

© 2023 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;  
Национальный исследовательский университет  
“Московский физико-технический институт”)

## СИНТЕЗ ПИ-РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ<sup>1</sup>

Предлагается новый подход к задаче подавления ограниченных внешних возмущений в линейных системах управления при помощи ПИ-регулятора. Подход основан на сведении проблемы к задаче невыпуклой матричной оптимизации. Выписан градиентный метод для отыскания параметров ПИ-регулятора и дано его обоснование. Предлагаемая рекуррентная процедура является весьма эффективной и приводящей к вполне удовлетворительным по инженерным критериям качества регулятором. Статья продолжает серию работ автора, посвященную синтезу обратной связи в задачах управления с позиций оптимизации.

*Ключевые слова:* линейная система, внешние возмущения, ПИ-регулятор, оптимизация, уравнение Ляпунова, градиентный метод, метод Ньютона, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231023080019, EDN: HAEJXC

### 1. Введение

В недавней статье [1] был предложен новый — оптимизационный — подход к классической задаче подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений, которая ставится следующим образом. Рассмотрим линейную систему управления

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Dw, & x(0) &= x_0, \\ y &= C_1x, \\ z &= C_2x + B_1u\end{aligned}$$

с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , измеряемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и измеримым по  $t$  внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в каждый момент времени:

$$(1) \quad |w(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30005), <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>.

Задача заключается в выборе стабилизирующего управления в форме обратной связи по состоянию  $u = Kx$  или по выходу  $u = Ky$  (если оно существует) так, чтобы уменьшить “пик” выхода  $z(t)$ , т.е. величину  $\max_t |z(t)|$ .

В рамках предложенного в [1] подхода исходная задача была сведена к задаче невыпуклой матричной оптимизации, выписан градиентный метод для отыскания статической обратной связи по состоянию или выходу системы и дано его обоснование.

С другой стороны, в работе [2] оптимизационный подход, восходящий к [3], был применен к задаче синтеза ПИД-регуляторов: был предложен регулярный подход к отысканию его параметров, предполагающий решение задачи невыпуклой матричной оптимизации. При этом качество регулятора оценивалось по квадратичному критерию от выхода системы: регулятор настраивался против неопределенности в начальных условиях так, чтобы выход системы был равномерно малым. Предложенная рекуррентная процедура оказалась весьма эффективной и приводящей к регуляторам, вполне удовлетворительным по инженерным критериям качества.

Настоящая статья продолжает обе эти линии исследований: в ней решается задача синтеза ПИ-регулятора для подавления ограниченных внешних возмущений в линейных системах управления как задача оптимизации.

Всюду далее  $|\cdot|$  — евклидова норма вектора,  $\|\cdot\|$  — спектральная норма матрицы,  $\|\cdot\|_F$  — фробениусова норма матрицы,  $^T$  — символ транспонирования,  $\text{tr}$  — след матрицы,  $I$  — единичная матрица соответствующей размерности,  $\lambda_i(A)$  — собственные значения матрицы  $A$ .

## 2. Постановка задачи и метод инвариантных эллипсоидов

Рассмотрим линейную непрерывную систему управления

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu + Dw, & x(0) &= x_0, \\ y &= c^T x, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$ , внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (1), и управлением  $u(t) \in \mathbb{R}$  в виде ПИ-регулятора

$$(3) \quad u(t) = -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

Целью является нахождение числовых параметров  $k_P$  и  $k_I$  регулятора (3), который стабилизирует замкнутую систему и подавляет воздействие внешних возмущений  $w$ , минимизируя размер ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$ .

Напомним концепцию метода инвариантных эллипсоидов (подробнее см. [4, 5]). Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx \end{aligned}$$

с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^l$ , удовлетворяющим ограничению (1). Система (4) предполагается устойчивой (т.е. матрица  $A$  гурвицева), пара  $(A, D)$  управляема.

Эллипсоид с центром в начале координат будем называть *инвариантным* для системы (4), если любая ее траектория, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде, в любой момент времени остается в этом эллипсоиде при всех допустимых внешних возмущениях, действующих на систему.

Оценивая влияние внешних возмущений на вектор выхода системы, естественно интересоваться минимальными (в том или ином смысле) эллипсоидами, содержащими выход системы. Нетрудно видеть, что если эллипсоид

$$(5) \quad \mathcal{E}_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq 1 \right\}, \quad P \succ 0,$$

инвариантный, то выход системы (4) при  $x_0 \in \mathcal{E}_x$  принадлежит так называемому *ограничивающему* эллипсоиду

$$(6) \quad \mathcal{E}_z = \left\{ z \in \mathbb{R}^p : z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1 \right\}.$$

В литературе в качестве критерия его минимальности часто рассматривается линейная функция  $f(P) = \text{tr} CPC^T$ , равная сумме квадратов полуосей ограничивающего эллипсоида.

В [6] был установлен критерий инвариантности эллипсоида в терминах линейных матричных неравенств; приведем его в следующей формулировке (см. [4]).

*Теорема 1.* Пусть матрица  $A$  гурвицева, пара  $(A, D)$  управляема, а матрица  $P(\alpha) \succ 0$  удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\left( A + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left( A + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{1}{\alpha} DD^T = 0$$

на интервале  $0 < \alpha < 2\sigma(A)$ .

Тогда задача о минимальном ограничивающем эллипсоиде сводится к минимизации одномерной функции  $f(\alpha) = \text{tr} CP(\alpha)C^T$  на интервале  $0 < \alpha < 2\sigma(A)$  и, если  $\alpha^*$  — точка минимума и  $x_0$  удовлетворяет условию  $x_0^T P^{-1}(\alpha^*) x_0 \leq 1$ , то гарантируется равномерная оценка

$$|z(t)| \leq \sqrt{f(\alpha^*)}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

### 3. Подход к решению

Введем в рассмотрение вспомогательную скалярную переменную  $\xi$  следующим образом:

$$\dot{\xi} = y, \quad \xi(0) = 0.$$

Тогда, вводя расширенный вектор состояния

$$g = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

систему (2) можно записать в виде

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{g} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} w, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ y &= (c^T \ 0) g. \end{aligned}$$

При этом согласно (2), (3) имеем

$$(8) \quad \begin{aligned} u &= -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau = -k_P c^T x - k_I \xi = \\ &= -k_P c^T x - k_I \xi = -k_P (c^T \ 0) g - k_I (0 \ 1) g. \end{aligned}$$

Для удобства переобозначим  $k_1 = k_P$ ,  $k_2 = k_I$ , тогда (8) примет вид

$$(9) \quad u = - (k_1 c^T \ k_2) g.$$

Итак, замыкая систему (7) обратной связью (9), приходим к замкнутой системе

$$\dot{g} = \begin{pmatrix} A - k_1 b c^T & -k_2 b \\ c^T & 0 \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} w, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которой можно придать вид

$$\dot{g} = (\mathcal{A}_0 + k_1 \mathcal{A}_1 + k_2 \mathcal{A}_2) g + \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} w, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} -b c^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следуя методу инвариантных эллипсоидов, заключим состояние  $g$  системы (7) в инвариантный эллипсоид (5), порожденный матрицей  $P \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ , и будем минимизировать размер соответствующего ограничивающего эллипсоида (6) по выходу

$$z = Cx = (C \ 0) g.$$

В соответствии с теоремой 1 приходим к задаче минимизации  $\text{tr}(C \ 0)P(C \ 0)^T$  при ограничении

$$(10) \quad \left(\mathcal{A}_0 + k_1\mathcal{A}_1 + k_2\mathcal{A}_2 + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(\mathcal{A}_0 + k_1\mathcal{A}_1 + k_2\mathcal{A}_2 + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0$$

относительно матричных переменных  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярных переменных  $k_1, k_2$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ . Поскольку при заданных  $k_1, k_2$  и  $\alpha$  матрица  $P$  находится из уравнения (10), то независимыми переменными являются  $k_1, k_2$  и  $\alpha$ .

Введем в рассмотрение вектор

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

и в качестве критерия качества примем величину

$$\text{tr}(C \ 0)P(C \ 0)^T + \rho|k|^2, \quad \rho \ll 1.$$

Его вторая компонента представляет собой штраф за величину управления (коэффициент  $\rho > 0$  регулирует его важность) и обеспечивает коэрцитивность минимизируемой функции по  $k$  (см. раздел 5).

Окончательно, исходная задача о синтезе ПИ-регулятора, подавляющего внешние возмущения, свелась к матричной оптимизационной задаче

$$(11) \quad \min f(k, \alpha), \quad f(k, \alpha) = \text{tr}P(C \ 0)^T(C \ 0) + \rho|k|^2$$

при ограничении (10).

#### 4. Оптимизация функции $f(\alpha)$

Рассмотрим задачу

$$\min f(\alpha), \quad f(\alpha) = \text{tr}PC^TC,$$

при ограничении

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha}DD^T = 0$$

относительно матричной переменной  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ ; матрица  $A$  предполагается устойчивой (гурвицевой).

Как было показано в [1], минимизацию по  $\alpha$  можно эффективно осуществлять при помощи метода Ньютона. А именно, зададимся начальным приближением  $0 < \alpha_0 < 2\sigma(A)$  и применим итерационный процесс

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)},$$

где

$$f'(\alpha) = \operatorname{tr} Y \left( P - \frac{1}{\alpha^2} D D^T \right),$$

$$f''(\alpha) = 2 \operatorname{tr} Y \left( X + \frac{1}{\alpha^3} D D^T \right),$$

а  $Y$  и  $X$  — решения уравнений Ляпунова

$$\left( A + \frac{\alpha}{2} I \right)^T Y + Y \left( A + \frac{\alpha}{2} I \right) + C^T C = 0$$

и

$$\left( A + \frac{\alpha}{2} I \right) X + X \left( A + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + P - \frac{1}{\alpha^2} D D^T = 0.$$

Согласно [1], метод будет сходиться глобально (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом  $1/2$ ), причем в окрестности решения сходимость квадратичная. При этом реально требуется не более 3–4 итераций для получения решения с большой точностью, если только начальная точка не слишком близка к границам интервала  $(0, 2\sigma(A))$ .

Таким образом, имеем эффективный алгоритм для осуществления минимизации по  $\alpha$  в задаче (11), (10): достаточно матрицу  $A$  заменить на  $\mathcal{A}_0 + k_1 \mathcal{A}_1 + k_2 \mathcal{A}_2$ , матрицу  $C$  на  $(C \ 0)$ , а матрицу  $D$  — на  $\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## 5. Оптимизация функции $f(k)$

Введя для удобства обозначение

$$\{\mathcal{A}, k\} = k_1 \mathcal{A}_1 + k_2 \mathcal{A}_2,$$

сделаем следующее предположение.

*Предположение.* Пусть известен некоторый стабилизирующий регулятор  $k_0 = \begin{pmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \end{pmatrix}$ , т.е. такой, что матрица  $\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_0\}$  гурвицева.

Итак, исследуем свойства функции

$$f(k) = \min_{\alpha} f(k, \alpha).$$

*Лемма 1.* Функция  $f(k)$  определена и положительна на множестве  $\mathcal{S}$  стабилизирующих регуляторов.

Доказательства этого и последующих результатов приведены в Приложении 2.

Заметим, что множество  $\mathcal{S}$  может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими.

Лемма 2. Функция  $f(k, \alpha)$  определена на множестве стабилизирующих обратных связей  $k$  и для  $0 < \alpha < 2\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\})$ . На этом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$(12) \quad \frac{1}{2} \nabla_k f(k, \alpha) = \begin{pmatrix} \text{tr } PY \mathcal{A}_1 \\ \text{tr } PY \mathcal{A}_2 \end{pmatrix} + \rho k,$$

$$(13) \quad \nabla_\alpha f(k, \alpha) = \text{tr } Y \left[ P - \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T \right],$$

где матрицы  $P$  и  $Y$  являются решениями уравнений Ляпунова

$$\left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0$$

и

$$(14) \quad \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T Y + Y \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) + (C \ 0)^T (C \ 0) = 0.$$

Минимум  $f(k, \alpha)$  достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется условиями

$$\nabla_k f(k, \alpha) = 0, \quad \nabla_\alpha f(k, \alpha) = 0.$$

При этом  $f(k, \alpha)$  как функция от  $\alpha$  строго выпукла на  $0 < \alpha < 2\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\})$  и достигает минимума во внутренней точке этого интервала.

Свойства гессиана функции  $f(k)$  представлены следующим утверждением.

Лемма 3. Функция  $f(k)$  дважды дифференцируема, причем действие гессиана функции на произвольный вектор<sup>2</sup>  $e \in \mathbb{R}^2$  дается выражением

$$(15) \quad \frac{1}{2} (\nabla_{kk}^2 f(k) e, e) = \rho(e, e) + 2 \text{tr } P' Y \{\mathcal{A}, e\},$$

где  $P'$  — решение уравнения Ляпунова

$$(16) \quad \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) P' + P' \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \{\mathcal{A}, e\} P + P \{\mathcal{A}, e\}^T = 0.$$

Замечание 1. Далее в этом разделе — для получения простых количественных оценок в леммах 4 и 5 — в оптимизационную задачу (11), (10) вводятся регуляризующие добавки  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  следующим образом:

$$\min f(k, \alpha), \quad f(k, \alpha) = \text{tr } P \left( (C \ 0)^T (C \ 0) + \varepsilon_1 I \right) + \rho |k|^2, \quad \varepsilon_1 \ll 1,$$

<sup>2</sup> Понимаемое в смысле второй производной по направлению.

при ограничении

$$(17) \quad \begin{aligned} & \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\ & + \frac{1}{\alpha} \left[ \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] = 0, \quad \varepsilon_2 \ll 1. \end{aligned}$$

Требование необходимости их введения можно существенно ослабить, но цель автора сейчас состоит в получении наиболее простых и наглядных результатов.

*Лемма 4. Функция  $f(k)$  коэрцитивна на множестве  $\mathcal{S}$  (т.е. стремится к бесконечности на его границе), причем*

$$(18) \quad \begin{aligned} f(k) & \geq \frac{\varepsilon_1}{4\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}) (\|\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}\| + \sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}))} \|D\|_F^2, \\ f(k) & \geq \rho |k|^2. \end{aligned}$$

*Следствие 1. Множество уровня*

$$\mathcal{S}_0 = \{k \in \mathcal{S} : f(k) \leq f(k_0)\}$$

*ограничено для любого регулятора  $k_0 \in \mathcal{S}$ .*

*Следствие 2. Существует точка минимума  $k_*$  на множестве  $\mathcal{S}$ , причем  $\nabla f(k_*) = 0$ .*

Градиент функции  $f(k)$  не является липшицевым на всем множестве  $\mathcal{S}$ , однако он обладает этим свойством на его подмножестве  $\mathcal{S}_0$ . Соответствующий результат представлен следующей леммой.

*Лемма 5. На множестве  $\mathcal{S}_0$  градиент функции  $f(k)$  липшицев с константой*

$$(19) \quad \begin{aligned} L & = \rho + \frac{8\sqrt{2n}f^2(k_0)}{\varepsilon_1\varepsilon_2^2} \left( \|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{2}{\rho}f(k_0)} \right)^2 \times \\ & \times \left( \frac{f^2(k_0)}{\varepsilon_1^2} + 2 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right) \max \|\mathcal{A}_i\|_F. \end{aligned}$$

Полученные свойства функции  $f(k)$  и ее производных позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость.

## 6. Алгоритм оптимизации

Предлагается итеративный подход к решению задачи (11), в основе которого лежит применение градиентного метода по переменной  $k$  и метода Ньютона по переменной  $\alpha$ . Приведем принципиальную схему алгоритма.



Алгоритм 1 для минимизации  $f(k, \alpha)$ :

1. Задаемся параметрами  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $0 < \tau < 1$  и начальным стабилизирующим приближением  $k_0$ . Вычисляем величину  $\alpha_0 = \sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_0\})$ .
2. На  $j$ -й итерации заданы величины  $k_j$ ,  $\alpha_j$ .

Вычисляем матрицу  $\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}$ , решаем уравнения Ляпунова

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)P + P\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha_j} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T &= 0, \\ \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^T Y + Y\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right) + (C \ 0)^T (C \ 0) &= 0, \end{aligned}$$

и находим матрицы  $P$  и  $Y$ .

Вычисляем градиент

$$H_j = \nabla_k f(k_j, \alpha_j)$$

из соотношения

$$\frac{1}{2} \nabla_k f(k, \alpha) = \begin{pmatrix} \text{tr } PY \mathcal{A}_1 \\ \text{tr } PY \mathcal{A}_2 \end{pmatrix} + \rho k.$$

Если  $|H_j| \leq \varepsilon$ , то  $k_j$  принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$k_{j+1} = k_j - \gamma_j H_j.$$

Длину шага  $\gamma_j > 0$  подбираем дроблением  $\gamma$  до выполнения условий:

- a.  $k_{j+1}$  — стабилизирующий регулятор;
  - б.  $f(k_{j+1}) \leq f(k_j) - \tau \gamma_j |H_j|^2$ .
4. Для полученного  $k_{j+1}$  решаем задачу минимизации  $f(k_{j+1}, \alpha)$  по  $\alpha$  (см. раздел 4), и находим  $\alpha_{j+1}$ . Переходим к п. 2.

Предлагаемый метод сходится в следующем смысле.

*Теорема 2. В алгоритме 1 на каждой итерации реализуется лишь конечное число дроблений  $\gamma_j$ , функция  $f(k_j)$  монотонно убывает и ее градиент стремится к нулю*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |H_j| = 0$$

*со скоростью геометрической прогрессии.*

В самом деле, алгоритм 1 определен корректно в начальной точке, так как  $k_0$  является стабилизирующим регулятором в силу предположения. При этом при достаточно малых  $\gamma_j$  происходит монотонное уменьшение  $f(k)$  (движение по антиградиенту); такой способ подбора шага гарантирует, что величины  $k_j$  остаются в области  $\mathcal{S}_0$ , для которой лемма 5 обеспечивает липшицевость градиента. Таким образом, применимы результаты о сходимости градиентного метода для безусловной минимизации [7]. В частности, условие б)

на третьем шаге алгоритма 1 будет выполнено после конечного числа дроблений, а в градиентном методе будет иметь место сходимость по градиенту с линейной скоростью.

Естественно, что при этом трудно рассчитывать на сходимость к глобальному минимуму, поскольку область определения  $f(k)$  может быть даже несвязной.

## 7. Пример

Рассматриваемый пример взят из статьи [8]. Рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)}, \quad \alpha = 0,5.$$

МАТЛАВ-процедура `tf2ss` доставляет матрицы системы (4) в пространстве состояний:

$$A = \begin{pmatrix} -15 & -70 & -120 & -64 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix}.$$

В качестве матрицы  $D$  возьмем

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а в качестве матрицы регулируемого выхода — матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим  $\rho = 0,001$  и выберем в качестве начального некоторый стабилизирующий регулятор

$$k_0 = \begin{pmatrix} 1,7366 \\ 0,7734 \end{pmatrix}.$$

Динамика изменения критерия  $f(k)$  показана на рис. 1. Процесс завершился нахождением ПИ-регулятора с коэффициентами

$$k_* = \begin{pmatrix} 0,2956 \\ 0,3514 \end{pmatrix}$$

и соответствующего ограничивающего эллипса с матрицей

$$P_* = \begin{pmatrix} 5,1763 & -0,7885 \\ -0,7885 & 0,5635 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } P_* = 5,7398.$$

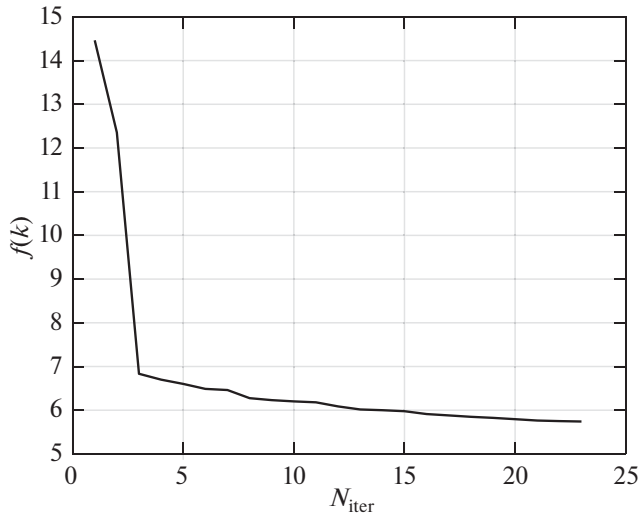


Рис. 1. Оптимизационная процедура.

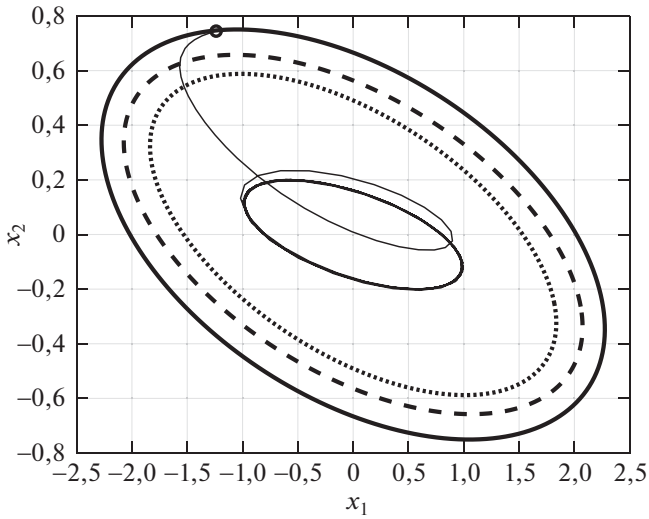


Рис. 2. Ограничивающие эллипсы.

На рис. 2 сплошной линией показаны найденный ограничивающий эллипс и траектория системы, замкнутой ПИ-регулятором  $k_*$ , при некотором допустимом внешнем возмущении. На этом же рисунке пунктиром показан ограничивающий эллипс для системы, замкнутой обратной связью с помощью динамического регулятора (см. [4])

$$u = K\hat{x},$$

где  $\hat{x}$  — наблюдатель

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + L(y - c^T\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0,$$

с матрицами

$$K = (-0,5154 \quad -2,6143 \quad -4,3786 \quad -2,4252) \cdot 10^6,$$

$$L = \begin{pmatrix} 0,0075 \\ -0,0225 \\ -0,0002 \\ 0,0189 \end{pmatrix}.$$

Наконец, точечной линией на рис. 2 показан ограничивающий эллипс для системы, замкнутой линейным динамическим регулятором (см. [4])

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r y, \quad x_r(0) = 0,$$

$$u = C_r x_r + D_r y,$$

с матрицами

$$A_r = \begin{pmatrix} -0,1373 & -0,6748 & -1,0932 & -0,1035 \\ 0,0140 & 0,0688 & 0,1114 & -1,7096 \\ 0,0004 & 0,0019 & 0,0031 & -0,0509 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0001 & -0,0007 \end{pmatrix} \cdot 10^5,$$

$$B_r = \begin{pmatrix} -0,7528 \\ 2,7644 \\ 0,0821 \\ 0,0011 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$C_r = (-0,1135 \quad -0,5579 \quad -0,9037 \quad -2,9271) \cdot 10^5, \quad D_r = 3,8176 \cdot 10^3.$$

Как видно, ПИ-регулятор приводит к вполне сопоставимым результатам, обладая преимуществами в простоте и удобстве практической реализации. При этом синтезированный ПИ-регулятор обладает вполне удовлетворительными характеристиками.

Передаточная функция ПИ-регулятора с коэффициентами  $k_*$  имеет вид

$$G_{\text{PID}}(s) = 0,2956 + \frac{0,3514}{s}.$$

Замкнутая система с ПИ-регулятором  $k_*$  является устойчивой по критерию Найквиста; ее минимальный запас устойчивости по модулю составляет 20,6 дБ, а по фазе  $70,3^\circ$ , см. рис. 3.

Для сравнения, взяв в качестве начального стабилизирующий регулятор

$$\tilde{k}_0 = \begin{pmatrix} 0,8882 \\ 0,6153 \end{pmatrix},$$

получаем ПИ-регулятор с коэффициентами

$$\tilde{k}_* = \begin{pmatrix} 0,3277 \\ 0,3662 \end{pmatrix}$$

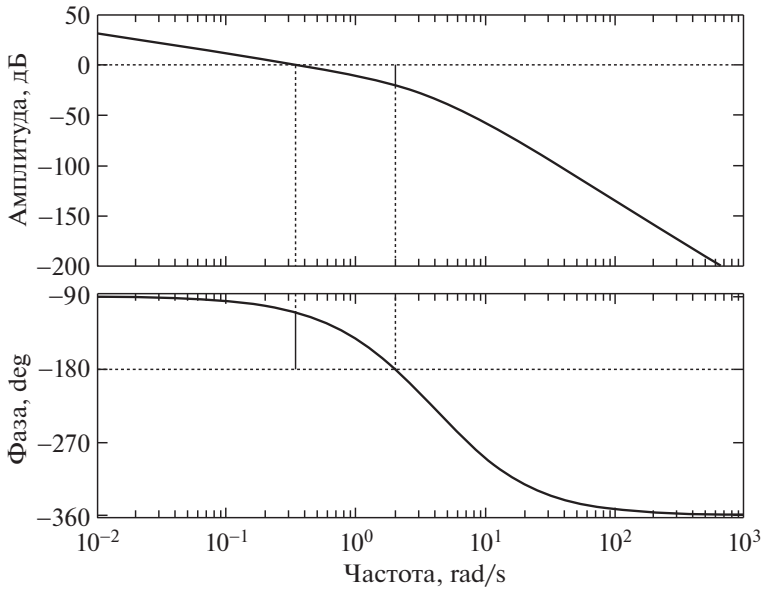


Рис. 3. ЛАФЧХ замкнутой системы.

и соответствующий ограничивающий эллипс с матрицей

$$\tilde{P}_* = \begin{pmatrix} 5,0890 & -0,7854 \\ -0,7854 & 0,5721 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } \tilde{P}_* = 5,6611.$$

При этом нормы получившихся регуляторов отличаются лишь на 6,5%, а ограничивающие эллипсы (по критерию следа) — менее, чем на 1,5%.

Вычисления проводились в среде МАТЛАВ с помощью свободно распространяемого программного пакета `svx` [9].

## 8. Обсуждение

В статье предложен новый подход к задаче синтеза ПИ-регулятора, оптимально подавляющего ограниченные внешние возмущения в линейной системе управления. Подход основан на сведении проблемы к невыпуклой задаче матричной оптимизации, которая далее решается градиентным методом; дано его обоснование.

Заметим, что теорема 2 устанавливает сходимость метода лишь по норме градиента целевой функции, однако, как показывает численное моделирование, метод приводит к вполне удовлетворительным с инженерной точки зрения ПИ-регуляторам. Вместе с тем представляется важным поиск содержательных частных постановок рассматриваемой задачи, при которых бы функция  $f(k)$  на множестве уровня  $\mathcal{S}_0$  удовлетворяла условию Поляка–Лоясевича [7]:

$$\frac{1}{2} |\nabla f(k)|^2 \geq \mu (f(k) - f(k_*))$$

с константой  $\mu > 0$ , зависящей только от  $k_0$  и параметров системы (2). В этом случае можно было бы говорить и о сильной поточечной сходимости — подобно тому, как это было показано в [3] для линейно-квадратичной задачи при управлении по состоянию.

Наконец, предлагаемый подход было бы интересно распространить на синтез ПИД-регуляторов, что автор и предполагает сделать в последующих публикациях.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Следующие леммы содержат известные результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

*Лемма П.1* [1]. Пусть  $X$  и  $Y$  — решения двойственных уравнений Ляпунова с гурвицевой матрицей  $A$ :

$$A^T X + X A + W = 0 \quad \text{и} \quad A Y + Y A^T + V = 0.$$

Тогда

$$\text{tr}(XV) = \text{tr}(YW).$$

*Лемма П.2* [10].

1. Для матриц  $A$  и  $B$  соответствующих размерностей справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|AB\|_F &\leq \|A\|_F \|B\|, \\ |\text{tr} AB| &\leq \|A\|_F \|B\|_F, \\ \|A\| &\leq \|A\|_F, \\ AB + B^T A^T &\leq \varepsilon A A^T + \frac{1}{\varepsilon} B^T B \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

2. Для неотрицательно определенных матриц  $A$  и  $B$  справедливы соотношения

$$0 \leq \lambda_{\min}(A) \lambda_{\max}(B) \leq \lambda_{\min}(A) \text{tr} B \leq \text{tr} AB \leq \lambda_{\max}(A) \text{tr} B \leq \text{tr} A \text{tr} B.$$

*Лемма П.3* [1]. Для решения  $P$  уравнения Ляпунова

$$AP + P A^T + Q = 0$$

с гурвицевой матрицей  $A$  и  $Q \succ 0$  справедливы оценки:

$$\lambda_{\max}(P) \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\sigma}, \quad \lambda_{\min}(P) \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\|A\|},$$

где  $\sigma = -\max_i \text{Re} \lambda_i(A)$ .

Если же  $Q = DD^T$  и пара  $(A, D)$  управляема, то

$$\lambda_{\max}(P) \geq \frac{\|u^* D\|^2}{2\sigma} > 0,$$

где

$$u^* A = \lambda u^*, \quad \operatorname{Re} \lambda = -\sigma, \quad \|u\| = 1,$$

т.е.  $u$  — левый собственный вектор матрицы  $A$ , отвечающий собственному значению  $\lambda$  матрицы  $A$  с наибольшей вещественной частью. Вектор  $u$  и число  $\lambda$  могут быть комплексными; здесь  $u^*$  означает комплексное сопряжение и транспонирование.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

*Доказательство леммы 1.* Действительно, если матрица  $\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}$  гурвицева, то  $\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}) > 0$  и для  $0 < \alpha < 2\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\})$  существует решение  $P \succ 0$  уравнения Ляпунова (10). Тем самым определена функция  $f(k, \alpha) > 0$ ; при этом  $f(k) > 0$  в силу теоремы 1. Лемма 1 доказана.

*Доказательство леммы 2.* Имеем задачу

$$\min f(k, \alpha), \quad f(k, \alpha) = \operatorname{tr} P(C \ 0)^T (C \ 0) + \rho|k|^2$$

при ограничении в виде уравнения Ляпунова

$$\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I\right) P + P \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0.$$

Для дифференцирования по  $k$  дадим ему приращение  $\Delta k$  и обозначим соответствующее приращение  $P$  через  $\Delta P$ :

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \Delta k\} + \frac{\alpha}{2}I\right) (P + \Delta P) + \\ & + (P + \Delta P) \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \Delta k\} + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0. \end{aligned}$$

После линеаризации и вычитания этого и предыдущего уравнений, имеем

$$(II.2.1) \quad \begin{aligned} & \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I\right) \Delta P + \Delta P \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \\ & + \{\mathcal{A}, \Delta k\} P + P \{\mathcal{A}, \Delta k\}^T = 0. \end{aligned}$$

Вычислим приращение  $f(k)$ , линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned} \Delta f(k) &= \operatorname{tr} (P + \Delta P)(C \ 0)^T (C \ 0) + \rho|k + \Delta k|^2 - \\ & - \left( \operatorname{tr} P(C \ 0)^T (C \ 0) + \rho|k|^2 \right) = \\ & = \operatorname{tr} \Delta P(C \ 0)^T (C \ 0) + 2\rho k^T \Delta k. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение Ляпунова (14), двойственное к (П.2.1). По лемме П.1 из уравнений (П.2.1) и (14) имеем

$$\Delta f(k) = 2 \operatorname{tr} Y \{ \mathcal{A}, \Delta k \} P + 2\rho k^T \Delta k.$$

Таким образом,

$$df(k) = 2 \operatorname{tr} P Y \sum_{i=1}^2 \mathcal{A}_i dk_i + 2\rho \sum_{i=1}^2 k_i dk_i,$$

откуда и следует (12).

Справедливость соотношения (13) устанавливается полностью аналогично [1, лемма 1]. Лемма 2 доказана.

*Доказательство леммы 3.* Вычислим величину  $(\nabla_{kk}^2 f(k)e, e)$ , взяв производную по направлению  $e \in \mathbb{R}^2$  от  $\nabla_k f(k)$ . Для этого, линеаризуя соответствующие величины и введя для удобства обозначение

$$[\operatorname{tr} P Y \mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \operatorname{tr} P Y \mathcal{A}_1 \\ \operatorname{tr} P Y \mathcal{A}_2 \end{pmatrix},$$

вычислим приращение  $\nabla_k f(k)$  по направлению  $e$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \nabla_k f(k)e &= \rho(k + \delta e) + [\operatorname{tr} (P + \Delta P)(Y + \Delta Y)\mathcal{A}] - (\rho k + [\operatorname{tr} P Y \mathcal{A}]) = \\ &= \rho(k + \delta e) + [\operatorname{tr} (P + \delta P'(k)e) (Y + \delta Y'(k)e) \mathcal{A}] - (\rho k + [\operatorname{tr} P Y \mathcal{A}]) = \\ &= \delta (\rho e + [\operatorname{tr} (P Y'(k)e + P'(k)e Y) \mathcal{A}]), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(k + \delta e) - P(k) = \delta P'(k)e, \\ \Delta Y &= Y(k + \delta e) - Y(k) = \delta Y'(k)e. \end{aligned}$$

Таким образом, обозначая  $P' = P'(k)e$  и  $Y' = Y'(k)e$ , имеем

$$\frac{1}{2} (\nabla_{kk}^2 f(k)e, e) = (\rho e + [\operatorname{tr} (P Y' + P' Y)\mathcal{A}], e).$$

Далее,  $P = P(k)$  есть решение уравнения (17); запишем его в приращениях по направлению  $e$

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{A}_0 + \{ \mathcal{A}, k + \delta e \} + \frac{\alpha}{2} I \right) (P + \delta P') + \\ & + (P + \delta P') \left( \mathcal{A}_0 + \{ \mathcal{A}, k + \delta e \} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0 \end{aligned}$$



или

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I \right) (P + \delta P') + (P + \delta P') \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I \right)^T + \\ & + \delta \left( \{\mathcal{A}, e\}P + P\{\mathcal{A}, e\}^T \right) + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0. \end{aligned}$$

Вычитая из полученного соотношения уравнение (17), приходим к уравнению (16).

Аналогично,  $Y = Y(k)$  есть решение уравнения Ляпунова (14); запишем его в приращениях по направлению  $e$

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \delta e\} + \frac{\alpha}{2}I \right)^T (Y + \delta Y') + \\ & + (Y + \delta Y') \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \delta e\} + \frac{\alpha}{2}I \right) + (C \ 0)^T (C \ 0) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I \right)^T (Y + \delta Y') + (Y + \delta Y') \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \delta e\} + \frac{\alpha}{2}I \right) + \\ & + \delta \left( \{\mathcal{A}, e\}^T Y + Y\{\mathcal{A}, e\} \right) + (C \ 0)^T (C \ 0) = 0. \end{aligned}$$

Вычитая из полученного соотношения уравнение (14), имеем

$$\begin{aligned} \text{(II.2.2)} \quad & \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I \right)^T Y' + Y' \left( \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I \right) + \\ & + \{\mathcal{A}, e\}^T Y + Y\{\mathcal{A}, e\} = 0. \end{aligned}$$

Из (16) и (II.2.2) имеем соотношение

$$\text{tr } P'Y\{\mathcal{A}, e\} = \text{tr } PY'\{\mathcal{A}, e\},$$

так что

$$\frac{1}{2} (\nabla_{kk}^2 f(k)e, e) = \rho(e, e) + ([\text{tr } (PY' + P'Y)\mathcal{A}], e) = \rho(e, e) + 2 \text{tr } P'Y\{\mathcal{A}, e\}.$$

Лемма 3 доказана.

*Доказательство леммы 4.* Рассмотрим последовательность стабилизирующих регуляторов  $\{k_j\} \in \mathcal{S}$  такую, что  $k_j \rightarrow k \in \partial\mathcal{S}$ , т.е.  $\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}) = 0$ . Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что неравенство

$$|\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}) - \sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\})| = \sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}) < \varepsilon$$

справедливо для всех  $j \geq N(\varepsilon)$ .

Пусть  $P_j$  — решение уравнения Ляпунова (10), ассоциированного с регулятором  $k_j$

$$\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right) P_j + P_j \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha_j} \left[ \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] = 0,$$

а  $Y_j$  — решение двойственного к нему уравнения Ляпунова

$$\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^T Y_j + Y_j \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right) + (C \ 0)^T (C \ 0) + \varepsilon_1 I = 0.$$

Тогда, пользуясь леммой П.3, имеем

$$\begin{aligned} f(k_j) &= \operatorname{tr} P_j \left( (C \ 0)^T (C \ 0) + \varepsilon_1 I \right) + \rho |k_j|^2 \geq \\ &\geq \operatorname{tr} P_j \left( (C \ 0)^T (C \ 0) + \varepsilon_1 I \right) = \\ &= \operatorname{tr} Y_j \frac{1}{\alpha_j} \left[ \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] \geq \frac{1}{\alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \operatorname{tr} \left[ \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{\alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \left\| \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_F^2 \geq \frac{1}{\alpha_j} \frac{\lambda_{\min} \left( (C \ 0)^T (C \ 0) + \varepsilon_1 I \right)}{2 \|\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\|} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\varepsilon_1}{4\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}) \|\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\|} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\varepsilon_1}{4\epsilon(\|\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}\| + \epsilon)} \|D\|_F^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

поскольку

$$0 < \alpha_j < 2\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\})$$

и

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I \right\| &\leq \|\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}\| + \frac{\alpha_j}{2} < \\ &< \|\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}\| + \sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$f(k_j) = \operatorname{tr} P_j \left( (C \ 0)^T (C \ 0) + \varepsilon_1 I \right) + \rho |k_j|^2 \geq \rho |k_j|^2 \xrightarrow{|k_j| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Лемма 4 доказана.

*Доказательство следствия 2.* У функции  $f(k)$  на множестве  $\mathcal{S}_0$  существует точка минимума (как у непрерывной функции на компактном множестве), но множество  $\mathcal{S}_0$  не имеет общих точек с границей  $\mathcal{S}$  в силу (18). Наконец, функция  $f(k)$  дифференцируема на  $\mathcal{S}_0$  по лемме 2, что и завершает доказательство следствия 2.

Доказательство леммы 5. Применяя к (15) лемму П.2, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla_{kk}^2 f(k)\| &= \frac{1}{2} \sup_{|e|=1} |(\nabla_{kk}^2 f(k)e, e)| \leq \sup_{|e|=1} \rho(e, e) + 2 \sup_{|e|=1} |\operatorname{tr} P' Y \{\mathcal{A}, e\}| = \\ &= \rho + 2 \sup_{|e|=1} \|P'\|_F \|Y \{\mathcal{A}, e\}\|_F \leq \rho + 2 \|P'\|_F \sup_{|e|=1} \|Y\| \|\{\mathcal{A}, e\}\|_F \leq \\ &\leq \rho + 2\sqrt{2} \|P'\|_F \|Y\| \max_i \|\mathcal{A}_i\|_F, \end{aligned}$$

поскольку

$$\|\{\mathcal{A}, e\}\|_F = \left\| \sum_i \mathcal{A}_i e_i \right\|_F \leq \sum_i \|\mathcal{A}_i\|_F |e_i| \leq \max_i \|\mathcal{A}_i\|_F |e|_1 \leq \sqrt{2} \max_i \|\mathcal{A}_i\|_F |e|.$$

Таким образом, необходимо оценить сверху величину

$$\rho + 2\sqrt{2} \max_i \|\mathcal{A}_i\|_F \|P'\|_F \|Y\|.$$

Имеем оценку для  $\|Y\|$ :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_2}{\alpha} \|Y\| &\leq \frac{1}{\alpha} \lambda_{\min} \left[ \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] \operatorname{tr} Y \leq \operatorname{tr} Y \frac{1}{\alpha} \left[ \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] = \\ &= \operatorname{tr} P \left( \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 I \right) = f(k) - \rho |k|^2 \leq f(k) \leq f(k_0), \end{aligned}$$

откуда

$$(П.2.3) \quad \|Y\| \leq \frac{\alpha}{\varepsilon_2} f(k_0).$$

Оценка для  $\alpha$  устанавливается следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha &< 2\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}) \leq 2 \|\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}\| \leq \\ &\leq 2 \left( \|\mathcal{A}_0\| + \sum_i \|\mathcal{A}_i\| |k_i| \right) \leq 2 \left( \|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| |k|_1 \right) \leq \\ &\leq 2 \left( \|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{2} |k| \right) \leq 2 \left( \|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{2}{\rho} f(k)} \right) \leq \\ &\leq 2 \left( \|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{2}{\rho} f(k_0)} \right), \end{aligned}$$

так что

$$\|Y\| \leq \frac{2}{\varepsilon_2} \left( \|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{2}{\rho} f(k_0)} \right) f(k_0).$$

Теперь оценим сверху  $\|P\|$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \|P\| &\leq \lambda_{\min} \left( \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 I \right) \|P\| \leq \\ &\leq \operatorname{tr} P \left( \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 I \right) = f(k) - \rho |k|^2 \leq f(k) \leq f(k_0), \end{aligned}$$

откуда

$$\|P\| \leq \frac{f(k_0)}{\varepsilon_1}.$$

Наконец, оценим сверху  $\|P'\|_F$ . С учетом леммы П.2 заметим, что

$$\begin{aligned} & \lambda_{\max} \left( \{\mathcal{A}, e\}P + P\{\mathcal{A}, e\}^T \right) = \\ & = \left\| \{\mathcal{A}, e\}P + P\{\mathcal{A}, e\}^T \right\| \leq \left\| P^2 + \{\mathcal{A}, e\}\{\mathcal{A}, e\}^T \right\| \leq \\ & \leq \|P\|^2 + \|\{\mathcal{A}, e\}\|^2 \leq \frac{f^2(k_0)}{\varepsilon_1^2} + 2 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \leq \\ & \leq \xi \frac{\varepsilon_2}{\alpha} \leq \xi \frac{1}{\alpha} \lambda_{\min} \left[ \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] \end{aligned}$$

при

$$\xi = \frac{\alpha}{\varepsilon_2} \left( \frac{f^2(k_0)}{\varepsilon_1^2} + 2 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right).$$

Поэтому для решения  $P'$  уравнения Ляпунова (16) справедлива оценка

$$\begin{aligned} P' & \preceq \xi P \preceq \frac{\alpha}{\varepsilon_2} \left( \frac{f^2(k_0)}{\varepsilon_1^2} + 2 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right) \frac{f(k_0)}{\varepsilon_1} I \preceq \\ & \preceq \frac{2f(k_0)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left( \|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{2}{\rho} f(k_0)} \right) \left( \frac{f^2(k_0)}{\varepsilon_1^2} + 2 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right) I, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} (П.2.4) \quad \|P'\|_F & \leq \frac{2\sqrt{n}f(k_0)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left( \|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{2}{\rho} f(k_0)} \right) \times \\ & \times \left( \frac{f^2(k_0)}{\varepsilon_1^2} + 2 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right). \end{aligned}$$

С учетом оценок (П.2.3) и (П.2.4) приходим к соотношению (19). Лемма 5 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // *АиТ*. 2021. № 9. С. 86–115.  
*Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.*
2. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // *АиТ*. 2022. № 11. С. 62–82.  
*Polyak B.T., Khlebnikov M.V. New Criteria for Tuning PID Controllers // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 11. P. 1724–1741.*

3. *Fatkhullin I., Polyak B.* Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM J. Control Optim. 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.
4. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
5. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // АиТ. 2021. № 1. С. 3–54.  
*Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
6. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
7. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. 2-е изд. М.: УРСС, 2014.
8. *Åström K.J., Hägglund T.* Benchmark Systems for PID Control // IFAC Proceedings Volumes. 2000. V. 33. Iss. 4. P. 165–166.
9. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1. URL <http://cvxr.com/cvx>
10. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.*

Поступила в редакцию 11.04.2023

После доработки 06.06.2023

Принята к публикации 09.06.2023