

# Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. Э.Х. ГИМАДИ, д-р физ.-мат. наук (gimadi@math.nsc.ru)

(Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск),

А.А. ШТЕПА (shoomath@gmail.com)

(Новосибирский национальный исследовательский государственный университет)

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ ПОИСКА МИНИМУМА СУММЫ ВЕСОВ РАЗНОРЕБЕРНЫХ ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЕВ ФИКСИРОВАННОГО ДИАМЕТРА<sup>1</sup>

Рассматривается труднорешаемая задача поиска нескольких реберно-непересекающихся (разнореберных) остовных деревьев минимального суммарного веса с фиксированным диаметром в полном неориентированном графе со случайными весами ребер из нескольких классов непрерывных распределений: равномерное, смещенное усеченно-экспоненциальное, смещенное усеченно-нормальное. Для решения этой задачи предлагается приближенный алгоритм с трудоемкостью  $O(n^2)$ , где  $n$  — количество вершин в графе. Приводятся условия асимптотической точности для этого алгоритма в случае каждого из рассматриваемых вероятностных распределений.

*Ключевые слова:* минимальное остовное дерево с ограниченным диаметром, приближенный алгоритм, вероятностный анализ, асимптотическая точность.

DOI: 10.31857/S0005231023070085, EDN: FDWYOE

### 1. Введение

Задача поиска минимального остовного дерева (Minimum Spanning Tree, MST) — одна из хорошо известных задач дискретной оптимизации. Она состоит в нахождении остовного дерева (связного ациклического подграфа на всех вершинах) минимального веса в данном реберно-взвешенном графе  $G = (V, E)$ . Полиномиальная разрешимость этой задачи была доказана построением полиномиальных алгоритмов Борувки (1926), Краскала (1956) и Прима (1957). Эти алгоритмы имеют трудоемкости  $O(u \log n)$ ,  $O(u \log u)$  и  $O(n^2)$  соответственно, где  $u = |E|$  и  $n = |V|$ . Интересно отметить, что математическое ожидание веса MST в графе со случайными весами ребер может быть неожиданно маленьким. Например, для полного графа с весами ребер из класса равномерно распределенных случайных величин на интервале  $(0; 1)$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0019).

вес MST с высокой вероятностью близок к константе 2,02 [1]. Похожие результаты получены в [2, 3].

Одним из возможных обобщений вышеуказанной задачи является диаметр-ограниченный вариант задачи поиска MST. Диаметр дерева — это количество ребер в самом длинном простом пути в дереве, соединяющем пару вершин. Эта задача состоит в следующем: дан реберно-взвешенный граф и параметр  $d = d_n$ , необходимо найти в этом графе MST, имеющее диаметр, ограниченный сверху или снизу параметром  $d$ . Обе задачи в общей постановке являются *NP*-трудными.

Вариант задачи с ограничением на диаметр сверху является полиномиально разрешимым для значений диаметра два и три, но *NP*-трудным для любого диаметра от 4 до  $(n - 1)$ , даже для весов ребер, равных 1 или 2 [4, стр. 206]. Задача с ограничением снизу является *NP*-трудной, потому что она содержит в качестве подзадачи для  $d = n - 1$  задачу “гамильтонов путь” [4].

Недавно авторы данной статьи начали изучать другую модификацию задачи поиска MST с ограниченным диаметром, когда диаметр этого дерева равен заданному числу. Примечательно, что алгоритм решения такой задачи может быть преобразован в алгоритм для решения задачи с диаметром, ограниченным как сверху, так и снизу. Тем самым область применения такой задачи покрывает область применения задач с ограничением диаметра как сверху, так и снизу.

Для задачи поиска минимального остовного дерева с диаметром, ограниченным сверху, известны приложения в беспроводных сетях [5], в разработке коммуникационных сетей [6], в алгоритмах сжатия информации [7] и распределенного взаимного исключения [8] (подробное описание см., например, в [9]).

Задача отыскания нескольких реберно-непересекающихся остовных деревьев минимального суммарного веса с диаметром, ограниченным снизу, в полном графе может встретиться в проблемах теории надежности коммуникационных сетей, когда необходимо для множества выбранных объектов построить  $t$ -связный минимальный по весу граф, исключив при этом конфигурации, для которых после выхода из строя небольшого количества вершин графа резко ухудшается структура сети, т.е. наложить условие на диаметр снизу для каждого из конструируемых остовных деревьев, формирующих  $t$ -связный граф. Стоит отметить, что в [10, 11] проведен вероятностный анализ приближенного алгоритма для этой задачи и получены условия его асимптотической точности.

В [12, 13] представлен вероятностный анализ полиномиального алгоритма и предложены условия его асимптотической точности для решения задачи поиска одного и нескольких MST с фиксированным диаметром дерева в случае полного ориентированного графа. К сожалению, анализ этого алгоритма оказывается неприемлемым для случая неориентированного графа, поскольку вероятностные свойства весов ребер, рассматриваемых по ходу работы

алгоритма, нельзя считать независимыми, в отличие от случая ориентированного графа.

В данной статье рассматривается задача нахождения  $m$  реберно-непересекающихся (разнореберных) остовных деревьев минимального суммарного веса с фиксированным диаметром  $d = d_n$  в полном неориентированном графе (обозначим эту задачу как  $m$ - $d$ -UMST). Предлагаются приближенный полиномиальный алгоритм решения этой задачи и достаточные условия его асимптотической точности. Вероятностный анализ алгоритма проведен в случае полного реберно-взвешенного неориентированного графа  $G$  без петель в предположении, что веса ребер — положительно значащие независимые случайные величины. Рассматриваются функции распределения (ф.р.) весов ребер графа  $G$  трех классов:  $\text{UNI}(a_n; b_n)$  — равномерное распределение на конечном отрезке  $[a_n; b_n]$ , а также усеченно-смещенные распределения: экспоненциальное  $\text{EXP}(a_n, \lambda_n)$  и нормальное  $\text{NORM}(a_n, \sigma_n)$  на не ограниченном сверху полуинтервале  $[a_n; \infty)$ . Функции плотности этих распределений имеют вид

$$(1) \quad p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b_n - a_n} & \text{при } a_n \leq x \leq b_n \text{ для } \text{UNI}(a_n; b_n); \\ \frac{1}{\lambda_n} \exp\left(-\frac{x - a_n}{\lambda_n}\right) & \text{при } a_n \leq x < \infty \text{ для } \text{EXP}(a_n, \lambda_n); \\ \frac{2}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - a_n)^2}{2\sigma_n^2}\right) & \text{при } a_n \leq x < \infty \text{ для } \text{NORM}(a_n, \sigma_n); \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

## 2. Нахождение нескольких реберно-непересекающихся остовных деревьев минимального суммарного веса с фиксированным диаметром в неориентированном графе

В данном разделе сначала формулируется исследуемая задача, а затем предлагается приближенный алгоритм ее решения.

Пусть даны полный  $n$ -вершинный реберно-взвешенный неориентированный граф  $G = (V, E)$  и положительные целые числа  $m \geq 2$ ,  $d \geq 4$  такие, что  $m(d + 1) \leq n$ . Задача  $m$ - $d$ -UMST состоит в отыскании  $m$  реберно-непересекающихся остовных деревьев  $T_1, \dots, T_m$  таких, что диаметр каждого из них равен  $d = d_n$  и их суммарный вес минимален. Для решения этой задачи предлагается следующий детерминированный алгоритм.

### Описание алгоритма $\mathcal{A}$

**Предварительный шаг 0.** В графе  $G$  выбрать произвольное  $(n - m(d + 1))$ -вершинное подмножество  $V'$  и произвольно разбить оставшиеся  $m(d + 1)$  вершин на  $m$  подмножеств с  $(d + 1)$  вершиной в каждом  $V_1, V_2, \dots, V_m$ .

**Шаг 1.** В каждом подграфе  $G(V_s)$ ,  $s = 1, \dots, m$ , начиная с произвольной его вершины, построить  $(d + 1)$ -вершинный гамильтонов путь  $P_s$ , используя жадную эвристику “иди в ближайшую непосещенную вершину”.

Положить  $T_s = P_s$ ,  $s = 1, \dots, m$ .

**Шаг 2.** Далее предполагается без потери общности, что параметр  $d$  нечетен (см. замечание 1 ниже). Каждую пару путей  $P_i$  и  $P_j$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ , соединить специальным образом так, чтобы построенный подграф состоял из двух  $2(d + 1)$ -вершинных реберно-непересекающихся поддеревьев с диаметром, равным  $d$ . Каждый путь  $P_s$ ,  $1 \leq s \leq m$ , рассматривается в виде двух половин (подпутей)  $P_s^1$  и  $P_s^2$ , каждая из которых содержит одну *концевую* вершину и  $\frac{d-1}{2}$  *внутренних* вершин, суммарно  $\frac{d+1}{2}$  вершин в каждой половине.

Построение множества ребер, соединяющих пути  $P_i$  и  $P_j$ , описано в следующих пунктах 2.1–2.6.

2.1. Соединить каждую внутреннюю вершину  $P_i^1$  кратчайшим ребром с внутренней вершиной  $P_j^1$  и добавить это ребро в  $T_j$ .

2.2. Соединить каждую внутреннюю вершину  $P_i^2$  кратчайшим ребром с внутренней вершиной  $P_j^2$  и добавить это ребро в  $T_j$ .

2.3. Соединить каждую внутреннюю вершину  $P_j^1$  кратчайшим ребром с внутренней вершиной  $P_i^2$  и добавить это ребро в  $T_i$ .

2.4. Соединить каждую внутреннюю вершину  $P_j^2$  кратчайшим ребром с внутренней вершиной  $P_i^1$  и добавить это ребро в  $T_i$ .

2.5. Соединить каждую концевую вершину пути  $P_i$  кратчайшим ребром с внутренней вершиной пути  $P_j$  и добавить это ребро в  $T_j$ .

2.6. Соединить каждую концевую вершину пути  $P_j$  кратчайшим ребром с внутренней вершиной пути  $P_i$  и добавить это ребро в  $T_i$ .

**Шаг 3.** В цикле по  $s = 1, \dots, m$  каждую вершину подграфа  $G(V')$  соединить кратчайшим ребром с внутренней вершиной пути  $P_s$  и добавить это ребро в соответствующее дерево  $T_s$ .

Построение всех  $m$  реберно-непересекающихся остовных деревьев  $T_1, \dots, T_m$  завершено (см. пример на рис. 1–3).

*Замечание 1.* В случае четного параметра  $d$  нужно немного модифицировать алгоритм. На шаге 1 для каждого пути для первой выбранной вершины необходимо найти ближайшую вершину  $v_s$ ,  $s = 1, \dots, m$  за  $d$  действий, эту вершину запомнить, а первую выбранную вершину для каждого пути “отложить” в сторону. Далее, выполнить все шаги алгоритма для  $d' = d - 1$ , где первая вершина каждого пути — это найденная вершина  $v_s$ , и после выполнения шага 3 соединить “отложенные” вершины с уже найденными ближайшими к ним вершинами  $v_s$ ,  $s = 1, \dots, m$ . В итоге создаются остовные деревья, диаметр каждого из которых равен в точности  $d$ , при этом оценка для трудоемкости алгоритма останется прежней.

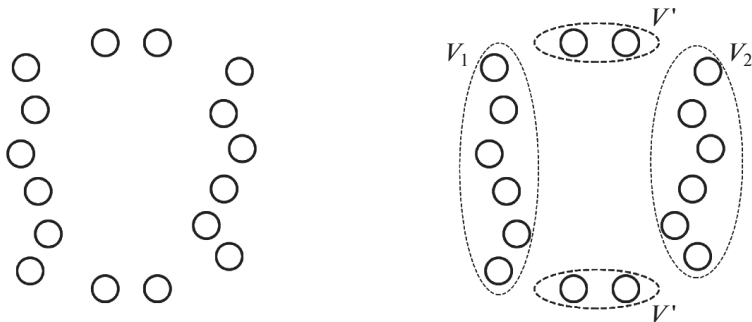


Рис. 1. Изначальные вершины графа и шаг 0 работы алгоритма  $\mathcal{A}$  на 16-вершинном полном графе,  $m = 2$ ,  $d = 5$ .

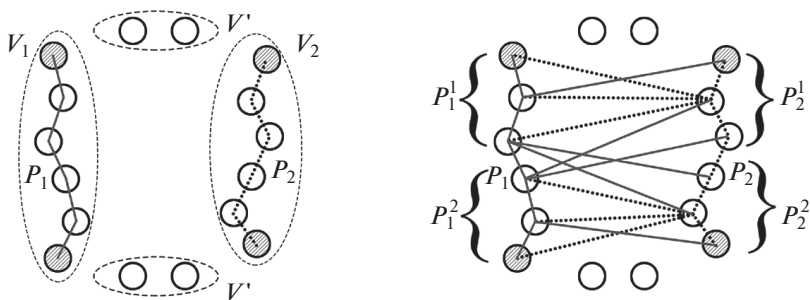


Рис. 2. Шаги 1 и 2 работы алгоритма  $\mathcal{A}$  на 16-вершинном полном графе,  $m = 2$ ,  $d = 5$ . Заштрихованные вершины — это концевые вершины. Сплошные ребра принадлежат дереву  $T_1$ , точечные ребра — дереву  $T_2$ .

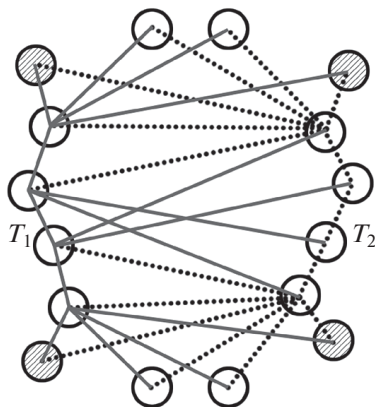


Рис. 3. Шаг 3 работы алгоритма  $\mathcal{A}$  на 16-вершинном полном графе,  $m = 2$ ,  $d = 5$ . Заштрихованные вершины — это концевые вершины. Сплошные ребра принадлежат дереву  $T_1$ , точечные ребра — дереву  $T_2$ .

Введем обозначения:  $W_{\mathcal{A}}$  — общий вес всех остовных деревьев  $T_1, \dots, T_m$ , построенных алгоритмом  $\mathcal{A}$ , а  $W_1, W_2$  и  $W_3$  — это суммарные веса ребер, полученные на шагах 1, 2 и 3 соответственно, тогда  $W_{\mathcal{A}} = W_1 + W_2 + W_3$ .

Сформулируем два утверждения, касающиеся алгоритма  $\mathcal{A}$ .

*Утверждение 1. Алгоритм  $\mathcal{A}$  строит допустимое решение задачи  $m$ - $d$ -UMST.*

*Утверждение 2. Время работы алгоритма  $\mathcal{A}$  оценивается величиной  $\mathcal{O}(n^2)$ .*

### 3. Вероятностный анализ алгоритма $\mathcal{A}$

Через  $F_{\mathcal{A}}(I)$  и  $OPT(I)$  обозначим соответственно приближенное (полученное с помощью некоторого алгоритма  $\mathcal{A}$ ) и оптимальное значение целевой функции задачи на входе  $I$ .

*Определение 1. Алгоритм  $\mathcal{A}$  имеет гарантированные оценки  $(\varepsilon_n, \delta_n)$  качества работы на множестве случайных входов задачи размера  $n$  (где  $n$  — параметр, характеризующий объем входных данных в описании задачи, см. [4]), если*

$$(2) \quad \mathbb{P}\{|F_{\mathcal{A}}(I) - OPT(I)| > \varepsilon_n OPT(I)\} \leq \delta_n,$$

где  $\varepsilon_n = \varepsilon_{\mathcal{A}}(n)$  — оценка относительной погрешности решения, полученного с помощью алгоритма  $\mathcal{A}$ ,  $\delta_n = \delta_{\mathcal{A}}(n)$  — оценка вероятности несрабатывания этого алгоритма, которая равна доле случаев, когда алгоритм не гарантирует решения с анонсированной относительной погрешностью  $\varepsilon_n$  или вовсе не получает какого-либо решения для задачи.

*Определение 2 [14]. Приближенный алгоритм  $\mathcal{A}$  называется асимптотически точным на классе входных данных задачи, если существуют гарантированные оценки качества работы этого алгоритма такие, что для всех входов  $I$  размера  $n$*

$$\varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \delta_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Далее, случайную величину, равную минимуму среди  $k$  случайных независимых одинаково распределенных величин  $\eta$ , обозначим через  $\eta_k$ .

Согласно работе алгоритма для шагов 1–3 справедливы соотношения:

$W_1 = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^d \eta_k$ , так как на шаге 1 строятся  $m$  путей  $P_1, \dots, P_m$  с  $d$  ребрами в каждом.

$W_2 = C_m^2 (4 \frac{d-1}{2} \eta_{(d-1)/2} + 4\eta_{(d-1)})$ , так как для каждой из  $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$  пар путей присоединение новых ребер к искомому множеству остовных деревьев происходит в соответствующих пунктах 2.1–2.6 шага 2 следующим образом:

— во-первых, каждая из  $\frac{d-1}{2}$  внутренних вершин одной половины пути соединяется кратчайшим ребром с одной из  $\frac{d-1}{2}$  внутренних вершин половины другого пути;

— во-вторых, концевая вершина каждого пути соединяется кратчайшим ребром с одной из  $d - 1$  внутренних вершин другого пути.

Множитель 4 возникает, поскольку для каждой пары путей в пунктах 2.1–2.4 внутренние вершины из двух половин одного пути соединяются с внутренними вершинами из двух половин другого пути, а в пунктах 2.5–2.6 соответствующие кратчайшие ребра присоединяются к каждой из 4 концевых вершин рассматриваемой пары путей.

$W_3 = m(n - m(d + 1))\eta_{(d-1)}$ , так как на шаге 3 каждая из  $n - m(d + 1)$  вершин множества  $V'$  соединяется кратчайшими ребрами с внутренними вершинами каждого из  $m$  путей  $P_s$ ,  $1 \leq s \leq m$ .

*Замечание 2.* Стоит отметить, что в случае четного параметра  $d$ :

$$W_1 = m \sum_{k=1}^{d'} \eta_k, \quad W_2 = C_m^2 \left( 4 \frac{d' - 1}{2} \eta_{(d'-1)/2} + 4\eta_{(d'-1)} \right),$$

$$W_3 = m(n - m(d' + 1)) \eta_{(d'-1)},$$

где  $d' = d - 1 \geq 3$ . Таким образом, заменив везде  $d$  на  $d'$ , можно провести тот же вероятностный анализ и доказать все предложенные утверждения.

В дальнейшем перейдем от случайных величин  $\eta$  для каждого из рассматриваемых распределений к *нормализованным* случайным величинам, т.е. величинам  $\xi = \frac{\eta - a_n}{\beta_n}$ , где  $\beta_n = \begin{cases} b_n - a_n & \text{на входах UNI}(a_n; b_n); \\ \lambda_n & \text{на входах EXP}(a_n, \lambda_n); \\ \sigma_n & \text{на входах NORM}(a_n, \sigma_n). \end{cases}$

Рассмотрим случайные величины  $W_1, W_2, W_3$ :

$$W_1 = m \sum_{k=1}^d \eta_k = m \sum_{k=1}^d (\beta_n \xi_k + a_n) = mda_n + \beta_n m \sum_{k=1}^d \xi_k = mda_n + \beta_n W'_1,$$

$$\begin{aligned} W_2 &= C_m^2 \left( 4 \frac{d-1}{2} \eta_{(d-1)/2} + 4\eta_{(d-1)} \right) = \\ &= C_m^2 \left( 4 \frac{d-1}{2} (\beta_n \xi_{(d-1)/2} + a_n) + 4(\beta_n \xi_{(d-1)} + a_n) \right) = \\ &= m(m-1)(d+1)a_n + \beta_n m(m-1) \left( (d-1)\xi_{(d-1)/2} + 2\xi_{(d-1)} \right) = \\ &= (m^2(d+1) - md - m) a_n + \beta_n W'_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_3 &= m(n - m(d+1))\eta_{(d-1)} = m(n - m(d+1)) (\beta_n \xi_{(d-1)} + a_n) = \\ &= m(n - m(d+1))a_n + \beta_n m(n - m(d+1))\xi_{(d-1)} = \\ &= (mn - m^2(d+1)) a_n + \beta_n W'_3, \end{aligned}$$

где  $W'_1, W'_2, W'_3$  — нормализованные случайные величины для  $W_1, W_2, W_3$  соответственно, а  $\beta_n$  — параметр распределения.

Получается следующее соотношение для суммы весов построенных остовных деревьев:  $W_{\mathcal{A}} = m(n-1)a_n + \beta_n W'_{\mathcal{A}}$ , где  $W'_{\mathcal{A}} = W'_1 + W'_2 + W'_3$ .

*Лемма 1.* Алгоритм  $\mathcal{A}$  для решения задачи  $m$ - $d$ -UMST на  $n$ -вершинном полном графе с весами ребер из соответствующего класса распределения ( $UNI(a_n; b_n)$ ,  $EXP(a_n, \lambda_n)$  или  $NORM(a_n, \sigma_n)$ ) является алгоритмом со следующими оценками относительной погрешности  $\varepsilon_n$  и вероятности несрабатывания  $\delta_n$ :

$$(3) \quad \varepsilon_n = \frac{2\beta_n}{m(n-1)a_n} \widehat{\mathbb{E}W'_A}, \quad \delta_n = \mathbb{P}\{\widetilde{W}'_A > \widehat{\mathbb{E}W'_A}\},$$

где  $\beta_n$  — параметр соответствующего распределения,  $\widehat{\mathbb{E}W'_A}$  — это некоторая верхняя оценка для математического ожидания  $\mathbb{E}W'_A$ ,  $\widetilde{W}'_A = W'_A - \mathbb{E}W'_A$ .

В дальнейшем для вероятностного анализа алгоритма  $\mathcal{A}$  оказывается полезным следующее утверждение из теории вероятностей.

*Теорема 1* [15]. Рассмотрим независимые случайные величины  $X_1, \dots, \dots, X_n$ . Зададим положительные константы  $T$  и  $h_1, \dots, h_n$  такие, что для всех  $k = 1, \dots, n$  и  $0 \leq t \leq T$  верно неравенство

$$(4) \quad \mathbb{E}e^{tX_k} \leq e^{\frac{h_k t^2}{2}}.$$

Пусть  $S = \sum_{k=1}^n X_k$  и  $H = \sum_{k=1}^n h_k$ . Тогда

$$\mathbb{P}\{S > x\} \leq \begin{cases} \exp\left\{-\frac{x^2}{2H}\right\}, & \text{если } 0 \leq x \leq HT, \\ \exp\left\{-\frac{Tx}{2}\right\}, & \text{если } x \geq HT. \end{cases}$$

Также для дальнейшего анализа будет полезным следующее

*Утверждение 3.* Для любого целого  $d \geq 3$  верна оценка сверху

$$\sum_{k=1}^d \frac{1}{k} \leq \ln d + \frac{3}{4}.$$

Параметр  $d$  предполагается нечетным и определенным на множестве значений двух полуинтервалов: случай 1 ( $\ln n \leq d < \frac{n}{\ln n}$ ) и случай 2 ( $\frac{n}{\ln n} \leq d < \frac{n}{m}$ ).

### 3.1. Распределение $UNI(a_n; b_n)$

Для распределения  $UNI(a_n; b_n)$  перейдем от величин  $\eta$  и  $\eta_k$  к нормализованным случайным величинам  $\xi = \frac{\eta - a_n}{b_n - a_n}$  и  $\xi_k = \frac{\eta_k - a_n}{b_n - a_n}$ .

*Лемма 2.* Для  $\mathbb{E}W'_A$  верно неравенство

$$\mathbb{E}W'_A \leq m \ln d + \frac{2mn}{d}.$$



Лемма 3. Пусть заданы константы  $T = 1$  и  $h_k = \frac{1}{(k+1)^2}$ . Тогда в рамках распределения  $\text{UNI}(a_n; b_n)$  для смещенных случайных величин  $\tilde{\xi}_k = \xi_k - \mathbb{E}\xi_k$  верны неравенства  $\mathbb{E}e^{t\tilde{\xi}_k} \leq e^{\frac{h_k t^2}{2}}$  в теореме Петрова [15, с. 54–55] для каждого  $0 \leq t \leq T$  и  $1 \leq k \leq d$ .

Лемма 4. В случае  $\ln n \leq d < \frac{n}{m}$  для суммы констант  $h_k = \frac{1}{(k+1)^2}$ , которые соответствуют добавленным ребрам в создаваемые деревья, верна верхняя оценка

$$H \leq \frac{mn}{d}.$$

Лемма 5. В случае  $\ln n \leq d < \frac{n}{\ln n}$  верна следующая верхняя оценка:

$$\mathbb{E}W'_A \leq \frac{3mn}{d} = \widehat{\mathbb{E}W'_A}.$$

Лемма 6. Для случая  $\frac{n}{\ln n} \leq d < \frac{n}{m}$  верно неравенство

$$\mathbb{E}W'_A \leq 3m \ln n = \widehat{\mathbb{E}W'_A}.$$

С помощью предыдущих лемм можно доказать главный результат этого подраздела.

Теорема 2. Пусть параметр  $d = d_n$  определен так, что  $\ln n \leq d < \frac{n}{m}$ . Тогда алгоритм  $\mathcal{A}$  для решения задачи  $m$ - $d$ -UMST с весами ребер из  $\text{UNI}(a_n; b_n)$  асимптотически точен с вероятностью несрабатывания  $\delta_n = n^{-m} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и следующими условиями на разброс весов ребер графа  $G$ :

$$(5) \quad \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} o(d), & \text{если } \ln n \leq d < \frac{n}{\ln n}, \\ o\left(\frac{n}{\ln n}\right), & \text{если } \frac{n}{\ln n} \leq d < \frac{n}{m} \text{ и } m < \ln n. \end{cases}$$

### 3.2. Распределение $\text{EXP}(a_n, \lambda_n)$

От случайных величин  $\eta, \eta_k$  перейдем к нормализованным случайным величинам  $\xi = \frac{\eta - a_n}{\lambda_n}$  и  $\xi_k = \frac{\eta_k - a_n}{\lambda_n}$ . В терминах этих переменных запишем ф.р.  $\mathfrak{P}_\xi(x) = 1 - e^{-x}$  и плотность распределения согласно (1)

$$p(\xi) = \begin{cases} e^{-\xi}, & \text{если } 0 \leq \xi < \infty, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

случайной величины  $\xi$ , а также ф.р. случайной величины  $\xi_k$ :

$$(6) \quad \mathfrak{P}_{\xi_k}(x) = 1 - (1 - \mathfrak{P}_\xi(x))^k.$$

Лемма 7. Математическое ожидание случайной величины  $\xi_k$  равно  $\mathbb{E}\xi_k = 1/k$ .

Лемма 8. В случае распределения  $\text{EXP}(a_n, \lambda_n)$  верна следующая верхняя оценка для математического ожидания веса решения, полученного алгоритмом  $\mathcal{A}$ :

$$\mathbb{E}W'_A \leq m \ln d + \frac{2mn}{d-1} = \widehat{\mathbb{E}W'_A}.$$

Лемма 9. Пусть  $T = \frac{1}{2}$ ,  $h_k = \frac{3}{k^2}$ . Тогда при любом  $1 \leq k \leq d$  и  $0 \leq t \leq T$  для смещенных случайных величин  $\tilde{\xi}_k = \xi_k - \mathbb{E}\xi_k$  верны условия  $\mathbb{E}e^{t\tilde{\xi}_k} \leq e^{\frac{h_k t^2}{2}}$  теоремы Петрова [15, с. 54–55].

Лемма 10. Пусть  $\ln n \leq d < \frac{n}{m}$ . Тогда при достаточно больших  $n$  верна следующая верхняя оценка для суммы констант  $h_k = \frac{3}{k^2}$ , которые соответствуют добавленным ребрам в создаваемые деревья:

$$H \leq \frac{3mn}{d-1}.$$

Лемма 11. В случае  $\ln n \leq d < \frac{n}{\ln n}$  верна верхняя оценка

$$\mathbb{E}W'_A \leq \frac{3mn}{d-1} = \widehat{\mathbb{E}W'_A}.$$

Лемма 12. Для случая  $\frac{n}{\ln n} \leq d < \frac{n}{m}$  верно следующее неравенство:

$$\mathbb{E}W'_A \leq 5m \ln n = \widehat{\mathbb{E}W'_A}.$$

Используя введенные выше леммы, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть параметр  $d = d_n$  определен так, что  $\ln n \leq d < \frac{n}{m}$ . Тогда алгоритм  $\mathcal{A}$  для решения задачи  $m$ - $d$ -UMST с весами ребер из  $\text{EXP}(a_n, \lambda_n)$  асимптотически точен с вероятностью несрабатывания  $\delta_n = n^{-m} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если имеют место следующие условия на разброс весов ребер графа  $G$ :

$$(7) \quad \frac{\lambda_n}{a_n} = \begin{cases} o(d), & \text{если } \ln n \leq d < \frac{n}{\ln n}, \\ o\left(\frac{n}{\ln n}\right), & \text{если } \frac{n}{\ln n} \leq d < \frac{n}{m} \text{ и } m < \ln n. \end{cases}$$

### 3.3. Распределение $\text{NORM}(a_n, \sigma_n)$

Для распределения  $\text{NORM}(a_n, \sigma_n)$  вместо случайных величин  $\eta$  и  $\eta_k$  для соответствующих весов графа введем нормализованные случайные величины  $\xi = \frac{\eta - a_n}{\sigma_n}$  и  $\xi_k = \frac{\eta_k - a_n}{\sigma_n}$ .

Для случайной величины  $\xi$  верны следующие плотность распределения согласно (1) и ф.р.:

$$p(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), & \text{если } 0 \leq \xi < \infty, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad \mathfrak{F}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

Определение 3. Говорят, что ф.р.  $\mathfrak{F}_1(x)$  мажорирует ф.р.  $\mathfrak{F}_2(x)$ , если  $\mathfrak{F}_1(x) \geq \mathfrak{F}_2(x)$  для всех  $x$ .

Утверждение 4. Ф.р.  $\mathfrak{F}(x)$  нормальной случайной величины с параметром  $\sigma_n$  мажорирует экспоненциальную ф.р. с параметром  $\lambda_n = 2\sigma_n$ :

$$(8) \quad \mathfrak{F}(x) \geq \mathfrak{P}(x/2) \quad \forall x \geq 0.$$

Лемма 13 [16]. Пусть  $\chi_1, \dots, \chi_k$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с ф.р.  $F(x)$ , а  $\widehat{F}(x)$  — ф.р. случайной величины  $\chi = \min_{i=1, \dots, k} \chi_i$ ,  $\zeta_1, \dots, \zeta_k$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с ф.р.  $G(x)$ , аналогично,  $\widehat{G}(x)$  — ф.р. случайной величины  $\zeta = \min_{i=1, \dots, k} \zeta_i$ . Тогда при любом  $x$

$$F(x) \leq G(x) \Rightarrow \widehat{F}(x) \leq \widehat{G}(x).$$

Лемма 14 [16]. Пусть  $P_\vartheta, P_\omega, P_\zeta, P_\chi$  — ф.р. случайных величин  $\vartheta, \omega, \zeta, \chi$  соответственно, причем  $\vartheta$  и  $\zeta$  независимы, а также  $\omega$  и  $\chi$  независимы. Тогда

$$(\forall x P_\vartheta(x) \leq P_\omega(x)) \wedge (\forall y P_\zeta(y) \leq P_\chi(y)) \Rightarrow (\forall z P_{\vartheta+\zeta}(z) \leq P_{\omega+\chi}(z)).$$

Лемма 15 [16]. Пусть ф.р.  $F(x)$  и  $P(x)$  случайных величин таковы, что  $F(x) \geq P(x)$ . Тогда для алгоритма  $\mathcal{A}$  на входах с ф.р.  $F(x)$  справедливы те же оценки качества  $(\varepsilon_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$ , что и в случае входов с ф.р.  $P(x)$ .

Положим  $F(x) = \mathfrak{F}(x)$  и  $P(x) = \mathfrak{P}(x/2)$ . Из утверждения 4 и лемм 13–15 для смещенного усеченно-нормального распределения следует

Теорема 4. Пусть параметр  $d = d_n$  определен так, что  $\ln n \leq d < \frac{n}{m}$ . Тогда алгоритм  $\mathcal{A}$  для решения задачи  $m$ - $d$ -UMST на  $n$ -вершинном полном неориентированном графе с весами ребер, принимающими значения из неограниченного сверху полуинтервала  $[a_n; \infty)$  согласно  $\text{NORM}(a_n, \sigma_n)$ , асимптотически точен с вероятностью несрабатывания  $\delta_n = n^{-m} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и следующими условиями на разброс весов ребер графа  $G$ :

$$\frac{\sigma_n}{a_n} = \begin{cases} o(d), & \text{если } \ln n \leq d < \frac{n}{\ln n}, \\ o\left(\frac{n}{\ln n}\right), & \text{если } \frac{n}{\ln n} \leq d < \frac{n}{m} \text{ и } m < \ln n. \end{cases}$$

#### 4. Заключение

В этой работе представлен детерминированный приближенный алгоритм, который за время  $\mathcal{O}(n^2)$ , где  $n$  — количество вершин в графе, решает задачу минимизации суммарного веса нескольких реберно-непересекающихся остовных деревьев с фиксированным диаметром в реберно-взвешенном полном неориентированном графе. Проведен анализ этого алгоритма в случае распределения весов ребер графа согласно равномерному  $\text{UNI}(a_n; b_n)$  и усеченно-смещенным распределениям вероятности: экспоненциальному  $\text{EXP}(a_n, \lambda_n)$  и нормальному  $\text{NORM}(a_n, \sigma_n)$ . Получены достаточные условия асимптотической точности этого алгоритма для каждого из распределений. Интересным

представляется изучение задачи на входных данных с дискретными распределениями. Также было бы полезно рассмотреть задачу поиска нескольких реберно-непересекающихся остовных деревьев максимального суммарного веса с фиксированным или ограниченным диаметром.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения 1.* Каждая из полученных реберно-непересекающихся конструкций состоит из  $n$  вершин и  $(n - 1)$  ребер, так как сначала на шаге 1 строится  $(d + 1)$ -вершинный путь и затем на шагах 2 и 3 к нему присоединяются все остальные вершины графа, не увеличивая диаметр построенного остовного дерева. В конце получается  $m$  таких конструкций — остовных деревьев, представляющих допустимое решение задачи  $m$ - $d$ -UMST.

*Доказательство утверждения 2.* Предварительный шаг 0 требует  $\mathcal{O}(n)$  элементарных операций.

На шаге 1 каждый путь строится за время  $\mathcal{O}(d^2)$ , таким образом, полностью этот шаг выполняется за время  $\mathcal{O}(md^2)$  или  $\mathcal{O}(nd)$  (так как  $m(d+1) \leq n$ ).

На пп. 2.1–2.4 каждая пара путей  $(P_i, P_j)$ ,  $1 \leq i < j \leq m$  соединяется за время  $\mathcal{O}(d^2)$ , и для всех  $\frac{m(m-1)}{2}$  пар путей требуется  $\mathcal{O}(m^2d^2)$  действий или  $\mathcal{O}(n^2)$  элементарных операций.

Пп. 2.5–2.6 выполняются с трудоемкостью  $\mathcal{O}(md)$ .

Шаг 3 требует времени  $\mathcal{O}(mdn)$  или  $\mathcal{O}(n^2)$  на соединение  $|G(V')| < n$  вершин кратчайшим ребром с внутренними вершинами путей  $P_s$  в каждом остовном дереве  $T_s$ ,  $1 \leq s \leq m$ .

Таким образом, общая трудоемкость алгоритма  $\mathcal{A}$  оценивается величиной  $\mathcal{O}(n^2)$ .

*Доказательство леммы 1.* Запишем неравенство (2) для гарантированных оценок качества алгоритма применительно к рассматриваемому случаю задачи на минимум.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left\{W_{\mathcal{A}} - OPT(I) > \varepsilon_n OPT\right\} &= \mathbb{P}\left\{W_{\mathcal{A}} > (1 + \varepsilon_n)OPT\right\} \leq \\
 &\leq \mathbb{P}\left\{W_{\mathcal{A}} > (1 + \varepsilon_n)m(n - 1)a_n\right\} = \\
 &= \mathbb{P}\left\{m(n - 1)a_n + \beta_n W'_{\mathcal{A}} > (1 + \varepsilon_n)m(n - 1)a_n\right\} = \\
 &= \mathbb{P}\left\{W'_{\mathcal{A}} - \mathbb{E}W'_{\mathcal{A}} > \frac{\varepsilon_n m(n - 1)a_n}{\beta_n} - \mathbb{E}W'_{\mathcal{A}}\right\} = \\
 &= \mathbb{P}\left\{\widetilde{W}'_{\mathcal{A}} > \frac{\varepsilon_n m(n - 1)a_n}{\beta_n} - \mathbb{E}W'_{\mathcal{A}}\right\} \leq \\
 &\leq \mathbb{P}\left\{\widetilde{W}'_{\mathcal{A}} > \frac{\varepsilon_n m(n - 1)a_n}{\beta_n} - \widehat{\mathbb{E}W'_{\mathcal{A}}}\right\} = \mathbb{P}\left\{\widetilde{W}'_{\mathcal{A}} > \widehat{\mathbb{E}W'_{\mathcal{A}}}\right\} = \delta_n,
 \end{aligned}$$

предпоследнее равенство верно для  $\varepsilon_n = \frac{2\beta_n \widehat{\mathbb{E}W'_{\mathcal{A}}}}{m(n-1)a_n}$ .

Доказательство утверждения 3. Легко понять, что

$$\sum_{k=1}^d \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \int_3^d \frac{dx}{x} = \frac{11}{6} + \ln d - \ln 3 \leq \ln d + \frac{3}{4}.$$

Доказательство леммы 2. Нетрудно установить, что  $\mathbb{E}\xi_k = \frac{1}{k+1}$  для входов  $\text{UNI}(a_n; b_n)$ . Оценим сверху каждое из математических ожиданий случайных величин  $W'_1, W'_2$  и  $W'_3$ .

$$\mathbb{E}W'_1 = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^d \mathbb{E}\xi_k = m \sum_{k=1}^d \frac{1}{k+1} \leq m \ln d,$$

последнее неравенство верно при  $d \geq 3$  в силу утверждения 3, и соотношения

$$\sum_{k=1}^d \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^d \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{d+1} \leq \sum_{k=1}^d \frac{1}{k} - \frac{3}{4} \leq \ln d.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}W'_2 &= C_m^2 \left( 4 \frac{d-1}{2} \mathbb{E}\xi_{(d-1)/2} + 4 \mathbb{E}\xi_{(d-1)} \right) = \\ &= \frac{m(m-1)}{2} \left( \frac{4(d-1)/2}{(d-1)/2+1} + \frac{4}{d} \right) \leq 2m^2; \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}W'_3 = m(n - m(d+1)) \mathbb{E}\xi_{(d-1)} = m \frac{n - m(d+1)}{d} \leq \frac{mn}{d} - m^2.$$

Сложив три неравенства и принимая во внимание, что  $m(d+1) \leq n$ , получаем

$$\mathbb{E}W'_A = \mathbb{E}(W'_1 + W'_2 + W'_3) \leq m \ln d + 2m^2 + \frac{mn}{d} - m^2 \leq m \ln d + \frac{2mn}{d}.$$

Доказательство леммы 3. Оценим  $\mathbb{E}e^{t\xi_k}$  сверху, используя формулу

$$\mathbb{E}e^{t\xi_k} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{(k+1) \cdots (k+i)}$$

из монографии [17, с. 129], а также обозначения  $\alpha = \frac{t}{k+1}$  и

$$Q_{k,t} = \frac{(k+1)}{(k+2)(1 - \frac{t}{k+3})} \leq Q_{k,T} = \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} < 1$$

для всяких  $t \leq T$  и натуральных  $k$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{t\xi_k} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{(k+1) \cdots (k+i)} \leq 1 + \alpha + \alpha^2 Q_{k,t} \leq 1 + \alpha + \alpha^2 \leq e^{\alpha + \frac{\alpha^2}{2}} = \\ &= e^{t\mathbb{E}\xi_k} e^{\frac{h_k t^2}{2}}, \end{aligned}$$

так как  $\mathbb{E}\xi_k = \frac{1}{k+1}$  для входов  $\text{UNI}(a_n; b_n)$ .

Следовательно,

$$\mathbb{E}e^{t(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k)} = \mathbb{E}e^{t\tilde{\xi}_k} \leq e^{\frac{h_k t^2}{2}},$$

где  $\tilde{\xi}_k = \xi_k - \mathbb{E}\xi_k$ .

*Доказательство леммы 4.* В случае  $\ln n \leq d < \frac{n}{m}$  параметр  $H$  равен сумме величин  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$  согласно шагам алгоритма  $\mathcal{A}$ . С учетом обозначений и оценок, полученных ранее, приходим к следующему:

$$H_1 = m \sum_{k=1}^d h_k = m \sum_{k=1}^d \frac{1}{(k+1)^2} < \psi m,$$

где  $\psi \approx 0,645$ . Здесь используется оценка Эйлера для суммы обратных квадратов  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} < 1,645$ .

$$\begin{aligned} H_2 &= 4C_m^2 \left( \frac{d-1}{2} h_{(d-1)/2} + h_{(d-1)} \right) \leq 2m^2 \left( \frac{(d-1)/2}{((d-1)/2+1)^2} + \frac{1}{d^2} \right) = \\ &= 2m^2 \left( \frac{2(d-1)}{(d+1)^2} + \frac{1}{d^2} \right) \leq 4m^2 \frac{d}{(d+1)^2}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно для  $d \geq 3$ .

$$H_3 = m(n - m(d+1))h_{(d-1)} \leq \frac{mn}{d^2} - m^2 \frac{d}{(d+1)^2}.$$

Поскольку  $n \geq m(d+1)$  и  $m \geq 2$ , получаем

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2 + H_3 < \psi m + 4m^2 \frac{d}{(d+1)^2} + \left( \frac{mn}{d^2} - m^2 \frac{d}{(d+1)^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{mn}{d} \left( \frac{d\psi}{n} + \frac{1}{d} \right) + 3m^2 \frac{d}{(d+1)^2} \leq \left( \frac{\psi d}{2(d+1)} + \frac{1}{d} + \frac{3d^2}{(d+1)^3} \right) \frac{mn}{d}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что выражение в круглых скобках меньше 1 для всякого  $d \geq 3$ , откуда получаем оценку  $H \leq \frac{mn}{d}$ .

*Доказательство леммы 5.* С учетом неравенств  $\ln d \leq \ln n$  и  $d < \frac{n}{\ln n}$  справедливо:

$$\mathbb{E}W'_A \leq m \ln d + \frac{2mn}{d} \leq m \ln n + \frac{2mn}{d} < m \frac{n}{d} + \frac{2mn}{d} = \frac{3mn}{d} = \widehat{\mathbb{E}W'_A}.$$

*Доказательство леммы 6.* Вследствие леммы 2 и так как  $\ln d \leq \ln n$ , а также  $\frac{n}{d} \leq \ln n$ , получаем

$$\mathbb{E}W'_A \leq m \ln d + \frac{2mn}{d} \leq 3m \ln n = \widehat{\mathbb{E}W'_A}.$$

*Доказательство теоремы 2.* Вначале отметим, что в ходе работы алгоритма  $\mathcal{A}$  используются случайные величины типа  $\xi_k$ ,  $1 \leq k \leq d$ . В случае графа с весами ребер из  $\text{UNI}(a_n; b_n)$  эти случайные величины со смещением удовлетворяют условиям  $\mathbb{E}e^{t\tilde{\xi}_k} \leq e^{\frac{h_k t^2}{2}}$  теоремы Петрова [15, с. 54–55] для констант  $T = 1$  и  $h_k = \frac{1}{(k+1)^2}$  (см. лемма 3).

Проведем доказательство для двух случаев возможных полуинтервалов значений параметра  $d$ .

$$\text{Случай 1: } \ln n \leq d < \frac{n}{\ln n}.$$

Согласно лемме 5 и формуле (3) для относительной погрешности получаем

$$\varepsilon_n = \frac{2(b_n - a_n)}{m(n-1)a_n} \widehat{\mathbb{E}W'_{\mathcal{A}}} = \frac{2(b_n - a_n)}{m(n-1)a_n} \frac{3mn}{d} \leq \frac{6n}{(n-1)} \frac{b_n/a_n}{d}.$$

Видим, что  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если верны следующие условия на разброс весов ребер  $G$ :  $\frac{b_n}{a_n} = o(d_n)$ .

Используя леммы 1 и 5, оцениваем вероятность несрабатывания:

$$\delta_n = \mathbb{P}\{\widetilde{W}'_{\mathcal{A}} > \widehat{\mathbb{E}W'_{\mathcal{A}}}\} = \mathbb{P}\left\{\widetilde{W}'_{\mathcal{A}} > \frac{3mn}{d}\right\}.$$

Из леммы 4 и неравенства  $d < \frac{n}{\ln n}$  следует  $TH \leq \frac{mn}{d} < \frac{3mn}{d} = x$ . Согласно теореме Петрова [15, с. 54–55] получаем оценку для вероятности несрабатывания алгоритма  $\mathcal{A}$ :  $\delta_n = \mathbb{P}\{W'_{\mathcal{A}} > x\} \leq \exp\left\{-\frac{Tx}{2}\right\}$ .

Поскольку  $\ln n < \frac{n}{d}$  и  $\frac{Tx}{2} = \frac{3mn}{2d} > m \ln n$ , то

$$\delta_n = \mathbb{P}\{\widetilde{W}'_{\mathcal{A}} > x\} \leq \exp\left\{-\frac{Tx}{2}\right\} < \exp(-m \ln n) = \frac{1}{n^m} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в случае 1 алгоритм  $\mathcal{A}$  дает асимптотически точное решение задачи  $m$ - $d$ -UMST на графе с весами ребер из  $\text{UNI}(a_n; b_n)$ .

$$\text{Случай 2: } \frac{n}{\ln n} \leq d < \frac{n}{m}.$$

Согласно лемме 6 и формуле (3) для относительной погрешности получаем

$$\varepsilon_n = \frac{2(b_n - a_n)}{(n-1)a_n} \widehat{\mathbb{E}W'_{\mathcal{A}}} = \frac{2(b_n - a_n)}{m(n-1)a_n} 3m \ln n \leq \frac{6(b_n/a_n) \ln n}{(n-1)}.$$

Понятно, что  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $\frac{b_n}{a_n} = o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$ .

Теперь, используя лемму 1 и лемму 6, оценим вероятность несрабатывания  $\delta_n = \mathbb{P}\{\widetilde{W}'_{\mathcal{A}} > \widehat{\mathbb{E}W'_{\mathcal{A}}}\} = \mathbb{P}\{W'_{\mathcal{A}} > 3m \ln n\}$ . При  $T = 1$  с учетом  $d \geq \frac{n}{\ln n}$  и леммы 4 верно следующее неравенство:  $TH \leq \frac{mn}{d} < 3m \ln n = x$ . Поскольку  $\frac{Tx}{2} > m \ln n$ , то согласно теореме Петрова [15, с. 54–55] приходим к следующей оценке для вероятности несрабатывания алгоритма  $\mathcal{A}$ :  $\delta_n = \mathbb{P}\{\widetilde{W}'_{\mathcal{A}} > x\} \leq \exp\left\{-\frac{Tx}{2}\right\} \leq \exp(-m \ln n) = \frac{1}{n^m} \rightarrow 0$ .

Из этого следует, что в случае 2 алгоритм  $\mathcal{A}$  также дает асимптотически точное решение задачи  $m$ - $d$ -UMST на  $n$ -вершинном полном неориентированном графе с весами ребер из  $\text{UNI}(a_n; b_n)$ .

Таким образом, можно сделать вывод, что для значений параметра  $d$  в обоих случаях при условиях (5) имеем оценки: относительной погрешности  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  и вероятности несрабатывания  $\delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство леммы 7.* С учетом (6) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_k &= \int_0^{\infty} x d\mathfrak{P}_{\xi_k}(x) = \int_0^{\infty} xk(1 - \mathfrak{P}_{\xi}(x))^{k-1} d\mathfrak{P}_{\xi}(x) = \int_0^{\infty} xke^{-kx} dx = \\ &= -xe^{-kx} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-kx} dx = -\frac{1}{k} e^{-kx} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

*Доказательство леммы 8.* Оценим сверху каждое из математических ожиданий случайных величин  $W'_1$ ,  $W'_2$  и  $W'_3$ :

$$\mathbb{E}W'_1 = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^d \mathbb{E}\xi_k = m \sum_{k=1}^d \frac{1}{k} \leq m \left( \ln d + \frac{3}{4} \right)$$

с учетом утверждения 3 и леммы 7;

$$\begin{aligned} \mathbb{E}W'_2 &= C_m^2 \left( 4 \frac{d-1}{2} \mathbb{E}\xi_{(d-1)/2} + 4\mathbb{E}\xi_{d-1} \right) = \\ &= 2m(m-1) \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) \leq \frac{2d}{d-1} m^2 - 2m; \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}W'_3 = m(n - m(d+1))\mathbb{E}\xi_{(d-1)} = m \frac{n - m(d+1)}{d-1} = \frac{mn}{d-1} - \frac{d+1}{d-1} m^2.$$

Сложив левые и правые части трех соотношений для  $\mathbb{E}W'_1$ ,  $\mathbb{E}W'_2$ ,  $\mathbb{E}W'_3$ , и принимая во внимание, что  $m \leq \frac{n}{d+1}$ , получим:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}W'_A &\leq m \ln d - \frac{5}{4}m + \frac{mn}{d-1} + m^2 \leq \\ &\leq m \ln d + \frac{mn}{d-1} + \frac{mn}{d+1} \leq m \ln d + \frac{2mn}{d-1}. \end{aligned}$$

*Доказательство леммы 9.* Согласно формуле (6) для величины  $\mathbb{E}e^{t\xi_k}$  верно

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{t\xi_k} &= \int_0^{\infty} e^{tx} d\mathfrak{P}_{\xi_k}(x) = \int_0^{\infty} e^{tx} ke^{-kx} dx = \int_0^{\infty} ke^{-(k-t)x} dx = \\ &= -\frac{k}{k-t} e^{-(k-t)x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1-t/k} = \sum_{s=0}^{\infty} \left( \frac{t}{k} \right)^s \leq 1 + \frac{t}{k} + \left( \frac{t}{k} \right)^2 \frac{1}{1-t/k}. \end{aligned}$$



С учетом верного в условиях леммы неравенства  $\frac{t}{k} \leq \frac{1}{2}$  оценим величину  $\mathbb{E}e^{t\xi_k}$  сверху:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{t\xi_k} &\leq 1 + \frac{t}{k} + 2\left(\frac{t}{k}\right)^2 = 1 + \frac{t}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{k}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{t}{k}\right)^2 \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{t}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{k}\right)^2\right) \left(1 + \frac{3}{2}\left(\frac{t}{k}\right)^2\right) \leq e^{t/k} \exp\left(\frac{3}{2}\left(\frac{t}{k}\right)^2\right) = e^{t\mathbb{E}\xi_k} \exp\left(\frac{h_k t^2}{2}\right), \end{aligned}$$

так как согласно лемме 7  $\mathbb{E}\xi_k = \frac{1}{k}$  для  $\text{EXP}(a_n, \lambda_n)$ . Отсюда непосредственно следует выполнение условий  $\mathbb{E}e^{\tilde{t}\xi_k} \leq e^{\frac{h_k t^2}{2}}$  теоремы Петрова с константами  $T = 1/2$ ,  $h_k = 3/k^2$ .

*Доказательство леммы 10.* В случае  $\ln n \leq d < \frac{n}{m}$  параметр  $H$  равен сумме величин  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$  согласно шагам алгоритма  $\mathcal{A}$ . С учетом ранее введенных обозначений и оценок получаем

$$H_1 = m \sum_{k=1}^d h_k = m \sum_{k=1}^d \frac{3}{k^2} < 3(1 + \psi)m < 5m,$$

где  $\psi$  равно оценке Эйлера для суммы обратных квадратов за вычетом 1 ( $\psi \approx 0,645$ ).

$$\begin{aligned} H_2 &= 4C_m^2 \left( \frac{d-1}{2} h_{(d-1)/2} + h_{(d-1)} \right) = \\ &= 6m(m-1) \left( \frac{2}{d-1} + \frac{1}{(d-1)^2} \right) \leq 6m^2 \frac{2d-1}{(d-1)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3 &= m(n - m(d+1))h_{(d-1)} = \\ &= \frac{3}{(d-1)^2} (mn - m^2(d+1)) \leq \frac{3mn}{(d-1)^2} - 3m^2 \frac{d+1}{(d-1)^2}. \end{aligned}$$

С учетом  $n \geq m(d+1)$  и  $m \geq 2$  получаем

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2 + H_3 < 5m + \frac{3m^2}{(d-1)^2} \left( (4d-2) - (d+1) \right) + \frac{3mn}{(d-1)^2} = \\ &= 3m \left( \frac{5}{3} + \frac{3m}{d-1} \right) + \frac{3mn}{(d-1)^2} \leq \\ &\leq \frac{3n}{d+1} \left( \frac{5}{3} + \frac{3m}{d-1} \right) + \frac{3mn}{(d-1)^2} \leq \frac{3n}{d+1} \left( \frac{5m}{6} + \frac{3m}{d-1} \right) + \frac{3mn}{(d-1)^2} = \\ &= \frac{3mn}{d-1} \left( \frac{5(d-1)}{6(d+1)} + \frac{3}{d+1} + \frac{1}{d-1} \right) \leq \frac{3mn}{d-1}. \end{aligned}$$

Последний знак неравенства обусловлен тем, что при достаточно больших  $n$  выражение в круглых скобках меньше 1, поскольку  $d \geq \ln n$ .

*Доказательство леммы 11.* С учетом  $\ln d \leq \ln n$ ,  $d < \frac{n}{\ln n}$  и леммы 8 приходим к

$$\mathbb{E}W'_{\mathcal{A}} \leq m \ln d + \frac{2mn}{d-1} \leq m \frac{n}{d} + \frac{2mn}{d-1} \leq \frac{3mn}{d-1} = \widehat{\mathbb{E}W'_{\mathcal{A}}}.$$

*Доказательство леммы 12.* Согласно лемме 8, а также неравенствам  $\ln d \leq \ln n$  и  $n \leq d \ln n$  получаем

$$\mathbb{E}W'_{\mathcal{A}} \leq m \ln d + \frac{2mn}{d-1} \leq m \ln n + \frac{2md}{d-1} \ln n \leq 5m \ln n = \widehat{\mathbb{E}W'_{\mathcal{A}}}.$$

*Доказательство теоремы 3.* Вначале отметим, что случайные величины  $\tilde{\xi}_k = \xi_k - \mathbb{E}\xi_k$  удовлетворяют условиям  $\mathbb{E}e^{t\tilde{\xi}_k} \leq e^{\frac{h_k t^2}{2}}$  теоремы Петрова для констант  $T = 1/2$  и  $h_k = \frac{3}{k^2}$  (см. лемму 9).

Проведем доказательство для двух случаев возможных полуинтервалов значений параметра  $d$ .

$$\text{Случай 1: } \ln n \leq d < \frac{n}{\ln n}.$$

Согласно лемме 11 и формуле (3) для относительной погрешности получаем

$$\varepsilon_n = \frac{2\lambda_n}{m(n-1)a_n} \frac{3mn}{(d-1)} \leq \frac{6n}{(n-1)} \frac{\lambda_n/a_n}{(d-1)}.$$

Видим, что при  $n \rightarrow \infty$   $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , если  $\frac{\lambda_n}{a_n} = o(d_n)$ .

Теперь, используя леммы 1 и 11, оценим вероятность несрабатывания:

$$\delta_n = \mathbb{P}\{\widetilde{W'_{\mathcal{A}}} > \widehat{\mathbb{E}W'_{\mathcal{A}}}\} = \mathbb{P}\{\widetilde{W'_{\mathcal{A}}} > \frac{3mn}{d-1}\} = \mathbb{P}\{\widetilde{W'_{\mathcal{A}}} > \frac{3mn}{d-1}\}.$$

Для каждого ребра с весом, соответствующим случайной величине  $\xi_k$ , определим константы  $T = 1/2$  и  $h_k = \frac{3}{k^2}$ .

Из леммы 10 следует  $TH \leq \frac{3mn}{2(d-1)} < \frac{3mn}{d-1} = x$ .

Согласно теореме Петрова получаем следующую оценку для вероятности несрабатывания алгоритма  $\mathcal{A}$ :

$$\delta_n = \mathbb{P}\{\widetilde{W'_{\mathcal{A}}} > x\} \leq \exp\left\{-\frac{Tx}{2}\right\}.$$

Поскольку  $\frac{n}{d} > \ln n$ , то  $\frac{Tx}{2} = \frac{3mn}{2(d-1)} > m \ln n$ . Из этого следует, что

$$\delta_n = \mathbb{P}\{\widetilde{W'_{\mathcal{A}}} > x\} \leq \exp\left\{-\frac{Tx}{2}\right\} < \exp(-m \ln n) = \frac{1}{n^m} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в случае 1 алгоритм  $\mathcal{A}$  дает асимптотически точное решение задачи  $m$ - $d$ -UMST на  $n$ -вершинном полном неориентированном графе с весами ребер из  $\text{EXP}(a_n, \lambda_n)$ .

$$\text{Случай 2: } \frac{n}{\ln n} \leq d < \frac{n}{m}.$$

Согласно лемме 12 и формуле (3) для относительной погрешности  $\varepsilon_n$  получаем

$$\varepsilon_n = \frac{2\lambda_n}{(n-1)a_n} \widehat{\mathbb{E}W'_A} = \frac{2\lambda_n}{m(n-1)a_n} 5m \ln n \leq \frac{10(\lambda_n/a_n) \ln n}{n-1}.$$

Видим, что  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если выполнены условия  $\frac{\lambda_n}{a_n} = o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$ .

Теперь, используя леммы 1 и 12, можем оценить вероятность несрабатывания

$$\delta_n = \mathbb{P}\{\widetilde{W}'_A > \widehat{\mathbb{E}W'_A}\} = \mathbb{P}\{\widetilde{W}'_A > 5m \ln n\}.$$

Полагая константы  $h_k$ , как и в случае 1, зададим  $T = 1/2$  и  $x = 5m \ln n$ .

Принимая во внимание лемму 10 и величины  $x, T, H$ , а также, что  $d \geq \frac{n}{\ln n}$ , приходим к следующему неравенству:  $TH \leq \frac{3mn}{2d} < 5m \ln n = x$ .

Поскольку  $\frac{Tx}{2} > m \ln n$ , согласно теореме Петрова получаем следующую оценку для вероятности несрабатывания алгоритма  $\mathcal{A}$ :

$$\delta_n = \mathbb{P}\{\widetilde{W}'_A > x\} \leq \exp\left\{-\frac{Tx}{2}\right\} \leq \exp(-m \ln n) = \frac{1}{n^m} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Из этого следует, что в случае 2 алгоритм  $\mathcal{A}$  также дает асимптотически точное решение задачи  $m$ - $d$ -UMST на  $n$ -вершинном полном неориентированном графе с весами ребер из  $\text{EXP}(a_n, \lambda_n)$ .

Таким образом, можно сделать вывод, что для значений параметра  $d$  в обоих случаях при условиях (7) имеем оценки: относительной погрешности  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  и вероятности несрабатывания  $\delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство утверждения 4.* Приведем доказательство этого утверждения, как в [18]. Разность между левой и правой частями неравенства (8) обозначим как

$$h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - (1 - e^{-\frac{x}{2}}).$$

Легко проверить, что для функции  $h(x)$  и ее производной

$$h'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

справедливо:  $h(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ ,  $h'(x) > 0$ .

Поскольку на положительной полуоси равенство  $h'(x) = 0$  верно только в единственной точке  $x_0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 12 \ln(2) - 4 \ln(\pi)}) \geq 0$ , можно сделать вывод, что  $h(x) \geq 0$  при  $x \geq 0$ , откуда следует справедливость утверждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Frieze A.* On the Value of a Random MST Problem // Discrete Applied Mathematics. 1985. V. 10. P. 47–56. [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(85\)90058-7](https://doi.org/10.1016/0166-218X(85)90058-7)
2. *Angel O., Flaxman A.D., Wilson D.B.* A Sharp Threshold for Minimum Bounded-Depth and Bounded-Diameter Spanning Trees and Steiner Trees in Random Networks // Combinatorica. 2012. V. 32. P. 1–33. <https://doi.org/10.1007/s00493-012-2552-z>
3. *Cooper C., Frieze A., Ince N., Janson S., Spencer J.* On the Length of a Random Minimum Spanning Tree // Combinatorics, Probability and Computing. 2016. V. 25. No. 1. P. 89–107. <https://doi.org/10.1017/S0963548315000024>
4. *Garey M.R., Johnson D.S.* Computers and Intractability. 1979. Freeman, San Francisco. 340 p.
5. *Clementi A.E.F., Ianni M.D., Monti A., Rossi, G., Silvestri R.* Experimental Analysis of Practically Efficient Algorithms for Bounded-Hop Accumulation in Ad-Hoc Wireless Networks // Proc. 19th IEEE Int. Parallel Distributed Processing Symposium (IPDPS'05). 2005. P. 8–16. <https://doi.org/10.1109/IPDPS.2005.210>
6. *Bala K., Petropoulos K., Stern T.E.* Multicasting in a Linear Lightwave Network // Proc. of IEEE INFOCOM'93. 1993. P. 1350–1358. <https://doi.org/10.1109/INFCOM.1993.253399>
7. *Bookstein A., Klein S.T.* Compression of Correlated Bit-Vectors // Inform. Syst. 1996. V. 16. No. 4. P. 110–118.
8. *Raymond K.* A Tree-Based Algorithm for Distributed Mutual Exclusion // ACM Trans. on Comput. Syst. 1989. V. 7. No. 1. P. 61–77. <https://doi.org/10.1145/58564.59295>
9. *Gruber M.* Exact and Heuristic Approaches for Solving the Bounded Diameter Minimum Spanning Tree Problem. Vienna University of Technology. PhD Thesis. 2009.
10. *Gimadi E.Kh., Serdyukov A.I.* A Probabilistic Analysis of Approximation Algorithm for the Minimum Weight Spanning Tree Problem with a Bounded Below Diameter / Oper. Res. Proceed. V. 99. In: K. Inderfurth et. al (eds.). Springer, Berlin. 2000. P. 63–68. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-58300-1\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-642-58300-1_12)
11. *Gimadi E.Kh., Istomin A.M., Shin E.Yu.* On Algorithm for the Minimum Spanning Tree Problem Bounded Below // Proc. conference DOOR 2016. Vladivostok. Russia. CEUR-WS. V. 1623. 2016. P. 11–17.
12. *Gimadi E.Kh., Shin E.Yu.* On Given Diameter MST Problem on Random Input Data / In: I. Bykadorov, V. Strusevich, T. Tchemisova (eds.). MOTOR 2019. Communications in Computer and Information Science. V. 1090. Springer, Cham. 2019. P. 30–38. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-33394-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-33394-2_3)
13. *Gimadi E.Kh., Shevyakov A.S., Shtepa A.A.* A Given Diameter MST on a Random Graph / In: N. Olenev, Y. Evtushenko, M. Khachay, V. Malkova (eds.). Optimization and Applications – 11th International Conference OPTIMA. 2020. LNCS. V. 12422. P. 110–121. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-62867-3\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-62867-3_9)
14. *Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А.* Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. 1975. Вып. 31. С. 35–42.
15. *Petrov V.V.* Limit Theorems of Probability Theory. Sequences of Independent Random Variables. 1995. Clarendon Press. Oxford. 304 p.

16. *Гимади Э.Х., Глазков Ю.В.* Об асимптотически точном алгоритме решения одной модификации трехиндексной планарной задачи о назначениях // Дискретный анализ и исследование операций. 2006. Сер. 2. Т. 13. № 1. С. 10–26.
17. *Гимади Э.Х., Хачай М.Ю.* Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2016. 219 с.
18. *Гимади Э.Х., Шин Е.Ю.* Вероятностный анализ алгоритма нахождения в графе минимального остовного дерева с ограниченным снизу диаметром // Дискретный анализ и исследование операций. 2015. Т. 22. № 4. С. 5–20.  
<https://doi.org/10.17377/daio.2015.22.474>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.*

Поступила в редакцию 23.01.2023

После доработки 27.03.2023

Принята к публикации 28.04.2023