Стохастические системы

© 2023 г. **В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук (vlkhats@mail.ru)**
(Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж)

О НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ С НЕЧЕТКИМИ СОСТОЯНИЯМИ

Изучены непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями. Установлены свойства их числовых характеристик (ожиданий и корреляционных функций), соответствующие свойствам характеристик числовых случайных процессов. Полученные результаты опираются на свойства нечетко случайных величин. Рассмотрены приложения к задаче преобразования случайного сигнала с нечеткими состояниями линейной динамической системой.

Ключевые слова: непрерывные случайные процессы, нечеткие состояния, нечеткие ожидания, корреляционные функции.

DOI: 10.31857/S0005231023070024, **EDN:** FCKKGK

1. Введение

Нечеткое моделирование активно используется при решении различных прикладных задач, когда исходные данные неполные или слабо формализованные [1–3]. Отметим, в частности, недавние работы по развитию нечеткого подхода в теории управления [4, 5].

С другой стороны, при исследовании динамических процессов в условии ограниченной исходной информации один из возможных подходов заключается в трактовке их параметров как реализации некоторых случайных процессов [6].

В данной работе сочетаются эти подходы, точнее исследуются непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями. А именно, время считается непрерывным и множество возможных нечетких состояний считается несчетным (непрерывным). При этом сечение непрерывного нечеткого случайного процесса в любой момент времени представляет собой нечетко случайную величину. В данном исследовании используются известные результаты по теории нечетко случайных величин [7–9], а также дифференцируемости и интегрируемости нечеткозначных функций ([10, 11] и [12, 13] соответственно).

Установленные в данной статье свойства являются модификациями известных [6, гл. 1] результатов о математических ожиданиях и корреляционных функциях стандартных непрерывных случайных процессов. Ранее они, по-видимому, не отмечались. Подчеркнем, что в данном случае важную роль играют нечеткие ожидания (неслучайные нечеткозначные функции времени), отражающие тренды нечетко случайных процессов.

В качестве приложения рассмотрена задача о преобразовании нечетко случайного сигнала линейной динамической системой, описываемой линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. В ней по характеристикам входного сигнала (нечеткому ожиданию и корреляционной функции) определяются аналогичные характеристики выходного сигнала. Эти результаты являются развитием известных для вещественных стационарных случайных процессов (см., например, [6, гл. 7].

Отметим отличие излагаемых здесь подхода и результатов от работ, посвященных случайным процессам с дискретными нечеткими состояниями и непрерывным временем (см., например, [14, 15]), где обсуждаются свойства вероятностей дискретных нечетких состояний в зависимости от времени.

Ниже под нечетким числом $\tilde{z}$, заданным на универсальном пространстве R вещественных чисел, будем понимать совокупность упорядоченных пар $(x, \mu_{\tilde{z}}(x))$, где функция принадлежности $\mu_{\tilde{z}} : R \to [0, 1]$ определяет степень принадлежности $\forall\, x \in R$ множеству $\tilde{z}$ [1, гл. 5].

Будем использовать интервальное представление нечетких чисел. А именно, каждому нечеткому числу поставим в соответствие совокупность его α-интервалов.

Как известно, множество α-уровня нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяется соотношением

$$Z_\alpha = \{x \,|\, \mu_{\tilde{z}}(x) \geqslant \alpha\} \;\; (\alpha \in (0, 1]), \quad Z_0 = cl\{x \,|\, \mu\tilde{z}(x) > 0\},$$

где cl — обозначает замыкание множества.

Будем считать, что все α-уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую границу интервала вещественной оси. Обозначим левую границу интервала Z_α через $z^-(\alpha)$, а правую через $z^+(\alpha)$. Таким образом, $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Иногда $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ называют соответственно левым и правым α-индексами (индексами) нечеткого числа. Ниже предполагается, что они измеримы и ограничены на $[0, 1]$. Совокупность таких нечетких чисел будем обозначать через J.

Под суммой нечетких чисел понимается нечеткое число, индексы которого являются суммами соответствующих индексов слагаемых. Умножение нечеткого числа на положительное число означает умножение индексов на это число. Умножение на отрицательное вещественное число означает умножение индексов на это число и перемену их местами. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α-индексов (при $\forall\, \alpha \in [0, 1]$).

Множество J можно метризовать различными способами. В частности, для нечетких чисел $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in J$ определяют метрику следующим равенством (см., например, [16])

$$(1) \qquad d(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \left(\int\limits_0^1 \left((z_1^-(\alpha) - z_2^-(\alpha))^2 + (z_1^+(\alpha) - z_2^+(\alpha))^2 \right) d\alpha \right)^{1/2},$$

где $z_i^-(\alpha)$ и $z_i^+(\alpha)$ являются соответственно левым и правым индексами $\tilde{z}_i$ $(i = 1, 2)$.

2. Нечеткое ожидание, ожидание и ковариация нечетко случайных величин

Пусть (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство, где Ω — множество элементарных событий, Σ — σ-алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω, P — вероятностная мера.

Рассмотрим отображение $\widetilde{X} : \Omega \to J$. Его интервалы α-уровня $X_\alpha(\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ определяются формулами

$$X_\alpha(\omega) = \left\{ r \in R : \mu_{\widetilde{X}(\omega)}(r) \geqslant \alpha \right\} \quad \alpha \in (0, 1], \quad X_0(\omega) = cl \left\{ r \in R : \mu_{\widetilde{X}(\omega)}(r) > 0 \right\},$$

где $\mu_{\widetilde{X}(\omega)}(r)$ — функция принадлежности нечеткого числа $\widetilde{X}(\omega)$. Интервал $X_\alpha(\omega)$ представим в виде $X_\alpha(\omega) = [X^-(\omega, \alpha), X^+(\omega, \alpha)]$. Его границы $X^-(\omega, \alpha)$, $X^+(\omega, \alpha)$ называют соответственно левым и правым индексами отображения $\widetilde{X}$.

Отображение $\widetilde{X} : \Omega \to J$ называют нечетко случайной величиной, кратко Н.С.В. (см., например, [7, 8]), если вещественнозначные функции $X^\pm(\omega, \alpha)$ измеримы для всех $\alpha \in [0, 1]$. В этом случае при любом $\alpha \in [0, 1]$ индексы являются вещественными случайными величинами.

В дальнейшем будем рассматривать класс $\mathcal{X}$ нечетко случайных величин, для которых индексы $X^-(\omega, \alpha)$ и $X^+(\omega, \alpha)$ являются квадратично суммируемыми на $\Omega \times [0, 1]$ функциями.

Отметим, что Н.С.В. можно трактовать как случайный элемент в метрическом пространстве J с метрикой (1).

Для Н.С.В. $\widetilde{X}(\omega)$ положим

$$(2) \qquad x^-(\alpha) = \int\limits_\Omega X^-(\omega, \alpha) dP, \quad x^+(\alpha) = \int\limits_\Omega X^+(\omega, \alpha) dP.$$

Нечеткое число с α-индексами, определяемыми в (2), называют (см., например, [9]) нечетким ожиданием Н.С.В. $\widetilde{X}$. Будем обозначать его как $M(\widetilde{X})$, а его индексы — $[M(\widetilde{X})]^\pm_\alpha$.

На множестве $\mathcal{X}$ нечетко случайных величин рассмотрим метрику, задаваемую для Н.С.В. $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$ равенством

$$\rho(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2) =$$

$$= \left(\int_0^1 \int_\Omega \left((X_1^-(\omega,\alpha) - X_2^-(\omega,\alpha))^2 + (X_1^+(\omega,\alpha) - X_2^+(\omega,\alpha))^2 \right) dP d\alpha \right)^{1/2}. \tag{3}$$

Определенное в (2) нечеткое ожидание обладает свойствами, аналогичными свойствам математических ожиданий вещественных случайных величин. А именно, имеет место

Утверждение 1 (см., например, [17, 18]). *Нечеткое ожидание, определяемое посредством* (2), *обладает следующими свойствами:*

1. Если $\widetilde{X}(\omega) = \widetilde{X}$ при почти всех $\omega \in \Omega$, то $M(\widetilde{X}) = \widetilde{X}$ (идемпотентность).

2. Нечеткое ожидание $M : \mathcal{X} \to J$ аддитивно, т.е. $M(\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2) = M(\widetilde{X}_1) + M(\widetilde{X}_2)$ $(\forall\, \widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2 \in \mathcal{X})$.

3. Нечеткое ожидание $M : \mathcal{X} \to J$ однородно, т.е. $M(C\widetilde{X}) = CM(\widetilde{X})$ $(\forall\, \widetilde{X} \in \mathcal{X}, \forall\, C \in R)$.

4. Нечеткое ожидание $M : \mathcal{X} \to J$ непрерывно как отображение из $\mathcal{X}$ с метрикой (3) *в J с метрикой* (1).

5. Справедливо следующее экстремальное свойство нечеткого ожидания $M(\widetilde{X})$ для заданной Н.С.В. $\widetilde{X} \in \mathcal{X}$:

$$\rho^2(\widetilde{X}, M(\widetilde{X})) =$$

$$= \int_0^1 \int_\Omega \left(\left(X^-(\omega,\alpha) - [M(\widetilde{X})]_\alpha^- \right)^2 + \left(X^+(\omega,\alpha) - [M(\widetilde{X})]_\alpha^+ \right)^2 \right) dP d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \int_\Omega \left((X^-(\omega,\alpha) - V_\alpha^-)^2 + (X^+(\omega,\alpha) - V_\alpha^+)^2 \right) dP d\alpha = \rho^2(\widetilde{X}, \widetilde{V}) \quad (\forall\, \widetilde{V} \in J),$$

где $X^\pm(\omega,\alpha)$ и $V_\alpha^\pm$ — индексы Н.С.В. $\widetilde{X}(\omega)$ и нечеткого числа $\widetilde{V}$ соответственно.

Рассмотрим вопрос о дефазификации нечеткого ожидания.

Как известно, среднее нечеткого числа $\tilde{z}$ при интервальном подходе определяется равенством [19]

$$z_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \int_0^1 (z^-(\alpha) + z^+(\alpha)) d\alpha, \tag{4}$$

где $z^\pm(\alpha)$ — индексы нечеткого числа $\tilde{z}$.

В связи с (4) ожидание $m(\widetilde{X})$ Н.С.В. $\widetilde{X} \in \mathcal{X}$ определяют как усредняющий функционал посредством формулы

$$(5) \qquad m(\widetilde{X}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big([M(\widetilde{X})]^-(\alpha) + [M(\widetilde{X})]^+(\alpha)\Big)\, d\alpha,$$

где $M^{\pm}(\alpha)$ — индексы нечеткого ожидания $M(\widetilde{X})$, задаваемые в (2). По существу, это один из способов дефазификации нечеткого ожидания.

Из определения (5) и утверждения 1 вытекает

Утверждение 2 (см., например, [17, 18]). *Ожидание Н.С.В.* (5) *обладает следующими свойствами:*

1. Если $\widetilde{X}(\omega) = \widetilde{X}$ при почти всех $\omega \in \Omega$, то $m(\widetilde{X}) = X_{\text{ср}}$ (идемпотентность).

2. Ожидание $m : \mathcal{X} \to R$ аддитивно, т.е. $m(\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2) = m(\widetilde{X}_1) + m(\widetilde{X}_2)$ $(\forall\, \widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2 \in \mathcal{X}\,)$.

3. Ожидание $m : \mathcal{X} \to R$ однородно, т.е. $m(C\widetilde{X}) = Cm(\widetilde{X})$ $(\forall\, \widetilde{X} \in \mathcal{X}, \forall\, C \in$ $\in R)$.

4. Ожидание $m : \mathcal{X} \to R$ непрерывно.

5. Справедливо следующее экстремальное свойство ожидания $m(\widetilde{X})$ для $\widetilde{X} \in \mathcal{X}$:

$$\rho\Big(\widetilde{X}, m(\widetilde{X})\Big) \leqslant \rho(\widetilde{X}, a) \quad (\forall\, a \in R),$$

где для вещественного числа a полагаем $a_\alpha^- = a_\alpha^+ = a$.

Для Н.С.В. $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ ковариацию определяют формулой [20]

$$(6) \qquad cov(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(cov(X_\alpha^-, Y_\alpha^-) + cov(X_\alpha^+, Y_\alpha^+)\big)\, d\alpha,$$

а дисперсию $D(\widetilde{X}) = cov(\widetilde{X}, \widetilde{X})$. В (6) ковариации вещественных случайных величин $X_\alpha^{\pm}$ и $Y_\alpha^{\pm}$ определены стандартной [21, гл. I] формулой

$$cov(X_\alpha^{\pm}, Y_\alpha^{\pm}) = E(X_\alpha^{\pm} - E(X_\alpha^{\pm}))(Y_\alpha^{\pm} - E(Y_\alpha^{\pm})).$$

Здесь и ниже символ E обозначает математическое ожидание скалярной случайной величины, т.е. для случайной величины $\xi(\omega)$ полагаем $E\xi =$ $= \int_\Omega \xi(\omega)\, dP$.

Имеет место

Утверждение 3 [20]. *Справедливы следующие свойства ковариации* (6) *Н.С.В.:*

1. Симметричность: $cov(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = cov(\widetilde{Y}, \widetilde{X})$, $\forall\, \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathcal{X}$.

2. Аддитивность: $cov(\widetilde{X}+\widetilde{Y},\widetilde{Z}) = cov(\widetilde{X},\widetilde{Y}) + cov(\widetilde{Y},\widetilde{Z})$, $\forall\,\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}\in\mathcal{X}$.

3. Положительная однородность: $cov(C_1\widetilde{X},C_2\widetilde{Y}) = C_1C_2cov(\widetilde{X},\widetilde{Y})$, $\forall\,\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathcal{X}$, $\forall\,C_1,C_2\in R: C_1C_2>0$.

4. $D(C\widetilde{X}) = C^2D(\widetilde{X})$, $\forall\,\widetilde{X}\in\mathcal{X}$, $\forall\,C\in R$.

5. $D(\widetilde{X}+\widetilde{Y}) = D(\widetilde{X}) + D(\widetilde{Y}) + 2cov(\widetilde{X},\widetilde{Y})$, $\forall\,\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathcal{X}$.

3. Непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями

Пусть $[t_0,T]$ расширенный отрезок числовой оси. Ниже, как и в разделе 2, (Ω,Σ,P) — вероятностное пространство, $\mathcal{X}$ — совокупность Н.С.В. с квадратично суммируемыми на $\Omega\times[0,1]$ индексами.

Непрерывным случайным процессом с нечеткими состояниями или нечетко случайным процессом (Н.С.П.) будем называть отображение $\widetilde{X}:[t_0,T]\to\mathcal{X}$, т.е. функцию $\widetilde{X}(\omega,t)$, значениями которой при $\forall\,t\in[t_0,T]$ являются Н.С.В. Обозначим α-индексы Н.С.П.$\widetilde{X}(\omega,t)$ через $X^{\pm}_{\alpha}(\omega,t)$.

Далее будем рассматривать Н.С.П., для которых функции $X^{\pm}_{\alpha}(\omega,t)$ квадратично суммируемы по совокупности переменных на $\Omega\times[0,1]\times[t_0,T]$.

Определим нечеткое ожидание $M(\widetilde{X}(\omega,t))$ Н.С.П. $\widetilde{X}(\omega,t)$ при каждом $t\in[t_0,T]$ как нечеткое ожидание, соответствующей Н.С.В., т.е. нечеткозначную функцию, имеющую индексы $\left[M(\widetilde{X}(\omega,t))\right]^{\pm}_{\alpha} = \int_{\Omega}X^{\pm}_{\alpha}(\omega,t)\,dP$.

Из определения нечеткого ожидания Н.С.П. и свойств нечетких ожиданий Н.С.В. вытекает:

Утверждение 4. *Справедливы следующие свойства:*

1. Нечеткое ожидание от неслучайной нечеткозначной функции $\tilde{z}:[t_0,T]\to J$ *равно самой этой функции* $M(\tilde{z}(t)) = \tilde{z}(t)$.

2. Неслучайную скалярную функцию $\varphi:[t_0,T]\to R$ *можно выносить за знак нечеткого ожидания*

$$M(\varphi(t)\widetilde{X}(t)) = \varphi(t)M(\widetilde{X}(t)),$$

где $\widetilde{X}(t)$ *— нечетко-случайный процесс.*

3. Нечеткое ожидание суммы двух Н.С.П. равно сумме нечетких ожиданий слагаемых

$$M(\widetilde{X}(t)+\widetilde{Y}(t)) = M(\widetilde{X}(t)) + M(\widetilde{Y}(t)).$$

4. Справедливо следующее экстремальное свойство нечеткого ожидания $M(\widetilde{X}(t))$ *для Н.С.П.* $\widetilde{X}(t)$*:*

$$\int\limits_{t_0}^{T}\rho^2\left(\widetilde{X}(t),M(\widetilde{X}(t))\right)\,dt \leqslant \int\limits_{t_0}^{T}\rho^2\left(\widetilde{X}(t),\widetilde{V}(t)\right)\,dt.$$

Здесь $\widetilde{V} : [t_0, T] \to J$ — произвольная неслучайная нечеткозначная функция с квадратично суммируемыми на $[t_0, T]$ индексами, а метрика ρ задана в (3).

В соответствии с (5) определим ожидание Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$ формулой

$$m(\widetilde{X}(t)) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \Big([M(\widetilde{X}(t))]_\alpha^- + [M(\widetilde{X}(t))]_\alpha^+\Big)\, d\alpha.$$

Заметим, что для $m(\widetilde{X}(t))$ при $\forall\, t \in [t_0, T]$ справедливо утверждение 2.

В данной работе используется понятие дифференцируемости скалярного случайного процесса в среднем квадратичном [21, гл. II]. А именно, скалярный случайный процесс $\xi(t)$, $t \in R$ называют дифференцируемым в среднем квадратичном в точке t, если существует случайная величина $\xi'(t)$, такая что математическое ожидание

$$E\left|\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} - \xi'(t)\right|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Ниже будем еще использовать понятие производной от нечеткозначных функций (см., например, [10, 11]).

Н.С.П. $\widetilde{X}(\omega, t)$ с α-интервалами $[X_\alpha^-(\omega, t), X_\alpha^+(\omega, t)]$ назовем дифференцируемым в точке t (по Сеиккала), если его α-индексы дифференцируемы по t как скалярные случайные процессы в среднем квадратичном, а $\frac{\partial}{\partial t}X_\alpha^-(\omega, t)$ и $\frac{\partial}{\partial t}X_\alpha^+(\omega, t)$ являются соответственно нижним и верхним α-индексами некоторой Н.С.В., называемой производной (сравни с [11] для нечеткозначной функции). В этом случае производную по t Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$ будем обозначать $\widetilde{X}'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{X}(\omega, t)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$ дифференцируем при $t \in (t_0, T)$ и для $\forall\, \alpha \in [0, 1]$ найдутся суммируемые на Ω функции $\varphi_\alpha^\pm(\omega)$ такие, что $\left|\frac{\partial}{\partial t}X_\alpha^\pm(\omega, t)\right| \leqslant \varphi_\alpha^\pm(\omega)$ ($\forall\, t \in (t_0, T)$, $\omega \in \Omega$). Тогда нечеткое ожидание производной Н.С.П. равно производной от нечеткого ожидания:*

$$M\widetilde{X}'(t) = \Big(M\widetilde{X}(t)\Big)'. \tag{7}$$

Действительно, по определению производной и нечеткого ожидания можем записать $\Big[M(\widetilde{X}'(t))\Big]_\alpha^\pm = \int_\Omega \dfrac{\partial}{\partial t}X_\alpha^\pm(\omega, t)\, dP$ ($\forall\, \alpha \in [0, 1]$).

В условиях теоремы 1 согласно теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла Лебега можно вынести производную в правой части последнего равенства за знак интеграла. Тогда, используя интервальный признак равенства нечетких чисел, получим (7).

Ниже будем использовать понятие интеграла от нечеткозначной функции (см., например, [12, 13]).

Интегралом по промежутку $[t_0, T]$ от Н.С.П. $\widetilde{X}(\omega, t)$ назовем Н.С.В. $\widetilde{Y}(\omega) = \int_{t_0}^{T} \widetilde{X}(\omega, t)\, dt$ с α-индексами

$$Y_\alpha^\pm(\omega) = \int\limits_{t_0}^{T} X_\alpha^\pm(\omega, t)\, dt,$$

где $X_\alpha^\pm(t)$ — соответствующие α-индексы Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$, а интегралы от случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ понимаются в среднем квадратичном [21, гл. II]. Если такой интеграл существует, то Н.С.П. назовем интегрируемым на $[t_0, T]$.

Теорема 2. Пусть $\widetilde{X}(\omega, t)$ — интегрируемый на $[t_0, T]$ Н.С.П. Тогда

$$M\left(\int\limits_{t_0}^{T} \widetilde{X}(\omega, t)\, dt\right) = \int\limits_{t_0}^{T} M\left(\widetilde{X}(\omega, t)\right)\, dt. \tag{8}$$

Действительно, по определению нечеткого ожидания левая часть (8) имеет α-индексы $\left[M\left(\int\limits_{t_0}^{T} \widetilde{X}(\omega, t)\, dt\right)\right]_\alpha^\pm = \int\limits_{\Omega}\left[\int\limits_{t_0}^{T} \widetilde{X}(\omega, t)\, dt\right]_\alpha^\pm dP = \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{t_0}^{T} \widetilde{X}_\alpha^\pm(\omega, t) dt\right) dP.$ Поскольку случайные величины $X_\alpha^\pm(\omega, t)$ квадратично суммируемы на $\Omega \times [t_0, T]$, то в последнем выражении можно поменять порядок интегрирования на основании теоремы Фубини. Тогда

$$\left[M\left(\int\limits_{t_0}^{T} \widetilde{X}(\omega, t)\, dt\right)\right]_\alpha^\pm = \int\limits_{t_0}^{T}\left(\int\limits_{\Omega} X_\alpha^\pm(\omega, t)\, dP\right) dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T}\left[M(\widetilde{X}(\omega, t))\right]_\alpha^\pm dt = \left[\int\limits_{t_0}^{T} M\left(\widetilde{X}(\omega, t)\right) dt\right]_\alpha^\pm.$$

Здесь используется определение нечеткого ожидания. Тогда формула (8) следует из равенства соответствующих индексов при $\forall\, [0, 1]$.

Пример 1. Пусть случайные числовые процессы $\xi_i(\omega, t)$ $(i = 1, 2, 3;$ $\omega \in \Omega,\ t \in [t_0, T])$ квадратично суммируемы на $\Omega \times [t_0, T]$ и таковы, что $\xi_1(\omega, t) < \xi_2(\omega, t) < \xi_3(\omega, t)$ при всех $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$.

Рассмотрим Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$, для которого при каждом $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$ нечеткое число $\widetilde{X}(\omega, t)$ имеет треугольный вид $(\xi_1(\omega, t),\ \xi_2(\omega, t),\ \xi_3(\omega, t))$. То есть функция принадлежности $\widetilde{X}(\omega, t)$ при любом $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$ описывается формулой

$$\mu_{\omega,t}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \xi_1(\omega, t)}{\xi_2(\omega, t) - \xi_1(\omega, t)}, & \text{если } x \in [\xi_1(\omega, t), \xi_2(\omega, t)]; \\ \dfrac{x - \xi_3(\omega, t)}{\xi_2(\omega, t) - \xi_3(\omega, t)}, & \text{если } x \in [\xi_2(\omega, t), \xi_3(\omega, t)]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В этом случае

$$X_\alpha^-(\omega,t)=(1-\alpha)\xi_1(\omega,t)+\alpha\xi_2(\omega,t),\quad X_\alpha^+(\omega,t)=(1-\alpha)\xi_3(\omega,t)+\alpha\xi_2(\omega,t).$$

Тогда нечеткое ожидание $M(\widetilde{X}(t))$ определяется формулами для α-индексов

$$[M(\widetilde{X})]_\alpha^-(t)=(1-\alpha)\int\limits_\Omega \xi_1(\omega,t)\,dP+\alpha\int\limits_\Omega \xi_2(\omega,t)\,dP=$$
$$=(1-\alpha)E\xi_1(t)+\alpha E\xi_2(t)\quad(\forall\,\alpha\in[0,1])$$

и

$$[M(\widetilde{X})]_\alpha^+(t)=(1-\alpha)\int\limits_\Omega \xi_3(\omega,t)\,dP+\alpha\int\limits_\Omega \xi_2(\omega,t)\,dP=$$
$$=(1-\alpha)E\xi_3(t)+\alpha E\xi_2(t)\quad(\forall\,\alpha\in[0,1]),$$

где E обозначает математическое ожидание вещественной случайной величины.

Пример 2. В условиях примера 1 дополнительно предположим, что случайные процессы $\xi_i(\omega,t)$ при $i=1,2,3$ дифференцируемы по t в среднем квадратическом, причем для производных выполнено соотношение $\frac{\partial}{\partial t}\xi_1(\omega,t)\leqslant \leqslant\dfrac{\partial}{\partial t}\xi_2(\omega,t)\leqslant\frac{\partial}{\partial t}\xi_3(\omega,t)$ при всех $\omega\in\Omega$, $t\in[t_0,T]$. Тогда производная $\widetilde{X}'(t)$ Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$ имеет треугольный вид $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\xi_1(\omega,t),\dfrac{\partial}{\partial t}\xi_2(\omega,t),\dfrac{\partial}{\partial t}\xi_3(\omega,t)\right)$.

В частности, пусть заданы случайные величины $\xi_1(\omega)<\xi_2(\omega)<\xi_3(\omega)$. Рассмотрим треугольный нечеткий процесс $(e^t\xi_1(\omega),e^t\xi_2(\omega),e^t\xi_3(\omega))$. Его производная существует и совпадает с исходным Н.С.П.

Пример 3. Пусть в условиях примера 1 случайные процессы $\xi_i(\omega,t)$ дополнительно интегрируемы по t на промежутке $[t_0,T]$. Тогда Н.С.П. $\int_{t_0}^T\widetilde{X}(t)dt$ имеет треугольный вид $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\xi_1(\omega,t)dt,\dfrac{\partial}{\partial t}\xi_2(\omega,t)dt,\dfrac{\partial}{\partial t}\xi_3(\omega,t)dt\right)$.

Ниже рассмотрим понятие ковариационной функции Н.С.П. и ее свойства. Ковариационной функцией Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$ назовем величину

$$K_{\widetilde{X}}(t,s)=cov(\widetilde{X}(t),\widetilde{X}(s))=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\Big(K_{X_\alpha^-}(t,s)+K_{X_\alpha^+}(t,s)\Big)\,d\alpha. \tag{9}$$

Здесь $K_{X_\alpha^-}(t,s)$ и $K_{X_\alpha^+}(t,s)$ — ковариационные функции случайных процессов $X_\alpha^-(\omega,t)$ и $X_\alpha^+(\omega,t)$ соответственно, равные

$$K_{X_\alpha^\pm}(t,s)=E\left[(X_\alpha^\pm(\omega,t)-EX_\alpha^\pm(\omega,t))(X_\alpha^\pm(\omega,s)-EX_\alpha^\pm(\omega,s))\right]. \tag{10}$$

Дисперсия Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$ определяется равенством $D_{\widetilde{X}}(t) = K_{\widetilde{X}}(t,t)$.

Отметим, что (9) является модификацией на нечеткий случай стандартного определения ковариационной функции скалярных случайных процессов (см., например, [21, гл. II]).

Согласно (9), (10) и свойствам ковариации Н.С.В. (утверждение 3) имеет место

Утверждение 5. Ковариационная функция Н.С.П. обладает следующими свойствами:

1. Симметричность. Для непрерывного Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$ при $\forall\, t_1, t_2 \in [t_0, T]$ имеет место равенство

2. $K_{\widetilde{X}}(t_1,t_2) = K_{\widetilde{X}}(t_2,t_1)$.

3. Если $\widetilde{X}(t)$ — непрерывный Н.С.П. и $\varphi(t)$ — неслучайная числовая функция, то для Н.С.П. $\widetilde{Y}(t) = \varphi(t)\widetilde{X}(t)$ ковариационная функция $K_{\widetilde{Y}}(t_1,t_2)$ имеет вид $K_{\widetilde{Y}}(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_{\widetilde{X}}(t_1,t_2)$.

4. Если $\widetilde{Y}(t) = \widetilde{X}(t) + \varphi(t)$, то $K_{\widetilde{Y}}(t_1,t_2) = K_{\widetilde{X}}(t_1,t_2)$.

5. Справедливо соотношение $|K_{\widetilde{X}}(t_1,t_2)| \leqslant \sqrt{D_{\widetilde{X}}(t_1)D_{\widetilde{X}}(t_2)}$.

Взаимосвязь между корреляционными функциями дифференцируемого Н.С.П. и его производной характеризует

Теорема 3. Пусть определены и непрерывны по совокупности переменных t, s, α вторые производные $\frac{\partial^2 K_{X_\alpha^-}(t,s)}{\partial t \partial s}$ и $\frac{\partial^2 K_{X_\alpha^+}(t,s)}{\partial t \partial s}$ ковариационных функций (10) для Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$. Тогда ковариационная функция $K'_{\widetilde{X}}(t,s)$ производной $\widetilde{X}'(t)$ Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$ задается формулой

$$K'_{\widetilde{X}}(t,s) = \frac{\partial^2 K_{\widetilde{X}}(t,s)}{\partial t \partial s}. \tag{11}$$

Доказательство. По определению (9)

$$K_{\widetilde{X}'}(t,s) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \Big(K_{(\widetilde{X}_\alpha^-)'}(t,s) + K_{(\widetilde{X}_\alpha^+)'}(t,s) \Big)\, d\alpha.$$

При этом по известному свойству (скалярных) случайных процессов

$$K_{(\widetilde{X}_\alpha^-)'}(t,s) = \frac{\partial^2 K_{X_\alpha^-}(t,s)}{\partial t \partial s}, \quad K_{(\widetilde{X}_\alpha^+)'}(t,s) = \frac{\partial^2 K_{X_\alpha^+}(t,s)}{\partial t \partial s}.$$

Тогда $K_{\widetilde{X}'}(t,s) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big(K_{X_\alpha^-}(t,s) + K_{X_\alpha^+}(t,s) \Big)\, d\alpha$. Вынося здесь вторую смешанную производную за знак интеграла, получим формулу (11).

Отметим, что законность последней операции обеспечивается непрерывностью $\frac{\partial^2 K_{X_\alpha^-}(t,s)}{\partial t \partial s}$ и $\frac{\partial^2 K_{X_\alpha^+}(t,s)}{\partial t \partial s}$ по совокупности переменных t, s, α.

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом $\widetilde{Y}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \widetilde{X}(\omega, s)\, ds$ от Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$. Имеет место

Теорема 4. Пусть ковариационные функции $K_{X_\alpha^\pm}(t, s)$ от α-индексов $X_\alpha^\pm(t)$ Н.С.П. $\widetilde{X}(t)$ суммируемы по совокупности переменных t, s, α. Тогда ковариационная функция интеграла $\widetilde{Y}(t)$ равна

$$K_{\widetilde{Y}}(t, s) = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{s} K_{\widetilde{X}}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2. \tag{12}$$

Доказательство. По определению (9) $K_{\widetilde{Y}}(t, s) = \dfrac{1}{2} \int_0^1 \Big(K_{Y_\alpha^-}(t, s) + +K_{Y_\alpha^+}(t, s) \Big)\, d\alpha$. При этом на основании определения нечеткого интеграла $Y_\alpha^\pm(t) = \int_{t_0}^{t} X_\alpha^\pm(\tau)\, d\tau$. Тогда в силу известного свойства интеграла от скалярного случайного процесса получим

$$K_{Y_\alpha^-}(t, s) = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{s} K_{X_\alpha^-}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2, \quad K_{Y_\alpha^+}(t, s) = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{s} K_{X_\alpha^+}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2.$$

Следовательно, $K_{\widetilde{Y}}(t, s) = \dfrac{1}{2} \int_0^1 \Big(\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} (K_{X_\alpha^-}(\tau_1, \tau_2) + K_{X_\alpha^+}(\tau_1, \tau_2) \Big)\, d\tau_1 d\tau_2)\, d\alpha$. Меняя в правой части порядок интегрирования на основании теоремы Фубини и используя (9), установим (12).

Отметим, что законность последней операции обеспечивается суммируемостью $K_{X_\alpha^-}(\tau_1, \tau_2)$ и $K_{X_\alpha^+}(\tau_1, \tau_2)$ по совокупности переменных τ_1, τ_2, α.

4. Задача о преобразовании нечетко-случайного сигнала линейной динамической системой

Рассмотрим ситуацию, когда на вход некоторого устройства A (см. рис. 1) поступает непрерывный случайный сигнал $y(t)$, а на выходе наблюдается непрерывный случайный сигнал $z(t)$.

Устройство A называют линейной динамической системой, если связь между входным и выходным сигналами описывается дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами.

В литературе рассматривается задача (см., например, [6, гл. 7]) об установлении взаимосвязей между числовыми характеристиками (математическими ожиданиями и соответственно ковариационными функциями) входного и выходного случайных сигналов. Эта задача в предположении стационарности рассматриваемых случайных сигналов решается с использованием частотной характеристики системы, прямого и обратного преобразования Фурье, теоремы Винера–Хинчина. При этом случайный процесс называют стационарным

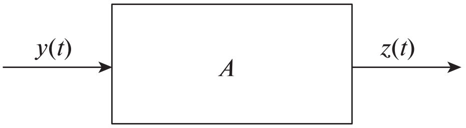

Рис. 1.

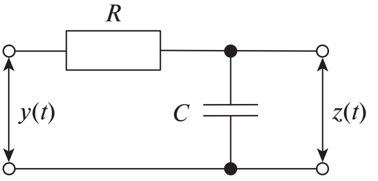

Рис. 2.

(в широком смысле), если его математическое ожидание не зависит от времени, а ковариационная функция зависит лишь от разности аргументов.

Рассмотрим аналогичную задачу, когда входной и выходной сигналы являются непрерывными случайными сигналами с нечеткими состояниями (коротко нечетко случайными сигналами, или Н.С.С.). При этом не предполагается стационарности в каком-либо смысле. В отличие от известных методик, ниже используется метод функции Грина. Проведем рассмотрение на примерах, которые показывают суть предлагаемого подхода.

Пример 4. Рассмотрим интегрирующую RC-цепочку (рис. 2), описываемую дифференциальным уравнением

$$z'(t) + \beta z(t) = \beta y(t), \quad \beta = \frac{1}{RC} > 0,$$

где R — сопротивление, а C — емкость.

Пусть на вход поступает непрерывный Н.С.С. $\widetilde{Y}(t)$. Определим связь между нечеткими ожиданиями (а также ожиданиями) выходного и входного сигналов данной системы. По условию выходной Н.С.С. $\widetilde{X}(t)$ удовлетворяет нечеткому случайному дифференциальному уравнению

$$\widetilde{X}'(t) + \beta\widetilde{X}(t) = \beta\widetilde{Y}(t). \tag{13}$$

Отметим, что нечеткие дифференциальные уравнения рассмотрены, например, в [22–24].

Возьмем нечеткое ожидание от обеих частей равенства (13). С учетом свойства аддитивности и однородности ожидания Н.С.П. (утверждение 4), а также теоремы 1 получим

$$(M\widetilde{X})'(t) + \beta M\widetilde{X}(t) = \beta M\widetilde{Y}(t).$$

Согласно определению равенства нечетких чисел и операций между ними, а также определению производной для α-индексов и в силу положительности

$\beta > 0$ это уравнение эквивалентно совокупности соотношений для индексов

$$\frac{\partial}{\partial t}(M\widetilde{X})^{\pm}_{\alpha}(t) + \beta(M\widetilde{X})^{\pm}_{\alpha}(t) = \beta(M\widetilde{Y})^{\pm}_{\alpha}(t) \quad (\forall\, \alpha \in [0,1]). \tag{14}$$

Предположим дополнительно, что функции $(M\widetilde{Y})^{\pm}_{\alpha}(t)$ ограничены по t на всей числовой оси. Тогда ограниченное на всей оси решение уравнения (14), на основании [25, гл. II], существует, единственно, асимптотически устойчиво по Ляпунову и имеет вид

$$\begin{aligned}(M\widetilde{X})^{\pm}_{\alpha}(t) &= \beta \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(t-s)(M\widetilde{Y})^{\pm}_{\alpha}(s)\, ds = \\ &= \beta \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)}(M\widetilde{Y})^{\pm}_{\alpha}(s)\, ds \quad (\forall\, \alpha \in [0,1]).\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $G_1 = \begin{cases} e^{-\beta t} & \text{при} \quad t > 0; \\ 0 & \text{при} \quad t < 0 \end{cases}$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях (скалярного) уравнения (14).

Формула (15) характеризует связь между нечеткими ожиданиями входного и выходного Н.С.С. системы, описываемой уравнением (13).

С учетом (15), (5) устанавливается формула, связывающая ожидания входного и выходного Н.С.С. рассматриваемой системы (13)

$$m\left(\widetilde{X}(t)\right) = \beta \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)} m\left(\widetilde{Y}(s)\right)\, ds.$$

Заметим, что согласно определению равенства нечетких чисел, а также по определению производной Н.С.П. из (13) для α-индексов $\widetilde{X}(t)$ следует

$$(X^{\pm}_{\alpha})'(t) + \beta X^{\pm}_{\alpha}(t) = \beta Y^{\pm}_{\alpha}(t) \quad (\forall\, \alpha \in [0,1]). \tag{16}$$

Рассматривая (16) как уравнение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ случайных величин с конечным вторым моментом. Предположим дополнительно, что функции $Y^{\pm}_{\alpha}(t)$ ограничены по t в пространстве $\mathcal{H}$ на всей числовой оси. Тогда, согласно [25, гл. II], получим, что ограниченное на всей числовой оси решение уравнения (16) существует, единственно, асимптотически устойчиво по Ляпунову и задается формулой

$$X^{\pm}_{\alpha}(t) = \beta \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)} Y^{\pm}_{\alpha}(s) ds \quad (\forall\, \alpha \in [0,1]). \tag{17}$$

Отметим, что в формуле (17) слева выражения $X^{\pm}_{\alpha}(t)$ определяют α-индексы нечеткого числа $\widetilde{X}(t)$. В частности, выражение $X^{+}_{\alpha}(t)$ монотонно невозрастающее, а выражение $X^{-}_{\alpha}(t)$ монотонно неубывающее по α, поскольку таковы α-индексы $Y^{+}_{\alpha}(s)$ и $Y^{-}_{\alpha}(s)$ [1, гл. 5] и в силу свойства монотонности интеграла.

Вычислим ковариационную функцию выходного ограниченного на всей оси Н.С.П. $\widetilde{X}$ системы, описываемой уравнением (13). Согласно (10), (17) ковариационная функция $K_{X_\alpha^\pm}(t,s)$ имеет вид

$$K_{X_\alpha^\pm}(t,s)=\beta^2 E\left[\left(\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau_1)}Y_\alpha^\pm(\omega,\tau_1)\,d\tau_1-E\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau_1)}Y_\alpha^\pm(\omega,\tau_1)\,d\tau_1\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\int\limits_{-\infty}^{s} e^{-\beta(s-\tau_2)}Y_\alpha^\pm(\omega,\tau_2)\,d\tau_2-E\int\limits_{-\infty}^{s} e^{-\beta(s-\tau_2)}Y_\alpha^\pm(\omega,\tau_2)\,d\tau_2\right)\right].$$

Меняя местами операции математического ожидания E и интегрирования во внутренних скобках, получим

$$K_{X_\alpha^\pm}(t,s)=\beta^2 E\left[\left(\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau_1)}\left(Y_\alpha^\pm(\omega,\tau_1)-E(Y_\alpha^\pm(\omega,\tau_1))\right)d\tau_1\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\int\limits_{-\infty}^{s} e^{-\beta(s-\tau_2)}\left(Y_\alpha^\pm(\omega,\tau_2)-E(Y_\alpha^\pm(\omega,\tau_2))\right)d\tau_2\right)\right]= \tag{18}$$
$$=\beta^2\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{s} e^{-\beta(t-\tau_1)}e^{-\beta(s-\tau_2)}K_{Y_\alpha^\pm}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2.$$

В силу (18) и (9) ковариационные функции выходного и входного Н.С.С. системы, определяемой (13), связаны соотношением

$$K_{\widetilde{X}}(t,s)=\frac{\beta^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{s} e^{-\beta(t-\tau_1)}e^{-\beta(s-\tau_2)}\int\limits_{0}^{1}\Big(K_{Y_\alpha^-}(\tau_1,\tau_2)+K_{Y_\alpha^+}(\tau_1,\tau_2)\Big)\,d\alpha d\tau_1 d\tau_2=$$
$$=\beta^2\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{s} e^{-\beta(t-\tau_1)}e^{-\beta(s-\tau_2)}K_{\widetilde{Y}}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Отметим, что сходимость рассматриваемых несобственных интегралов и законность приведенных рассуждений обеспечиваются экспоненциальными оценками соответствующих подынтегральных выражений.

Пример 5. На вход линейной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$z''(t)+a_1 z'(t)+a_2 z(t)=y(t), \tag{19}$$

поступает Н.С.С. $\widetilde{Y}(t)$. Укажем характеристики выходного Н.С.С. $\widetilde{X}(t)$.

Согласно (19) имеем нечеткое дифференциальное уравнение

$$\widetilde{X}''(t) + a_1\widetilde{X}'(t) + a_2\widetilde{X}(t) = \widetilde{Y}(t). \tag{20}$$

Аналогично примеру 4 ожидание выходного сигнала $M(\widetilde{X})(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(M\widetilde{X})''(t) + a_1(M\widetilde{X})'(t) + a_2M(\widetilde{X})(t) = M(\widetilde{Y})(t).$$

Будем считать коэффициенты $a_1, a_2 > 0$. Тогда для α-индексов ожидания получим

$$\left[(M\widetilde{X})^{\pm}_{\alpha}\right]''(t)+a_1\left[(M\widetilde{X})^{\pm}_{\alpha}\right]'(t)+a_2(M\widetilde{X})^{\pm}_{\alpha}(t)=M(\widetilde{Y})^{\pm}_{\alpha}(t) \quad (\forall\,\alpha\in[0,1]). \tag{21}$$

Пусть функции $(M\tilde{Y})^{\pm}_{\alpha}(t)$ ограничены по t на всей числовой оси. Предположим дополнительно, что корни характеристического уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, соответствующего (19), вещественные и отрицательные $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Тогда ограниченное на всей числовой оси решение уравнения (21) существует, единственно, асимптотически устойчиво по Ляпунову и имеет вид

$$(M\widetilde{X})^{\pm}_{\alpha}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G_2(t-s)(M\widetilde{Y})^{\pm}_{\alpha}(s)\,ds \quad (\forall\,\alpha \in [0,1]). \tag{22}$$

Здесь G_2 — функция Грина задачи об ограниченных решениях скалярного уравнения (19) (см., например, [26, гл. 2, § 8]). В сделанных предположениях она имеет вид

$$G_2(t) = \begin{cases} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} & \text{при} \quad t > 0; \\ 0 & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Формула (22) характеризует связь нечетких ожиданий входного и выходного Н.С.С. системы, описываемых уравнением (20).

В предположении ограниченности на всей числовой оси в пространстве $\mathcal{H}$ α-индексов $Y^{\pm}_{\alpha}(t)$, аналогично рассуждениям примера 4 устанавливается следующая формула:

$$\begin{aligned} K_{\widetilde{X}}(t,s) &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{s} G_2(t-\tau_1)G_2(s-\tau_2)\times \\ &\times\int\limits_{0}^{1}\Big(K_{\widetilde{Y}^{-}_{\alpha}}(\tau_1,\tau_2)+K_{\widetilde{Y}^{+}_{\alpha}}(\tau_1,\tau_2)\Big)\,d\alpha d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{s} G_2(t-\tau_1)G_2(s-\tau_2)K_{\widetilde{Y}}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \tag{23}$$

Формула (23) характеризует связь корреляционных функций входного и выходного Н.С.С. системы, описываемых уравнением (20).

Заметим, что в условиях примеров 4, 5 выходные процессы асимптотически устойчивы по Ляпунову в том смысле, что их α-индексы асимптотически устойчивы по Ляпунову (см., например, [25, гл. II]). Только такие процессы физически реализуемы. В литературе рассматриваются и другие подходы к устойчивости решений нечетких дифференциальных уравнений (см., например, [3, гл. 8]).

5. Заключение

Отправным пунктом данного исследования является статья [20], в которой обсуждаются ковариации Н.С.В. Благодаря ей, появилось понятие ковариационной функции Н.С.П., изученное в настоящей статье.

Свойства нечетких ожиданий Н.С.П. (утверждение 4) и ковариационных функций (утверждение 5) естественным образом вытекают из соответствующих свойств нечетких ожиданий и ковариаций для нечетко-случайных величин (утверждения 1–3).

Существенное содержание и научную новизну данной работы составляют теоремы 1–4, связанные с характеристиками дифференцируемых и интегрируемых Н.С.П. При их доказательстве существенно использовались определения и свойства дифференцируемости и интегрируемости нечеткозначных функций. Теоремы 1–4 являются развитием известных (см., например, [6]) утверждений для стандартных непрерывных случайных процессов. Отметим еще экстремальное свойство нечетких ожиданий Н.С.П. (утверждение 4), которое автору представляется новым.

Примеры 1–3 носят иллюстративный характер. Примеры 4–5 показывают возможность применения развитой теории к прикладным задачам, в частности к задаче преобразования Н.С.С. линейной динамической системой. Результаты раздела 4 допускают развитие на случай периодических и почти периодических Н.С.С., в том числе для задачи о спектральных разложениях Н.С.С.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверкин А.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука. 1986. 312 с.
2. *Buckley J.J., Eslami E., Feuring T.* Fuzzy mathematics in economic and engineering. Heidelberg, New-York: Physica-Verl. 2002. 282 p.
3. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2015. 798 с.
4. *Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть II // Информационные технологии. 2015. Т. 21. № 4. С. 243–250.

5. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Часть 1. Позиционное управление // Информационные технологии. 2019. Т. 25. № 5. С. 259–270.

6. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и их инженерные приложения. М.: Кнорус. 2016. 439 с.

7. *Puri M.L., Ralesku D.A.* Fuzzy random variables // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1986. V. 114. P. 409–422.

8. *Nguyen H.T., Wu B.* Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2006. 204 p.

9. *Шведов А.С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // Прикладная эконометрика. 2016. Т. 42. С. 121–138.

10. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 91. P. 552–558.

11. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets Syst. 1987. V. 24. No. 3. P. 319–330.

12. *Aumann R.J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 1987. No. 3. P. 1–12.

13. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Func. Ekvacioj. 1967. No. 11. P. 205–223.

14. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Марковские и полумарковские процессы с нечеткими состояниями. Ч. 1. // Информационные технологии. 2020. Т. 26. № 6. С. 323–334.

15. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Марковские и полумарковские процессы с нечеткими состояниями. Ч. 2. // Информационные технологии. 2020. Т. 26. № 7. С. 387–393.

16. *Diamond P., Kloeden P.* Metric Spaces of Fuzzy Sets // Fuzzy Sets Syst. 1990. V. 35. No. 2. P. 241–249.

17. *Хацкевич В.Л.* О некоторых свойствах нечетких ожиданий и нелинейных нечетких ожиданий нечетко-случайных величин // Известия вузов. Математика. 2022. № 11. С. 97–109.

18. *Хацкевич В.Л.* Экстремальные свойства средних нечетко-случайных величин // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2022. Т. 204. С. 160–169.

19. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number // Fuzzy Sets and Syst. 1987. V. 24. No. 3. P. 279–300.

20. *Feng Y., Hu. L., Shu H.* The variance and covariance of fuzzy random variables // Fuzzy Syst. 2001. V. 120. No. 3. P. 487–497.

21. *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука. 1985. 322 с.

22. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Syst. 1987. V. 24. No. 3. P. 301–317.

23. *Jong Yeoul Park, Han H.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // Int. J. Math. Mathem. Sci. 1999. No. 22(2). P. 271–280.

24. *Ahmad L., Farooq M., Abdullah S.* Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform // Ind. J. Pure Appl. Math. 2014. No. 2. P. 1–20.

25. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука. 1970. 533 с.

26. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука. 1970. 351 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 03.08.2022

После доработки 12.01.2023

Принята к публикации 30.03.2023