Автоматика и телемеханика, № 8, 2023

Стохастические системы

© 2023 г. **М.Е. ШАЙКИН, канд. техн. наук (shaikin@ipu.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО, МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПО ВЕКТОРУ СОСТОЯНИЯ

Получены интегральные представления решений линейных мультипликативно возмущенных дифференциальных уравнений, диффузионная часть которых билинейна по вектору состояния и вектору независимых винеровских процессов. Уравнения такого класса служат моделями стохастических систем с управлением, функционирующих в условиях параметрической неопределенности или нежелательного воздействия внешних возмущений. Для отыскания интегральных представлений и фундаментальных матриц уравнений применяются понятия и аналитический аппарат теории алгебр Ли.

Ключевые слова: мультипликативная стохастическая система, фундаментальная матрица, дифференциал Стратоновича—Фиска, теоретико-групповой метод, матричная алгебра Ли, теорема Вея—Нормана, стохастическая резольвента.

DOI: 10.31857/S0005231023080068, **EDN:** HBYRVP

1. Введение

В теории оптимизации динамических систем важное место отводится задачам управления объектами, функционирующим в условиях параметрической неопределенности или нежелательного воздействия внешних возмущений. В стохастическом разделе теории простейшими моделями таких систем являются линейные, называемые мультипликативными, уравнения Ито, диффузионные компоненты которых линейны по векторам состояния, управления и внешнего или параметрического возмущения. Мультипликативные уравнения — достаточно простые математические объекты, и можно надеяться получить в замкнутой аналитической форме их решения или интегральные для них представления.

Рассмотрим стохастическую систему Ито (1.1), (1.2), *динамика* которой задается мультипликативным уравнением марковского типа

$$dx_t = a(t, x_t)dt + b(t)(x_t; dw(t)), \quad x_t \in R^d, \quad w(t) \in R^r, \quad x_0 = \mathrm{const} \tag{1.1}$$

(с коэффициентами, зависящими, вообще говоря, от t), а *вынуждающая сила* определяется случайной функцией f с дифференциалом

$$df(t) = (B_1(t)u_t + B_2(t)v_t)dt + B_{01}(t)u_t dw_1(t) + B_{02}(t)v_t dw_2(t), \tag{1.2}$$

где u_t и v_t — векторные сигналы управления и внешнего возмущения соответственно; $w(t)$, с индексами или без них, обозначает векторный винеровский процесс. Уравнение (1.1) предполагается линейным по вектору состояния x_t, так что $a(t,x) = A(t)x$, где $A(t) \in R^{d\times d}$ — матрица $d \times d$ при каждом t, а диффузионная компонента определена функцией $b(t)(\cdot\,;\cdot)$ двух переменных $(x,h) \in R^d \times R^r$, принимающей значения в R^d, при этом отображение $R^d \times R^r \to R^d$ является билинейным. Тем самым при фиксированном h оператор $B(t)h$, определенный соотношением $(B(t)h)x = b(t)(x;h)$, — линейный $R^d \to R^d$. Все матричные функции в (1.1), (1.2) предполагаются непрерывными на каждом конечном интервале значений параметра t. Система (1.1), (1.2) называется ниже (x,u,v)-*мультипликативной*; в частности, система (1.1) (x)-мультипликативна. Мультипликативные модели типа (1.1), (1.2) используются, в частности, в теории H_2/H_∞ — оптимизации стохастических систем [1].

Цель статьи — получение в интегральном виде решения линейного (x,u,v)-мультипликативного уравнения или стохастического аналога его фундаментальной матрицы. Поясним, о какой фундаментальной матрице и каком решении в интегральном виде идет речь. Как известно, в детерминированном случае решение линейного дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x + B(t)$ имеет вид

$$x(t) = R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,\tau)B(\tau)d\tau, \tag{1.3}$$

где $R(t,t_0)$ — *резольвента* (или фундаментальная матрица) однородного, при $B = 0$, уравнения; см., например, [2, стр. 144]. Функция $R(t,t_0)x_0$ есть общее решение однородного уравнения, принимающее значение x_0 при $t = t_0$, а интеграл в (1.3) — это решение возмущенного уравнения, обращающееся в нуль при $t = t_0$. В *стохастическом* случае фундаментальная матрица уравнения (1.1) является матричной *случайной* функцией $\Phi(t,\tau)$, а общее решение возмущенного уравнения, руководствуясь аналогией с (1.3), следует задавать формулой

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) \circ df(\tau), \tag{1.4}$$

в которой интеграл является стохастическим; через $\circ df$ обозначен дифференциал Стратоновича; см., например, [3, стр. 105–109]. Интеграл выбирается стохастическим в смысле Стратоновича по той причине, чтобы правило дифференцирования сложной функции $t \mapsto f(\xi^1(t),\ldots,\xi^d(t))$ представлялось в том же виде, что и в классическом исчислении, а именно в виде

$df = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ d\xi^i$ [3]. Запись интеграла в форме Стратоновича делает возможным распространение некоторых теоретико-групповых методов на стохастический случай. Как известно [4], в детерминированном случае теоретико-групповые концепции позволяют преодолеть трудности исследования многомерных систем, вызванные *некоммутативностью* матричных коэффициентов, задающих динамику системы. Возможно, те же концепции могут оказаться полезными и в проблеме мультипликативности.

Некоторые примеры применения теоретико-групповых методов к статистическим исследованиям известны в литературе. Приведем небольшой список публикаций (см. [5–11]), тематически близких к задаче анализа мультипликативных систем. В [5] рассмотрена задача численной аппроксимации решения стохастического уравнения вида

$$dx_t = (Ax_t + f(x_t))dt + \sum_{i=1}^{n}(B_i x_t + g_i(x_t))dw_i, \quad x(0) = x_0 \in R^d$$

с нелинейными функциями $f, g_i : R^d \to R^d$ и матрицами $A, B_i \in R^{d\times d}$, удовлетворяющими следующим условиям: A, B_i принимают значения в матричной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с коммутаторными соотношениями $[A, B_i] = 0$, $[B_i, B_j] = 0$ для всех i, j. На фоне работ по теоретико-групповому анализу *детерминированных* уравнений, число которых в последнее время явно поубавилось, см. об этом обзор [6], анализ свойств решений и численные алгоритмы нахождения решений (так называемых экспоненциальных интеграторов) для *стохастических* уравнений остается активной областью исследования уравнений как мультипликативных, так и с аддитивными шумами; см., например, [7, 8]. В [9] иследован вопрос о среднеквадратической устойчивости численных методов вычисления экспоненциальных интеграторов. Как показано в [10], теоретико-групповые методы оказались эффективными и для численного интегрирования уравнений с частными производными. Среди работ отечественных авторов отметим исследование мультипликативного стохастического дифференциально-операторного уравнения с операторами A, B, действующими в сепарабельном гильбертовом пространстве [11]. В работе предполагается, что оператор A порождает полугруппу операторов $S(t)$, $t > 0$ класса C_0; это гарантирует корректность задачи Коши для невозмущенного уравнения $\dot{X}(t) = AX(t)$.

В задаче, решаемой в данной статье, рассматривается конечномерное мультипликативное уравнение, для вычисления резольвентного аналога которого применяется теоретико-групповой метод, являющийся обобщением на стохастический случай детерминированного метода Вея–Нормана [12] нахождения резольвент линейных дифференциальных уравнений. В общих чертах суть метода Вея–Нормана заключается в следующем. Если в матричном уравнении $\dot{\Phi}(t) = B(t)\Phi(t)$, $\Phi(0) = E$ (E – единичная матрица) неслучайная функция $B(t)$ принимает значения в матричной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то решение $\Phi(t)$ принадлежит соответствующей группе Ли $\mathcal{G}$. При этом один из способов построения решения $\Phi(t)$ состоит в представлении его конечным произведением матричных экспонент

$$\Phi(t) = \exp(s_1(t)A_1)\dots\exp(s_m(t)A_m), \tag{1.5}$$

где $\{A_1, \dots, A_m\}$ — базис минимальной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденной матрицами $A(t)$ при всех t, а $s_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ — некоторые вещественные функции. Нахождение искомых $s_i(t)$ сводится к решению некоторой системы нелинейных дифференциальных уравнений [12]. В основе предлагаемого здесь *обобщения* метода Вея–Нормана на случай мультипликативного уравнения Ито лежит запись последнего в форме уравнения Стратоновича–Фиска и поиск решения последнего в виде произведения матричных экспонент $\exp(A_i s_i(t))$ с искомыми *семимартингалами* (по терминологии, принятой в [3]) $s_i(t)$. Относительно матриц A_i, $i = 1, \dots, m$, предполагается, как и в детерминированном случае, что они образуют базис некоторой матричной алгебры Ли.

Применения теории групп к задачам анализа и отыскания решений детерминированных дифференциальных уравнений широко известны по монографической литературе; см., например, [4, 13, 14]. Приложения к теории стохастических дифференциальных уравнений значительно более скромные; из учебной литературы отметим [3, 15, 16]. Изложение теоретико-группового метода Вея–Нормана к задаче вычисления резольвент мультипликативных уравнений Ито в литературе, кажется, не встречалось.

2. Постановка задачи

При характеризации в предыдущем разделе стохастической системы как заданной (x, u, v)-мультипликативным уравнением Ито было сделано разделение уравнения на динамическую его часть и вынуждающую силу, от вектора состояния системы не зависящую. Это продиктовано характером поставленной задачи — вычислить фундаментальную матрицу (резольвенту) стохастического уравнения Ито, которая определяется только его однородной, зависящей от x_t частью. Вычислив резольвенту, не трудно получить затем интегральное представление решения уравнения. Руководствуясь этим соображением, можно от общей (x, u, v)-мультипликативной системы перейти сначала к ее динамической части, т.е. к уравнению (1.1), которое является мультипликативным только по состоянию.

Перечислим решаемые в статье задачи. Первой задачей является определение двух видов диффузионной компоненты $b(t)(x_t; dw(t))$ уравнения (1.1) — винеровского и мартингального. Вторая задача, в разделах 3, 4, — это запись мультипликативного уравнения (1.1) в симметризованной форме Стратоновича–Фиска. Третья задача — получение *интегрального* представления решения мультипликативного уравнения (1.1). Здесь в несколько более общем случае диффузионного уравнения с матрицей $\sigma(t, x)$, зависящей *аффинно* (а не просто линейно) от x, см. раздел 5, возникает интересный феномен появления дополнительной вынуждающей силы в интегральном представлении для решения уравнения. При решении в разделах 6 и 7 двух последующих задач возникают теоретико-групповые аспекты решения мультипликативного уравнения, записанного в симметризованной форме, с *разрешимой* (в разделе 6) алгеброй Ли и с произвольной в разделе 7 алгеброй Ли для матричных коэффициентов диффузионной компоненты уравнения. Уравнение в разделе 7 задано при этом в несимметризованной мартингальной форме вместо винеровских процессов. В отдельном разделе приведен *пример* нахождения резольвенты уравнения теоретико-групповым методом. Заключительные замечания и список цитированной литературы завершают работу.

3. Винеровское и мартингальное представления диффузионной компоненты

Оба представления дифференциального уравнения — по винеровскому процессу и по мартингалу для возмущающих сил — достаточно интересны в мультипликативной теории. Мартингальное уравнение рассматривается подробнее в разделе 7.

Предложение 1. Диффузионная компонента $b(t)(x_t; dw(t))$ *однородного уравнения* (1.1) *допускает следующие равносильные представления:*

(a) $b(t)(x_t; dw(t)) = (B_1(t)x_t, \ldots, B_r(t)x_t)dw(t)$, *где* $B_j(t)$, $j = 1, \ldots, r$ *— матрица размера* $d \times d$;

(b) $b(t)(x_t; dw(t)) = \sum\limits_{i=1}^{m} A_i x_t d\zeta^i(t)$, *где* A_i, $i = 1, \ldots, m$ *— матрицы* $d \times d$, *а* $d\zeta^i(t) = \sum\limits_{j=1}^{r} b^i_j(t) dw^j(t)$, $b^i_j(t) \in R$, *где* $\zeta^i(t)$ *— мартингалы.*

Доказательство. Как отмечалось в разделе 1, диффузионная часть $b(t)(x_t; dw(t))$ линейного уравнения при каждом t задается билинейным отображением $b(t)$ произведения $V \times H$, где $V = R^d$, $H = R^r$, векторных пространств в пространство V. При фиксированном $h \in H$ оператор $B(t)h$, определенный равенством $(B(t)h)x = b(t)(x; h)$, является элементом пространства $End\, V$ линейных операторов из V в V. Пусть $\{h_j, j = 1, \ldots, r\}$ — базис в H такой, что в разложении $w(t) = \sum\limits_j w^j(t)h_j$ винеровские процессы $w^j(t)$ взаимно независимы. Имеем

$$b(t)(x; dw(t)) = b(t)\left(x; \sum_{j=1}^{r} dw^j(t)(b(t)h_j)\right) = \sum_{j=1}^{r} dw^j(t)(B(t)h_j)x,$$

где $B(t)h_j \in End\, V$. Обозначив $B_j(t) := B(t)h_j$, получим утверждение (a) $b(t)(x_t; dw(t)) = (B_1(t)x_t, \ldots, B_r(t)x_t)dw(t)$ предложения 1. Таким образом, зависимость $b(t)$ от x задается набором из r произвольных квадратных $d \times d$ матриц $B_j(t)$, не обязательно линейно независимых; см. [1, 17].

Далее, пусть $\{A_i, i = 1, \ldots, m\}$ — базис линейного подпространства $L \subset \subset End\, V$, порожденного операторами $B(t)h_j$. Полагая $B(t)h_j = \sum_{i=1}^m b_j^i(t) A_i$, $j = 1, \ldots, m$, где $b_j^i(t) \in R$, и вводя обозначения $d\zeta^i(t) := \sum_{j=1}^r b_j^i(t) dw^j(t)$, $i = 1, \ldots, m$, будем иметь $b(t)(x; dw(t)) = \sum_{i=1}^m d\zeta^i(t) A_i x$, что завершает доказательство предложения 1. Ниже без потери общности принимаем $\dim L = m = r$.

При доказательстве предложения 1 снос $a(t, x_t)dt$ в уравнении (1.1) не учитывался. Неявно он предполагался нулевым. Его действительно можно обратить в нуль известным преобразованием (разумеется, при этом (1.1) заменится уравнением с другим билинейным отображением $b(t)$). В самом деле, пусть $y_t = \Lambda_t^{-1} x_t$, где Λ_t — матричная экспонента, удовлетворяющая, как известно, интегральному уравнению $\Lambda_t = E + \int_0^t a(s)\Lambda_s ds$ с начальным условием $\Lambda_0 = E$. Так как $dy_t = (d\Lambda_t^{-1})x_t + \Lambda_t^{-1} dx_t$ и $d\Lambda_t^{-1} = -\Lambda_t^{-1} a(t)dt$, то

$$dy_t = \Lambda_t^{-1} a(t) x_t dt + \Lambda_t^{-1} b_t(x_t; dw(t)) - \Lambda_t^{-1} a(t) x_t dt$$

(заметим, что матрицы $a(t)$ и Λ_t коммутируют), тем самым получаем уравнение $dy_t = \Lambda_t^{-1} b_t(\Lambda_t y_t; dw(t))$ с нулевым сносом. Видим, что определенные выше в предложении 1 матрицы $B_j(t)$ заменяются матрицами $\tilde{\Lambda}_t = \Lambda_t^{-1} B_j(t)\, \Lambda_t$, $j = 1, \ldots, r$.

Выясним теперь, как преобразовать мультипликативное уравнение (1.1) к симметризованной форме Стратоновича–Фиска. Выше уже отмечалось, что такое преобразование является необходимым требованием предлагаемой здесь методологии.

П р е д л о ж е н и е 2. В симметризованной форме Стратоновича–Фиска уравнение состояния (1.1)*, записанное в виде*

$$dx_t = a(t)x_t dt + (B_1(t)x_t, \ldots, B_r(t)x_t) dw(t) \tag{3.1}$$

(*см. предложение 1,*(a)) *принимает вид*

$$dx_t = a(t)x_t dt + B_0(t)x_t dt + \sum_{j=1}^r B_j(t) x_t \circ dw^j(t), \tag{3.2}$$

где $B_0(t) := -1/2 \sum_{j=1}^r B_j^2(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отправляясь от теории уравнения марковского типа

$$dx_t = a(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t) dw(t), \tag{3.3}$$

в котором не предполагается даже линейности по x_t функций $a(t, x_t)$ и $\sigma(t, x_t)$ (см., например, [3]), запишем уравнение (3.3) в координатной форме

$$dx_t^i = a^i(t, x_t)dt + \sum_{j=1}^r b_j^i(t, x_t) dw^j(t), \quad i = 1, \ldots, d.$$

Согласно общей теории, уравнение (3.3), с использованием дифференциала Стратоновича–Фиска, представляется в виде

$$dx_t = \bar{a}(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t) \circ dw(t), \tag{3.4}$$

где вектор $\bar{a}(t, x)$ имеет компоненты

$$\bar{a}^i(t, x) = a^i(t, x) - 1/2 \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} b_k^i(t, x) \right) b_k^j(t, x). \tag{3.5}$$

Напомним, что стохастический дифференциал Ито $dw^j(t)$ и дифференциал $\circ dw^j(t)$ связаны формулой

$$x_t dw^q(t) = x_t \circ dw^q(t) - 1/2 dx_t dw^q(t). \tag{3.6}$$

Рассмотрим уравнение (3.1) в форме

$$dx_t = a(t)x_t dt + \sum_{j=1}^{r} B_j(t)x_t dw^j(t) \tag{3.7}$$

и обратимся к формуле (3.6). Поскольку $x_t dw^j(t) = x_t \circ dw^j(t) - 1/2 dx_t dw^j(t)$, имеем, игнорируя пока снос в (3.7), уравнение $dx_t = \sum_j B_j(t)x_t \circ dw^j(t) - -1/2 \sum_j B_q(t)dx_t dw^j(t)$. Замечая, что

$$dx_t dw^j(t) = \sum_k B_k(t)x_t dw^k(t)dw^j(t) = \sum_k B_k(t)x_t \delta_{jk} dt = B_j(t)x_t dt,$$

уравнение (3.1) в преобразованном виде можно записать как

$$dx_t = a(t)x_t dt + \sum_{j=1}^{r} B_j(t)x_t \circ dw^j(t) - 1/2 \sum_{j=1}^{r} B_j^2(t)x_t\, dt, \tag{3.8}$$

что и требовалось. Снос в этом уравнении определяется матрицей $A(t) := := a(t) - 1/2 \sum_{j=1}^{r} B_j^2(t)$; его можно обратить в нуль, перейдя к вектору состояния $y_t = \Lambda_t^{-1} x_t$, где $\Lambda_t = E + \int_0^t A(s)\Lambda_s ds$.

В частности, если матрицы $B_j(t)$, $j = 1, \ldots, r$, коммутируют, то решение последнего уравнения записывается в виде произведения

$$x_t = \prod_{q=1}^{r} \exp\left\{ \int_0^t B_q(s)dw^q(s) - 1/2 \int_0^t B_q^2(s)ds \right\} x_0.$$

Также ясно, что матрицы $B_q(t)$ и $B_q^2(t)$ коммутируют, вследствие чего множители в произведении можно представить в виде

$$\exp\left\{ \int_0^t B_q(s)dw^q(s) \right\} \exp\left\{ -1/2 \int_0^t B_q^2(s)ds \right\}, \quad q = 1, \ldots, r.$$

Решением уравнения $dx_t = B_q(t)x_t \circ dw^q(t)$ с нулевым сносом, с начальным условием x_0 является функция $U_q(t)x_0 = \exp\left\{\int_0^t B_q(s)dw^q(s)\right\} x_0$. Отображение $t \mapsto U_q(t)$ является стохастической резольвентой этого уравнения.

4. Стохастическая резольвента мультипликативного уравнения

В мультипликативном уравнении типа

$$dx_t = a(t)x_t dt + \sum_{j=1}^{r} B_j(t)x_t \circ dw^j(t) \tag{4.1}$$

неслучайную компоненту $a(t)x_t dt$ можно, как было отмечено в разделе 3, обратить в нуль и, следовательно, без потери общности считать уравнение заданным в виде $dx_t = \sum_{j=1}^{r} B_j(t)x_t \circ dw^j(t)$ с новыми матричными коэффициентами. Для этого положим $y_t = \Lambda_t^{-1}x_t$. Тогда $dy_t = \Lambda_t^{-1}b(t)(x_t; dw(t))$. Поскольку $b(t)(x_t; dw(t)) = \sum_{j=1}^{r} B_j(t)x_t dw^j(t)$, то

$$dy_t = \sum_{j=1}^{r} B_j(t)\Lambda_t y_t \circ dw^j(t). \tag{4.2}$$

В рамках теоретико-группового формализма именно матрицы $\tilde{B}_j(t) = \Lambda_t^{-1}B_j(t)\Lambda_t$, а не исходные матрицы B_j, $j = 1, \ldots, r$, должны порождать алгебру Ли, основную в методе Вея–Нормана, где $\Lambda_t = \exp\int_0^t a(s)ds$ — экспонента матричной функции $t \mapsto \int_0^t a(s)ds$.

Дадим теперь определение (стохастической) резольвенты уравнения, линейного по x_t. Если Ψ_t — решение уравнения

$$d\Psi_t = \sum_{j=1}^{r} \Lambda_t^{-1}B_j(t)\Lambda_t\Psi_t \circ dw^j(t), \quad \Psi_t|_{t=0} = E \tag{4.3}$$

с нулевым сносом, то фундаментальную матрицу (резольвенту) $\Phi(t)$ исходного уравнения (4.1) определим формулой $\Phi(t) = \Lambda_t\Psi_t$. Но так как уравнение (4.1) равносильно уравнению Ито $dx_t = \sum_{j=1}^{r} dw^j(t)B_j(t)x_t$, то, следовательно, $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнению Стратоновича

$$d\Phi_t = a(t)\Phi_t dt + \sum_{j=1}^{r} B_j(t)\Phi_t \circ dw^j(t), \quad \Phi_t|_{t=0} = E. \tag{4.4}$$

Если $f(t)$ — вынуждающая сила в неоднородном стохастическом уравнении, то решение последнего должно иметь интегральное представление (1.4).

5. Интегральное представление Коши решения мультипликативного уравнения с аффинными коэффициентами

Уравнения с аффинными коэффициентами необходимы в теории таких линейных управляемых систем, которые мультипликативны не только по вектору состояния, но и по векторам управления и внешнего возмущения. Теория стохастической резольвенты предыдущего раздела касалась мультипликативного уравнения с линейными, но не *аффинными* коэффициентами. Теперь рассмотрим векторное уравнение (с векторным винеровским процессом) вида

$$dx_t = a(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)d\,w(t), \;\; x_0 \in R^d, \tag{5.1}$$

где $a(t,x) = a(t)x + a_0(t)$, $\sigma(t,x) = B(t,x) + b_0(t)$, $a(t) \in R^{d\times d}$, $a_0(t) \in R^d$, $B(t,x)$, $b_0(t) \in R^{d\times r}$, $w(t) \in R^r$. Как установлено в разделе 4, см.(4.1), если (5.1) — мультипликативная система, то $B(t,x) = (B_1(t)x, \ldots, B_r(t)x)$ — матрица со столбцами $B_j(t)x$, где $B_j(t) \in R^{d\times d}$, $j = 1, \ldots, r$. Далее, $b_0(t)$ — матрица со столбцами $b_{0j}(t)$, $j = 1, \ldots, r$. Частный случай одномерной ($x_t \in R$) системы с аффинными коэффициентами и скалярным $w(t)$ рассмотрен в [15]. В векторном случае $x_t \in R^d$ найдем фундаментальную матрицу уравнения (5.1).

Предложение 3. Решение мультипликативного уравнения с аффинными относительно x_t коэффициентами имеет следующее интегральное представление:

$$x_t = \Phi_t \left(x_0 + \int_0^t \Phi_s^{-1} \left(a_0(s) - \sum_{j=1}^r B_j(s) b_{0j}(s) \right) ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \Phi_s^{-1} \sum_{j=1}^r b_{0j}(s) dw^j(s) \right). \tag{5.2}$$

Здесь Φ_t — определенная в предыдущем разделе резольвента (4.1)*, записанная для уравнения* (5.1)*, в котором приняты условия $a_0(t) = 0$, $b_{0j}(t) = 0$, $j = 1, \ldots, r$.*

Заметим, что появление под интегралами в (5.2), помимо $a_0(s)ds + \sum_{j=1}^r b_{0j}(s)dw^j(s)$, *дополнительной* вынуждающей силы $B(s)b_0(s) := - \sum_{j=1}^r B_j(s)b_{0j}(s)ds$ (она вызвана "аффинной" добавкой $b_0(s)$) нельзя было предвидеть заранее, но непосредственная проверка показывает, что функция (5.2) действительно удовлетворяет уравнению (5.1).

Доказательство. Снова обратимся к уравнению (5.1). В стохастическом случае применим метод, аналогичный детерминированному методу вариации постоянной. Положим $x_t = \Phi_t\eta_t$ и рассмотрим η_t в качестве новой неизвестной вместо x_t. Дифференцируя $x_t = \Phi_t\eta_t$ стохастически, получаем

$$dx_t = (d\Phi_t)\eta_t + \Phi_t d\eta_t + d\Phi_t d\eta_t,$$

или в силу определения Φ_t как решения уравнения (4.4),

$$dx_t = \left(a(t)dt + \sum_{j=1}^{r} dw^j B_j(t)\right) x_t + \Phi_t d\eta_t + \left(a(t)dt + \sum_{j=1}^{r} dw^j B_j(t)\right) \Phi_t d\eta_t.$$

Приравняв правые части этого уравнения и исходного уравнения (см. (5.1))

$$dx_t = (a(t)x_t + a_0(t))dt + \sum_{j=1}^{r} dw^j \Big(B_j(t)x_t + b_{0j}(t)\Big),$$

после сокращений получим

$$(5.3) \qquad \left(E + a(t)dt + \sum_{j=1}^{r} dw^j(t)B_j(t)\right) \Phi_t d\eta_t = a_0(t)dt + \sum_{j=1}^{r} b_{0j}(t)dw^j(t).$$

Поскольку, если действовать формально,

$$\left(E + a(t)dt + \sum_{j=1}^{r} dw^j B_j(t)\right)^{-1} =$$

$$= E - \left(a(t)dt + \sum_{j=1}^{r} dw^j B_j(t)\right) + \left(a(t)dt + \sum_{j=1}^{r} dw^j B_j(t)\right)^2 + \dots$$

и

$$\left(a(t)dt + \sum_{j=1}^{r} dw^j B_j(t)\right)^2 = \sum_{j=1}^{r} B_j^2 d(t),$$

из (5.3) получаем

$$(5.4) \qquad d\eta_t = \Phi_t^{-1} \left(a_0(t)dt - \sum_{j=1}^{r} B_j(t)b_{0j}(t)dt + \sum_{j=1}^{r} dw^j(t)b_{0j}(t)\right).$$

Это уравнение выражает тот факт, что η_t есть примитивная для правой части в (5.3), так что интегрирование (5.4) дает в точности формулу (5.2). Будучи выраженной через резольвенту $\mathcal{R}(t,s) = \Phi_t\Phi_s^{-1}$, эта же формула дает интегральное представление Коши решения мультипликативного уравнения (4.1) с аффинными коэффициентами. Что и требовалось доказать.

6. Мультипликативное уравнение с разрешимой алгеброй Ли

В этом разделе исчерпывающее решение задачи об интегральном представлении решения мультипликативного уравнения получается ценой сильного предположения о том, что алгебра Ли, ассоциированная с уравнением, является разрешимой. Результат с разрешимой алгеброй Ли получен Х. Кунитой [18] и приведен в [3] в качестве одного из примеров[1]. Уравнение состояния предполагается здесь априори заданным в симметризованной форме Стратоновича–Фиска, коэффициенты уравнения не зависят от t.

Итак, рассматривается уравнение (с постоянными коэффициентами)

$$\tag{6.1} \begin{gathered} dx_t = (B_0 x_t + b_0)dt + \sum_{p=1}^{r}(B_p x_t + b_p) \circ dw^p(t), \\ B_p \in R^{d\times d}, \ \ b_p \in R^d, \ \ p = 0, 1, \ldots, d. \end{gathered}$$

Алгебра Ли, порожденная векторными полями $L_p = \sum_{i=1}^{d}(B_p x + b_p)^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $p = 0, 1, \ldots, r$, разрешима, что имеет место при $(B_p)^i_j = 0$ для $i > j$, $p = 0, 1, \ldots, r$. Это условие означает, что в каждой из матриц B_p ее элементы под главной диагональю равны нулю. В частности, при $i = d$ единственным ненулевым элементом последней, d-й строки является лишь диагональный элемент $(B_p)^d_d$, $p = 0, 1, \ldots, r$. Из уравнения (6.1) следует, что при $i = d$

$$\tag{6.2} dx^d_t = \Big((B_0)^d_d x^d_t + b^d_0\Big)\, dt + \sum_{p=1}^{r} \Big((B_p)^d_d x^d_t + b^d_p\Big) \circ dw^p(t).$$

Это (скалярное) стохастическое уравнение аналогично детерминированному в том смысле, что записано с использованием дифференциала Стратоновича–Фиска, поэтому его решение имеет вид

$$\tag{6.3} x^d_t = e^{c_d(t)} \left(x^d_0 + \int_0^t e^{-c_d(s)} \circ df_d(s) \right),$$

где функция $c_d(t)$ под знаком экспоненты и вынуждающая сила $f_d(t)$ заданы соответственно формулами

$$c_d(t) = (B_0)^d_d\, t + \sum_{p=1}^{r}(B_p)^d_d w^p(t), \quad f_d(t) = b^d_0\, t + \sum_{p=1}^{r} b^d_p w^p(t).$$

Действуя аналогично, рассмотрим уравнение для x^{d-1}_t:

$$\tag{6.4} \begin{aligned} dx^{d-1}_t = {} & \Big((B_0)^{d-1}_{d-1} x^{d-1}_t + (B_0)^{d-1}_d x^d_t + b^{d-1}_0\Big)\, dt + \\ & + \sum_{p=1}^{r} \Big((B_p)^{d-1}_{d-1} x^{d-1}_t + (B_p)^{d-1}_d x^d_t + b^{d-1}_p\Big) \circ dw^p(t). \end{aligned}$$

[1] Простой пример разрешимой алгебры Ли порождается группой трансляций плоскости R^2 и вращений вокруг оси, к ней перпендикулярной. Алгебра Ли трехмерна, ее коммутационными соотношениями являются $[X_1, X_2] = 0$, $[X_1, X_3] = X_2$, $[X_3, X_2] = X_1$ [19].

От x_t^{d-1} в правой части уравнения (6.4) зависит сумма

$$(B_0)_{d-1}^{d-1} x_t^{d-1} dt + \sum_{p=1}^{r} (B_p)_{d-1}^{d-1} x_t^{d-1} \circ dw^p(t).$$

Интеграл от коэффициента при x_t^{d-1} в этой сумме обозначим через

$$c_{d-1}(t) := (B_0)_{d-1}^{d-1} t + \sum_{p=1}^{r} (B_p)_{d-1}^{d-1} w^p(t).$$

Не зависящие от x_t^{d-1} слагаемые в правой части уравнения (6.4) образуют сумму

$$df_{d-1}(t) := \left((B_0)_d^{d-1} x_t^d + b_0^{d-1}\right) dt + \sum_{p=1}^{r} \left((B)_d^{d-1} x_t^d + b_p^{d-1}\right) \circ dw^p(t), \tag{6.5}$$

в которой x_t^d уже известна как решение (6.3) уравнения (6.2). Решение уравнения (6.4) записывается, следовательно, в виде

$$x_t^{d-1} = e^{c_{d-1}(t)} \left(x_0^{d-1} + \int_0^t e^{-c_{d-1}(s)} \circ df_{d-1}(s) \right). \tag{6.6}$$

Процедура последовательного решения скалярных уравнений для компонент x_t^k, $k = n, n-1, \ldots, 1$ вектора $x_t \in R^n$ вполне очевидна из вышеизложенного. Однако не очевидной остается равносильность такой формы решения и той, которая приведена в [3]. Чтобы равносильность установить, запишем исходное уравнение (6.1) покомпонентно:

$$dx_t^i = \sum_{j \geqslant i} \left((B_0)_j^i x_t^j + b_0^i\right) dt + \sum_{p=1}^{r} \sum_{j \geqslant i} \left((B_p)_j^i x_t^j + b_p^i\right) \circ dw^p(t). \tag{6.7}$$

При фиксированном i слагаемые в правой части, зависящие от x_t^j с $j \geqslant i$, играют особую роль. Во-первых, дифференциал dx_t^i связан с переменной x_t^j коэффициентом $(B_0)_j^i dt + \sum_{p=1}^{r} (B_p)_j^i dw^p(t)$, интеграл от которого обозначим через c_j^i:

$$c_j^i(t) := (B_0)_j^i t + \sum_{p=1}^{r} (B_p)_j^i w^p(t), \quad j = i, i+1, \ldots, d.$$

Диагональный элемент $c_i^i(t)$ этой матрицы совпадает с функцией, которая выше обозначалась через $c_i(t)$. Во-вторых, сумма слагаемых справа в (6.7) с индексами $j > i$ получает представление $\sum_{j=i+1}^{d} x_t^j \circ dc_j^i(t)$. Наконец, члены, вообще не зависящие от каких-либо компонент вектора x_t, образуют сумму

$\sum_{p=1}^{r} b_p^i dw^p(t) + b_0^i dt$. Таким образом, решение системы уравнений (6.7) задается формулами

$$x_t^d = e^{c_d^d(t)} \left(x_0^d + \int\limits_0^t e^{-c_d^d(s)} \circ df_d(s) \right), \quad f_d(t) = b_0^d t + \sum_{p=1}^{r} b_p^d dw^p(t),$$

если $i = d$, и формулами

$$x_t^i = e^{c_i^i(t)} \left(x_0^i + \int\limits_0^t e^{-c_i^i(s)} \circ df_i(s) \right),$$

где

$$f_i(t) := \sum_{j=i+1}^{d} \int\limits_0^t x^j(s) \circ dc_j^i(s) + b_0^i t + \sum_{p=1}^{r} b_p^i dw^p(t),$$

если $i = d-1, d-2, \ldots, 1$ [3].

7. Алгебра Ли мультипликативного уравнения с непрерывными семимартингалами

Рассмотрим чуть более общий случай уравнения Ито

$$dx_t = \sum_{p=1}^{m} A_p x_t d\zeta^p(t), \quad \zeta(0) = 0 \tag{7.1}$$

с непрерывными семимартингалами $\zeta^i(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^m b_j^i(t) dw^j(t)$ вместо винеровских процессов $w^j(t)$, $j = 1, \ldots, m$. Матрицы A_p предполагаются некоммутирующими, порождающими произвольную конечномерную алгебру Ли. Следует отметить, что тема о взаимодействии *стохастической* структуры дифференциального уравнения с *алгебраической* теоретико-групповой структурой его коэффициентов остается к настоящему времени недостаточно исследованной.

Предположим, что уравнение имеет единственное решение x_t, $t > 0$, тогда x_t линейно зависит от x_0. Пусть $x_t = U(t)x_0$. Решением уравнения $dx_t = A_p x_t d\zeta^p(t)$, $\zeta(0) = 0$ с единственной матрицей A_p и супермартингалом $\zeta^p(t)$ является экспоненциальный супермартингал (если $\sum_j (b_j^p)^2 < \infty$)

$$\sigma_p(t) = e^{A_p \zeta^p(t) - 1/2 A_p^2 <\zeta^p>(t)} \sigma_p(0),$$

где $<\zeta^p>(t) = \sum_j \int_0^t (b_j^p)^2(s) ds$; см. [20, раздел 2.7]. Для получения решения снова воспользуемся приемом, уже изложенным во введении, а именно: запишем исходное уравнение Ито (7.1) в симметризованной форме Стратоновича–Фиска и применим к полученному уравнению аналог детерминированного метода Вея–Нормана [12]. После этого не составит труда получить интегральное представление решения уравнения (7.1).

Т е о р е м а. Пусть

$$dx_t = \sum_{p=1}^{m} A_p x_t d\zeta^p(t), \quad \zeta(0) = 0 \tag{7.2}$$

— стохастическая система с семимартингалами

$$\zeta^i(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^{m} b_j^i(t) dw^j(t).$$

Функции $b_j^p(t)$ известны. Рассмотрим функции

$$F_i = \prod_{k=1}^{i-1} e^{X_k s_k} X_i \prod_{k=i-1}^{1} e^{-X_k s_k},$$

где $X_1, \ldots, X_n$ — базис алгебры Ли, порожденной матричными коэффициентами $A_p(t)$, $p = 1, \ldots, m$, а $s^i(t)$ — искомые функции. Тогда для дифференциалов $\circ ds^i(t)$ неизвестных функций $s^i(t)$ справедлива система уравнений $s^i(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(t) \circ ds^i(t) = \sum_{p=1}^{n} \tilde{A}_p(t) \circ d\zeta^p(t). \tag{7.3}$$

Через функции $s^i(t)$ выражается решение $x_t = U(t)x_0$ исходного уравнения (7.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имея в виду сделанные замечания, запишем уравнение (7.1) в симметризованном виде. Имеем $x_t \cdot d\zeta^p(t) = x_t \circ d\zeta^p(t) - 1/2\, dx_t \cdot d\zeta^p(t)$, где

$$dx_t \cdot d\zeta^p(t) = \sum_{q=1}^{m} A_q x_t\, d\zeta^q(t) \cdot d\zeta^p(t).$$

Так как $d\zeta^q(t) \cdot d\zeta^p(t) = \sum_{j=1}^{r} b_j^q(t) b_j^p(t)\, dt =: c^{qp}(t)dt$, где $c^{qp}(t)$ — элементы матрицы $c(t) = b^*(t)b(t)$ порядка $m \times m$, а матрицы $b(t) = (b_j^p(t))$ — порядка $r \times m$, то

$$x_t \cdot d\zeta^p(t) = x_t \circ d\zeta^p(t) - 1/2 \sum_{q=1}^{m} A_q\, x_t c^{qp}(t)dt,$$

и уравнение (7.1) записывается в виде

$$dx_t = a(t)x_t dt + \sum_{p=1}^{m} A_p x_t \circ d\zeta^p(t) \tag{7.4}$$

с коэффициентом сноса $a(t) = -1/2\sum_{p,q=1}^{m} A_p A_q\, c^{qp}(t)$. Фундаментальную матрицу уравнения (7.3), как и выше в разделе 5, отыскиваем в виде произведения $\Phi_t = \Lambda_t \Psi_t$, где матрица $\Lambda_t = \exp\{\int_0^t a(s)ds\}$ удовлетворяет матричному уравнению $d\Lambda_t = a(t)\Lambda_t dt$. Учитывая, что $\Psi_t = \Lambda_t^{-1}\Phi_t$ и $d\Psi_t = (d\Lambda_t^{-1})\Phi + \Lambda_t^{-1} d\Phi_t$, а также $d\Lambda_t^{-1} = -\Lambda_t^{-1}(d\Lambda_t)\Lambda_t^{-1}$, для неизвестной функции Ψ_t получаем матричное дифференциальное уравнение

$$d\Psi_t = \sum_{p=1}^{m} \big(\Lambda_t^{-1} A_p \Lambda_t\big)\Psi_t \circ d\zeta_t^p. \tag{7.5}$$

Матричный коэффициент сноса обращается здесь в нуль, а матричные коэффициенты A_p исходного уравнения (7.1) переходят в коэффициенты $\tilde{A}_p(t) = \Lambda_t^{-1} A_p \Lambda_t$. В таком случае из теоремы Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа [21], согласно которой $a,\, b \in L \Rightarrow e^a b e^{-a} \in L$, следует, что также и $\tilde{A}_p \in L$, $p = 1, \ldots, m$. Здесь возникает ограничение для применения теоретико-групповых методов, вызванное необходимостью преобразования уравнения Ито к его симметризованной форме. Возможно, по этой причине в большинстве статистических приложений групповой анализ применяется к уравнениям, заданным сразу в форме Стратоновича–Фиска.

Чтобы продолжить тему теоретико-группового анализа уравнения (7.5), здесь тоже предположим, что матричные коэффициенты $\tilde{A}_p(t) = \Lambda_t^{-1} A_p \Lambda_t$ в уравнении (7.5) известные априори заданные и $\tilde{L}$ есть порожденная ими при всех t алгебра Ли с некоторым базисом $\{X_1, \ldots, X_n\}$, тогда к алгебре $\tilde{L}$ можно применить метод Вея–Нормана. Ниже допущение о существовании алгебры Ли $\tilde{L}$ для уравнения (7.5) считаем выполненным.

Намереваясь искать фундаментальную матрицу Ψ_t в виде произведения $\prod_{i=1}^{n} e^{X_i s^i(t)}$ с неизвестными скалярными функциями $s^i(t)$, рассмотрим матричную функцию

$$u(s) = u(s_1, \ldots, s_n) = e^{X_1 s_1} \cdots e^{X_n s_n}, \quad s_i \in R, i = 1, \ldots, n$$

(предостерегаем от смешения числовой переменной s_i с функцией $s^i(t)$). Частная производная $\frac{\partial}{\partial s_i} u(s)$ равна $u_{s_i} = \prod_{k=1}^{i-1} e^{X_k s_k} X_i \prod_{k=i}^{n} e^{X_k s_k}$, что можно записать в виде $u_{s_i} = F_i u(x)$, где обозначено $F_i = \prod_{k=1}^{i-1} e^{X_k s_k} X_i \prod_{k=i-1}^{1} e^{-X_k s_k}$. Поэтому дифференциал Стратоновича–Фиска функции $t \mapsto \Psi_t = u(s^1(t), \ldots, s^n(t))$ равен

$$d\Psi_t = \sum_{i=1}^{n} F_i(t)\Psi_t \circ ds^i(t),$$

где $F_i(t)$ получается из формулы для F_i подстановкой в нее $s^i(t)$ вместо s_i для всех $i = 1, \ldots, n$. Сравнивая $d\Psi_t$ с дифференциалом для Ψ_t из уравнения (7.5), которое (заменив m на n) перепишем в виде $d\Psi_t = \sum_{p=1}^{n} \tilde{A}_p(t)\Psi_t \circ d\zeta^p(t)$, получим, после сокращения на неособенную матрицу Ψ_t, основное уравнение для дифференциалов $\circ\, ds^i(t)$ искомых процессов $s^i(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(t) \circ ds^i(t) = \sum_{p=1}^{n} \tilde{A}_p(t) \circ d\zeta^p(t). \tag{7.6}$$

Напомним еще раз, что имеют место соотношения

$$d\zeta^p(t) = \sum_{j=1}^{r} b_j^p(t) dw^j(t), \ \ p = 1, \dots, n, \quad ds^q(t) = \sum_{j=1}^{r} g_j^q(t) dw^j(t), \ \ q = 1, \dots, n,$$

где функции $b_j^p(t)$ известны, а функции $g_j^q(t)$ искомые, при этом $n = \dim \tilde{L}$. Если разложить обе части основного уравнения (7.6) по базису $\{X_1, \dots, X_n\}$ алгебры Ли $\tilde{L}$, то получим систему уравнений, связывающих неизвестные функции g_j^p с известными b_j^p. Уравнение (7.6) получено в предположении, что коэффициент сноса $a(t)$, см. уравнение (7.4), равен нулю. Последнее обеспечено преобразованием исходного уравнения (7.4) к уравнению (7.5). Доказательство завершено.

8. Пример

Рассмотрим пример решения уравнения Ито типа (7.1), в котором предположение $a(t) = 0$ нарушается, но по-прежнему $a(t) \in \tilde{L}$. Фундаментальная матрица уравнения состояния находится в виде произведения экспоненциальных семимартингалов. Это пример использования модификации метода Вея–Нормана (его стохастического варианта).

Найдем фундаментальную матрицу U_t стохастического уравнения $dx_t = \sum_{p=1}^{3} X_p x_t d\zeta^p(t)$, $d\zeta^p(t) = \sum_{j=1}^{3} b_j^p(t) dw^j(t)$, $\zeta_i(0) = 0$. Пусть $L = L_3$ — алгебра Ли размерности $\dim L = 3$ с базисом (X_i) и таблицей умножения $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_2, X_3] = [X_1, X_3] = 0$. Алгебра L_3 допускает представление (3×3)-матрицами $X_1 = E_{12}$, $X_2 = E_{23}$, $X_3 = E_{13}$ (E_{ij} — матричные канонические единицы), при этом $X_i^2 = 0$ для всех i. Матрицу U_t будем искать в виде произведения $U_t = \prod_{i=1}^{3} \exp\{s^i(t) X_i\}$, где компоненты $Z_k(t) = s^k(t) X_k$ отсутствуют в силу $X_k^2 = 0$, а функции $s^i(t)$ — подходящим образом подобранные случайные процессы с дифференциалами $ds^k(t) = \sum_{j=1}^{3} g_j^k(t) dw^j(t)$, $s^k(0) = 0$. Положим

$$F_1(t) = X_1, \ F_2(t) = e^{Z_1(t)} X_2 e^{-Z_1(t)}, \ F_3 = e^{Z_1(t)} e^{Z_2(t)} X_3 e^{-Z_2(t)} e^{-Z_1(t)}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$X_i^2 = 0 \quad \forall i, \ \ F_1 = X_1, \ \ F_2 = X_2 + s_1 X_3, \ \ F_3 = X_3, \ \ F_1 F_2 = X_3,$$

остальные $F_i F_j$ нулевые. Используя изложенную в разделе 3 модификацию метода Вея–Нормана составления уравнений для неизвестных функций (в этом примере ими являются $s^i(t)$), получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{3} F_i ds^i = \sum_{i=1}^{3} X_i d\zeta^i.$$

Учитывая формулы для F_i в разложении по базисным X_i, из этого уравнения получаем

$$ds^1 = d\zeta^1,\ \ ds^2 = d\zeta^2,\ \ ds^3 = d\zeta^3 - s^1 ds^2 - ds^1 ds^2. \tag{8.1}$$

Чтобы проверить правильность полученного решения, найдем стохастический дифференциал функции U_t, вычислив предварительно саму функцию.

$$\exp\{s^1X_1\} = I + s^1X_1,\ \ \exp\{s^2X_2\} = I + s^2X_2,\ \ \exp\{s^3X_3\} = I + s^3X_3,$$

то, перемножая, находим $U_t = I + s^1X_1 + s^2X_2 + (s^3 + s^1s^2)X_3$, и, стало быть, $dU_t = X_1ds^1 + X_2ds^2 + X_3(ds^3 + d(s^1s^2))$, где, разумеется, $d(s^1s^2) = s^1ds^2 + s^2ds^1 + ds^1\,ds^2$. Подставив сюда выражения для ds^i из (8.1), после сокращений получаем $X_1d\zeta^1 + X_2d\zeta^2 + X_3d\zeta^3$, что совпадает с коэффициентом в правой части исходного уравнения Ито. Таким образом, решение стохастического уравнения Ито найдено в виде произведения стохастических семимартингалов (“стохастических экспонент”).

9. Заключение

В основе интегрального представления решения линейного стохастического уравнения лежит, как и в детерминированном случае, фундаментальная матрица решений, через которую выражается функция Грина для неоднородного уравнения. При отыскании фундаментальной матрицы многомерного уравнения основная трудность заключается в некоммутативности матричных коэффициентов сноса и диффузионной компоненты.

Некоммутативность матриц преодолевается известным способом, если они находятся в инволюции. Обращаясь к методологии теории групп, следует предположить, что коэффициенты уравнения принадлежат некоторой матричной алгебре Ли L, замкнутой относительно матричного коммутатора. Для линейной системы с диффузионными компонентами, зависящими только от винеровских процессов, но не зависящими от вектора состояния, ассоциированная с системой алгебра Ли устроена довольно просто: она порождается коэффициентами диффузии и сноса. В случае диффузии, зависящей линейно от вектора состояния, требуется предварительное преобразование исходного уравнения к форме, использующей дифференциал Стратоновича–Фиска. Коэффициент сноса становится при этом зависящим от квадратов коэффициентов диффузии, а диффузионные коэффициенты, в свою очередь, претерпевают преобразования, зависящие от коэффициента сдвига. И только в коммутативном случае (или в случае разрешимой алгебры), удается избежать отмеченных трудностей. Таким образом, положение дел с приложением стандартных теоретико-групповых концепций к стохастическому уравнению оказывается не вполне удовлетворительным. Возможно, какая-то иная, чем алгебра Ли, алгебраическая структура, окажется в этой задаче более подходящей, но выяснение этого вопроса требует дополнительного изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petersen I.R., Ugrinovsky V.A., Savkin A.V.* Robust Control Design using H_∞-methods. London. Springer. ISBN 1-85233-171-2. 2006.
2. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.
3. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.
4. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
5. *Erdogan U., Lord G.J.* A New Class of Exponential Integrators for Stochastic Differential Equations with Multiplicative Noise // arXiv:1608.07096v2. 2016.
6. *Hochbruck M., Ostermann A.* Exponential Integrators // Acta Numerica. 2010. No. 19. P. 209–286.
7. *Mora C.M.* Weak Exponential Schemes for Stochastic Differential Equations with Additive Noise // IMA J. Numer. Anal. 2005. V. 25. No. 3. P. 486–506.
8. *Jimenez J.C., Carbonell F.* Convergence Rate of Weak Local Linearization Schemes for Stochastic Differential Equations with Additive Noise // J. Comput. Appl. Math. 2015. V. 279. P. 106–122.
9. *Komori Y., Burrage K.* A Stochastic Exponential Euler Scheme for Simulation of Stiff Biochemical Reaction Systems // BIT. 2014. V. 54. No. 4. P. 1067–1085.
10. *Lord G.J., Tambue A.* Stochastic Exponential Integrators for the Finite Element Discretization of SPDEs for Multiplicative and Additive Noise // IMECO J. Numer. Anal. 2012. drr059.
11. *Мельникова И.В., Альшанский М.А.* Стохастические уравнения с неограниченным операторным коэффициентом при мультипликативном шуме // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 6. С. 1354–1371.
12. *Wei J., Norman E.* On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. No. 2. P. 327–334.
13. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
14. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
15. *Каллианпур Г.* Стохастическая теория фильтрации. М.: Наука, 1987.
16. *Хида Т.* Броуновское движение. М.: Наука, 1987.
17. *Шайкин М.Е.* Мультипликативные стохастические системы с несколькими внешними возмущениями // АиТ. 2018. № 2. С. 122–134.

   Shaikin M.E. Multiplicative Stochastic Systems with Multiple External Disturbances // Autom. Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 2. P. 299–309.

18. *Кунита Х.* On the representation of solutions of stochastic differential equations. Seminare de Prob. XIV, Lecture Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag, 1980. V. 784. P. 282–304.

19. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. Том 1. М.: Мир, 1980.

20. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972.

21. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Часть 1. М.: Мир, 1976.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 01.09.2022

После доработки 25.05.2023

Принята к публикации 09.06.2023