Автоматика и телемеханика, № 8, 2023

Нелинейные системы

© 2023 г. А.М. ЦИРЛИН, д-р техн. наук (tsirlin@sarc.botik.ru)
(Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН,
Переславль-Залесский)

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КАРАТЕОДОРИ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА В УСРЕДНЕННЫХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Рассмотрена связь между усреднением функций по времени и ее усреднением по множеству значений искомых переменных. Исследованы задачи оптимизации, критерий и ограничения которых содержат усреднение функций или функции от средних значений переменных. Показано, что условия оптимальности этих задач имеют форму принципа максимума, а их оптимальное решение во временной области — кусочно-постоянная функция. Доказано обобщение теоремы Каратеодори о выпуклых оболочках функции. Получены условия оптимальности для задач нелинейного программирования с усреднением по части переменных и функциями, зависящими от средних значений переменных.

Ключевые слова: усредненные ограничения, скользящие режимы, выпуклые оболочки функций, функция достижимости, принцип максимума в усредненных задачах.

DOI: 10.31857/S0005231023080044, **EDN:** HBDMDH

1. Введение

Для широкого класса задач критерий оптимальности и все или часть ограничений усредненно зависят от всех или от части переменных. Такие задачи возникают, когда в технологических процессах некоторые подлежащие выбору переменные должны быть неизменны (конструктивные параметры), а другие могут изменяться во времени, причем наличие устройств, сглаживающих колебания, например емкостей, приводит к усредненному влиянию этих изменений [1]. Такие задачи возникают при оптимальном управлении макросистемами (системами, состоящими из множества индивидуально не управляемых элементов), в которых можно управлять только средними по множеству этих элементов показателями. Все подобные задачи называют задачами усредненной оптимизации.

В системах, у которых множество допустимых управлений невыпукло, в частности в релейных системах, оптимальным решением часто оказывается

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-61-46013).

скользящий режим, в котором изменение состояния объекта усредненно зависит от сколь угодно часто переключающегося управления [2–5]. Усредненные задачи возникают также как вспомогательные оценочные при оптимизации циклических режимов, когда введение усреднения расширяет множество допустимых решений и упрощает решение, позволяя получить оценку эффективности циклического режима, не находя формы оптимальных циклов. Значение такой оценочной задачи заведомо «не хуже», чем значение исходной, а ее оптимальное решение содержит полезную информацию о характере оптимального решения исходной. Для определенности будем рассматривать задачи на максимум критерия оптимальности.

В первом разделе данной работы обсудим связь между усреднением функций, аргумент которых изменяется во времени, по множеству значений этого аргумента и по времени и определим, что является искомым решением усредненной задачи и как это решение может быть реализовано.

Во втором разделе сформулируем теорему об условиях оптимальности задачи нелинейного программирования с усреднением критерия оптимальности и ограничений и дадим ее доказательство, базирующееся на теореме Каратеодори о выпуклых оболочках функций.

В третьем разделе рассмотрим возможные обобщения доказанной теоремы.

2. О связи между усреднением по времени и усреднением по множеству

Среднее значение непрерывной скалярной функции $f(x(t))$, $t \in [0, \tau]$, $x \in V \subset R^n$ может быть вычислено по времени как

$$\overline{f_t(x)} = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau f(x(t))dt \tag{1}$$

либо по множеству как

$$\overline{f_p(x)} = \int\limits_V f(x)p(x)dx. \tag{2}$$

Функцию $p(x)$ называют плотностью распределения. В том случае, когда $x(t)$ — случайная функция, $p(x)$ — плотность распределения случайной величины. Она неотрицательна, и ее интеграл на V равен единице. В частности, множество V может быть паралелепипедом в R^n. В нашем случае $x(t)$ — детерминированная функция, поэтому остановимся подробнее на свойствах $p(x)$ такой, чтобы результаты усреднения по формулам (1) и (2) были одинаковы.

Будем считать переменную x скалярной, множество V здесь и ниже ограниченным и замкнутым и введем функцию $\theta(x_0)$, $x_0 \in V$, равную суммарной продолжительности тех интервалов времени t, для которых $x(t) \leqslant x_0$.

Очевидно, что эта функция не превосходит τ. Через $P(x_0)$ обозначим отношение $\frac{\theta(x_0)}{\tau}$, т.е. долю интервала $[0, \tau]$, для которой $x(t) \leqslant x_0$. Эта функция монотонно растет с ростом x_0, изменяясь от нуля до единицы. Она аналогична функции распределения случайной величины.

Плотность распределения равна

$$p(x_0) = \frac{dP(x_0)}{dx_0} = \frac{1}{\tau}\frac{d\theta(x_0)}{dx_0} = \frac{1}{\tau}\frac{1}{\sum\limits_{\nu} \left|\frac{dx_\nu}{dt}\right|_{x_\nu = x_0}}. \tag{3}$$

Интервал θ увеличивается с ростом x_0 при любом знаке производной при тех значениях x_ν функции $x(t)$, в которых она равна x_0.

Если при некотором значении x_0 функция $x(t)$ постоянна в течение доли γ от интервала $[0, \tau]$, то функция $P(x_0)$ испытывает в этой точке скачок величиной γ, а плотность распределения в ней равна $\gamma\delta(x - x_0)$.

Примеры

1. **Линейные функции.** Пусть $x(t) = \frac{ht}{\tau}$. Тогда по формуле (3) получим $p(x) = \frac{1}{h} = \text{const}$. Та же плотность распределения соответствует и всем треугольникам с основанием $[0, \tau]$ и высотой h.

2. **Кусочно-постоянные функции.** Эти функции принимают дискретные значения x_i, каждое в течение доли γ_i от интервала $[0, \tau]$. Любой такой функции по формуле (3) соответствует плотность распределения

$$p(x_0) = \sum_i \gamma_i \delta(x - x_i), \quad \gamma_i > 0, \quad \sum_i \gamma_i = 1. \tag{4}$$

Порядок, в котором кусочно-постоянная функция принимает то или иное из возможных значений, роли не играет.

Из этих примеров видно, что *каждой функции $x(t)$ соответствует плотность распределения ее значений $p(x)$, определенная на V, а каждой плотности распределения соответствует сколь угодно много функций $x(t)$, для которых $\overline{f_p(x)} = \overline{f_t(x)}$.* Исключением является плотность распределения вида $p(x) = \delta(x - x_1)$. В этом случае соответствующая ей функция равна $x(t) = x_1 = \text{const}$ на всем интервале $[0, \tau]$, и она единственна.

Рассмотрим случай, когда функция f зависит от нескольких, для простоты от двух, переменных $x_1(t)$ и $x_2(t)$. В этом случае функция $P(x^0)$ распределения значений вектора x представляет собой долю интервала $[0, \tau]$, для которой выполнено два неравенства: $x_1(t) \leqslant x_1^0$ и $x_2(t) \leqslant x_2^0$. Эта функция монотонно растет с ростом каждого из аргументов, когда первая из составляющих вектора x^0 максимальна ($p_1(x_1) = 1$), она равна $P(x_2^0)$, а ее производная равна плотности распределения $p(x_1^{\max}, x_2) = p_2(x_2)$, аналогично в случае, когда $x_2 = x_2^{\max}$, $p(x_2^{\max}, x_1) = p_1(x_1)$. Функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ не зависимы друг от друга, так что $p(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2)$.

Искомым решением задачи усредненной оптимизации является плотность распределения $p^*(x)$ вектора x на множестве V его допустимых значений. Для реализации этого решения во времени нужно найти одну из возможных функций $x(t)$, имеющих распределение $p^*(x)$. Решение этой последней задачи существенно облегчается особенностями оптимальных решений $p^*(x)$, доказанными в следующем разделе.

3. Об оптимальном решении задач усредненной оптимизации

Будем обозначать операцию усреднения чертой, проведенной над усредняемой функцией или вектором. Так,

$$\overline{x} = \int_V xp(x)dx, \quad \overline{f(x)} = \int_V f(x)p(x)dx.$$

Простейшей задачей усредненной оптимизации является задача о максимуме среднего значения скалярной функции $f(x)$ при заданном среднем значении ее аргумента:

$$\overline{f(x)} \to \max \Big/ \overline{x} = x_0, \quad x \in V \subset R^n. \tag{5}$$

Или в более подробной записи

$$\int_V f(x)p(x)dx \to \max \Big/ \int_V xp(x)dx = x_0, \quad p(x) \geqslant 0, \quad \int_V p(x)dx = 1. \tag{6}$$

Искомой в этой задаче является $p(x)$ (плотность распределения вектора искомых переменных). Эта функция неотрицательна, и интеграл от нее на множестве V равен единице.

4. Теорема Каратеодори о выпуклых оболочках функций

Теорема Каратеодори [3, 4, 6] о выпуклых оболочках множеств утверждает, что любой элемент выпуклой оболочки CoD компактного множества D в евклидовом пространстве размерности n может быть представлен как элемент симплекса, имеющего не более чем $n+1$ вершину (базовые точки), каждая их которых принадлежит D.

В частности, множеством D может быть подграфик фунции $f(x)$. Выпуклой оболочкой функции называют выпуклую оболочку подграфика. Функция, зависящая от n переменных, представляет собой границу множества в пространстве R^{n+1}, имеющую размерность n. Базовые точки заведомо лежат на этой границе, а значит, их число не превышает $n+1$. Ниже будем называть теорему Каратеодори теоремой о выпуклых оболочках функций.

Ордината выпуклой оболочки функции $f_0(x)$ в точке x_0, принадлежащей выпуклой оболочке множества определения фунции, является значением задачи

$$(7) \qquad \overline{f_0(x)} \to \max_{p(x)} \Big/ \begin{array}{l} \overline{x_i} = x_{i0}, \quad i = \overline{1,n}, \\ x \in V \subset R^n, \end{array}$$

где V-компакт.

Согласно теореме Каратеодори оптимальное решение этой задачи имеет вид

$$p^*(x) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \delta(x - x^j), \quad \gamma_j \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \gamma_j = 1.$$

То есть оптимальное распределение сосредоточено не более чем в $(n+1)$-й базовых точках.

Этот факт позволяет переписать задачу (7) как задачу нелинейного программирования (НП)

$$(8) \qquad \sum_{j=0}^{n} \gamma_j f_0(x^j) \to \max \Bigg/ \begin{array}{l} \sum\limits_{j=0}^{n} \gamma_j x^j = x_0, \\ x^j \in V \subset R^m, \quad \sum\limits_{j=0}^{n} \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geqslant 0, \end{array}$$

переменными в которой являются базовые векторы x^j и вектор весовых коэффициентов γ, и воспользоваться для ее решения теоремой Куна–Таккера [7]:

Если y^* является решением задачи нелинейного программирования

$$(9) \qquad f(y) \to \max \Big/ \varphi_i(y) \leqslant 0, \quad y_j \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

то найдется такой ненулевой вектор множителей

$$\lambda = \lambda_0, \ldots, \lambda_m \ \ (\lambda_0 \text{ равно нулю или единице}, \ \ \lambda_i \leqslant 0 \ \ \text{при} \ \ i > 0),$$

что для функции Лагранжа

$$R = \lambda_0 f(y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(y)$$

справедливы условия:

$$(10) \qquad \left(\frac{\partial R}{\partial y_j}\right)_{y=y^*} = 0, \text{ если } y_j^* > 0; \ \left(\frac{\partial R}{\partial y_j}\right)_{y=y^*} \leqslant 0, \text{ если } y_j^* = 0;$$

$$(11) \qquad \lambda_i = 0, \text{ если } \varphi_i(y^*) < 0; \ \ \lambda_i \leqslant 0, \text{ если } \varphi_i(y^*) = 0.$$

Для задачи (8) функция Лагранжа имеет вид

$$(12) \qquad R = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \left[f_0(x^j) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^j - \Lambda \right],$$

где Λ — множитель Лагранжа, соответствующий условию равенства суммы весовых коэффициентов единице.

Условия Куна–Таккера по весовым коэффициентам приводят к требованиям:

$$R^0(x_j, \lambda) = f_0(x^j) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^j < \Lambda, \text{ если } \gamma_j = 0, \tag{13}$$

$$R^0(x_j, \lambda) = f_0(x^j) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^j = \Lambda, \text{ если } \gamma_j > 0, \quad j = 0, \ldots, n+1.$$

Здесь R^0 – функция Лагранжа задачи (8) при отсутствии в ней усреднения. Далее такую задачу будем называть *исходной*.

Таким образом: *Для всех базовых значений x, входящих в оптимальное решение задачи о выпуклой оболочке функции f_0 с ненулевым весом, функция Лагранжа исходной задачи максимальна. Число таких точек не превышает $n+1$.*

5. Задача с усреднением связей, обобщение теоремы Каратеодори

В задаче НП с усреднением функций, определяющих связи между переменными, требуется достичь максимума среднего значения функции $f_0(x)$ на множестве V допустимых значений x при условии, что среднее значение вектор-функции $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_i(x), \ldots, f_m(x))$ равно нулю. Формально

$$\overline{f_0(x)} \to \max \Big/ \overline{f_i(x)} = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in V \in R^n. \tag{14}$$

Теорема 1.

1. *Оптимальная плотность распределения в задаче* (14) *имеет вид*

$$p^*(x) = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j \delta(x - x^j), \quad \gamma_j \geqslant 0, \ \sum_{j=0}^{m} \gamma_j = 1. \tag{15}$$

2. *Найдется такой ненулевой вектор*

$$\lambda = \lambda_0, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_m, \quad \lambda_0 = (0; 1),$$

что в каждой базовой точке x^j функция Лагранжа исходной задачи

$$R = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) \tag{16}$$

максимальна по $x \in V$.

Доказательство. Для доказательства этого утверждения введем понятие *функции достижимости* задачи (14):

$$f_0^*(C) = \max f_0(x) \Big/ f_k(x) = C_k, \quad k = 1, \ldots, m, \quad x \in V. \tag{17}$$

Эта функция задана алгоритмически на множестве

$$V_c = \{C \in R^m : f(x) = C, x \in V \subset R^n\}.$$

Она может быть негладкой и полунепрерывной сверху.

Справедливо

Утверждение. Для тех значений x, для которых $f(x) = C$, $p^*(x)$ заведомо равна нулю, если $f_0(x) \neq f_0^*(C)$.

Таким образом, в решение усредненной задачи могут входить с ненулевым весом только те значения $x = x^*(C)$, для которых величина $f_0(x)$ совпадает с ординатой функции достижимости. Если бы это утверждение было не верно, можно было бы изменить плотность распределения так, чтобы среднее значение $f_0(x)$ увеличилось.

Так как для каждого C величина f_0 совпадает с ординатой функции достижимости, задачу (14) можно переписать в форме

$$\overline{f_0^*(C)} \to \max \Big/ \overline{C_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \quad C \in V_c \subset R^m. \tag{18}$$

Это задача об ординате выпуклой оболочки функции достижимости в нуле. В соответствии с теоремой Каратеодори ее оптимальное решение равно

$$p^*(C) = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j \delta(C - C^j), \quad \gamma_j \geqslant 0, \ \sum_{j=0}^{m} \gamma_j = 1. \tag{19}$$

Так как каждому базовому значению C^j соответствует значение $x^{j*}(C^j)$, то оптимальная плотность распределения в задаче (14) имеет вид (15). Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Доказательство второго утверждения полностью повторяет аналогичное доказательство для задачи об ординате выпуклой оболочки функции с той разницей, что функция Лагранжа неусредненной задачи имеет форму (16). Подчеркнем, что число базовых точек не зависит от размерности вектора x, а определяется размерностью m вектор-функции f.

Отметим, что здесь и ниже условия в форме принципа максимума не требуют от функций, определяющих усредненную задачу, гладкости по x, множество V может быть неодносвязным [8–10].

Пример 1. Рассмотрим систему, состоящую из электродвигателя, вращаемого им насоса и емкости, на рис. 1,*а*. Двигатель потребляет мощность n, от которой зависит производительность насоса g. Зависимость $g(n)$ показана на рис. 1,*б*. Требуется найти режим, для которого при заданной средней затрачиваемой мощности $\overline{n}$ средняя производительность $\overline{g}$ максимальна. Это задача об ординате выпуклой оболочки функции $g(n)$ в точке $\overline{n}$. Число базовых точек равно двум, одна из них — начало координат, а вторая, n^1, определена условием, что функция Лагранжа $R = g(n) + \lambda n$ в ней достигает

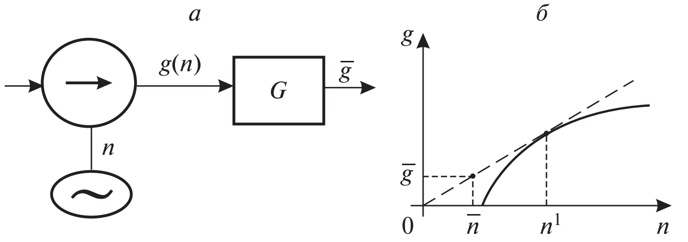

Рис. 1. Система, состоящая из насоса и сглаживающей емкости (a); зависимость расхода от затрачиваемой мощности ($б$).

максимума (такого же, как при $n = 0$). Исключая λ из условий максимума функции Лагранжа и требования, чтобы этот максимум был равен нулю, приходим к уравнению для n^1:

$$\frac{g(n)}{n} = \frac{dg(n)}{dn}.$$

Оптимальных реализаций этого решения во времени сколь угодно много, для каждого из них мощность насоса принимает значение ноль и n^1, причем доля от интервала τ, для которой $n = n^1$, равна $1 - \frac{\overline{n}}{n^1}$. Максимальное значение интервала τ определяется величиной емкости G, оно равно

$$\tau_{\max} = \frac{2G}{g(n^1)}.$$

Значение задачи равно

$$\overline{g}^* = g(n^1)\left(1 - \frac{\overline{n}}{n^1}\right).$$

Оно от G не зависит, и при стремлении емкости к нулю оптимальным решением становится скользящий режим.

6. Обобщения усредненной задачи НП

6.1. Усредненная задача с детерминированными переменными

Как указывалось во введении, в усредненных задачах может быть два типа переменных — рандомизированные и детерминированные. По переменным второго вида усреднение отсутствует. Рассмотрим задачу НП, в которой по части переменных усреднение отсутствует.

Задача с усреднением по части переменных примет форму:

(20) $\overline{f_0(x,y)} \to \max \Big/ \overline{f_j(x,y)} = 0, \;\; x \in V \subset R^n, \;\; y \in V_y \subset R^K, \;\; j = 1,\ldots,m,$

функции $f_0, \ldots, f_m$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по совокупности аргументов, черта соответствует усреднению по $x \in V$, множества V и V_y замкнуты и ограниченны.

Для любого y эта задача является усредненной задачей нелинейного программирования (14), а следовательно, в силу теоремы оптимальная плотность распределения x сосредоточена не более, чем в $(m+1)$-й базовых точках, так что $p^*(x) = \sum_0^m \gamma_j \delta(x - x^j)$ и найдется такой ненулевой вектор λ, что в каждой из этих точек функция Лагранжа исходной задачи

$$R = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(x, y), \quad x \in V \subset R^n, \quad y \in V_y \subset R^K \tag{21}$$

максимальна по x.

Функция Лагранжа задачи (20), в которой плотность распределения x равна $p^*(x)$, имеет вид

$$\overline{R^*} = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \sum_{i=0}^{m} \gamma_i f_j(x^i, y), \quad x^i \in V \subset R^n, \quad y \in V_y \subset R^K. \tag{22}$$

Для любой плотности распределения $p(x)$ рандомизированных переменных задача (20) представляет собой задачу нелинейного программирования и согласно теореме Куна–Таккера найдется такой ненулевой вектор λ с составляющими $\lambda_0 = (0; 1)$, λ_j, $j = 1, \ldots, m$, что для функции (21) на оптимальном решении выполнены условия локальной неулучшаемости по y

$$\frac{\partial \overline{R^*}}{\partial y_l} \delta y_l \leqslant 0, \quad l = 1, \ldots, K. \tag{23}$$

Здесь δy_l – допустимая вариация y_l.

Задача нелинейного программирования с усреднением по части переменных имеет много общего с задачей оптимального управления со связями в форме дифференциальных уравнений. Там управляющие воздействия входят в задачу так, что их сколь угодно быстрые изменения усредняются в окрестности каждого момента времени, чего нельзя сказать о фазовых координатах. Именно поэтому условия в форме принципа максимума Понтрягина справедливы для управляющих воздействий.

6.2. Задача, содержащая функции от средних значений переменных

Эта задача имеет вид

$$\overline{f_0(x, \overline{x_l})} \to \max \Big/ \overline{f_j(x, \overline{x_l})} = 0, \quad x \in V \subset R^n, \quad l = 1, \ldots, \quad K \leqslant n. \tag{24}$$

Введем обозначение: $y_l = \overline{x_l}$. Переменная y_l принадлежит выпуклой оболочке CoV_{x_l} множества допустимых значений x_l. С учетом введенных обозначений задачу (24) можно переписать в форме

$$\overline{f_0(x, y)} \to \max \Big/ \overline{f_j(x, y)} = 0, \quad \overline{x_l} - y_l = 0, \quad x \in V \subset R^n, \quad y_l \in CoV_{x_l} \subset R^K. \tag{25}$$

При записи в такой форме задача (25) отличается от задачи (20) только дополнительными усредненными условиями $\overline{x_l} - y_l = 0$. Функция Лагранжа исходной задачи примет форму

$$R = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(x, y) + \sum_{l=1}^{K} \lambda_l (x_l - y_l), \quad x \in V \subset R^n, \quad y_l \in CoV_{x_l}. \tag{26}$$

Из условий оптимальности (21), (23) следует, что максимальное число базовых значений x в задаче (24) равно $m + K + 1$ и что найдется такой ненулевой вектор λ, что в каждой из базовых точек функция R, фигурирующая в (26), достигает на оптимальном решении максимума по x, а по y функция (22) локально неулучшаема.

При решении усредненных задач выражают множители Лагранжа через базовые значения x^j и y из условия максимума функции Лагранжа по x и равенства этих максимумов друг другу и записывают условия неулучшаемости по y. После этого из усредненных условий находят весовые коэффициенты для каждой из базовых точек с учетом того, что сумма этих весовых коэффициентов равна единице.

Пример 2. В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу

$$\overline{(x - \overline{x})^2} \to \min \Big/ \overline{\left(\frac{1}{x + \overline{x}}\right)} = 1, \quad x = -1; 0; 1. \tag{27}$$

Функция Лагранжа для этой задачи равна

$$L = (x - y)^2 + \lambda \left(\frac{1}{x + y - 1}\right) + \mu(y - x). \tag{28}$$

Число усредненных условий равно двум, значит, все три допустимых значения x являются базовыми, и неопределенные множители надо выбрать так, чтобы максимум функции L^* был в этих точках одинаков, что приводит к условиям:

$$L^* = (1 + y)^2 + \lambda\left(\frac{1}{y - 1} - 1\right) - \mu(1 + y) = y^2 + \lambda\left(\frac{1}{y} - 1\right) - \mu y = \\ = (1 - y)^2 + \lambda\left(\frac{1}{y + 1} - 1\right) + \mu(1 - y). \tag{29}$$

Откуда

$$\lambda = \frac{2y}{2 + y}(1 - y - 2y^2), \quad \mu = \frac{y(2y - 1)}{2 + y}. \tag{30}$$

После подстановки этих выражений в L^* и дифференцирования получившегося выражения по y приходим к уравнению

$$3y^3 + 17y^2 + 20y - 10 = 0. \tag{31}$$

С точностью до второго знака после запятой, $y = 0{,}37$. Весовые множители $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ для $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ соответственно можно теперь найти из условий

$$\sum_{i=1}^{3} \gamma_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{3} \gamma_i x_i = 0{,}37, \quad \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \frac{1}{x_i + 0{,}37} = 1. \tag{32}$$

Получим $\gamma_1 = 0{,}155$, $\gamma_2 = 0{,}320$, $\gamma_3 = 0{,}525$.

7. Заключение

Рассмотрены различные постановки задач НП с усреднением. Показано, что с введением понятия о функции достижимости задачи НП задачи, содержащие усреднение функций от вектора рандомизированных переменных x, могут быть сведены к экстремальным задачам о выпуклых оболочках множеств и функций. Оптимальное распределение во всех этих задачах сосредоточено в дискретных «базовых» точках компактного множества V допустимых значений x. Доказан принцип максимума для таких задач. Показано, что число базовых точек не превышает числа усредненных условий в задаче более чем на единицу. Критерий и ограничения усредненных задач нелинейного программирования могут зависеть от времени. Если эти зависимости непрерывны, то приведенные выше условия оптимальности справедливы для каждого момента времени и определяют изменение во времени координат базовых точек и их весов. Вектор неопределенных множителей Лагранжа, соответствующий оптимальному решению, доставляет минимум максимальному по искомым переменным значению максимизируемой функции, что служит основой для вычислительных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цирлин А.М.* Оптимальные циклы и циклические режимы. М.: Энергоатомиздат, 1983.
2. *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных процессов // АиТ. 1959. № 10–12.
3. *Юдин Д.Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Советское радио, 1974.
4. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1977.
5. *Цирлин А.М.* Оптимизация в среднем и скользящие режимы в задачах оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1974. № 2. С. 143–151.
6. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 416 с. ISBN 5-9221-0499-3
7. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир 1975.

8. *Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А.* Необходимое условие в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990.
9. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Теория принципа максимума. Методы теории экстремальных задач в экономике. М.: Наука, 1981.
10. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности скользящих режимов и принцип максимума для задачи со скалярным аргументом // АиТ. 2009. № 5. С. 106–121.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 09.06.2022

После доработки 07.03.2023

Принята к публикации 09.06.2023