. Также отдельно рассмотрим случай, когда \mathcal{U} представляет собой многогранник, что позволит в явном виде построить функционал Минковского $M(x, \mathcal{U})$.

Лемма 8. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), \mathcal{U} – ограниченный полиэдр, т.е. существуют такие $K \in \mathbb{N}$, $p^1, \dots, p^K \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$, что справедливо представление

$$\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^K \{x \in \mathbb{R}^n : (p^k, x) \leq \alpha_k\}.$$

Тогда включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно условию

$$\left\| \text{diag}(a)p^k \right\|_q \leq \alpha_k, \quad k = \overline{1, K}.$$

Сложность решения задачи (8) заключается в том, что множество допустимых значений вектора переменных оптимизации $(r, a_1, \dots, a_n)^T$ не является выпуклым в \mathbb{R}^{n+1} . Тем не менее при фиксированном значении $r > 1$ соответствующее множество допустимых значений вектора $(a_1, \dots, a_n)^T$ уже является выпуклым. Сформулируем данный факт в виде леммы.

Лемма 9. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), \mathcal{U} – выпуклое и компактное тело, для произвольного $r > 1$ через $\mathcal{P}_r(\mathcal{U}) = \{a \in \mathbb{R}^n : \mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}, a_i > 0, i = \overline{1, n}\}$ обозначено множество всех допустимых значений a_1, \dots, a_n в задачах (7) и (8).

Тогда $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ – выпуклое и компактное множество.

Лемма 9 позволяет аппроксимировать эквивалентные задачи (7) и (8) аналогичной оптимизационной задачей, в которой область определения параметра r сужена до конечного множества:

$$r \in \{r_1, \dots, r_M\} \subset (1; +\infty).$$

Тогда аппроксимационная задача сводится к решению N задач выпуклого программирования следующего вида:

$$(9) \quad \begin{aligned} a_1 \cdot \dots \cdot a_n &\rightarrow \max_{a_1, \dots, a_n}, \\ (a_1, \dots, a_n)^T &\in \mathcal{P}_r(\mathcal{U}). \end{aligned}$$

Выбор результирующей суперэллипсоидальной аппроксимации, соответствующей конкретному значению $r^* \in \{r_1, \dots, r_M\}$, осуществляется в соответствии с леммой 6 и идеей о максимизации меры вложенного суперэллипса:

$$(10) \quad r^* = \arg \max_{r \in \{r_1, \dots, r_M\}} \mu(\mathcal{E}_r(a^*(r))),$$

где $a^*(r) \in \mathbb{R}^n$ – точка максимума в задаче (9).

Пример 3. Построим суперэллипсоидальную аппроксимацию для множества $B^{-1}\mathcal{U}$, вычисленного в примере 2. Для использования леммы 8 представим $B^{-1}\mathcal{U}$ в виде ограниченного полиэдра:

$$\begin{aligned} B^{-1}\mathcal{U} &= \bigcap_{k=1}^6 \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : (p^k, x) \leq \alpha_k \right\}, \\ (p^1, \dots, p^6) &= \begin{pmatrix} -1,28 & -4,09 & -5,90 & -1,28 & -4,09 & -5,90 \\ 1,54 & 1,80 & -2,29 & -1,54 & -1,80 & 2,29 \end{pmatrix}, \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_6) &= (8, 12, 16, 8, 12, 16). \end{aligned}$$

Опишем множество $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ для $r \in \{\frac{4}{3}, 2, 4\}$ и решим соответствующие оптимизационные задачи (9).

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\frac{4}{3}}(\mathcal{U}) : \quad & \begin{cases} (2,65a_1^4 + 5,62a_2^4)^{\frac{1}{4}} \leq 8, \\ (280,53a_1^4 + 10,57a_2^4)^{\frac{1}{4}} \leq 12, \\ (1208,13a_1^4 + 27,48a_2^4)^{\frac{1}{4}} \leq 16, \end{cases} \\ & \begin{cases} a_1^* \left(\frac{3}{4}\right) = 2,48, \\ a_2^* \left(\frac{3}{4}\right) = 5,16. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(\mathcal{U}) : \quad & \begin{cases} (1,63a_1^2 + 2,37a_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq 8, \\ (16,75a_1^2 + 3,25a_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq 12, \\ (34,76a_1^2 + 5,24a_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq 16, \end{cases} \\ & \begin{cases} a_1^*(2) = 1,92, \\ a_2^*(2) = 4,94. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4(\mathcal{U}) : \quad & \begin{cases} \left(\sqrt[3]{2,65a_1^4} + \sqrt[3]{5,62a_2^4} \right)^{\frac{3}{4}} \leq 8, \\ \left(\sqrt[3]{280,53a_1^4} + \sqrt[3]{10,57a_2^4} \right)^{\frac{3}{4}} \leq 12, \\ \left(\sqrt[3]{1208,13a_1^4} + \sqrt[3]{27,48a_2^4} \right)^{\frac{3}{4}} \leq 16. \end{cases} \\ & \begin{cases} a_1^*(4) = 1,61, \\ a_2^*(4) = 4,16. \end{cases} \end{aligned}$$

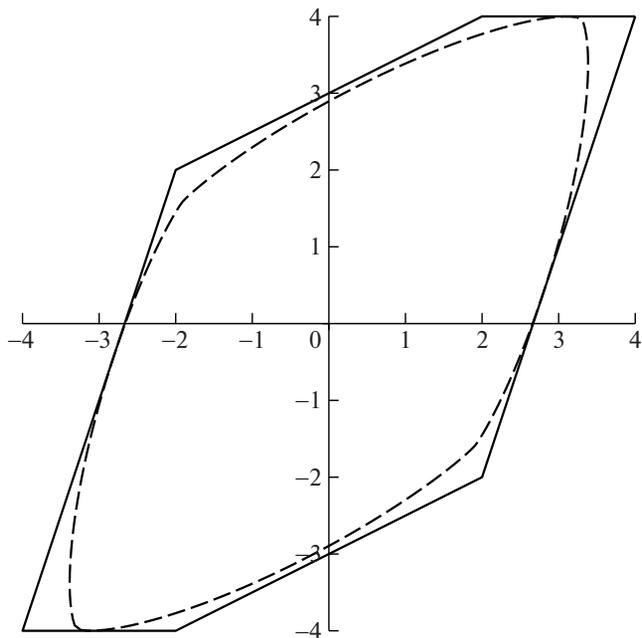


Рис. 2. Исходное множество \mathcal{U} (сплошная линия) и его суперэллипсоидальная аппроксимация $B\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}\left(a^*\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ (пунктирная линия).

Сопоставим полученные решения в смысле меры Лебега аппроксимирующего суперэллипса в соответствии с леммой 6:

$$\mu\left(\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}\left(a^*\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right) = 32,60, \quad \mu(\mathcal{E}_2(a^*(2))) = 29,79, \quad \mu(\mathcal{E}_4(a^*(4))) = 24,86.$$

Отсюда следует, что наиболее качественной аппроксимацией $B^{-1}\mathcal{U}$ является $\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}\left(a^*\left(\frac{4}{3}\right)\right)$. Следовательно, для исходного множества \mathcal{U} наиболее качественной аппроксимацией из рассмотренных является множество $B\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}\left(a^*\left(\frac{4}{3}\right)\right)$. Результаты аппроксимации представлены на рис. 2.

6. Примеры формирования оптимального управления

Построим решение задачи быстрогодействия для систем (2) различной размерности на основе разработанных методов. Для этого будем использовать следующий

Алгоритм 1.

1. Для заданного множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ построить тензор инерции $I_{\mathcal{U}}$ и вычислить матрицу ориентации суперэллипсоидального множества $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ согласно подразделу 5.1.

2. Выбрать множество значений параметра суперэллипсоидальной аппроксимации $\{r_1, \dots, r_M\} \subset (1; +\infty)$.

3. Для всех $r \in \{r_1, \dots, r_M\}$ составить оптимизационные задачи (9) для множества $B^{-1}\mathcal{U}$ и вычислить соответствующие точки максимума $a^*(r)$.

4. При помощи леммы 10 определить оптимальный параметр суперэллипсоидальной аппроксимации r^* согласно (10).

5. Для заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и различных $N \in \mathbb{N}$ составить системы уравнений, представленные в следствии 1.

6. Определить величину N_{\min} как наименьшее значение $N \in \mathbb{N}$, при котором решение составленной на шаге 5 системы уравнений удовлетворяет условию $\alpha \leq 1$.

7. Для вычисленной на шаге 6 величины N_{\min} и соответствующих ей $\alpha > 0$ и $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ построить оптимальное управление $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}-1}$ для системы $(A, B\mathcal{E}_{r^*}(a^*(r^*)))$ согласно теореме 1 и лемме 5.

8. Построить траекторию $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}}$ в соответствии с рекуррентными соотношениями (2).

Пример 4. Пусть $n = 2$. В качестве \mathcal{U} выберем многогранник, рассмотренный в примерах 2 и 3, матрицу системы и начальное состояние определим следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Можно полагать, что множество \mathcal{U} аппроксимировано $B\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}(a^*(\frac{4}{3}))$ в соответствии с примером 3. Тогда решение системы уравнений, представленной в следствии 1, для $N = 9$ имеет вид

$$\alpha = 1,019, \quad \psi_1(0) = 0,775, \quad \psi_2(0) = -0,632.$$

Решение, полученное для $N = 10$, имеет вид

$$\alpha = 0,998, \quad \psi_1(0) = 0,792, \quad \psi_2(0) = -0,610.$$

Откуда следует, что для вспомогательной системы $(A, B\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}(a^*(\frac{4}{3})))$ в силу (4) $N_{\min} = 10$.

Оптимальная траектория системы и оптимальное управление, вычисленные на основе теоремы 1, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Оптимальный процесс управления для двухмерной системы

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1(k)$	-4,5	2,19	-3,86	3,01	-3,36	2,95	-2,82	2,54	-1,94	1,97	0
$x_2(k)$	8	-8,51	7,96	-7,86	7,28	-6,76	5,96	-4,95	3,70	-1,83	0
$u_1(k)$	3,19	0,27	2,77	-1,51	2,38	-1,95	2,21	-2,07	2,15	-2,11	-
$u_2(k)$	3,99	-2,74	3,96	-3,59	3,88	-3,75	3,83	-3,79	3,81	-3,80	-

На основе точных методов, изложенных в [6], для исходной системы (A, \mathcal{U}) вычислено $N_{\min} = 9$. Таким образом, с точки зрения качества управления погрешность гарантирующего решения составляет один шаг.

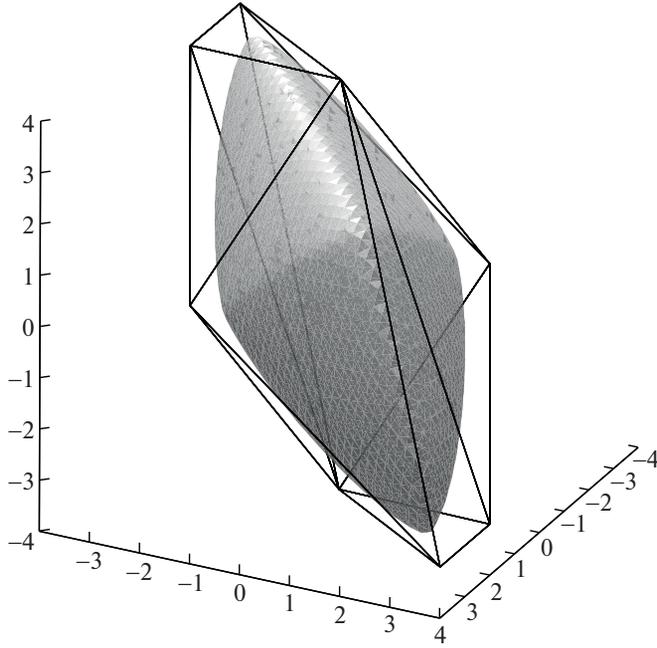


Рис. 3. Исходное множество \mathcal{U} и его суперэллипсоидальная аппроксимация $BE_{\frac{4}{3}}(a^*(\frac{4}{3}))$.

Пример 5. Пусть $n = 3$. Множество допустимых значений управлений, матрицу системы и начальное состояние определим следующим образом:

$$\mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,486 & -0,315 & 0,689 \\ -0,757 & -0,202 & 0,442 \\ 0 & -0,818 & -0,375 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Тензор инерции $I_{\mathcal{U}}$ и матрица ориентации B имеют вид

$$I_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 526,73 & -135,75 & 132,41 \\ -135,75 & 474,79 & 164,87 \\ 132,41 & 164,87 & 439,35 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,49 & 0,73 & 0,48 \\ 0,59 & -0,68 & 0,43 \\ -0,64 & -0,08 & 0,76 \end{pmatrix}.$$

Суперэллипсоидальная аппроксимация множества $B^{-1}\mathcal{U}$ проведена для $r \in \{\frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2, 4, 6\}$. Решения задач вида (9) представлены в табл. 2. Отсюда следует, что наиболее качественной является аппроксимация $\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}(a^*(\frac{4}{3}))$. Графически результат суперэллипсоидальной аппроксимации \mathcal{U} множеством $BE_{\frac{4}{3}}(a^*(\frac{4}{3}))$ представлен на рис. 3. Решение системы уравнений, представленной в следствии 1, для $N = 9$ имеет вид

$$\alpha = 1,038, \quad \psi_1(0) = -0,827, \quad \psi_2(0) = -0,012, \quad \psi_3(0) = -0,563.$$

Таблица 2. Результаты суперэллипсоидальной аппроксимации для трехмерной системы

r	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	2	4	6
$\mu(\mathcal{E}_r(a^*(r)))$	57,58	61,11	57,64	41,91	35,90
$a_1^*(r)$	5,06	5,04	4,53	3,71	3,45
$a_2^*(r)$	2,48	2,24	1,58	1,20	1,10
$a_3^*(r)$	2,29	2,22	1,98	1,45	1,32

Таблица 3. Оптимальный процесс управления для трехмерной системы

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1(k)$	26	23,64	-3,16	17,65	11,14	-0,59	9,51	3,71	1,01	2,11	0
$x_2(k)$	24	-11,76	-25,76	14,85	-10,19	-10,80	6,71	-5,75	-1,86	-0,03	0
$x_3(k)$	30	-29,28	17,93	13,24	-16,11	11,64	4,12	-6,56	4,39	0,65	0
$u_1(k)$	-2,10	1,80	-1,28	-1,88	1,88	-1,62	-1,64	1,91	-1,99	-1,48	-
$u_2(k)$	-0,48	2,70	-0,68	0,33	2,70	-1,06	0,99	2,68	-1,59	1,30	-
$u_3(k)$	1,60	-2,67	-1,13	1,01	-2,73	-0,36	0,48	-2,77	0,77	0,21	-

Решение, полученное для $N = 10$, имеет вид

$$\alpha = 0,890, \quad \psi_1(0) = -0,805, \quad \psi_2(0) = -0,075, \quad \psi_3(0) = -0,589.$$

Отсюда следует, что для вспомогательной системы $\left(A, B\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}\left(a^*\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right)$ в силу (4) $N_{\min} = 10$.

Оптимальная траектория системы и оптимальное управление, вычисленные на основе теоремы 1, представлены в табл. 3.

На основе точных методов, изложенных в [6], для исходной системы (A, \mathcal{U}) вычислено $N_{\min} = 8$. Таким образом, с точки зрения качества управления погрешность гарантирующего решения составляет 2 шага.

7. Заключение

В статье рассмотрено решение задачи быстрогодействия для линейных дискретных систем с ограниченным управлением. Предполагается, что множество допустимых значений управлений является выпуклым компактным телом, содержащим начало координат, матрица системы обратима. Для случая строго выпуклых ограничений на управление достаточные условия оптимальности процесса управления сформулированы в виде дискретного принципа максимума. При этом с практической точки зрения процедура построения оптимального управления сводится к вычислению начальных условий сопряженной системы.

Подробно изучен класс суперэллипсоидальных множеств — множеств, являющихся обобщением понятия эллипсоида для нормированных пространств. В частности, в явном виде описана зависимость нормального конуса от опорной точки, вычислена мера Лебега суперэллипса в n -мерном пространстве.

В случае, когда множество допустимых значений управлений системы представляет собой суперэллипсоидальное множество, определение начальных условий сопряженной системы в принципе максимума сведено к системе алгебраических уравнений, обладающей единственным решением. Существенно, что размерность и, следовательно, сложность решения данной системы не зависят от оптимального значения критерия в задаче быстродействия, а определяются только числом фазовых переменных, что обеспечивает эффективность такого метода в сравнении с другими подходами к решению.

Для систем с множеством допустимых значений управлений общего вида разработан метод суперэллипсоидальной аппроксимации, заключающийся в построении для произвольного выпуклого тела вписанного в него суперэллипса максимальной меры. Процедура аппроксимации разделена на два этапа: подбор матрицы ориентации суперэллипса в пространстве и вычисление параметров суперэллипсоидального множества. Первый этап заключается в вычислении тензора инерции аппроксимируемого тела, второй этап удается свести к решению ряда задач выпуклого программирования.

Разработанная методика позволяет строить оптимальные процессы управления для различных дискретных систем. За счет общей постановки задачи суперэллипсоидальной аппроксимации удается обобщить дискретный принцип максимума в том числе и на системы с ограничениями на управление, которые изначально не являются строго выпуклыми, например системы с линейными ограничениями.

На численных примерах опробованы полученные теоретические результаты.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 4. Поскольку функционал Минковского множества (1) является гладкой функцией на всем \mathbb{R}^n :

$$M(x, \mathcal{E}_r(a)) = \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}},$$

то согласно [24, теорема 26.1] для произвольного $x \in \partial \mathcal{E}_r(a)$ верно представление

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x, \mathcal{E}_r(a)) &= \text{cone}\{\nabla_x M(x, \mathcal{E}_r(a))\} \setminus \{0\} = \\ &= \text{cone} \left\{ \frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}-1} \left(\frac{r|x_1|^{r-1}\text{sign}(x_1)}{|a_1|^r}, \dots, \frac{r|x_n|^{r-1}\text{sign}(x_n)}{|a_n|^r} \right)^T \right\} \setminus \{0\} = \\ &= \text{cone} \left\{ \left(\frac{|x_1|^{r-1}\text{sign}(x_1)}{|a_1|^r}, \dots, \frac{|x_n|^{r-1}\text{sign}(x_n)}{|a_n|^r} \right)^T \right\} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует п. 1 леммы 4.

Согласно определению нормального конуса верно включение

$$p \in \mathcal{N}(x^*(p), \mathcal{E}_r(a)).$$

Тогда с учетом п. 1 леммы 4 найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} p &= \alpha \left(\frac{|x_1^*(p)|^{r-1} \text{sign}(x_1^*(p))}{|a_1|^r}, \dots, \frac{|x_n^*(p)|^{r-1} \text{sign}(x_n^*(p))}{|a_n|^r} \right)^\top, \\ x^*(p) &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r-1}}} \left(|p_1 a_1^r|^{\frac{1}{r-1}} \text{sign}(p_1), \dots, |p_n a_n^r|^{\frac{1}{r-1}} \text{sign}(p_n) \right)^\top = \\ &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r-1}}} \left(|p_1|^{q-1} a_1^q \text{sign}(p_1), \dots, |p_n|^{q-1} a_n^q \text{sign}(p_n) \right)^\top = \\ &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r-1}}} \text{diag}(a) I_q (\text{diag}(a) p). \end{aligned}$$

Величину α можно вычислить из условия $x^*(p) \in \partial \mathcal{E}_r(a)$, которое эквивалентно равенству

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i^*(p)}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} &= 1, \\ 1 &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r-1}}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{|p_i|^{q-1} a_i^q}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r-1}}} \left(\sum_{i=1}^n |p_i a_i|^q \right)^{\frac{1}{r}}, \\ \alpha^{\frac{1}{r-1}} &= \left(\sum_{i=1}^n |p_i a_i|^q \right)^{\frac{1}{r}} = \|\text{diag}(a) p\|_q^{q-1}. \end{aligned}$$

Второй пункт леммы 4 полностью доказан.

Доказательство леммы 5. Пункт 1 следует из п. 1 леммы 4, п. 2 леммы 3 и представления

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \mathcal{N}(DD^{-1}u, D\mathcal{E}_r(a)).$$

Пункт 2 следует из п. 2 леммы 4 и цепочки равенств

$$\arg \max_{u \in \mathcal{U}} (p, u) = D \arg \max_{x \in \mathcal{E}_r(a)} (p, Dx) = D \arg \max_{x \in \mathcal{E}_r(a)} (D^\top p, x).$$

Лемма 5 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку $x_0 \neq 0$, то согласно определениям функционала Минковского и нормального конуса условия (5) экви-

валентны условиям

$$(П.1) \quad -\psi(0) \in \mathcal{N} \left(\frac{x_0}{\alpha}, \mathcal{X}(N_{\min}) \right),$$

$$(П.2) \quad \frac{x_0}{\alpha} \in \partial \mathcal{X}(N_{\min}).$$

Включение (П.2) в силу леммы 1 и представления (6) равносильно условию

$$\frac{x_0}{\alpha} \in \partial \left(- \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} \mathcal{U} \right) = \partial \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} B \mathcal{E}_r(a).$$

Тогда с учетом п. 1 леммы 3 и определения алгебраической суммы множеств (П.1) эквивалентно тому, что найдутся $x^1 \in A^{-1} B \mathcal{E}_r(a), \dots, x^{N_{\min}} \in A^{-N_{\min}} B \mathcal{E}_r(a)$, для которых верны соотношения

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{\alpha} &= \sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k, \\ -\psi(0) \in \mathcal{N} \left(\frac{x_0}{\alpha}, \mathcal{X}(N_{\min}) \right) &= \mathcal{N} \left(\sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k, \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right) = \\ &= \bigcap_{k=1}^{N_{\min}} \mathcal{N} \left(x^k, A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right), \end{aligned}$$

что в силу п. 2 леммы 5 возможно в том и только в том случае, когда

$$x^k = \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q \left(-\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0) \right)}{\|\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)\|_q^{q-1}}.$$

Поскольку $I_q(-x) = -I_q(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, получим эквивалентные соотношения

$$\frac{x_0}{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k = - \sum_{k=1}^{N_{\min}} \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0) \right)}{\|\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)\|_q^{q-1}}.$$

То есть условия (5) равносильны указанному в условии теоремы 2 равенству.

Доказательство следствия 1. В силу теоремы 2 решение системы существует и удовлетворяет условиям (5). Тогда в силу леммы 1 и симметрии множеств вида (1) найдутся такие $x^1 \in \alpha A^{-1} B \mathcal{E}_r(a), \dots, x^{N_{\min}} \in \alpha A^{-N_{\min}} B \mathcal{E}_r(a)$, что справедливо равенство $x_0 = x^1 + \dots + x^{N_{\min}}$. Откуда в силу п. 1 леммы 3 следует, что любое решение $(\psi(0), \alpha)$ удовлетворяет включению

$$-\psi(0) \in \mathcal{N} \left(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min}) \right) = \bigcap_{k=1}^{N_{\min}} \mathcal{N} \left(x^k, A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right).$$

Но согласно п. 1 леммы 5 для всех $k = \overline{1, N_{\min}}$ множества $\mathcal{N}(x^k, A^{-k}B\mathcal{E}_r(a))$ являются одномерными лучами с началом в 0, т.е. содержат единственный вектор $-\psi(0)$, удовлетворяющий равенству $(\psi(0), \psi(0)) = 1$. Единственность величины $\alpha > 0$ следует из определения функционала Минковского и условий (5).

Следствие 1 доказано.

Лемма 10. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1). Тогда

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \mu(\mathcal{E}_r(1, \dots, 1)).$$

Доказательство леммы 10. Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = a_1 y_1, \\ \vdots \\ x_n = a_n y_n, \end{cases}$$

якобиан которой имеет вид $J = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$. Тогда

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = \int_{\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \leq 1} 1 dx = \int_{\sum_{i=1}^n |y_i|^r \leq 1} |J| dy = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \mu(\mathcal{E}_r(1, \dots, 1)).$$

Лемма 10 доказана.

Доказательство леммы 6. В части пространства $x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ рассмотрим замену переменных

$$(П.3) \quad \begin{cases} x_1 = R(\cos \phi_2 \cdot \cos \phi_3 \dots \cdot \cos \phi_n)^{\frac{2}{r}}, \\ x_2 = R(\sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3 \dots \cdot \cos \phi_n)^{\frac{2}{r}}, \\ x_3 = R(\sin \phi_3 \cdot \cos \phi_4 \dots \cdot \cos \phi_n)^{\frac{2}{r}}, \\ \vdots \\ x_n = R(\sin \phi_n)^{\frac{2}{r}}. \end{cases}$$

$$R \geq 0, \quad \phi_j \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \quad j = \overline{2, n}.$$

Построим якобиан замены (П.3).

$$\frac{\partial x_i}{\partial \phi_j} = \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial R} = \frac{x_i}{R}, \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{2 \cos \phi_j}{r \sin \phi_j} x_i, \quad i = \overline{2, n}, \quad j = i, \\ -\frac{2 \sin \phi_j}{r \cos \phi_j} x_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}, \\ 0, \quad i = \overline{3, n}, \quad j = \overline{2, i-1}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix} \frac{x_1}{R} & \frac{x_2}{R} & \frac{x_3}{R} & \cdots & \frac{x_n}{R} \\ -\frac{2x_1}{r} \operatorname{tg} \phi_2 & \frac{2x_2}{r} \operatorname{ctg} \phi_2 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{2x_1}{r} \operatorname{tg} \phi_3 & -\frac{2x_2}{r} \operatorname{tg} \phi_2 & \frac{2x_3}{r} \operatorname{ctg} \phi_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{2x_1}{r} \operatorname{tg} \phi_n & -\frac{2x_2}{r} \operatorname{tg} \phi_n & -\frac{2x_3}{r} \operatorname{tg} \phi_n & \dots & \frac{2x_n}{r} \operatorname{ctg} \phi_n \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{R} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left(\prod_{j=2}^n \operatorname{tg} \phi_j \right) \left(\frac{2}{r} \right)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \operatorname{ctg}^2 \phi_2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \operatorname{ctg}^2 \phi_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \operatorname{ctg}^2 \phi_n \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{R} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left(\prod_{j=2}^n \operatorname{tg} \phi_j \right) \left(\frac{2}{r} \right)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \operatorname{ctg}^2 \phi_2 + 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \operatorname{ctg}^2 \phi_3 + 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \operatorname{ctg}^2 \phi_n + 1 \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{R} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left(\prod_{j=2}^n (\operatorname{tg} \phi_j + \operatorname{ctg} \phi_j) \right) \left(\frac{2}{r} \right)^{n-1} = \\
&= \frac{1}{R} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left(\prod_{j=2}^n \frac{1}{\sin \phi_j \cos \phi_j} \right) \left(\frac{2}{r} \right)^{n-1} = \\
&= R^{n-1} \left(\frac{2}{r} \right)^{n-1} \prod_{j=2}^n (\sin \phi_j)^{\frac{2}{r}-1} (\cos \phi_j)^{\frac{2}{r}(j-1)-1}.
\end{aligned}$$

Тогда можно вычислить меру Лебега суперэллипса $\mathcal{E}_r(1, \dots, 1)$ через интеграл Лебега:

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{E}_r(1, \dots, 1)) &= \int_{\sum_{i=1}^n |x_i|^r \leq 1} 1 dx = \\
&= 2^n \int_0^1 R^{n-1} \left(\frac{2}{r} \right)^{n-1} dR \prod_{j=2}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi_j)^{\frac{2}{r}-1} (\cos \phi_j)^{\frac{2}{r}(j-1)-1} d\phi_j.
\end{aligned}$$

Для каждого $j = \overline{2, n}$ вычислим вспомогательные интегралы:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi_j)^{\frac{2}{r}-1} (\cos \phi_j)^{\frac{2}{r}(j-1)-1} d\phi_j = \\
& = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi_j)^{\frac{2}{r}-1} (\cos \phi_j)^{\frac{2}{r}(j-1)-2} d \sin \phi_j = \\
& = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi_j)^{\frac{2}{r}-1} (1 - \sin^2 \phi_j)^{\frac{j-1}{r}-1} d \sin \phi_j = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \phi_j)^{\frac{1}{r}-1} (1 - \sin^2 \phi_j)^{\frac{j-1}{r}-1} d \sin^2 \phi_j = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{r}-1} (1-t)^{\frac{j-1}{r}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{r}, \frac{j-1}{r}\right),
\end{aligned}$$

где через $B(x, y)$ обозначена бета-функция Эйлера.

Тогда исходный интеграл имеет вид

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{E}_r(1, \dots, 1)) &= \frac{2^n}{n} \left(\frac{2}{r}\right)^{n-1} \prod_{j=2}^n \left(\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{r}, \frac{j-1}{r}\right)\right) = \\
&= \frac{2}{n} \left(\frac{2}{r}\right)^{n-1} \prod_{j=2}^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \Gamma\left(\frac{j-1}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r} + \frac{j-1}{r}\right)} = \\
&= \frac{2}{n} \left(\frac{2}{r} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{j}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{r}\right)} = \\
&= \frac{2}{n} \left(\frac{2}{r} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{r} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right)^n}{\frac{n}{r} \Gamma\left(\frac{n}{r}\right)} = \\
&= \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r} + 1\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{r} + 1\right)}.
\end{aligned}$$

С учетом леммы 10 окончательно получим равенство

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r} + 1\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{r} + 1\right)}.$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 11. Пусть $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклые и компактные тела, содержащие 0 в качестве внутренней точки. В таком случае включение $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ верно тогда и только тогда, когда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$M(x, \mathcal{U}_1) \geq M(x, \mathcal{U}_2).$$

Доказательство леммы 11. Пусть $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда по определению функционала Минковского

$$\begin{aligned} x \in M(x, \mathcal{U}_1)\mathcal{U}_1 &\subset M(x, \mathcal{U}_1)\mathcal{U}_2, \\ M(x, \mathcal{U}_1) &\geq \inf\{t > 0: x \in t\mathcal{U}_2\} = M(x, \mathcal{U}_2). \end{aligned}$$

Пусть для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$M(x, \mathcal{U}_1) \geq M(x, \mathcal{U}_2).$$

Тогда по определению функционала Минковского

$$\mathcal{U}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n: M(x, \mathcal{U}_1) \leq 1\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n: M(x, \mathcal{U}_2) \leq 1\} = \mathcal{U}_2.$$

Лемма 11 доказана.

Доказательство леммы 7. Лемма 7 следует непосредственно из леммы 11 и того факта, что

$$M(x, \mathcal{E}_r(a)) = \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу леммы 7 включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно условию

$$\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq M(x, \mathcal{U}) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n.$$

Также в силу данного ограничения верно, что

$$\mu(\mathcal{U} \setminus \mathcal{E}_r(a)) = \mu(\mathcal{U}) - \mu(\mathcal{E}_r(a)).$$

Откуда с учетом того, что величина $\mu(\mathcal{U})$ не зависит от переменных оптимизации, следует утверждение теоремы 3.

Лемма 12. Пусть существуют $p^1, \dots, p^K \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_K > 0$ такие, что

$$\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^K \left\{ u \in \mathbb{R}^n: (p^k, u) \leq \alpha_k \right\}, \quad 0 \in \text{int } \mathcal{U}.$$

Тогда

$$M(x, \mathcal{U}) = \max_{k=\overline{1, K}} \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}.$$

Доказательство леммы 12. Поскольку для любого $t > 0$

$$\begin{aligned} t\mathcal{U} &= \left\{ u \in \mathbb{R}^n : u = tx, \quad x \in \mathcal{U} \right\} = \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R}^n : u = tx, \quad (p^k, x) \leq \alpha_k, \quad k = \overline{1, K} \right\} = \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R}^n : \left(p^k, \frac{u}{t} \right) \leq \alpha_k, \quad k = \overline{1, K} \right\} = \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R}^n : (p^k, u) \leq t\alpha_k, \quad k = \overline{1, K} \right\} = \\ &= \bigcap_{k=1}^K \left\{ u \in \mathbb{R}^n : (p^k, u) \leq t\alpha_k \right\}, \end{aligned}$$

то согласно определению функционала Минковского

$$\begin{aligned} M(x, \mathcal{U}) &= \inf \{ t > 0 : x \in t\mathcal{U} \} = \\ &= \inf \left\{ t > 0 : (p^k, x) \leq t\alpha_k, \quad k = \overline{1, K} \right\} = \\ &= \inf \left\{ t > 0 : t \geq \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}, \quad k = \overline{1, K} \right\} = \max_{k=\overline{1, K}} \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}. \end{aligned}$$

Лемма 12 доказана.

Доказательство леммы 8. Согласно леммам 7 и 12 включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно тому, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ будет справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq \max_{k=\overline{1, K}} \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}.$$

Для $x = 0$ данное неравенство выполняется тривиально. Рассмотрим случай $x \neq 0$ и перейдем к эквивалентным неравенствам. Для всех $k = \overline{1, K}$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} &\geq \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}, \\ \alpha_k &\geq \frac{(p^k, x)}{\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}}. \end{aligned}$$

Поскольку данные неравенства должны выполняться при любом $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, можно с учетом леммы 4 перейти к равносильному соотношению

$$\begin{aligned} \alpha_k &\geq \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(p^k, x)}{\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}} = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left(p^k, \frac{x}{\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}} \right) = \\ &= \max_{y \in \partial \mathcal{E}_r(a)} (p^k, y) = (p^k, x^*(p^k)) = \\ &= \frac{(p^k, \text{diag}(a) I_q (\text{diag}(a) p^k))}{\|\text{diag}(a) p^k\|_q^{q-1}} = \|\text{diag}(a) p^k\|_q. \end{aligned}$$

Лемма 8 полностью доказана.

Доказательство леммы 9. Обозначим для произвольных выпуклого множества \mathcal{U} и $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ через $s(p, \mathcal{U})$ опорную функцию \mathcal{U} :

$$s(p, \mathcal{U}) = \sup_{x \in \mathcal{U}} (p, x).$$

Как продемонстрировано в [24, теорема 11.5], произвольное выпуклое компактное множество \mathcal{U} представляет собой пересечение всех опорных полупространств:

$$\mathcal{U} = \bigcap_{p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \{x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \leq s(p, \mathcal{U})\}.$$

Тогда вложение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно тому, что для каждого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ будет выполнено неравенство

$$(II.4) \quad s(p, \mathcal{E}_r(a)) \leq s(p, \mathcal{U}).$$

Пусть $a, b \in \mathcal{P}_r(\mathcal{U})$, $\lambda \in (0; 1)$, $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда в силу п. 2 леммы 4 и неравенства Минковского [25, раздел 1 §1 гл. II] верны соотношения

$$\begin{aligned} s(p, \mathcal{E}_r(\lambda a + (1 - \lambda) b)) &= \max_{x \in \mathcal{E}_r(\lambda a + (1 - \lambda) b)} (p, x) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |(\lambda a_i + (1 - \lambda) b_i) p_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \lambda \left(\sum_{i=1}^n |a_i p_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} + (1 - \lambda) \left(\sum_{i=1}^n |b_i p_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \lambda s(p, \mathcal{E}_r(a)) + (1 - \lambda) s(p, \mathcal{E}_r(b)) \leq s(p, \mathcal{U}). \end{aligned}$$

Тогда $\mathcal{E}_r(\lambda a + (1 - \lambda) b) \subset \mathcal{U}$, что по определению эквивалентно включению $\lambda a + (1 - \lambda) b \in \mathcal{P}_r(\mathcal{U})$. Отсюда следует выпуклость $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$.

Выберем в качестве $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i -й координатный вектор:

$$p = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)^T.$$

Тогда по построению

$$s(\pm p, \mathcal{E}_r(a)) = a_i.$$

С учетом условия (П.4) получим, что для любого $a \in \mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ верно неравенство

$$0 \leq a_i \leq \min\{s(p, \mathcal{U}), s(-p, \mathcal{U})\}.$$

Поскольку \mathcal{U} ограничено, то для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ значение опорной функции $s(p, \mathcal{U})$ конечно. Тогда $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ ограничено.

Замкнутость $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ следует из замкнутости \mathcal{U} .

Лемма 9 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
3. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
4. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ.* 2017. № 10. С. 3–32.
<https://doi.org/10.1134/S0005117917100010>
Ibragimov D.N., Siroitin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756.
<https://doi.org/10.1134/S0005117917100010>
5. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
6. *Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю.* О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстродействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ.* 2021. № 12. С. 48–72. <https://doi.org/10.31857/S0005231021120047>
Ibragimov D.N., Novozhilin N.M., Portseva E.Yu. On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with Bounded Control // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 12. P. 2076–2096. <https://doi.org/10.1134/S000511792112002X>
7. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Вычислительный центр РАН, 2010.
8. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальная по быстродействию коррекция орбиты спутника // *Электрон. журн. Тр. МАИ.* 2017. № 94. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>

9. *Kurzanskiy A., Varaiya P.* Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. V. 52, No.1. P. 26–38. <https://doi.org/10.1109/TAC.2006.887900>
10. *Чернуоусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
11. *Gridgeman N.T.* Lame Ovals // The Mathematical Gazette. 1970. V. 54. No. 387. P. 31–37. <https://doi.org/10.2307/3613154>
12. *Tobler W.R.* The Hyperelliptical and Other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections // J. Geophys. Res. 1973. V. 78. No. 11. P. 1753–1759. <https://doi.org/10.1029/JB078i011p01753>
13. *Shi P.J., Huang J.G., Hui C., Grissino-Mayer H.D., Tardif J.C., Zhai L.H., Wang F.S., Li B.L.* Capturing Spiral Radial Growth of Conifers Using the Superellipse to Model Tree-Ring Geometric Shape // Frontiers in Plant Science. 2015. V. 6. No. 856. P. 1–13. <https://doi.org/10.3389/fpls.2015.00856>
14. *Gielis J.* A Generic Geometric Transformation That Unifies a Wide Range of Natural and Abstract Shapes // Amer. J. Botany. 2003. V. 90. No. 3. P. 333–338. <https://doi.org/10.3732/ajb.90.3.333>
15. *Максимидис П.Т., Карателли Д., Тосо Дж., Смолдерс Б.* Анализ нового класса волноводных структур для проектирования реактивно нагруженных антенных решеток // Докл. ТУСУР. 2017. №1. С. 10–13. <https://doi.org/10.21293/1818-0442-2017-20-1-09-13>
16. *Zolotenkova M.K., Egorov V.V.* Development and Analysis of Ultrasound Registrating and Performing Rodent Vocalization Device // IEEE-EDM. 2022. P. 506–509. <https://doi.org/10.1109/EDM55285.2022.9855056>
17. *Sadowski A.J.* Geometric Properties for the Design of Unusual Member Cross-Sections in Bending // Engineering Structures. 2011. V. 33. No. 5. P. 1850–1854. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.01.026>
18. *Tobler W.R.* Superquadrics and Angle-Preserving Transformations // IEEE-CGA. 1981. V. 1. No. 1. P. 11–23. <https://doi.org/10.1109/MCG.1981.1673799>
19. *Desoer C.A., Wing J.* The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General Theory // J. Franklin Inst. 1961. V. 272. No. 3. P. 208–228. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(61\)90784-0](https://doi.org/10.1016/0016-0032(61)90784-0)
20. *Lin W.-S.* Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems // Int. J. Control. 1986. V. 43. No. 5. P. 1343–1351. <https://doi.org/10.1080/00207178608933543>
21. *Мороз А.И.* Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка // АиТ. 1965. № 2. С. 193–207.
Moroz A.I. Synthesis of Time-Optimal Control for Linear Discrete Objects of the Third Order // Autom. Remote Control. 1965. V. 25. No. 9. P. 193–206.
22. *Краснощеченко В.И.* Симплекс-метод для решения задачи быстродействия при наличии ограничения на скалярное управление и фазовых ограничений // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 6.
Доступ в журн. <http://engjournal.ru/catalog/it/asu/1252.html>
23. *Сазанова Л.А.* Устойчивость оптимального синтеза в задаче быстродействия // Известия вузов. Математика. 2002. № 2. С. 46–57.
24. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

25. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
26. Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н. О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ*. 2023. № 2. С. 3–34.
<https://doi.org/10.31857/S0005231023020010>
27. Ибрагимов Д.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ*. 2019. № 3. С. 3–25.
<https://doi.org/10.1134/S0005231019030012>
Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // *Autom. Remote Control*. 2019. V. 80. No. 3. P. 393–412.
<https://doi.org/10.1134/S0005117919030019>
28. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений. М.: Издательство иностранной литературы, 1963.
29. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988.
30. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
31. Ашманов С.А., Тимохов С.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Маликовым.

Поступила в редакцию 06.04.2023

После доработки 25.06.2023

Принята к публикации 20.07.2023