

© 2023 г. М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@mngasu.ru),  
А.В. СТЕПАНОВ (andrey8st@yahoo.com)  
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

## СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНЫХ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ АПРИОРНЫХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ<sup>1</sup>

Развивается новый подход, позволяющий в едином формате синтезировать субоптимальные робастные законы управления неопределенными объектами при различных критериях на основе априорной информации и экспериментальных данных. Показано, что гарантированные оценки  $\gamma_0$ -, обобщенной  $H_2$ - и  $H_\infty$ -норм замкнутой системы и соответствующие субоптимальные робастные законы управления выражаются в терминах решений линейных матричных неравенств, формируемых с учетом априорного знания и данных, полученных при моделировании объекта. Численный пример демонстрирует улучшение качества систем управления при совместном использовании априорных и экспериментальных данных.

*Ключевые слова:* робастное управление, априорные данные, экспериментальные данные,  $\gamma_0$ -норма, обобщенная  $H_2$ -норма,  $H_\infty$ -норма, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231023080020, EDN: HAQKRE

### 1. Введение

Среди разнообразных подходов к синтезу управления объектами при неполной математической модели выделяются два основных, в одном из которых параметры регулятора находятся исходя из априорной информации об области возможных значений неопределенных параметров объекта, а в другом параметры регулятора настраиваются рекуррентно по текущей информации или вычисляются на основе полученных экспериментальных данных. Традиционно первый подход связывают с робастным управлением (см. [1] и обзор [2]), второй — с адаптивным управлением (см. обзоры [3, 4]).

В последнее время активно разрабатывается синтез систем управления, не использующий математическую модель объекта явно, а основанный исключительно на экспериментальных данных [5–9]. Пионерской в этом направлении была работа [10], где установлено, что для полной характеристики линейной стационарной динамической системы при выполнении так называемого

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2023-945).

условия неисчезающего возбуждения может быть использована единственная траектория. В [5] показано, что при выполнении этого условия линейно-квадратичное управление объектами без возмущений и без помех в измерениях может быть реализовано без знания математической модели объекта непосредственно по данным измерений входа и выхода. В [6] установлено, что для построения законов управления по экспериментальным данным достаточно выполнения менее ограничительного условия информативности данных для изучаемого свойства (например, для стабилизируемости линейной обратной связи по состоянию или для линейно-квадратичного управления при заданном функционале). В [7] параметры обратной связи по состоянию находятся на основе полученных в открытом контуре измерений входа и выхода неопределенного объекта, на который действует неизмеряемое возмущение из определенного класса. В [8] построение  $H_2$ - и  $H_\infty$ -оптимальных законов управления полностью неопределенным объектом по измерениям входа и выхода осуществляется на основе матричного варианта  $S$ -леммы [11], а в [9] — на основе леммы Питерсена [12].

В настоящей работе разрабатывается новый подход, позволяющий синтезировать робастные законы управления неопределенными динамическими объектами на основе совместного использования априорной информации о структуре неопределенной матрицы параметров объекта и верхней границе ее нормы, а также экспериментальных данных, полученных в результате наблюдения за объектом на некотором интервале времени. Качество робастного управления оценивается верхними оценками одного из трех показателей:  $\gamma_0$ -нормы, характеризующей уровень гашения стохастических возмущений в замкнутой неопределенной системе или максимальное значение квадратичного функционала целевого выхода при импульсном возмущении; обобщенной  $H_2$ -нормы, характеризующей максимальное по времени отклонение евклидовой нормы целевого выхода системы при всех ограниченных в  $l_2$ -норме детерминированных возмущениях;  $H_\infty$ -нормы, характеризующей максимальное значение отношения  $l_2$ -норм целевого выхода и внешнего возмущения.

Синтез включает в себя несколько основных шагов. Сначала множество неизвестных матриц, согласованных с априорной информацией, характеризуется квадратичным неравенством. Затем проводится эксперимент, в котором измеряется траектория системы при задаваемых начальных условиях и управлениях и неизвестном внешнем возмущении, компоненты которого имеют известные границы. Это позволяет определить еще одно квадратичное неравенство, которому удовлетворяют все неизвестные матрицы, согласованные с результатами эксперимента. Далее определяется расширенная полностью определенная система с дополнительными искусственными входом и выходом, удовлетворяющими двум квадратичным неравенствам, в которую “погружена” исходная неопределенная система. И, наконец, верхние оценки уровней гашения возмущений исходной неопределенной системы находятся как уровни гашения возмущений этой расширенной системы при всех допол-

нительных входах, удовлетворяющих двум указанным квадратичным неравенствам.

Статья структурирована следующим образом. После введения в разделе 2 дается общая постановка задачи и показывается, как на основе априорной информации и экспериментальных данных выводятся два квадратичных неравенства, которым удовлетворяет неизвестная матрица параметров объекта. В разделе 3 приводятся необходимые сведения о  $\gamma_0$ -, обобщенной  $H_2$ - и  $H_\infty$ -нормах и о связях между ними для прямой и двойственной систем. В разделе 4 описывается процедура синтеза робастных законов управления и доказывается основная теорема. В разделе 5 приводятся результаты ряда экспериментов с неопределенной системой третьего порядка, показывающие преимущества робастного управления, построенного на основе априорной информации и экспериментальных данных, над робастными управлениями, синтезируемыми только по априорной информации или только по экспериментальным данным. В разделе 6 подводятся итоги и делаются выводы.

## 2. Постановка задачи робастного управления на основе априорных и экспериментальных данных

Рассмотрим неопределенную систему

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (A + B_\Delta \Delta C_\Delta)x(t) + (B_u + B_\Delta \Delta D_\Delta)u(t) + Bw(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

в которой  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – состояние,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  – целевой выход,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  – возмущение,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  – управление. Все матрицы, за исключением матрицы неизвестных параметров  $\Delta$ , заданы. В общем плане требуется на основе информации о неизвестных параметрах системы синтезировать линейные обратные связи по состоянию, при которых уровни гашения внешних возмущений из разных классов в замкнутой системе не превышают заданных значений.

Информация относительно неизвестной матрицы  $\Delta$  делится на априорную и получаемую в результате предварительного эксперимента. Предполагается, что матрица  $\Delta$  имеет блочно-диагональную структуру и представима в виде

$$(2.2) \quad \Delta = \text{diag} (\Delta_1, \dots, \Delta_l) = \sum_{i=1}^l L_i \Delta_i R_i^T, \quad \Delta_i \Delta_i^T \leq \eta_i^2 I,$$

где  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$  – полный матричный блок или диагональный квадратный матричный блок  $\Delta_i = \delta_i I_{n_i}$ ,  $L_i$  и  $R_i$  – матрицы, столбцами которых являются единичные векторы, соответствующие расположению  $i$ -го матричного блока, и для которых  $L_i^T L_j = 0$ ,  $R_i^T R_j = 0$ ,  $i \neq j$ ,  $\eta_i$  – заданные числа.

Представим матрицу  $B_\Delta$  в соответствии со структурой матрицы  $\Delta$  в виде  $B_\Delta = (B_1 \dots B_l)$ , где  $B_i = B_\Delta L_i$ , обозначим  $\widehat{\Delta} = B_\Delta \Delta$ . Тогда

$$(2.3) \quad \widehat{\Delta} = B_\Delta \sum_{i=1}^l L_i \Delta_i R_i^T = \sum_{i=1}^l B_i \Delta_i R_i^T.$$

Так как  $\widehat{\Delta} R_j = B_j \Delta_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , то  $\widehat{\Delta} = (\widehat{\Delta}_1 \widehat{\Delta}_2 \dots \widehat{\Delta}_l)$ , где  $\widehat{\Delta}_i = B_i \Delta_i$ .

В частности, если матрицы состояния и управления в уравнении объекта полностью неизвестны, то в (2.1) положим

$$(2.4) \quad A = 0, \quad B_u = 0, \quad B_\Delta = I, \quad C_\Delta = (I \ 0)^T, \quad D_\Delta = (0 \ I)^T$$

и тогда  $\widehat{\Delta} = \Delta = (A^{(real)} \ B_u^{(real)})$ , где  $A^{(real)}$  и  $B_u^{(real)}$  – неизвестные матрицы состояния и управления. Рассмотрению именно этого случая без использования априорной информации посвящены работы [5, 6, 8, 9]).

Далее, выразим априорную информацию о матрице  $\Delta$  в терминах матрицы  $\widehat{\Delta}$ . Применяя известный подход к синтезу робастного управления в случае структурированной неопределенности [13, 14], определим множество  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag} (\mathbf{\Lambda}_1, \dots, \mathbf{\Lambda}_l)$ , состоящее из всех  $\Lambda = \text{diag} (\Lambda_1, \dots, \Lambda_l)$ , для которых  $\Lambda_i = \lambda_i I_{n_i}$ ,  $\lambda_i \geq 0$ , если матричный блок  $\Delta_i$  полный, и всех симметрических неотрицательно определенных матриц  $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ , если  $\Delta_i = \delta_i I_{n_i}$ . Так как согласно (2.2) для полного матричного блока  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  при всех  $\lambda_i \geq 0$  выполняется  $\lambda_i \Delta_i \Delta_i^T \leq \lambda_i \eta_i^2 I$ , а для блока  $\Delta_i = \delta_i I_{n_i}$  для всех симметрических неотрицательно определенных матриц  $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  выполняется  $\Delta_i \Lambda_i \Delta_i^T \leq \eta_i^2 \Lambda_i$ , то для всех матриц  $\Delta$ , удовлетворяющих (2.2), как нетрудно проверить, выполняется

$$(2.5) \quad \Delta \Lambda \Delta^T - \eta \Lambda \eta^T \leq 0 \quad \forall \Lambda \in \mathbf{\Lambda},$$

где  $\eta = \text{diag} (\eta_1 I_{n_1}, \dots, \eta_l I_{n_l})$ . Умножая это неравенство слева на матрицу  $B_\Delta$  и справа на матрицу  $B_\Delta^T$ , получим неравенство

$$(2.6) \quad \widehat{\Delta} \Lambda \widehat{\Delta}^T - B_\Delta \eta \Lambda \eta^T B_\Delta^T \leq 0 \quad \forall \Lambda \in \mathbf{\Lambda},$$

которое запишем в виде

$$(2.7) \quad \begin{pmatrix} \widehat{\Delta} & I \end{pmatrix} \Upsilon \begin{pmatrix} \widehat{\Delta} & I \end{pmatrix}^T \leq 0 \quad \forall \Lambda \in \mathbf{\Lambda},$$

где  $\Upsilon = \text{diag} (\Lambda, -B_\Delta \eta \Lambda \eta^T B_\Delta^T)$ . Обозначим через  $\mathbf{\Delta}$  множество матриц  $\Delta$  заданной структуры, удовлетворяющих (2.5), а через  $\widehat{\mathbf{\Delta}}_{\mathbf{a}}$  – множество матриц  $\widehat{\Delta} = (\widehat{\Delta}_1, \dots, \widehat{\Delta}_l)$ , которые удовлетворяют неравенству (2.6). Ясно, что для любой  $\Delta \in \mathbf{\Delta}$  имеется  $\widehat{\Delta} = B_\Delta \Delta \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_{\mathbf{a}}$ . Покажем, что верно и обратное утверждение.

*Лемма 2.1.* Если матрицы  $B_i = B_\Delta L_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  имеют полный столбцовый ранг, то для любой  $\widehat{\Delta} \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_{\mathbf{a}}$  найдется  $\Delta \in \mathbf{\Delta}$  такая, что  $\widehat{\Delta} = B_\Delta \Delta$ .

*Доказательство леммы.* Пусть  $\widehat{\Delta} \in \widehat{\Delta}_a$ . Из (2.6) следует, что для любого вектора  $a \neq 0$ , для которого  $B_{\Delta}^T a = 0$ , выполняется  $\widehat{\Delta}^T a = 0$ . Это означает, что столбцы матрицы  $\widehat{\Delta}$  принадлежат образу матрицы  $B_{\Delta}$ . Следовательно, линейное матричное уравнение  $B_{\Delta} \Delta = \widehat{\Delta}$  имеет решение относительно матрицы  $\Delta$ . Осталось показать, что для этого решения выполняется неравенство (2.5). Из (2.6) следует, что для каждого из блоков выполнено

$$B_i(\Delta_i \Lambda_i \Delta_i^T - \eta_i^2 \Lambda_i) B_i^T \leq 0.$$

Так как матрицы  $B_i$  имеют полный столбцовый ранг, то  $\Delta_i \Lambda_i \Delta_i^T - \eta_i^2 \Lambda_i \leq 0$  для всех  $i$ , т.е.  $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ , что и требовалось доказать.

Эта лемма показывает, что при переходе от матрицы  $\Delta$ , удовлетворяющей неравенству (2.5), к матрице  $\widehat{\Delta}$ , удовлетворяющей неравенству (2.7), никакой потери информации не происходит. В связи с этим исходную неопределенную систему (2.1) представим в виде

$$(2.8) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (A + \widehat{\Delta} C_{\Delta})x(t) + (B_u + \widehat{\Delta} D_{\Delta})u(t) + Bw(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

где матрица неизвестных параметров соответствующей структуры  $\widehat{\Delta} = (\widehat{\Delta}_1, \dots, \widehat{\Delta}_l)$  удовлетворяет неравенству (2.7).

Дополнительная информация о неизвестных параметрах системы (2.8) извлекается из конечного набора измерений ее траектории. А именно, допустим, что имеется возможность измерять состояния системы  $x_0, x_1, \dots, x_N$  при выбранных управлениях  $u_0, \dots, u_{N-1}$  и некотором неизвестном возмущении  $w(t)$ , компоненты которого удовлетворяют ограничению

$$(2.9) \quad |w_i(t)| \leq d, \quad t = 0, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, n_w$$

для некоторого заданного  $d$ , которое будем называть уровнем возмущения, т.е.  $\max_{0 \leq t \leq N-1} \|w(t)\|_{\infty} \leq d$ . Следуя принятым обозначениям (см., например, [6]), составим матрицы

$$\begin{aligned} \Phi &= (x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{N-1}), \quad \Phi_+ = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N), \\ W &= (w_0 \quad w_1 \quad \cdots \quad w_{N-1}), \quad U = (u_0 \quad u_1 \quad \cdots \quad u_{N-1}) \end{aligned}$$

и обозначим

$$C_{\Delta} \Phi + D_{\Delta} U = \widehat{\Phi}.$$

В силу уравнения объекта имеет место равенство

$$(2.10) \quad \widetilde{\Phi} = \widehat{\Delta}^{(real)} \widehat{\Phi} + BW,$$

где  $\widetilde{\Phi} = \Phi_+ - A\Phi - B_u U$ ,  $\widehat{\Delta}^{(real)}$  – истинная неизвестная матрица параметров объекта (2.8). Согласно (2.9) и (2.10) при  $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}^{(real)}$  имеет место

$$(\widetilde{\Phi} - \widehat{\Delta} \widehat{\Phi})(\widetilde{\Phi} - \widehat{\Delta} \widehat{\Phi})^T = BWW^T B^T \leq d^2 n_w N B B^T.$$

Обозначим через  $\widehat{\Delta}_{\mathbf{p}}$  множество матриц  $\widehat{\Delta}$  заданной структуры, удовлетворяющих этому неравенству. Ясно, что  $\widehat{\Delta}^{(real)} \in \widehat{\Delta}_{\mathbf{p}}$ . Введем матрицу

$$(2.11) \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & * \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^T & * \\ -\widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^T & \widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^T - d^2 n_w N B B^T \end{pmatrix}$$

и запишем это неравенство в виде

$$(2.12) \quad \begin{pmatrix} \widehat{\Delta} & I \end{pmatrix} \Psi \begin{pmatrix} \widehat{\Delta} & I \end{pmatrix}^T \leq 0.$$

Обозначим через  $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}_{\mathbf{a}} \cap \widehat{\Delta}_{\mathbf{p}}$  множество матриц  $\widehat{\Delta}$ , которые удовлетворяют ограничениям (2.7) и (2.12).

Качество неопределенной системы (2.8), замкнутой управлением вида линейной обратной связи по состоянию, будем оценивать по ее реакциям на стохастические и детерминированные возмущения при нулевом начальном состоянии, измеряемыми тремя показателями: гарантированными оценками  $\gamma_0$ -, обобщенной  $H_2$ - и  $H_\infty$ -норм. Гарантированная оценка  $\gamma_0$ -нормы определяется как уровень гашения стохастического возмущения из класса  $\mathcal{G}_{n_w}$  векторных гауссовских белых шумов размерности  $n_w$ , равный максимальному значению квадратного корня отношения установившихся усредненных по времени дисперсий выхода  $z$  и входа  $w$  при всех ненулевых ковариационных матрицах входа  $K_w$  [15], т.е.

$$\gamma_0 = \sup_{\widehat{\Delta} \in \widehat{\Delta}} \gamma_0(\widehat{\Delta}), \quad \gamma_0(\widehat{\Delta}) = \text{ess sup}_{w \in \mathcal{G}_{n_w}} \frac{\|z\|_{\mathcal{P}}}{\|w\|_{\mathcal{P}}},$$

где  $\|s\|_{\mathcal{P}}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{t=0}^{N-1} |s(t)|^2$ , а  $\text{ess}$  обозначает существенный супремум, т.е. наименьшую верхнюю границу с вероятностью единица. Гарантированные оценки обобщенной  $H_2$ - и  $H_\infty$ -нормы характеризуют соответственно относительные максимальные значения максимального по времени отклонения и квадратичного функционала целевого выхода при детерминированных возмущениях из класса  $l_2$  и определяются как

$$\gamma_{g2} = \sup_{\widehat{\Delta} \in \widehat{\Delta}} \gamma_{g2}(\widehat{\Delta}), \quad \gamma_{g2}(\widehat{\Delta}) = \sup_{w(t) \neq 0} \frac{\sup_{t \geq 0} |z(t)|}{\|w\|},$$

$$\gamma_\infty = \sup_{\widehat{\Delta} \in \widehat{\Delta}} \gamma_\infty(\widehat{\Delta}), \quad \gamma_\infty(\widehat{\Delta}) = \sup_{w(t) \neq 0} \frac{\|z\|}{\|w\|},$$

где  $\|s\|^2 = \sum_{t=0}^{\infty} |s(t)|^2$ . Задача заключается в том, чтобы получить верхние оценки этих норм и в конечном итоге синтезировать законы управления, обеспечивающие требуемые оценки качества системы.

### 3. Предварительные сведения о $\gamma_0$ -, обобщенной $H_2$ - и $H_\infty$ -нормах

Прежде чем приступить к нахождению гарантированных оценок указанных норм, уточним, как вычисляются сами нормы  $\gamma_0(\widehat{\Delta})$ ,  $\gamma_{g2}(\widehat{\Delta})$  и  $\gamma_\infty(\widehat{\Delta})$  для замкнутой системы (2.8),  $u(t) = \Theta x(t)$  при фиксированной матрице  $\widehat{\Delta}$ , заданной уравнениями

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= [A + B_u \Theta + \widehat{\Delta}(C_\Delta + D_\Delta \Theta)]x(t) + Bw(t), \\ z(t) &= (C + D\Theta)x(t). \end{aligned}$$

Обозначая

$$A_\Theta = A + B_u \Theta, \quad C_{\Delta\Theta} = C_\Delta + D_\Delta \Theta, \quad A_\Delta = A_\Theta + \widehat{\Delta}C_{\Delta\Theta}, \quad C_\Theta = C + D\Theta,$$

запишем эти уравнения в виде

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A_\Delta x(t) + Bw(t), \\ z(t) &= C_\Theta x(t). \end{aligned}$$

Уровень гашения стохастических возмущений или  $\gamma_0$ -норма этой системы находится как решение задачи полуопределенного программирования относительно ковариационных матриц возмущения  $K_w = K_w^T \geq 0$  и состояния  $K_x = K_x^T \geq 0$  [15]

$$(3.3) \quad \gamma_0^2(\widehat{\Delta}) = \max \operatorname{tr} C_\Theta K_x C_\Theta^T : \quad A_\Delta K_x A_\Delta^T - K_x + B K_w B^T = 0, \quad \operatorname{tr} K_w \leq 1.$$

Здесь потребуется следующее вспомогательное утверждение, доказательство которого приведено в Приложении.

*Лемма 3.1. Задача (3.3) двойственна по Лагранжу задаче*

$$(3.4) \quad \gamma_0^2(\widehat{\Delta}) = \min \gamma^2 : \quad A_\Delta^T P A_\Delta - P + C_\Theta^T C_\Theta \leq 0, \quad B^T P B \leq \gamma^2 I.$$

Задача (3.4) означает, что для приращения функции  $V(x) = x^T P x$  в силу уравнения (3.2) при начальном возмущении  $w(0) = w_0$ ,  $w(t) \equiv 0$ ,  $t > 0$  и нулевых начальных условиях выполняются неравенства

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \Delta V + |z|^2 &\leq 0, \quad t \geq 1, \\ V(x_1) &= w_0^T B^T P B w_0 \leq \gamma^2 |w_0|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}, \forall w_0 \in \mathbb{R}^{n_w}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что уровень гашения стохастических возмущений совпадает с уровнем гашения детерминированного начального возмущения, понимаемого как максимальное значение отношения  $l_2$ -нормы выхода при “импульсном” возмущении  $w(0) = w_0$ ,  $w(t) \equiv 0$ ,  $t \geq 1$  и нулевых начальных условиях к евклидовой норме возмущения, т.е.

$$\gamma_0^2(\widehat{\Delta}) = \max_{w_0 \neq 0} \frac{\|z\|^2}{|w_0|^2}.$$

Следующая характеристика — максимальное уклонение выхода или обобщенная  $H_2$ -норма [16, 17] — находится как решение задачи

$$(3.6) \quad \gamma_{g2}^2(\widehat{\Delta}) = \min \gamma^2 : \quad A_{\Delta} Q A_{\Delta}^T - Q + B B^T \leq 0, \quad C_{\Theta} Q C_{\Theta}^T \leq \gamma^2 I,$$

которую путем замены  $P = Q^{-1}$  можно представить как

$$\gamma_{g2}^2(\widehat{\Delta}) = \min \gamma^2 : \quad \begin{pmatrix} A_{\Delta}^T P A_{\Delta} - P & * \\ B^T P A_{\Delta} & B^T P B - I \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} P & * \\ C_{\Theta} & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0.$$

Это означает, что для приращения функции  $V(x) = x^T P x$  в силу уравнения (3.2) при нулевых начальных условиях выполняется

$$(3.7) \quad \Delta V - |w|^2 \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \forall w \in \mathbb{R}^{n_w}, \quad P \geq \gamma^{-2} C_{\Theta}^T C_{\Theta}.$$

Как хорошо известно,  $H_{\infty}$ -норма системы меньше  $\gamma$  тогда и только тогда, когда разрешимо относительно матрицы  $P = P^T > 0$  линейное матричное неравенство

$$(3.8) \quad \begin{pmatrix} A_{\Delta}^T P A_{\Delta} - P & * & * \\ B^T P A_{\Delta} & B^T P B - \gamma^2 I & * \\ C_{\Theta} & 0 & -I \end{pmatrix} < 0,$$

означающее, что для приращения положительно определенной функции  $V(x) = x^T P x$  в силу уравнения (3.2) при всех  $x$  и  $w$  выполняется

$$(3.9) \quad \Delta V + |z|^2 - \gamma^2 |w|^2 < 0.$$

Сравнение задач (3.4) и (3.6) показывает, что  $\gamma_0$ - и обобщенная  $H_2$ -норма системы (3.1) совпадают соответственно с обобщенной  $H_2$ - и  $\gamma_0$ -нормой двойственной системы

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \widehat{x}(t+1) &= (A_{\Theta} + \widehat{\Delta} C_{\Delta\Theta})^T \widehat{x}(t) + C_{\Theta}^T \widehat{w}(t), \quad \widehat{x}(0) = 0, \\ \widehat{z}(t) &= B^T \widehat{x}(t). \end{aligned}$$

Кроме того, очевидно, что  $H_{\infty}$ -нормы двойственных систем (3.1) и (3.10) совпадают.

#### 4. Робастные $\gamma_0$ -, обобщенные $H_2$ - и $H_{\infty}$ -субоптимальные законы управления

Опишем основные шаги получения гарантированных оценок  $\gamma_0$ -,  $\gamma_{g2}$ - и  $\gamma_{\infty}$ -норм неопределенной системы (3.1) и нахождения соответствующих им параметров субоптимальных робастных законов управления. Обозначим через  $\widehat{\gamma}_0$ ,  $\widehat{\gamma}_{g2}$  и  $\widehat{\gamma}_{\infty}$  соответствующие гарантированные оценки норм двойственной системы (3.10). Как следует из сказанного в предыдущем разделе,

$$\gamma_0 = \widehat{\gamma}_{g2}, \quad \gamma_{g2} = \widehat{\gamma}_0, \quad \gamma_{\infty} = \widehat{\gamma}_{\infty}.$$



Рассмотрим систему, которую назовем расширенной, с дополнительными искусственными входом  $w_\Delta(t)$  и выходом  $z_\Delta(t)$ , определяемую уравнениями

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x_a(t+1) &= A_\Theta^\top x_a(t) + C_{\Delta\Theta}^\top w_\Delta(t) + C_\Theta^\top w_a(t), \quad x_a(0) = 0, \\ z_a(t) &= B^\top x_a(t), \quad z_\Delta(t) = x_a(t), \end{aligned}$$

в которых  $x_a(t)$  – состояние,  $w_a(t)$  – возмущение,  $z_a(t)$  – целевой выход. Допустим, что дополнительный входной сигнал  $w_\Delta(t)$  в системе (4.1) при всех  $t \geq 0$  удовлетворяет двум неравенствам

$$(4.2) \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^\top \Psi \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^\top \Upsilon \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0,$$

где матрицы  $\Psi$  и  $\Upsilon$  заданы в (2.11) и (2.7). Множество всех таких сигналов обозначим через  $\mathbf{W}_\Delta$ . Система (3.10) “погружена” в систему (4.1), (4.2), так как при  $w_\Delta(t) = \widehat{\Delta}^\top z_\Delta(t)$  уравнения (4.1) превращаются в уравнения (3.10) и для всех  $\widehat{\Delta} \in \widehat{\mathbf{\Delta}}$ , как следует из (2.12), (2.7), выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^\top \Psi \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} &= z_\Delta^\top(t) \begin{pmatrix} \widehat{\Delta}^\top \\ I \end{pmatrix}^\top \Psi \begin{pmatrix} \widehat{\Delta}^\top \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leq 0, \\ \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^\top \Upsilon \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} &= z_\Delta^\top(t) \begin{pmatrix} \widehat{\Delta}^\top \\ I \end{pmatrix}^\top \Upsilon \begin{pmatrix} \widehat{\Delta}^\top \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leq 0, \end{aligned}$$

т.е.  $w_\Delta(t) = \widehat{\Delta}^\top z_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta$ .

Для расширенной системы (4.1), (4.2) определим  $\gamma_0$ -, обобщенную  $H_2$ - и  $H_\infty$ -нормы относительно входа  $w_a$  и выхода  $z_a$  при всех допустимых входах  $w_\Delta$  как

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}_0 &= \sup_{w_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta} \operatorname{ess\,sup}_{w_a \in \mathcal{G}_{n_w}} \frac{\|z_a\|_{\mathcal{P}}}{\|w_a\|_{\mathcal{P}}}, \\ \tilde{\gamma}_{g2} &= \sup_{w_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta} \sup_{w_a(t) \neq 0} \frac{\sup_{t \geq 0} |z_a(t)|}{\|w_a\|}, \\ \tilde{\gamma}_\infty &= \sup_{w_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta} \sup_{w_a(t) \neq 0} \frac{\|z_a\|}{\|w_a\|}, \end{aligned}$$

которые очевидно ограничивают сверху гарантированные оценки норм системы (3.10). С учетом сказанного выше о связях норм двойственных систем получим, что для гарантированных оценок норм исходной неопределенной системы (3.1) верны неравенства

$$\gamma_0 \leq \tilde{\gamma}_{g2}, \quad \gamma_{g2} \leq \tilde{\gamma}_0, \quad \gamma_\infty \leq \tilde{\gamma}_\infty.$$

Определенные в (4.3) показатели будут меньше заданного числа  $\gamma$ , если найдется положительно определенная квадратичная функция  $V(x_a) =$

$= x_a^T P x_a$ , приращение которой в силу уравнения (4.1) удовлетворяет следующим условиям соответственно для каждой нормы (аналогично условиям (3.5), (3.7) и (3.9) для системы (3.2)):

$$(A_{\Theta}^T x_a + C_{\Delta\Theta}^T w_{\Delta})^T P (A_{\Theta}^T x_a + C_{\Delta\Theta}^T w_{\Delta}) - x_a^T P x_a + |z_a|^2 \leq 0, \quad C_{\Theta} P C_{\Theta}^T < \gamma^2 I;$$

$$(A_{\Theta}^T x_a + C_{\Delta\Theta}^T w_{\Delta} + C_{\Theta}^T w_a)^T P (A_{\Theta}^T x_a + C_{\Delta\Theta}^T w_{\Delta} + C_{\Theta}^T w_a) - x_a^T P x_a - |w_a|^2 \leq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & * \\ B^T & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0;$$

$$(A_{\Theta}^T x_a + C_{\Delta\Theta}^T w_{\Delta} + C_{\Theta}^T w_a)^T P (A_{\Theta}^T x_a + C_{\Delta\Theta}^T w_{\Delta} + C_{\Theta}^T w_a) - x_a^T P x_a + |z_a|^2 - \gamma^2 |w_a|^2 < 0$$

при всех  $x_a$ ,  $w_a$  и всех  $w_{\Delta} \in \mathbf{W}_{\Delta}$ , т.е. удовлетворяющих ограничениям (4.2). Достаточным для этого условием является существование матрицы  $P = P^T > 0$  и неотрицательных чисел  $\mu \geq 0$  и  $\nu \geq 0$ , при которых для всех  $x_a$ ,  $w_a$  и  $w_{\Delta}$  выполняются соответствующие условия

$$\Delta V + |z_a|^2 - \begin{pmatrix} w_{\Delta} \\ z_{\Delta} \end{pmatrix}^T (\mu \Psi + \nu \Upsilon) \begin{pmatrix} w_{\Delta} \\ z_{\Delta} \end{pmatrix} \leq 0, \quad C_{\Theta} P C_{\Theta}^T < \gamma^2 I;$$

$$\Delta V - |w_a|^2 - \begin{pmatrix} w_{\Delta} \\ z_{\Delta} \end{pmatrix}^T (\mu \Psi + \nu \Upsilon) \begin{pmatrix} w_{\Delta} \\ z_{\Delta} \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} P & * \\ B^T & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0;$$

$$\Delta V + |z_a|^2 - \gamma^2 |w_a|^2 - \begin{pmatrix} w_{\Delta} \\ z_{\Delta} \end{pmatrix}^T (\mu \Psi + \nu \Upsilon) \begin{pmatrix} w_{\Delta} \\ z_{\Delta} \end{pmatrix} < 0,$$

где приращение функции  $V(x)$  в первом из этих неравенств берется по траектории системы (4.1) при  $w_a(t) \equiv 0$ . Записывая эти неравенства в виде матричных неравенств, вводя новую матричную переменную  $Z = \Theta P$ , заменяя матрицу  $\nu \Lambda$  матрицей  $\Lambda$  без изменения обозначения и применяя лемму Шура, приходим к следующему результату.

*Теорема 4.1. Гарантированные оценки  $\gamma_0$ -, обобщенной  $H_2$ - и  $H_{\infty}$ -норм неопределенной системы (2.1), (2.2) при законе управления  $u(t) = \Theta x(t)$ , где  $\Theta = Z P^{-1}$ , меньше  $\gamma$ , если следующие соответствующие линейные матричные неравенства разрешимы относительно  $P > 0$ ,  $Z$ ,  $\Lambda \in \mathbf{\Lambda}$  и  $\mu \geq 0$ :*

$$(4.4) \quad \begin{pmatrix} -P & * & * & * & * \\ \mathcal{F}_A & -P - \mu \Psi_{22} & * & * & * \\ \mathcal{F}_{C_{\Delta}} & -\mu \Psi_{12} & -\mu \Psi_{11} - \Lambda & * & * \\ \mathcal{F}_C & 0 & 0 & -I & * \\ 0 & \Lambda \eta^T B_{\Delta}^T & 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \leq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & * \\ B^T & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0;$$

$$(4.5) \quad \begin{pmatrix} -P & * & * & * & * \\ \mathcal{F}_A & -P - \mu\Psi_{22} & * & * & * \\ 0 & B^T & -I & * & \\ \mathcal{F}_{C_\Delta} & -\mu\Psi_{12} & 0 & -\mu\Psi_{11} - \Lambda & * \\ 0 & \Lambda\eta^T B_\Delta^T & 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \leq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & * \\ \mathcal{F}_C & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0$$

и

$$(4.6) \quad \begin{pmatrix} -P & * & * & * & * & * \\ \mathcal{F}_A & -P - \mu\Psi_{22} & * & * & * & * \\ 0 & B^T & -I & * & * & * \\ \mathcal{F}_{C_\Delta} & -\mu\Psi_{12} & 0 & -\mu\Psi_{11} - \Lambda & * & * \\ \mathcal{F}_C & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & \Lambda\eta^T B_\Delta^T & 0 & 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix} < 0,$$

где  $\mathcal{F}_A = AP + B_u Z$ ,  $\mathcal{F}_C = CP + DZ$ ,  $\mathcal{F}_{C_\Delta} = C_\Delta P + D_\Delta Z$ , элементы матриц  $\Psi$  определены в (2.11) и матрица  $\eta = \text{diag}(\eta_1 I_{n_1}, \dots, \eta_l I_{n_l})$  определена в (2.2).

Обозначим минимальные значения  $\gamma^2$ , получаемые согласно этой теореме, как  $\gamma^2(\widehat{\Delta}, \Theta)$ , где аргументами являются матрица параметров системы ( $\widehat{\Delta}$  – для неопределенной системы,  $\widehat{\Delta}^{(real)}$  – для реальной системы) и матрица параметров применяемой обратной связи:  $\Theta^{(ab)}$  – матрица параметров соответствующего робастного закона управления, использующего априорные и экспериментальные данные,  $\Theta^{(a)}$  – если используются только априорные данные,  $\Theta^{(b)}$  – если используются только экспериментальные данные. Если используются только априорные данные, то гарантированные оценки норм  $\gamma^2(\widehat{\Delta}, \Theta^{(a)})$  находятся при решении соответствующих неравенств с  $\mu = 0$ ; если используются только экспериментальные данные, то  $\gamma^2(\widehat{\Delta}, \Theta^{(b)})$  находятся при решении этих неравенств с  $\Lambda = 0$ . При этом ясно, что  $\gamma^2(\widehat{\Delta}, \Theta^{(ab)}) \leq \leq \min\{\gamma^2(\widehat{\Delta}, \Theta^{(a)}), \gamma^2(\widehat{\Delta}, \Theta^{(b)})\}$ .

В случае полностью неизвестных матриц состояния и управления системы, для которого матрицы уравнения (2.1) определены в (2.4) и  $\Delta\Delta^T \leq \eta^2 I$ , теорема 4.1 дает гарантированные оценки норм при  $\Lambda = \{\lambda I : \lambda \geq 0\}$ .

Приведенные в теореме 4.1 неравенства позволяют при выборе соответствующих блоков  $\mathcal{F}_A$ ,  $\mathcal{F}_C$ ,  $\mathcal{F}_{C_\Delta}$  и переменных  $\Lambda$ ,  $\mu$  вычислять параметры законов управления и нормы для разнообразных сценариев. В следующем разделе некоторые из этих сценариев будут реализованы для иллюстратив-

ного примера и там же будут приведены соответствующие им блоки  $\mathcal{F}_A$ ,  $\mathcal{F}_C$ ,  $\mathcal{F}_{C_\Delta}$  и переменные  $\Lambda$ ,  $\mu$  в неравенствах (4.4)–(4.6).

## 5. Иллюстративный пример

Приведем результаты ряда экспериментов, выполненных с системой вида (2.1)

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 & -0,3 \\ -0,2 + \delta & 0,6 + \Delta_{11} & -0,1 + \Delta_{12} \\ 0,5 & -0,2 + \Delta_{21} & 0,9 + \Delta_{22} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 1 + \delta \\ 0,5 \end{pmatrix} u(t) + w(t),$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} I_3 \\ 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} \\ 0,2 \end{pmatrix} u(t),$$

в которой

$$B_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_\Delta = I_3, \quad D_\Delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = \delta, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix}, \quad |\delta| \leq 0,12; \quad \Delta_2 \Delta_2^T \leq 0,19.$$

1. Учитывая только априорную информацию, вычислим гарантированные оценки норм и матрицы параметров соответствующих субоптимальных робастных законов управления по формуле  $\Theta^{(a)} = ZP^{-1}$ , решая неравенства (4.4)–(4.6) при  $\mathcal{F}_A = AP + B_u Z$ ,  $\mathcal{F}_C = CP + DZ$ ,  $\mathcal{F}_{C_\Delta} = C_\Delta P + D_\Delta Z$ ,  $\eta = \text{diag}(0,12; 0,19I_2)$ ,  $\mu = 0$  и  $\Lambda \geq 0$  – неизвестная переменная:

$$\gamma_0^2(\widehat{\Delta}, \Theta_0^{(a)}) = 12,8095; \quad \Theta_0^{(a)} = (-0,4356; -0,6420; -0,3125),$$

$$\gamma_{g2}^2(\widehat{\Delta}, \Theta_{g2}^{(a)}) = 10,5935; \quad \Theta_{g2}^{(a)} = (-0,8498; -0,7996; -0,6503),$$

$$\gamma_\infty^2(\widehat{\Delta}, \Theta_\infty^{(a)}) = 49,2653; \quad \Theta_\infty^{(a)} = (-1,2373; -0,8204; -0,9710).$$

Допустим, что реальной системе соответствуют следующие значения неопределенных параметров:  $\delta^{(real)} = -0,05$ ,  $\Delta_{11}^{(real)} = 0,2$ ,  $\Delta_{12}^{(real)} = \Delta_{21}^{(real)} = 0$ ,  $\Delta_{22}^{(real)} = -0,1$ , так что

$$(5.1) \quad \widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}^{(real)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,05 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1 \end{pmatrix},$$

а матрицы состояния и управления реального объекта равны

$$A^{(real)} = A + \widehat{\Delta}^{(real)} C_\Delta, \quad B_u^{(real)} = B_u + \widehat{\Delta}^{(real)} D_\Delta.$$

Вычислим три нормы замкнутой системы, состоящей из реального объекта и полученной робастной обратной связи с матрицей параметров  $\Theta^{(a)}$ , решая неравенства (4.4)–(4.6) с

$$\mathcal{F}_A = (A^{(real)} + B_u^{(real)}\Theta^{(a)})P, \quad \mathcal{F}_C = (C + D\Theta^{(a)})P, \quad \mathcal{F}_{C_\Delta} = 0$$

и при  $\Lambda = 0$ ,  $\mu = 0$ :

$$\begin{aligned} \gamma_0^2(\widehat{\Delta}^{(real)}, \Theta_0^{(a)}) &= 4,8319; \\ \gamma_{g2}^2(\widehat{\Delta}^{(real)}, \Theta_{g2}^{(a)}) &= 5,1373; \\ \gamma_\infty^2(\widehat{\Delta}^{(real)}, \Theta_\infty^{(a)}) &= 23,5459. \end{aligned}$$

Для сравнения приведем еще оптимальные значения рассматриваемых норм и матриц параметров оптимальных обратных связей для реальной системы (если бы ее знали), вычисляемых по формуле  $\Theta^{(real)} = ZP^{-1}$  при решении неравенств (4.4)–(4.6) с  $\mathcal{F}_A = A^{(real)}P + B_u^{(real)}Z$ ,  $\mathcal{F}_C = CP + DZ$ ,  $\mathcal{F}_{C_\Delta} = 0$ ,  $\Lambda = 0$ ,  $\mu = 0$ :

$$\begin{aligned} \gamma_0^2(\widehat{\Delta}^{(real)}, \Theta_0^{(real)}) &= 3,9569; \quad \Theta_0^{(real)} = (-0,0765; -0,9379; 0,0064), \\ \gamma_{g2}^2(\widehat{\Delta}^{(real)}, \Theta_{g2}^{(real)}) &= 4,4024; \quad \Theta_{g2}^{(real)} = (-0,1369; -0,9249; -0,0741), \\ \gamma_\infty^2(\widehat{\Delta}^{(real)}, \Theta_\infty^{(real)}) &= 10,4651; \quad \Theta_\infty^{(real)} = (-1,2547; -1,3605; -0,3919). \end{aligned}$$

2. Рассмотрим ситуацию, когда априорная информация об области возможных значений неизвестных параметров объекта отсутствует и используются экспериментальные данные. Вычислим гарантированные оценки норм и найдем матрицы параметров субоптимальных робастных обратных связей по формуле  $\Theta^{(b)} = ZP^{-1}$ , решая неравенства (4.4)–(4.6) при  $\mathcal{F}_A = AP + B_uZ$ ,  $\mathcal{F}_C = CP + DZ$ ,  $\mathcal{F}_{C_\Delta} = C_\Delta P + D_\Delta Z$ ,  $\Lambda = 0$  и  $\mu \geq 0$  – неизвестная переменная. Для получения экспериментальных данных будем моделировать уравнение (2.8) с начальными условиями  $x_0 = (9; 5; -7)^T$  при неопределенностях  $\delta^{(real)} = -0,05$ ,  $\Delta_{11}^{(real)} = 0,2$ ,  $\Delta_{12}^{(real)} = \Delta_{21}^{(real)} = 0$ ,  $\Delta_{22}^{(real)} = -0,1$ , так что  $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}^{(real)}$ . Компоненты векторов управления  $u(t)$  и возмущения  $w(t)$  в эксперименте будем выбирать как значения случайных величин, равномерно распределенных на интервалах  $[-1, 1]$  и  $[-d, d]$  соответственно и получаемых с помощью датчика случайных чисел. Для  $d = 0,1$  и  $N = 100$  получились следующие результаты:

$$\begin{aligned} \gamma_0^2(\widehat{\Delta}, \Theta_0^{(b)}) &= 9,2104; \quad \Theta_0^{(b)} = (-0,1087; -0,8626; -0,0074), \\ \gamma_{g2}^2(\widehat{\Delta}, \Theta_{g2}^{(b)}) &= 11,0614; \quad \Theta_{g2}^{(b)} = (-0,1745; -1,0321; -0,0257), \\ \gamma_\infty^2(\widehat{\Delta}, \Theta_\infty^{(b)}) &= 56,6811; \quad \Theta_\infty^{(b)} = (-0,6556; -1,3677; -0,0644). \end{aligned}$$

Для реальной системы, замкнутой робастными обратными связями с соответствующими матрицами параметров  $\Theta^{(b)}$ , получились следующие значения норм при решении неравенств (4.4)–(4.6) с

$$\mathcal{F}_A = (A^{(real)} + B_u^{(real)}\Theta^{(b)})P, \quad \mathcal{F}_C = (C + D\Theta^{(b)})P, \quad \mathcal{F}_{C_\Delta} = 0$$

и при  $\Lambda = 0$ ,  $\mu = 0$ :

$$\begin{aligned} \gamma_0^2(\widehat{\Delta}^{(real)}, \Theta_0^{(b)}) &= 3,9640; \\ \gamma_{g2}^2(\widehat{\Delta}^{(real)}, \Theta_{g2}^{(b)}) &= 4,4416; \\ \gamma_\infty^2(\widehat{\Delta}^{(real)}, \Theta_\infty^{(b)}) &= 12,2661. \end{aligned}$$

3. Осуществим синтез субоптимального робастного управления на основе как априорной информации, так и тех же экспериментальных данных, полученных выше при моделировании реальной системы. Для этого вычислим гарантированные оценки норм и найдем матрицы параметров робастных обратных связей по формуле  $\Theta^{(ab)} = ZP^{-1}$  при решении неравенств (4.4)–(4.6), в которых  $\mathcal{F}_A = AP + B_u Z$ ,  $\mathcal{F}_C = CP + DZ$ ,  $\mathcal{F}_{C_\Delta} = C_\Delta P + D_\Delta Z$ ,  $\Lambda \geq 0$  и  $\mu \geq 0$  – неизвестные переменные:

$$\begin{aligned} \gamma_0^2(\widehat{\Delta}, \Theta_0^{(ab)}) &= 8,2265; \quad \Theta_0^{(ab)} = (-0,1613; -0,7716; -0,0661), \\ \gamma_{g2}^2(\widehat{\Delta}, \Theta_{g2}^{(ab)}) &= 8,9113; \quad \Theta_{g2}^{(ab)} = (-0,4617; -0,8835; -0,2449), \\ \gamma_\infty^2(\widehat{\Delta}, \Theta_\infty^{(ab)}) &= 35,2885; \quad \Theta_\infty^{(ab)} = (-0,9790; -1,0324; -0,5212). \end{aligned}$$

Для реальной системы, замкнутой робастными обратными связями с матрицами параметров  $\Theta^{(ab)}$ , три нормы, найденные при решении неравенств (4.4)–(4.6) с

$$\mathcal{F}_A = (A^{(real)} + B_u^{(real)}\Theta^{(ab)})P, \quad \mathcal{F}_C = (C + D\Theta^{(ab)})P, \quad \mathcal{F}_{C_\Delta} = 0$$

и при  $\Lambda = 0$ ,  $\mu = 0$ , принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \gamma_0^2(\widehat{\Delta}^{(real)}, \Theta_0^{(ab)}) &= 4,0280; \\ \gamma_{g2}^2(\widehat{\Delta}^{(real)}, \Theta_{g2}^{(ab)}) &= 4,5248; \\ \gamma_\infty^2(\widehat{\Delta}^{(real)}, \Theta_\infty^{(ab)}) &= 14,3512. \end{aligned}$$

На рис. 1–3 приведены гарантированные оценки  $\gamma_0$ -, обобщенной  $H_2$ -, и  $H_\infty$ -норм соответственно, полученные только по априорной информации, только по экспериментальным данным и совместно по априорной информации и экспериментальным данным, в зависимости от уровня возмущения  $d$  в эксперименте; нижние горизонтальные линии отвечают значениям этих норм

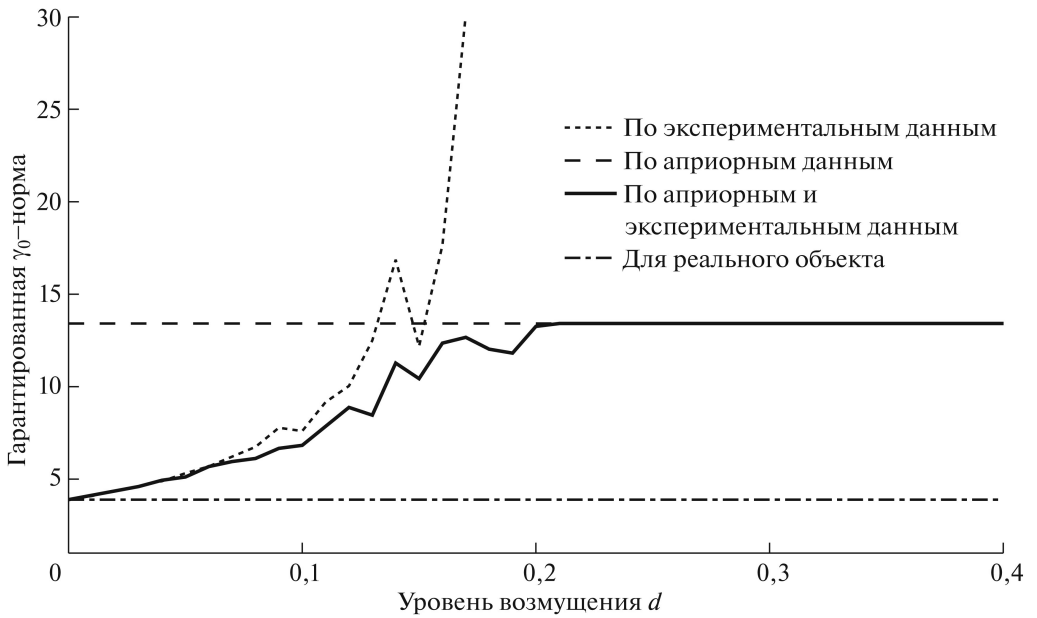


Рис. 1. Гарантированные оценки  $\gamma_0$ -нормы как функции уровня возмущения в экспериментальных данных для различных видов используемой информации.

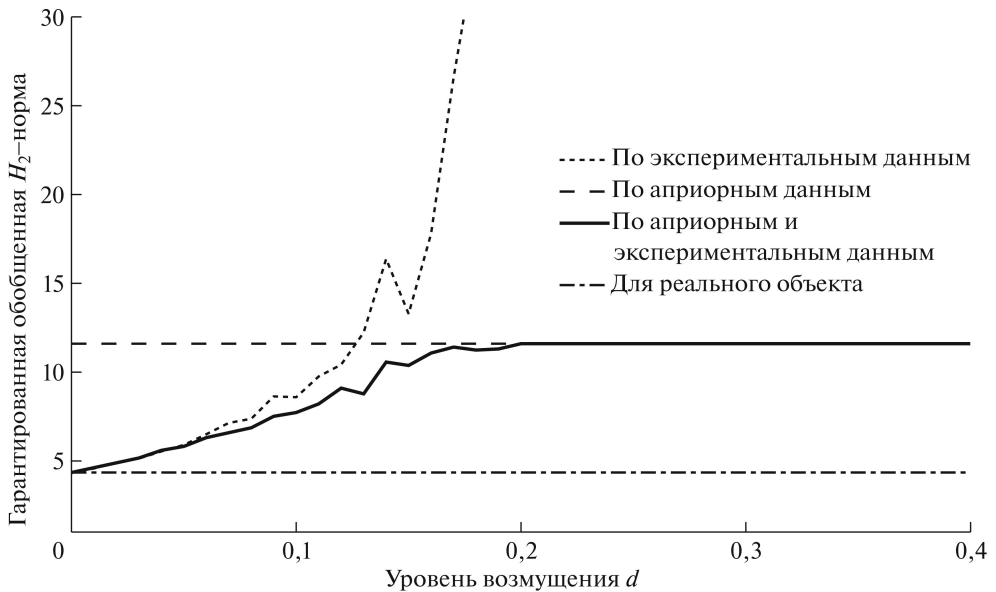


Рис. 2. Гарантированные оценки обобщенной  $H_2$ -нормы как функции уровня возмущения в экспериментальных данных для различных видов используемой информации.

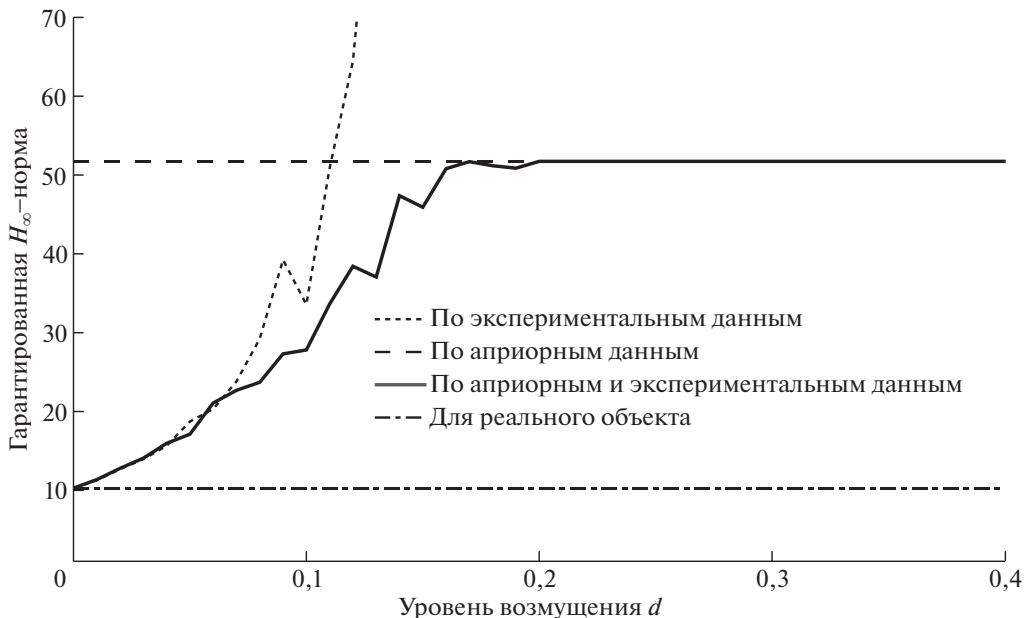


Рис. 3. Гарантированные оценки  $H_\infty$ -нормы как функции уровня возмущения в экспериментальных данных для различных видов используемой информации.

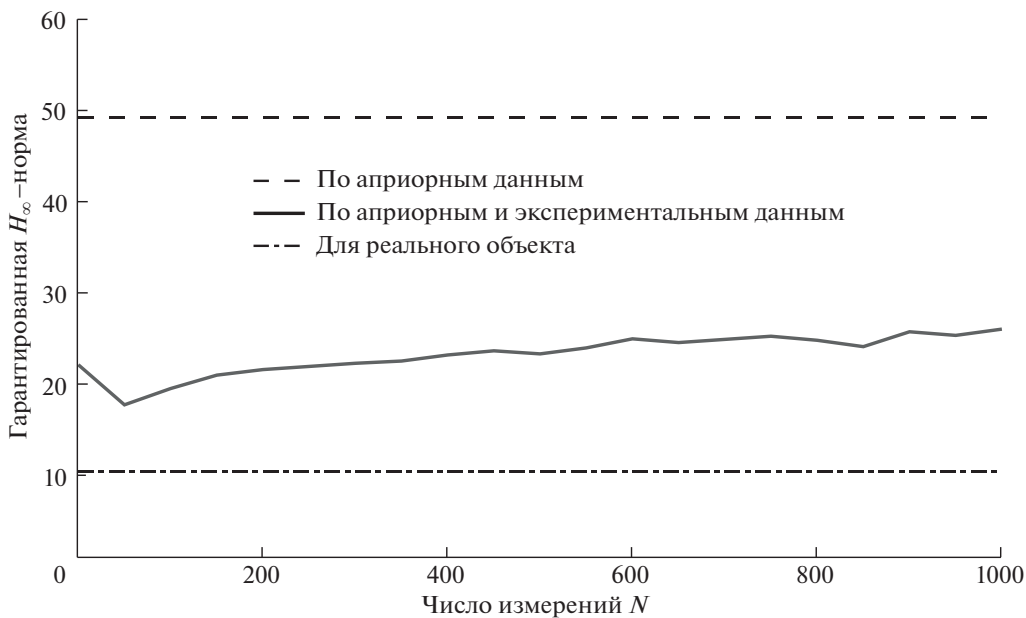


Рис. 4. Зависимость гарантированной оценки  $H_\infty$ -нормы при заданном уровне возмущения в экспериментальных данных от числа измерений.



для реального объекта, верхние линии соответствуют их значениям при робастных законах управления, синтезированных только по априорной информации. На рис. 4 приведен график гарантированной оценки  $H_\infty$ -нормы, полученной при совместном использовании априорной информации и экспериментальных данных с уровнем возмущения  $d = 0,05$ , как функции числа измерений  $N$ ; горизонтальные линии отвечают  $H_\infty$ -норме реального объекта и гарантированной оценке  $H_\infty$ -нормы, полученной при использовании только априорной информации.

Эти результаты говорят о том, что если уровень возмущений в эксперименте относительно не очень большой, то гарантированные оценки норм замкнутой неопределенной системы, синтезированной при использовании как априорных, так и экспериментальных данных, значительно меньше соответствующих оценок норм замкнутой системы при робастных управлениях, синтезированных только по априорным данным или только по экспериментальным данным. Например, гарантированные оценки  $H_\infty$ -норм замкнутой системы при законах управления, синтезируемых при использовании только априорных или только экспериментальных данных с уровнем возмущения  $d = 0,1$ , соответственно равны  $\gamma_\infty^2(\hat{\Delta}, \Theta_\infty^{(a)}) = 49,2653$  и  $\gamma_\infty^2(\hat{\Delta}, \Theta_\infty^{(b)}) = 56,6811$ , а при совместном использовании этих априорных и экспериментальных данных гарантированная оценка  $H_\infty$ -нормы равна  $\gamma_\infty^2(\hat{\Delta}, \Theta_\infty^{(ab)}) = 35,2885$ . Что касается наблюдаемого эффекта увеличения гарантированных оценок норм, получаемых на основе только экспериментальных данных, то это происходит из-за того, что с увеличением уровня возмущения расширяется множество допустимых моделей объекта, согласующихся с экспериментальными данными, и соответственно растет максимальное значение нормы на этом множестве. Важно подчеркнуть, что диапазон уровней возмущения, в котором гарантированная оценка нормы при совместном использовании априорных и экспериментальных данных меньше, чем гарантированная оценка нормы при использовании только априорных данных, зависит от начальных условий и выбираемых управлений в эксперименте и, таким образом, может варьироваться и даже, по-видимому, планироваться. Кроме того, из рис. 4 видно, что для получения приемлемых результатов не требуется большого количества измерений.

## 6. Заключение

В работе предложен новый метод построения субоптимальных робастных законов управления, позволяющий учитывать не только априорную информацию о математической модели объекта, но и экспериментальные данные моделирования объекта на небольшом интервале времени. При получении экспериментальных данных не требуется ни выполнение условия исчезающего возмущения, которое обеспечивает идентифицируемость неизвестных параметров, ни выполнение условия информативности данных для соответствующего закона управления. Использование в этом методе дополнительной

информации о неизвестных параметрах объекта, полученной из экспериментальных данных, существенно уменьшает гарантированные оценки  $\gamma_0$ -, обобщенной  $H_2$ - и  $H_\infty$ -норм замкнутой системы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 3.1.* Запишем функцию Лагранжа для этой задачи и выразим оптимальное значение двойственной ей функции как

$$\begin{aligned} & \min_{P_0 \geq 0, \gamma^2 \geq 0} \max_{K_x \geq 0, K_w \geq 0} \left[ \text{tr } C_\Theta K_x C_\Theta^T + \text{tr } P_0 (A_\Delta K_x A_\Delta^T - K_x + B K_w B^T) + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \gamma^2 (1 - \text{tr } K_w) \right] = \\ & = \min_{P_0 \geq 0, \gamma^2 \geq 0} \max_{K_x \geq 0, K_w \geq 0} \left[ \gamma^2 + \text{tr } K_x (A_\Delta^T P_0 A_\Delta - P_0 + C_\Theta^T C_\Theta) + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \text{tr } K_w (B^T P_0 B - \gamma^2 I) \right]. \end{aligned}$$

Для того чтобы эта величина была конечной, должны выполняться неравенства (3.4), и тогда максимум достигается при  $K_x = 0$  и  $K_w = 0$ . При этом оптимальное значение двойственной задачи совпадает с  $\lambda_{\max}(B^T P_0 B)$ . Так как функция является выпуклой и имеет внутреннюю точку, удовлетворяющую ограничению, то оптимальные значения прямой и двойственной задач совпадают [18].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. Petersen I.R., Tempo R. Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // Automatica. 2014. V. 50. No. 5. P. 1315–1335.
3. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Метод скоростного градиента и его приложения // АиТ. 2021. № 9. С. 3–72.  
Andrievsky B.R., Fradkov A.L. Speed Gradient Method and Its Applications // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1463–1518.
4. Annaswamy A.A., Fradkov A.L. A Historical Perspective of Adaptive Control and Learning // Annual Reviews in Control. 2021. V. 52. P. 18–41.
5. De Persis C., Tesi P. Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality and Robustness // IEEE Trans. Automat. Control. 2020. V. 65. No. 3. P. 909–924.
6. Waarde H.J., Eising J., Trentelman H.L., Camlibel M.K. Data Informativity: a New Perspective on Data-Driven Analysis and Control // IEEE Trans. Automat. Control. 2020. V. 65. No. 11. P. 4753–4768.
7. Berberich J., Koch A., Scherer C.W., Allgower F. Robust data-driven state-feedback design // Proc. Amer. Control Conf. 2020. P. 1532–1538.
8. Waarde H.J., Camlibel M.K., Mesbahi M. From Noisy Data to Feedback Controllers: Nonconservative Design via a Matrix S-Lemma // IEEE Trans. Automat. Control. 2022. V. 67. No. 1. P. 162–175.

9. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Data-driven Control via Petersen's Lemma // Automatica. 2022. V. 145. Article 110537.
10. *Willems J.C., Rapisarda P., Markovsky I., De Moor B.* A note on persistency of excitation // Syst. Control Lett. 2005. V. 54. P. 325–329.
11. *Якубович В.А.* S-процедура в нелинейной теории управления // Вестник Ленинградского университета. Математика. 1977. Т. 4. С. 73–93.
12. *Petersen I.R.* A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.
13. *Doyle J.C.* Analysis of feedback systems with structured uncertainties // IEE Proc. 1982. V. 129. Part D(6). P. 242–250.
14. *Safonov M.G.* Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems // IEE Proc. 1982. V. 129. Part D(6). P. 251–256.
15. *Kogan M.M.* Optimal discrete-time  $H_\infty/\gamma_0$  filtering and control under unknown covariances // Int. J. Control. 2016. V. 89. No. 4. P. 691–700.
16. *Wilson D.A.* Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 1. P. 94–97.
17. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Минимаксное управление отклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // АиТ. 2019. № 12. С. 3–24.  
*Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Minimax Control of Deviations for the Outputs of a Linear Discrete Time-Varying System // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 12. P. 345–359.
18. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: University Press, 2004.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 21.03.2023

После доработки 02.05.2023

Принята к публикации 09.06.2023