

# Управление в технических системах

© 2023 г. А.И. МАТАСОВ, д-р физ.-мат. наук (alexander.matasov@gmail.com),  
Х. ИНЬ (yhl2671818702@gmail.com)

(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

## КАЛИБРОВКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЕНСОРА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ЕГО ОРИЕНТАЦИИ

Пространственные сенсоры обычно нуждаются в калибровке. В некоторых случаях ошибки масштабных коэффициентов сенсора зависят от знаков проекций векторного входного сигнала на оси чувствительности сенсора. Для устранения неоднозначности в определении ошибок масштабных коэффициентов можно ограничить угловые положения сенсора в процессе калибровки так, чтобы соответствующие проекции пробного входного сигнала заведомо имели определенный знак. В работе получено аналитическое решение для задачи оптимальной калибровки пространственного сенсора при ограничении на его допустимые угловые ориентации.

*Ключевые слова:* пространственный сенсор, калибровка, гарантирующий подход к оцениванию.

DOI: 10.31857/S0005231023060089, EDN: CSOYUD

### 1. Введение

Рассмотрим пространственный сенсор, предназначенный для измерения какой-либо векторной физической величины. Такой величиной, например, может быть удельная сила, действующая на чувствительную массу блока ньютометров, или напряженность электрического (магнитного) поля. Свяжем с корпусом пространственного сенсора так называемый приборный (правый ортогональный) трехгранник с началом в условном центре чувствительного элемента пространственного сенсора. Пусть пространственный сенсор состоит из трех одномерных датчиков, оси чувствительности которых в идеале перпендикулярны друг другу и направлены по осям приборного трехгранника.

Положим, что модель показаний пространственного сенсора имеет вид

$$(1) \quad f' = (I_3 + \Gamma)f_z + \Delta f^0 + \varrho'',$$

где  $f' \in \mathbb{R}^3$  — показания сенсора;  $I_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  — единичная матрица;  $\Gamma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  — матрица погрешностей сенсора (диагональные элементы которой характеризуют ошибки масштабных коэффициентов, а внедиагональные — малые угловые отклонения осей чувствительности одномерных датчиков от осей приборного трехгранника);  $f_z \in \mathbb{R}^3$  — вектор соответствующей физической величины

в проекциях на оси приборного трехгранника;  $\Delta f^0 \in \mathbb{R}^3$  — систематические смещения показаний сенсора;  $\varrho'' \in \mathbb{R}^3$  — флуктуационная составляющая ошибок измерений.

Вектор  $f_z$  является “полезным” сигналом, который надо извлечь из тройки  $f'$  измерений его компонент. Параметрические ошибки  $\Gamma$  и  $\Delta f^0$  препятствуют этому. Определение величин  $\Gamma$  и  $\Delta f^0$  составляет цель калибровки. После калибровки, т.е. после решения соответствующей задачи оценивания параметров, влияние указанных величин можно компенсировать очевидным образом.

В процессе калибровки пространственный сенсор при помощи поворотного стенда устанавливает в различные угловые положения относительно постоянного векторного пробного сигнала, а затем составляют систему уравнений для нахождения  $\Gamma$  и  $\Delta f^0$ . Одной из основных проблем является определение набора этих угловых положений. Проведение калибровочных экспериментов — технологически не простая процедура, поэтому количество таких положений нужно сократить.

Исходные показания сенсора содержат существенную высокочастотную ошибку. Поэтому рассматривается набор серий показаний сенсора, в каждой из которых его угловое положение не меняется, а показания осредняются. Это позволяет существенно уменьшить флуктуационную составляющую ошибок измерений. Здесь предполагается, что соотношение (1) описывает уже осредненные измерения.

Например, при калибровке блока ньютонометров [1] упомянутая физическая величина является разностью между удельной силой, действующей на чувствительную массу блока со стороны подвеса, и удельной силой тяготения; если блок неподвижен относительно Земли, что имеет место при статических испытаниях, то рассматриваемая величина равна ускорению силы тяжести в точке проведения экспериментов с обратным знаком. Тогда традиционная модель показаний блока ньютонометров [2] определяется (1). Проблема калибровки сенсоров инерциальных навигационных систем особенно актуальна (см., например, [3–8]).

В некоторых случаях модели показаний сенсора являются неоднородными: ошибки масштабных коэффициентов сенсора зависят от знаков проекций векторного входного сигнала на оси чувствительности сенсора [7]. Для устранения неоднозначности в определении ошибок масштабных коэффициентов можно ограничить угловые положения сенсора в процессе калибровки так, чтобы соответствующие проекции пробного входного сигнала имели определенный знак. Это обстоятельство заметно усложняет анализ и решение задачи оценивания, возникающей при математической формализации проблемы калибровки.

Природа флуктуационной составляющей ошибок измерений (после естественного осреднения) в электромеханических приборах довольно разнообразна и с трудом формализуется. При проведении серии калибровочных экс-

периментов традиционно используемая модель белого шума, как правило, не имеет серьезного обоснования. Более того, даже предположение о статистической устойчивости значений компонент погрешностей (и тем самым наличие статистических характеристик) нередко сомнительно. Со значительно большей достоверностью можно считать, что компоненты вектора флуктуационной составляющей ошибок измерений ограничены известной величиной. Спектр же этих компонент после осреднения обычно не имеет внятной модели. Поэтому будем считать, что указанные компоненты лишь ограничены по абсолютной величине известной константой (а внутри этих ограничений могут принимать любые значения). Такое предположение приводит к использованию гарантирующего подхода для решения соответствующей задачи оценивания.

Гарантирующий подход к оцениванию в так называемой априорной постановке впервые был сформулирован в классических исследованиях [9–11] (см. также [12]). Он был развит в [13, 14] в связи с решением задач космической баллистики (см. также [15, 16]). Гарантирующий подход при незначительной модификации является удобным инструментом для формализации задачи калибровки пространственного сенсора. В случае блока ньютонометров без асимметрии ошибок масштабных коэффициентов применение гарантирующего подхода осуществлено в [17–19].

Ниже для калибровки блока ньютонометров при грубой информации об угловых положениях сенда будет применяться метод скаляризации, который позволяет радикально сократить нежелательное влияние ошибок в знании угловой ориентации сенда. Впервые в доступной литературе этот метод был предложен в [20] (см. также [18, 21–23]).

В данном исследовании в рамках гарантирующего подхода будет получено аналитическое решение задачи оптимальной калибровки пространственного сенсора при существенном ограничении его допустимых угловых положений.

## 2. Сведение задачи калибровки к проблеме моментов

### 2.1. Применение метода скаляризации

Нормализуем соотношение (1), разделив его на модуль вектора пробного сигнала  $g$ , который для простоты будет считаться точно известным. (Неточность в его знании, конечно, можно учесть, но это не повлияет ни на какие принципиальные выводы.) Тогда исходная модель показаний сенсора (1) представится в виде

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{f'}{g} &= (I_3 + \Gamma) n_z + \varepsilon + \varrho', & \|n_z\| &= 1, \\ n_z &= \frac{f_z}{g}, & \varepsilon &= \frac{\Delta f^0}{g}, & \varrho' &= \frac{\varrho''}{g}. \end{aligned}$$

Приближенное значение единичного вектора  $n_z$  (постоянного относительно основания сенда) определяется по измерениям углов поворота сенда. Обо-

значим через  $n \in \mathbb{R}^3$  это приближенное значение  $n_z$ ; тогда  $n$  точно известно и принадлежит единичной сфере. Погрешность в знании ориентации стенда (с точностью до малых второго порядка) опишем кососимметрической матрицей  $\hat{\alpha}$  с неизвестными малыми элементами:

$$n_z = (I_3 + \hat{\alpha})n, \quad \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\alpha_i| \ll 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Положим, что каждая компонента ошибок измерений показаний ньютонометров  $\varrho' = \text{col}(\varrho'_1, \varrho'_2, \varrho'_3)$  ограничена известной величиной  $\sigma$ . Вводя новую точно известную величину  $z'(n) = g^{-1}f'(n) - n \in \mathbb{R}^3$ , соотношение (2) с точностью до малых второго порядка можно переписать в виде

$$(3) \quad z'(n) = (\Gamma + \hat{\alpha}(n))n + \varepsilon + \varrho'(n), \quad |\varrho'_i(n)| \leq \sigma, \quad i = 1, 2, 3.$$

Существенным отличием постановки задачи калибровки в данной работе от постановок, рассмотренных ранее, является дополнительное важное ограничение на допустимые ориентации пространственного сенсора. Для того, чтобы устранить неоднозначность параметров, описывающих ошибки масштабных коэффициентов, будем считать, что компоненты вектора ориентации  $n = \text{col}(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$  неотрицательны (другие варианты распределений знаков могут быть рассмотрены аналогично). Иными словами, положим, что

$$n \in S^+ = S \cap \mathbb{R}_+^3,$$

где  $S$  — единичная сфера, а  $\mathbb{R}_+^3$  — неотрицательный октант.

При калибровке на относительно грубых стендах неизвестный член  $\hat{\alpha}(n)n$  (разный для каждого очередного углового положения) оказывает существенное мешающее влияние на точность оценивания — им нельзя пренебречь. Метод скаляризации состоит в том, что вместо трехмерных измерений (3) рассматривается одномерное скалярное измерение

$$(4) \quad \begin{aligned} z(n) &= n^\top z'(n) = n^\top (\Gamma + \hat{\alpha}(n))n + n^\top \varepsilon + n^\top \varrho(n) = \\ &= n^\top \Gamma n + n^\top \varepsilon + n^\top \varrho'(n), \quad n \in S^+. \end{aligned}$$

При этом волевым образом устраняется влияние неизвестной помехи  $\alpha(n)$ , так как, очевидно,  $n^\top \hat{\alpha}(n)n = 0$  [17, 18]. Новую помеху измерений  $\varrho(n) = n^\top \varrho'(n) \in \mathbb{R}^1$ , очевидно, можно оценить неравенством (с возможным завышением)

$$(5) \quad |\varrho(n)| \leq \sqrt{3}\sigma, \quad n \in S^+.$$

Случай более точной оценки для новой помехи измерений  $\varrho(n)$  будет исследован отдельно в разделе 5.

Из формулы (4) следует, что внедиагональные элементы матрицы  $\Gamma$  входят в нее не по отдельности, а только в виде соответствующих сумм, характеризующих взаимные перекосы осей чувствительности. Таким образом, задача калибровки принимает вид задачи оценивания, в которой по континууму всех измерений  $z(n)$ , определяемых соотношением

$$(6) \quad z(n) = H^T(n)q + \varrho(n), \quad n \in S^+,$$

где

$$H(n) = \text{col}(n_1^2, n_2^2, n_3^2, n_1n_2, n_1n_3, n_2n_3, n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^9,$$

требуется оценить элементы вектора неизвестных параметров

$$(7) \quad q = \text{col}(\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{33}, \Gamma_{12} + \Gamma_{21}, \Gamma_{13} + \Gamma_{31}, \Gamma_{23} + \Gamma_{32}, \varepsilon) \in \mathbb{R}^9$$

на фоне помехи, ограниченной неравенством (5). Иногда матрица  $\Gamma$  исходно задается нижнетреугольной или симметричной. Тогда неоднозначность в нахождении  $\Gamma$  автоматически устраняется.

*Замечание 1.* Строго говоря, для обеспечения неотрицательности проекций входного сигнала на оси приборного трехгранника, нужно потребовать, чтобы компоненты вектора  $n_z$ , а не  $n$  были неотрицательные. Однако для простоты эта деталь при решении сформулированной ниже оптимальной задачи оценивания будет игнорироваться. А соответствующие незначительные (поскольку  $n_z \approx n$ ) коррекции оптимального плана можно произвести после решения соответствующей задачи оценивания.

## 2.2. Метод гарантирующего оценивания

Рассмотрим скалярные измерения (6), (5), в которых помеха  $\varrho(n)$  является всюду определенной на  $S^+$  интегрируемой по Лебегу функцией. Поставим задачу оценивания скалярной величины  $l = a^T q \in \mathbb{R}^1$ , где  $q$  определяется (7), для различных заданных векторов  $a \in \mathbb{R}^9$ . В рассматриваемой задаче  $a = e^{(\nu)}$ , где  $e^{(\nu)}$  — один из единичных координатных ортов из  $\mathbb{R}^9$  с единицей на  $\nu$ -м месте, (что соответствует оценке каждой компоненты  $q$  [18]). Введем линейные оценщики для  $l = a^T q$  вида

$$(8) \quad \tilde{l} = \int_{S^+} \Phi_0(n) z(n) dS + \sum_{k=1}^M \Phi^{[k]} z(n^{[k]}),$$

где интеграл берется по поверхности  $S^+$ ,  $\Phi_0(n): S^+ \rightarrow \mathbb{R}^1$  — некоторая весовая функция, интегрируемая по Лебегу, а  $\Phi^{[k]} \in \mathbb{R}^1$  и  $n^{[k]} \in S^+$ ,  $k = 1, \dots, M$  ( $M$  произвольно) — некоторые числа и векторы ориентации. В отличие от традиционной формы оценщика этот оценщик содержит не только интегральный член, но и слагаемые, зависящие от измерений при некоторых отдельных ориентациях.

Для простоты будем писать

$$\tilde{l} = \int_{S^+} \Phi(n) z(n) dS, \quad \Phi(n) = \Phi_0(n) + \sum_{k=1}^M \Phi^{[k]} \delta(n - n^{[k]}),$$

где формально положим  $\int_{S^+} f(n) \delta(n - n^{[k]}) dS = f(n^{[k]})$ , т.е., что  $\delta(n - n^{[k]})$  есть дельта-функция Дирака. Обозначим множество всех таких функций  $\Phi(n)$  через  $\mathcal{F}$ .

Величина

$$(9) \quad I(\Phi(n)) = \sup_{q \in \mathbb{R}^9, |\varrho(n)| \leq \sqrt{3}\sigma} |\tilde{l} - l|$$

называется гарантированной ошибкой оценки.

При выбранном оценителе это — максимальное значение ошибки оценки при всевозможных значениях неопределенных факторов. Будем искать весовую функцию  $\Phi(n)$ , минимизирующую гарантированную ошибку оценки, т.е. искать ее из решения следующей минимаксной задачи:

$$(10) \quad \inf_{\Phi(n) \in \mathcal{F}} \sup_{q \in \mathbb{R}^9, |\varrho| \leq \sqrt{3}\sigma} |\tilde{l} - l|.$$

Такая задача называется задачей оптимального гарантирующего оценивания [9–11]. Таким образом, для решения задачи калибровки нужно решить 9 отдельных задач для всех указанных выше  $a$ . Интересно отметить, что привлечение нелинейных оценителей в дополнение к линейным оценителям вида (8) не приводит к уменьшению гарантированной ошибки оценки [16, 24–27], т.е. можно ограничиться линейными оценителями.

После несложных вычислений нетрудно получить, что

$$I(\Phi(n)) = \begin{cases} \sqrt{3}\sigma \int_{S^+} |\Phi(n)| dS, & \text{если } \int_{S^+} H(n)\Phi(n) dS = a \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому решение задачи оптимальной калибровки сводится к решению проблемы моментов (далее опускаем постоянный множитель  $\sqrt{3}\sigma$ )

$$(11) \quad I_0 = \inf_{\Phi \in \mathcal{F}} \int_{S^+} |\Phi(n)| dS$$

при условии несмещенности

$$(12) \quad \int_{S^+} H(n)\Phi(n) dS = a, \quad H(n) \in \mathbb{R}^m \quad (m = 9).$$

Основное содержание работы состоит в получении аналитического (т.е. в явном виде) решения проблемы моментов (11), (12) для  $m = 9$  единичных векторов вида  $a = a_{(\nu)} = \text{col}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , где единица стоит на  $\nu$ -м месте,  $\nu = 1, \dots, 9$ .

### 3. Решение проблемы моментов

#### 3.1. Вспомогательные сведения

Для решения проблемы моментов (11), (12) удобно использовать двойственную задачу [28–30], имеющую вид

$$(13) \quad I^0 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} a^\top \lambda \quad (m = 9)$$

при условии

$$(14) \quad |H^\top(n)\lambda| \leq 1, \quad n \in S^+.$$

При рассмотрении двойственной задачи исходную проблему моментов называют прямой задачей.

*Теорема 1.* Пусть функция  $H(n) \in \mathbb{R}^m$  непрерывна на  $S^+$ . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для прямой задачи (11), (12) существует, по крайней мере, одно импульсное решение с не более чем  $t$  импульсами

$$(15) \quad \Phi^0(n) = \sum_{i=1}^m \Phi^{(i)} \delta(n - n^{(i)}).$$

2. Решение двойственной задачи (13), (14)  $\lambda^0$  существует.

3. Значения прямой и двойственной задачи равны:  $I_0 = I^0$ .

4. Если оптимальный оценщик импульсный и задается формулой (15) со всеми отличными от нуля коэффициентами, то

$$(16) \quad |H^\top(n^{(i)})\lambda^0| = 1, \quad i = 1, \dots, t, \quad \text{причем } \text{sign } \Phi^{(i)} = \text{sign} \left( H^\top(n^{(i)})\lambda^0 \right).$$

5. На множестве векторов ориентации  $n$  таких, что  $|H^\top(n)\lambda^0| < 1$ , оптимальный оценщик равен нулю.

6. Если  $\Phi(n)$  — допустимый элемент прямой задачи, а  $\lambda$  — допустимый элемент двойственной задачи и значения функционалов прямой и двойственной задачи на этих элементах равны, то оба они являются решениями соответствующих задач.

Эти утверждения являются следствиями общих теорем выпуклого анализа. Их доказательства для случая, когда  $n$  исчерпывает всю сферу  $S$ , содержатся в [18]. Для  $n \in S^+$  доказательства аналогичны.

Рассмотрим набор из девяти векторов ориентации

$$(17) \quad \begin{aligned} n^{(1)} &= \text{col}(1, 0, 0), & n^{(2)} &= \text{col}(0, 1, 0), & n^{(3)} &= \text{col}(0, 0, 1), \\ n^{(4)} &= \text{col}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), & n^{(5)} &= \text{col}\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), & n^{(6)} &= \text{col}\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ n^{(7)} &= \text{col}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), & n^{(8)} &= \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), & n^{(9)} &= \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \end{aligned}$$

Пусть  $\Phi_{(\nu)}$  есть решение соответствующей системы уравнений, полученной из условий несмещенности (12) при подстановке в них импульсного решения типа (15), сосредоточенного на векторах ориентации (17):

$$(18) \quad \mathcal{H}\Phi_{(\nu)} = a_{(\nu)},$$

где  $\mathcal{H} = \left( H(n^{(1)}), \dots, H(n^{(9)}) \right)$ ,  $\Phi_{(\nu)} = \text{col} \left( \Phi_{(\nu)}^{(1)}, \dots, \Phi_{(\nu)}^{(9)} \right)$ ,  $\nu = 1, 4, 7$ .

При помощи теоремы 1 можно доказать следующую теорему.

*Теорема 2. Оцениватели*

$$(19) \quad \Phi_{(\nu)}^0(n) = \sum_{i=1}^9 \Phi_{(\nu)}^{(i)} \delta(n - n^{(i)}), \quad \nu = 1, 4, 7,$$

где  $n^{(i)}$  и  $\Phi_{(\nu)}^{(i)}$  определяются (17) и (18), доставляют решение проблемы моментов (11), (12).

Доказательство теоремы 2 составляет основное содержание работы. Оно приведено ниже. Отметим, что решения (19) не единственны. Решения проблемы моментов для остальных  $\nu$  получаются из предыдущих циклической заменой координат.

### 3.2. Численные результаты

Сначала проведем анализ численных решений. Рассмотрим дискретные аналоги прямой и двойственной задачи при  $a = a_{(1)} = \text{col}(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^9$ , то есть при оценивании  $q_1 = \Gamma_{11}$  (индекс (1) для простоты опускаем). Для этого построим приблизительно равномерную сетку на  $S^+$  из  $M$  точек ( $M \sim 10^5$ ). Тогда, взяв всевозможные импульсные функции, сосредоточенные на этой сетке, получим аналог прямой задачи (11), (12):

$$\min_{\Phi \in \mathbb{R}^M} \sum_{k=1}^M |\Phi^{[k]}|$$

при условиях несмещенности

$$\sum_{k=1}^M H(n^{[k]}) \Phi^{[k]} = a = \text{col}(1, 0, \dots, 0), \quad H(n^{[k]}), a \in \mathbb{R}^m \quad (m = 9)$$

и аналог двойственной задачи (13), (14):

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} a^T \lambda$$

при ограничениях

$$|H(n^{[k]})\lambda| \leq 1, \quad k = 1, \dots, M, \quad n^{[k]} \in S^+.$$



Эти задачи естественным образом сводятся к задачам линейного программирования и решаются стандартными численными процедурами (для довольно больших  $M \sim 10^5$ ). При этом, как хорошо известно, решение прямой задачи содержит не более чем  $m = 9$  отличных от нуля компонент. По полученным численным результатам можно сделать наблюдение, что численные решения обладают следующими свойствами: а) соответствующие ненулевым компонентам  $\Phi^{[k]}$  векторы  $n^{[k]} \in \mathbb{R}^3$  состоят из четырех векторов

$$\text{col}(1, 0, 0), \quad \text{col}(0, 1, 0), \quad \text{col}(0, 0, 1), \quad \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

и еще пяти векторов из  $S^+$ ; б) решение двойственной задачи обладает структурой:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6, \quad \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9.$$

Для построения точных решений непрерывных задач (11), (12), (13), (14) примем гипотезу, что *точные решения также обладают свойствами а) и б)*. В то время как свойство а) имеет отчасти размытый характер, свойство б) математически насыщено и указывает на важность анализа двойственной задачи.

### 3.3. Построение предположительного решения двойственной задачи

С учетом принятой выше гипотезы построим предполагаемое решение двойственной задачи. Впоследствии будет доказано, что оно и есть истинное решение. Пусть  $a = a_{(1)} = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$ . Рассмотрим функцию из ограниченной двойственной задачи

$$S(n; \lambda) = H^T(n) \lambda = \lambda_1 + \lambda_4(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) + \lambda_7(n_1 + n_2 + n_3), \quad n \in S^+.$$

Представим ее в более компактном виде:

$$(20) \quad S(n; \lambda) = \lambda_1 + \lambda_4 \frac{(n_1 + n_2 + n_3)^2 - 1}{2} + \lambda_7(n_1 + n_2 + n_3) = s(t(n); \lambda_1, \lambda_4, \lambda_7),$$

$$t = n_1 + n_2 + n_3, \quad 1 \leq t \leq \sqrt{3},$$

где

$$s(t; \lambda_1, \lambda_4, \lambda_7) = \lambda_1 + \lambda_4 \frac{t^2 - 1}{2} + \lambda_7 t.$$

Тогда двойственная задача сильно упростится:

$$(21) \quad \max_{\lambda_1, \lambda_4, \lambda_7} \lambda_1 \quad \text{при условии} \quad |s(t; \lambda_1, \lambda_4, \lambda_7)| \leq 1, \quad 1 \leq t \leq \sqrt{3}.$$

Обозначим  $\lambda^0 = \text{col}(\lambda_1^0, \dots, \lambda_9^0)$  решение задачи (13), (14). В соответствии со свойством а) оптимальный оценитель  $\Phi^0$  должен быть сосредоточен в тех векторах ориентации  $n$ , для которых  $t(n) = 1$ ,  $t(n) = \sqrt{3}$  и  $t(n) = t^{(i)}$  для какого-то набора  $i = 1, \dots, i^0, i^0 \leq 5$ . Согласно утверждению 4 теоремы 1, для упомянутых ориентаций функция  $S(n; \lambda^0)$  принимает свои экстремальные значения:  $|S(n; \lambda^0)| = 1$ .

Покажем, что  $\lambda_4^0 \neq 0$ . Действительно, допустим обратное:  $\lambda_4^0 = 0$ . Тогда согласование со свойством а) возможно лишь и при  $\lambda_7^0 = 0$ , а тогда  $|\lambda_1| \leq 1$ . Но оптимальное значение функционала в задаче (21) больше единицы: например, элемент  $\lambda = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ , очевидно, является допустимым.

Функция  $s(t(n); \lambda_1^0, \lambda_4^0, \lambda_7^0) \triangleq s^0(t(n))$  при  $\lambda_4^0 \neq 0$  есть парабола относительно  $t$  и поэтому она принимает свои экстремальные значения не более чем в трех точках: на концах и в вершине параболы. Следовательно,

$$(22) \quad |s^0(1)| = 1, \quad \left| s^0 \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \right| = 1, \quad |s^0(\sqrt{3})| = 1,$$

а для остальных значений  $t$  выполняется строгое неравенство:

$$(23) \quad |s^0(t)| < 1, \quad t \neq 1, \quad t \neq \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad t \neq \sqrt{3}.$$

Причем, в силу формы параболы,

$$(24) \quad \text{sign } s^0(1) = -\text{sign } s^0 \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) = \text{sign } s^0(\sqrt{3}).$$

Соотношения (22), (24) порождают систему трех линейных уравнений относительно  $\lambda_i^0$ ,  $i = 1, 4, 7$  и определяют  $\lambda^0$  с точностью до знака. Ясно, что его следует выбрать так, чтобы  $a^T \lambda^0 = \lambda_1^0$  было бы положительным (в противном случае  $-\lambda^0$  доставляло бы большее значение функционалу). Решая эту систему уравнений, нетрудно подсчитать, что полученный допустимый элемент двойственной задачи (который предположительно является ее решением) имеет вид

$$(25) \quad \begin{aligned} \lambda_1^0 &= \lambda_2^0 = \lambda_3^0 = 3(7 + 4\sqrt{3}), \\ \lambda_4^0 &= \lambda_5^0 = \lambda_6^0 = 8(2 + \sqrt{3}), \\ \lambda_7^0 &= \lambda_8^0 = \lambda_9^0 = -4(5 + 3\sqrt{3}), \end{aligned}$$

причем

$$(26) \quad \text{sign } s^0(1) = -\text{sign } s^0 \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) = \text{sign } s^0(\sqrt{3}) = 1.$$

### 3.4. Построение предположительного решения прямой задачи

Пусть предполагаемое решение прямой задачи имеет вид (15). В соответствии с утверждением 4 теоремы 1 и (22), (23) оно сосредоточено только на векторах ориентации, для которых либо  $t(n) = 1$ , либо  $t(n) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ , либо  $t(n) = \sqrt{3}$ . Согласно свойству а), без потери общности можно считать, что

$$(27) \quad n^{(1)} = \text{col}(1, 0, 0), \quad n^{(2)} = \text{col}(0, 1, 0), \quad n^{(3)} = \text{col}(0, 0, 1) \quad \rightarrow \quad t(n) = 1,$$

$$(28) \quad n^{(4)}, n^{(5)}, n^{(6)}, n^{(7)}, n^{(8)} \in S^+ \quad \rightarrow \quad t(n) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

$$(29) \quad n^{(9)} = \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \rightarrow \quad t(n) = \sqrt{3}.$$

Сигнатура двойственной задачи

$$e = \text{col}\left(\text{sign}(H(n^{(1)})^T \lambda^0), \dots, \text{sign}(H(n^{(9)})^T \lambda^0)\right)$$

в соответствии с (26)–(29) имеет вид

$$(30) \quad e = \text{col}(+1, +1, +1, -1, -1, -1, -1, -1, +1).$$

Множество

$$(31) \quad C = \left\{ n \in S^+ \mid t(n) = n_1 + n_2 + n_3 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right\}$$

порождено пересечением плоскости  $n_1 + n_2 + n_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$  (с нормальным вектором  $\text{col}(1, 1, 1)$ ) с единичной сферой  $S$  (что есть окружность) с дополнительным ограничением на неотрицательность компонент, т.е. состоит из трех дуг  $[\alpha_1, \alpha_2]$ ,  $[\alpha_3, \alpha_4]$ ,  $[\alpha_5, \alpha_6]$  указанной окружности. На рис. 1 изображена поверхность  $S^+ = S \cap \mathbb{R}_+^3$  (утолщенной линией), указанная окружность (замкнутой линией обычной толщины), точки пересечения  $S^+$  с осями координат (точками малого размера), точка пересечения диагонали октанта с поверхностью  $S^+$  (точкой большого размера) и точки пересечения указанной окружности с  $S^+$  (точками среднего размера). Легко подсчитать, что эти точки пересечения окружности с  $S^+$  делят соответствующие дуги большого круга, лежащие в координатных плоскостях, на три равные части (по  $30^\circ$ ).

В качестве кандидата на решение прямой задачи можно взять решение, для которого векторы ориентации из множества  $C$  лежат в крайних точках  $C$ , т.е. на концах дуг  $[\alpha_1, \alpha_2]$ ,  $[\alpha_3, \alpha_4]$ ,  $[\alpha_5, \alpha_6]$ . Таких точек шесть, а требуется определить пять. Отбросим, например, точку, соответствующую вектору ориентации  $n = \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ ; на рис. 1 она обозначена  $\alpha_2$ .

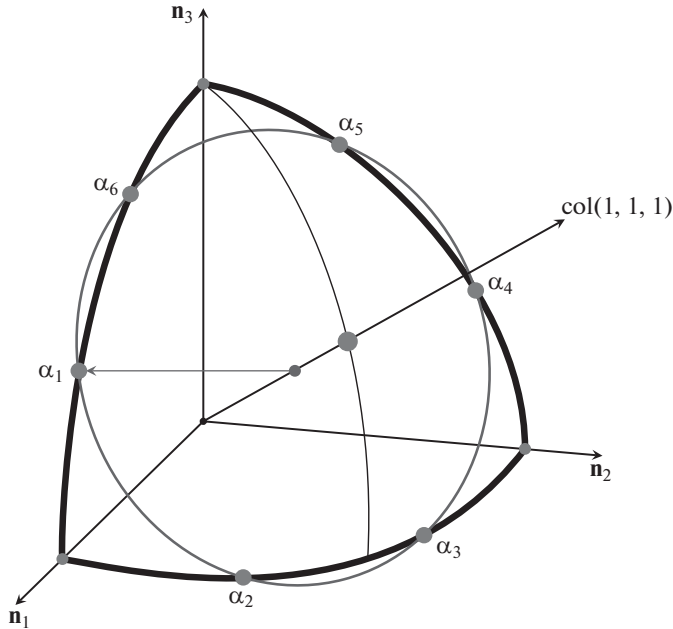


Рис. 1. Поверхность допустимых ориентаций.

Тогда недостающие векторы ориентации примут вид

$$(32) \quad n^{(4)} = \text{col} \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad n^{(5)} = \text{col} \left( 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad n^{(6)} = \text{col} \left( 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ n^{(7)} = \text{col} \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad n^{(8)} = \text{col} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \right).$$

Составим соответствующие этим векторам ориентации систему условий несмещенности (которая получится при подстановке в (12) импульсной функции, порожденной векторами (27), (29) и (32)):

$$(33) \quad \mathcal{H}\Phi = a, \quad \text{где } \mathcal{H} = \left( H(n^{(1)}), \dots, H(n^{(9)}) \right), \quad \Phi = \text{col}(\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(9)});$$

как уже было указано выше, для простоты нижний индекс (1) опускается. Отметим, что  $\det \mathcal{H} \neq 0$ . В этом можно убедиться, приведя матрицу  $\mathcal{H}$  к верхнетреугольной форме, например, методом исключения Гаусса, игнорируя общие множители в строках или столбцах; этот способ довольно трудоемкий. Кроме того, и численные расчеты показывают, что при QR-разложении абсолютные значения диагональных элементов верхнетреугольной матрицы лежат в интервале (0,07; 1,5), а при SVD-процедуре сингулярные числа (все девять) — в интервале (0,02; 3).

Построим предполагаемое решение прямой задачи  $\Phi^0(n)$  в форме (15), в которой весовые коэффициенты определяются  $\Phi$  из (33). Очевидно,  $\Phi =$

$= \mathcal{H}^{-1}a$ . Явное нахождение вектора  $\Phi$  из (33), чего было бы достаточно для обоснования оптимальности решения, едва ли практически осуществимо вследствие высокого порядка системы. Можно поступить более тонко. Из (16), (26), (30) вытекает равенство

$$(34) \quad \mathcal{H}^T \lambda^0 = e.$$

Из (34) следует, что  $a^T \lambda^0 = a^T (\mathcal{H}^T)^{-1} e$ . Поэтому

$$(35) \quad e^T \Phi = e^T \mathcal{H}^{-1} a = a^T \lambda^0.$$

Так как  $\det \mathcal{H} \neq 0$  и число обусловленности  $\mathcal{H}$  вполне умеренное ( $\sim 150$ ), то уравнения несмещенности (33) можно без труда решить численно. Найденные значения весовых коэффициентов таковы, что  $\max_{i=1, \dots, 9} |\Phi^{(i)}| > 1,8$ ; поэтому численная информация о знаках  $\Phi^{(i)}$  надежна (более формальное обоснование этого утверждения содержится в приложении). При этом оказывается, что

$$(36) \quad \text{col}(\text{sign } \Phi^{(1)}, \dots, \text{sign } \Phi^{(9)}) = e.$$

Тогда из (35), (36) следует, что для построенных допустимых элементов прямой и двойственной задачи  $\Phi^0(n)$  и  $\lambda^0$

$$(37) \quad \int_{S^+} |\Phi^0(n)| dS = \sum_{i=1}^9 |\Phi^{(i)}| = e^T \Phi = a^T \lambda^0.$$

Таким образом, в силу утверждения 6 теоремы 1 эти  $\Phi^0(n)$  и  $\lambda^0$  являются решениями прямой и двойственной задачи. При этом оптимальное значение функционала  $I_{0, (1)} = 3(7 + 4\sqrt{3})$  (с точностью до множителя  $\sqrt{3}\sigma$  совпадающего с оптимальной гарантированной ошибкой оценки). Отметим, что несмотря на численную аргументацию при обосновании (36), финальное утверждение (37) строго доказано. Случаи  $\nu = 4$  и  $\nu = 7$  исследуются аналогично. При этом соответствующие решения двойственной задачи с точностью до знака совпадают с  $\lambda^0$  из (25), а оптимальные значения функционала равны  $I_{0, (4)} = 8(2 + \sqrt{3})$  и  $I_{0, (7)} = 4(5 + 3\sqrt{3})$ . Теорема 2 доказана.

*Замечание 2.* Сосредоточим внимание на оценивании, например, параметров  $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{22}, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ . В задаче без ограничений на угловые положения, когда вектор ориентации приборного трехгранника может пробегать всю единичную сферу  $S$ , оптимальный план калибровки для плоской задачи, т.е. при  $n_3 = 0$ , является оптимальным и для пространственной задачи [17]. Для рассматриваемого в настоящей статье случая с ограничениями на допустимые угловые положения пространственного сенсора это не так. Если ограничиться лишь “плоскими” планами ( $n_3 = 0$ ), то гарантированная ошибка оценки будет почти в три раза больше оптимальной. Это не очевидная особенность задачи с ограничениями на угловые положения.

### 3.5. О других решениях

Из доказательства теоремы 2 следует, что если какой-то набор векторов ориентации из  $C$ , дополненный векторами (27) и (29) до невырожденной матрицы, сохраняет сигнатуру двойственной задачи  $e$  весовых коэффициентов, то этот набор порождает новый оптимальный оценитель. Используя это достаточное условие, можно легко убедиться, что если из шести точек границы  $C$  исключить вектор ориентации  $n = \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$  (на рис. 1 соответствующая точка обозначена  $\alpha_1$ ), то оставшиеся пять точек (с (27) и (29)) породят еще одно решение для случая  $\nu = 1$  и  $\nu = 7$ . А если из шести крайних точек  $C$  удалить вектор  $n = \text{col}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$  ( $\alpha_3$  на рис. 1), то можно прийти к новому решению для случая  $\nu = 4$ .

Обратим внимание на другой класс решений, чья оптимальность также вытекает из указанного достаточного условия. Рассмотрим симметричный набор векторов ориентации  $n^{(5)}$ ,  $n^{(6)}$ ,  $n^{(7)}$  из  $C$  (см. (31)), в котором концы векторов лежат на серединах дуг  $[\alpha_1, \alpha_2]$ ,  $[\alpha_3, \alpha_4]$ ,  $[\alpha_5, \alpha_6]$  соответственно (иными словами, эти концы находятся на больших кругах — биссектрисах сферического треугольника  $S^+$ ):

$$\begin{aligned} n^{(5)} &= \text{col} \left( \frac{\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6} \right), \\ n^{(6)} &= \text{col} \left( \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6} \right), \\ n^{(7)} &= \text{col} \left( \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6} \right). \end{aligned}$$

Дополним его всегда присутствующими в решении векторами  $n^{(1)}$ ,  $n^{(2)}$ ,  $n^{(3)}$ ,  $n^{(9)}$  из (27), (29). Для образования невырожденной матрицы  $\mathcal{H}$  в условиях несмещенности нужно присоединить к ним еще два вектора. Аналогично доказательству оптимальности решения  $\Phi_{(1)}^0(n)$  можно убедиться, что если присоединить одну из трех следующих пар векторов  $n^{(4)}$ ,  $n^{(8)}$  — крайних точек  $C$  (они явно указаны справа):

$$(38) \quad \begin{cases} \text{col} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)_{\alpha_1} & \text{col} \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)_{\alpha_6} & \text{col} \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)_{\alpha_6} \\ \text{col} \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)_{\alpha_3} & \text{col} \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)_{\alpha_3} & \text{col} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)_{\alpha_2} \end{cases}$$

то полученный невырожденный набор девяти векторов образует оптимальное решение одновременно для случаев  $\nu = 1$  и  $\nu = 7$ . А если присоединить одну

из следующих четырех пар  $n^{(4)}$ ,  $n^{(8)}$ :

$$(39) \quad \begin{cases} \text{col} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)_{\alpha_1} \\ \text{col} \left( 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)_{\alpha_5}, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{col} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)_{\alpha_1} \\ \text{col} \left( 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)_{\alpha_4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{col} \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)_{\alpha_6} \\ \text{col} \left( 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)_{\alpha_5}, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{col} \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)_{\alpha_6} \\ \text{col} \left( \frac{0, \sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)_{\alpha_4}, \end{cases}$$

то полученный невырожденный набор девяти векторов образует оптимальное решение для случая  $\nu = 4$ .

Итак, решение прямой задачи не единственно. Кроме того, достаточно малые деформации (в рамках  $C$ ) набора векторов ориентации, порождающего решение прямой задачи, не изменяют сигнатуру решений уравнений несмещенности. Поэтому они также приводят к новому решению прямой задачи. Полное описание всех решений выходит за рамки данной работы.

#### 4. Упрощенная форма проблемы моментов

Из полученных выше результатов (с учетом утверждения 5 теоремы 1) следует, что оптимальный оценщик отличен от нуля только на трех сечениях  $S^+$  тремя плоскостями. Первая плоскость — это  $n_1 + n_2 + n_3 = 1$ ; в силу очевидного неравенства  $1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq n_1 + n_2 + n_3$ , это возможно только для трех векторов (27). Вторая плоскость определяется равенством  $n_1 + n_2 + n_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ . Третья плоскость описывается уравнением  $n_1 + n_2 + n_3 = \sqrt{3}$ ; согласно неравенству Коши-Буняковского пересечение состоит только из одного элемента (29). Таким образом, проблема моментов “сосредоточена” лишь на четырех векторах и множестве  $C$ , задаваемом (31).

Для явного учета этого обстоятельства введем ортогональную систему координат  $0m_1m_2m_3$ , повернутую относительно  $0n_1n_2n_3$  следующим образом (см. рис. 2). Пусть ось поворота лежит в плоскости  $0n_1n_2$  и в этой плоскости уравнение оси вращения имеет вид  $n_1 + n_2 = 0$ ; очевидно, это диагональ второго и четвертого квадранта (на рис. 2 она изображена штриховой линией). Повернем исходную систему координат  $0n_1n_2n_3$  вокруг этой оси поворота на угол  $\gamma$  так, чтобы третья ось  $0m_1m_2m_3$  совпала с вектором  $\text{col}(1, 1, 1)$  (в исходной системе координат  $0n_1n_2n_3$ ), т.е. так, чтобы третья ось легла вдоль диагонали октанта  $\mathbb{R}_+^3$ .

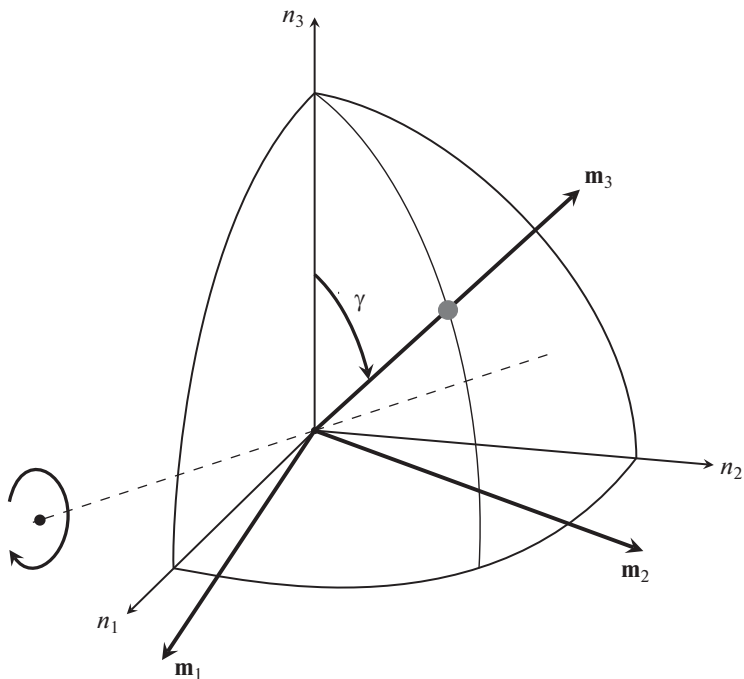


Рис. 2. Повернутая система координат.

Нетрудно убедиться, что

$$(40) \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+3}{6} & \frac{\sqrt{3}-3}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-3}{6} & \frac{\sqrt{3}+3}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}.$$

Введем в трехграннике  $0m_1m_2m_3$  сферические координаты

$$m_1 = \cos \alpha \cos \theta, \quad m_2 = \sin \alpha \cos \theta, \quad m_3 = \sin \theta, \quad 0 \leq \alpha, \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

В сечении второй плоскостью

$$m_3 = \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}(n_1 + n_2 + n_3) = \frac{\sqrt{3}+3}{6}, \quad \text{откуда} \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}}$$

и поэтому

$$m_1 = \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}} \cos \alpha, \quad m_2 = \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}} \sin \alpha.$$



После некоторых выкладок можно получить выражения для граничных углов множества  $C$  (здесь одной буквой обозначены и точки на  $C$ , и соответствующие им углы в сферической системе координат)

$$(41) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= -\arcsin \frac{5\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6(4-\sqrt{3})}}, & \alpha_2 &= \arcsin \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6(4-\sqrt{3})}}, \\ \alpha_3 &= \arcsin \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3(4-\sqrt{3})}}, & \alpha_4 &= \pi - \arcsin \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6(4-\sqrt{3})}}, \\ \alpha_5 &= \pi + \arcsin \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6(4-\sqrt{3})}}, & \alpha_6 &= \pi + \arcsin \frac{9-\sqrt{3}}{2\sqrt{6(4-\sqrt{3})}}. \end{aligned}$$

С учетом (40), на множестве  $C$ , определяемом (31), (41),

$$\begin{aligned} n_1(\alpha) &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}} \left[ (\sqrt{3}+3) \cos \alpha + (\sqrt{3}-3) \sin \alpha \right] + \frac{\sqrt{3}+1}{6}, \\ n_2(\alpha) &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}} \left[ (\sqrt{3}-3) \cos \alpha + (\sqrt{3}+3) \sin \alpha \right] + \frac{\sqrt{3}+1}{6}, \\ n_3(\alpha) &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}} \left[ \cos \alpha + \sin \alpha \right] + \frac{\sqrt{3}+1}{6}. \end{aligned}$$

Тогда исходная проблема моментов (11), (12), заданная на поверхности  $S^+$ , преобразуется к проблеме моментов на дугах окружности:

$$\min_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi(\alpha)} \left( |\varphi_1| + |\varphi_2| + |\varphi_3| + |\varphi_4| + \int_C |\varphi(\alpha)| d\alpha \right),$$

$$C = [\alpha_1, \alpha_2] \cup [\alpha_3, \alpha_4] \cup [\alpha_5, \alpha_6]$$

при условии несмещенности

$$H(n^{(1)})\varphi_1 + H(n^{(2)})\varphi_2 + H(n^{(3)})\varphi_3 + H(n^{(9)})\varphi_4 + \int_C H(n(\alpha))\varphi(\alpha) d\alpha = a,$$

где векторы ориентации  $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}, n^{(9)}$  определяются (27) и (29), а граничные углы  $\alpha_i$  задаются формулами (41). Такая редукция с понижением размерности сетки существенно облегчает численные расчеты.

## 5. Уточненная проблема моментов

Рассмотренная выше проблема моментов (11), (12) исходила из простой, но несколько завышенной оценки помехи  $\varrho(n)$  (5). Можно построить дости-

жимую оценку помехи:

$$|\varrho(n)| = |n^T \varrho'(n)| \leq (n_1 + n_2 + n_3) \sigma, \quad n \in S^+.$$

Тогда проблема моментов будет иметь более сложную формулировку (для простоты опускаем постоянный множитель  $\sigma$  и сохраняем обозначения  $I_0, I^0$  для значений задач):

$$(42) \quad I_0 = \inf_{\Phi(n) \in \mathcal{F}} \int_{S^+} (n_1 + n_2 + n_3) |\Phi(n)| dS$$

при условии несмещенности

$$(43) \quad \int_{S^+} H(n) \Phi(n) dS = a, \quad H(n) \in \mathbb{R}^m \quad (m = 9).$$

Двойственная задача изменится следующим образом:

$$I^0 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} a^T \lambda \quad (m = 9)$$

при условии

$$|H^T(n)\lambda| \leq n_1 + n_2 + n_3, \quad n \in S^+.$$

При этом теорема 1 остается верной, если в утверждении 4 заменить равенство (16):  $|H^T(n^{(i)})\lambda^0| = 1$  на  $|H^T(n^{(i)})\lambda^0| = n_1^{(i)} + n_2^{(i)} + n_3^{(i)}$ , а в утверждении 5 неравенство  $|H^T(n)\lambda^0| < 1$  заменить на  $|H^T(n)\lambda^0| < n_1 + n_2 + n_3$ . Для простоты также ограничимся подробным рассмотрением лишь случая  $a = a_{(1)} = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$ . Численные решения уточненной прямой и двойственной задачи вновь дает основание для введения гипотезы из раздела 3.2. Тогда редуцированная двойственная задача примет вид

$$\max_{\lambda_1, \lambda_4, \lambda_7} \lambda_1 \quad \text{при условии} \quad \left| \frac{s(t; \lambda_1, \lambda_4, \lambda_7)}{t} \right| \leq 1, \quad 1 \leq t \leq \sqrt{3},$$

где функция  $s(t; \lambda_1, \lambda_4, \lambda_7)$  задается в соотношениях (20). Из гипотезы также, как и в разделе 3.3, вытекает, что оптимальный оценщик отличен от нуля для тех векторов ориентации, для которых  $t$  находится, по крайней мере, в трех точках отрезка  $[1, \sqrt{3}]$ , причем две из них есть концы этого отрезка, а остальные находятся внутри него. При этом из утверждения 4 теоремы 1 следует, что для этих значений  $t$

$$(44) \quad \left| \frac{s^0(t)}{t} \right| = 1, \quad \text{где} \quad s^0(t) = s(t; \lambda_1^0, \lambda_4^0, \lambda_7^0),$$

а  $\lambda^0$  — решение уточненной двойственной задачи.

Допустим, что  $\lambda_4^0 = 0$ . Тогда из принятой гипотезы следует, что и  $\lambda_1 = 0$ , иначе (44) не сможет выполняться для более чем двух точек  $t$ . Ясно, что вектор  $(\lambda_1, \lambda_4, \lambda_7) = (1, 0, 0)$  доставляет большее значение функционалу двойственной задачи. Поэтому  $\lambda_4^0 \neq 0$ .

Производная функции, входящей в ограничение упрощенной двойственной задачи, имеет вид

$$(45) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{s^0(t)}{t} \right) = \frac{\lambda_4^0 - 2\lambda_1^0}{t^2} - \lambda_4^0,$$

причем  $\lambda_4^0 - 2\lambda_1^0 \neq 0$ , иначе свойство а) отсутствует. Отсюда следует, что эта производная монотонна и имеет единственный нуль  $t^0 \in (1, \sqrt{3})$  (в противном случае свойства а) нет). Так что  $t^{-1}s^0(t)$  либо выпукла, либо вогнута. Таким образом, функция  $t^{-1}s^0(t)$  имеет близкую к параболе форму. Поэтому для проверки допустимости элемента  $\lambda$  достаточно проверить допустимость для крайних значений  $s^0(t)$  в трех ее экстремальных точках; для остальных точек  $t$  допустимость будет выполняться автоматически. Рассуждая далее как в разделе 3.3, нетрудно получить соотношения, аналогичные (22), (24):

$$(46) \quad s^0(1) = - \left( \frac{s^0(t^0)}{t^0} \right) = \left( \frac{s^0(\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \right), \quad \text{где с учетом (45)} \quad t^0 = \sqrt{\frac{2\lambda_1^0}{\lambda_4^0} - 1}.$$

При этом  $\text{sign } s^0(1) = \pm 1$ ; при правильном выборе знака  $\lambda_1^0 > 0$ , а при неправильном  $\lambda_1^0 < 0$ . Тогда в явной форме равенства (46) (с учетом (44) и сигнатуры  $\text{sign } s^0(1) = 1$ ) примут вид

$$(47) \quad \lambda_1^0 + \lambda_7^0 = 1, \quad \frac{2\lambda_1^0 - \lambda_4^0}{\sqrt{\frac{2\lambda_1^0}{\lambda_4^0} - 1}} + \lambda_7^0 = -1, \quad \frac{\lambda_1^0 + \lambda_4^0}{\sqrt{3}} + \lambda_7^0 = 1.$$

Из первого и третьего уравнения в (47) следует, что

$$\sqrt{3}\lambda_1^0 = \lambda_1^0 + \lambda_4^0, \quad \text{откуда с учетом (46)} \quad t^0 = \sqrt[4]{3}.$$

Тогда предполагаемое решение уточненной двойственной задачи имеет вид

$$(48) \quad \begin{aligned} \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = \lambda_3^0 &= \frac{(1 + \sqrt[4]{3})^2 (1 + \sqrt{3})^3}{2}, \\ \lambda_4^0 = \lambda_5^0 = \lambda_6^0 &= (1 + \sqrt[4]{3})^2 (1 + \sqrt{3})^2, \\ \lambda_7^0 = \lambda_8^0 = \lambda_9^0 &= -\frac{(1 + \sqrt[4]{3})^4 (1 + \sqrt{3})^2}{4}. \end{aligned}$$

Правильность выбора сигнатуры в (47) подтверждается положительностью  $\lambda_1^0$  в (48).

Перейдем к анализу прямой задачи. Введем множество  $C_M$ , аналогичное (31); только теперь  $n_1 + n_2 + n_3 = \sqrt[4]{3}$ . Соответствующий рисунок подобен рис. 1 и поэтому не приводится. Тогда значения углов, аналогичных углам  $\{\alpha_i\}_1^6$  из (41), также изменятся и станут определяться выражениями

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= -\arcsin \frac{\sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{4\sqrt{\sqrt{3} - 1}}, \\
 \beta_2 &= \arcsin \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{2\sqrt{\sqrt{3} - 1}}, \\
 \beta_3 &= \arcsin \frac{1 + \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{2\sqrt{\sqrt{3} - 1}}, \\
 \beta_4 &= \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)\sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{4\sqrt{\sqrt{3} - 1}}, \\
 \beta_5 &= \pi + \arcsin \frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2\sqrt{3} - 3} - \sqrt{3} + 1}{4\sqrt{\sqrt{3} - 1}}, \\
 \beta_6 &= \pi + \arcsin \frac{\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{4\sqrt{\sqrt{3} - 1}}.
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

В качестве кандидата на решение прямой задачи также можно взять решение, для которого векторы ориентации лежат на краях множества  $C_M$ , т.е. на концах дуг  $[\beta_1, \beta_2]$ ,  $[\beta_3, \beta_4]$ ,  $[\beta_5, \beta_6]$  (здесь опять для простоты одной буквой  $\beta$  обозначаются и точки на  $C_M$ , и значения углов — это не приводит к недоразумению). Таких векторов шесть, а нужно пять. Отбросим точку  $\beta_2$ , соответствующую вектору ориентации  $n = \text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, 0\right)$ .

Тогда векторы ориентации, лежащие на краях  $C_M$ , примут вид

$$\begin{aligned}
 n^{(4)} &= \text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, 0\right), \\
 n^{(5)} &= \text{col}\left(0, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right), \\
 n^{(6)} &= \text{col}\left(0, \frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right), \\
 n^{(7)} &= \text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, 0, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right), \\
 n^{(8)} &= \text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, 0, \frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

Аналогично (33) составим соответствующую векторам ориентации (50) систему условий несмещенности. Произведя QR-разложение или реализовав SVD-процедуру, можно также, как и выше, убедиться в невырожденности матрицы условий несмещенности. Более того, знаки коэффициентов предполагаемого решения прямой задачи совпадают с сигнатурой решения уточненной двойственной задачи. Тогда аналогично (37) оказывается, что для построенных допустимых элементов прямой и двойственной задачи (для уточненной проблемы моментов)  $\Phi^0(n)$  и  $\lambda^0$

$$\int_{S^+} (n_1 + n_2 + n_3) |\Phi^0(n)| dS = a^T \lambda^0.$$

Следовательно, в силу утверждения 6 теоремы 1, эти  $\Phi^0(n)$  и  $\lambda^0$  являются решениями уточненной прямой и двойственной задачи. При этом оптимальное значение функционала  $I_{0,(1)} = (1 + \sqrt[4]{3})^2(1 + \sqrt{3})^3/2$  (с точностью до множителя  $\sigma$  совпадающего с оптимальной гарантированной ошибкой оценки). Случаи  $\nu = 4$  и  $\nu = 7$  исследуются по указанной выше схеме. При этом соответствующие решения уточненной двойственной задачи с точностью до знака совпадают, а  $I_{0,(4)} = (1 + \sqrt[4]{3})^2(1 + \sqrt{3})^2$  и  $I_{0,(7)} = (1 + \sqrt[4]{3})^4(1 + \sqrt{3})^2/4$ .

Как и выше, нетрудно убедиться, что если из шести точек границы  $C_M$  исключить вектор ориентации  $\text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, 0, \frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right)$ , соответствующий точке  $\beta_1$ , то оставшиеся пять точек (с (27) и (29)) породят еще одно решение для случая  $\nu = 1$  и  $\nu = 7$ . А если из шести крайних точек  $C_M$  удалить вектор  $\text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, 0\right)$  (соответствующий  $\beta_3$ ), то можно прийти к новому решению для случая  $\nu = 4$ .

Аналогично возьмем симметричный набор векторов ориентации  $n^{(5)}$ ,  $n^{(6)}$ ,  $n^{(7)}$  из  $C_M$ , в котором концы векторов лежат на серединах дуг  $[\beta_1, \beta_2]$ ,  $[\beta_3, \beta_4]$ ,  $[\beta_5, \beta_6]$  соответственно:

$$\begin{aligned} n^{(5)} &= \text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{3}, \frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{6}, \frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{6}\right), \\ n^{(6)} &= \text{col}\left(\frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{3}, \frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{6}\right), \\ n^{(7)} &= \text{col}\left(\frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{6}, \frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{3}\right). \end{aligned}$$

Дополним его векторами из (27), (29). Для образования невырожденной матрицы  $\mathcal{H}$  нужно присоединить к ним еще два вектора. Как и выше, можно убедиться, что если присоединить к ним одну и трех пар векторов — крайних точек  $C_M$ , аналогичных (38), то полученный невырожденный набор девяти векторов образует оптимальное решение одновременно для случаев  $\nu = 1$

и  $\nu = 7$ . А если присоединить одну из четырех пар, аналогичных (39), то полученный невырожденный набор девяти векторов образует оптимальное решение для случая  $\nu = 4$ .

На множестве  $C_M$

$$(51) \quad \begin{aligned} n_1(\alpha) &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} \left[ (\sqrt{3}+3) \cos \alpha + (\sqrt{3}-3) \sin \alpha \right] + \frac{\sqrt[4]{3}}{3}, \\ n_2(\alpha) &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} \left[ (\sqrt{3}-3) \cos \alpha + (\sqrt{3}+3) \sin \alpha \right] + \frac{\sqrt[4]{3}}{3}, \\ n_3(\alpha) &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} \left[ \cos \alpha + \sin \alpha \right] + \frac{\sqrt[4]{3}}{3}. \end{aligned}$$

Тогда проблема моментов (42), (43), заданная на поверхности  $S^+$ , преобразуется к проблеме моментов на дугах окружности  $C_M$ :

$$\min_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi(\alpha)} \left( \begin{aligned} &|\varphi_1| + |\varphi_2| + |\varphi_3| + \sqrt{3}|\varphi_4| + \\ &+ \int_{C_M} (n_1(\alpha) + n_2(\alpha) + n_3(\alpha)) |\varphi(\alpha)| d\alpha \end{aligned} \right),$$

$$C_M = [\beta_1, \beta_2] \cup [\beta_3, \beta_4] \cup [\beta_5, \beta_6]$$

при условии несмещенности

$$H(n^{(1)})\varphi_1 + H(n^{(2)})\varphi_2 + H(n^{(3)})\varphi_3 + H(n^{(9)})\varphi_4 + \int_{C_M} H(n(\alpha))\varphi(\alpha) d\alpha = a,$$

где векторы ориентации  $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}, n^{(9)}$  определяются (27) и (29),  $n(\alpha)$  на этот раз задаются (51), а граничные углы  $\beta_i$  указаны формулами (49).

## 6. Заключение

В статье рассмотрена задача калибровки трехмерного сенсора в поле постоянного калибровочного сигнала при существенных ограничениях на его допустимые угловые положения. Такие ограничения возникают, например, при асимметричных (зависящих от знака входного сигнала) моделях показаний сенсора. Эта задача сведена к проблеме моментов на неотрицательном октанте. В явном виде (в аналитически замкнутой форме) получены решения этой проблемы моментов. Тем самым определены оптимальный план угловых положений сенсора, соответствующие оптимальные оценки параметров погрешностей пространственного сенсора и точности этих оценок.

Сначала докажем, что в (33)  $\det \mathcal{H} \neq 0$ . Пусть  $\mathcal{H}_\delta$  — численный образ матрицы  $\mathcal{H}$ :  $\mathcal{H}_\delta = \mathcal{H} + \delta \mathcal{H}$ . Обозначим через  $B$  приближенно вычисленную обратную матрицу к  $\mathcal{H}$ ; матрица  $B$  точно известна. Тогда  $B\mathcal{H}_\delta + \Delta m = I + \Delta \mathcal{H}$ , где  $\Delta m$  — матрица ошибок при перемножении матриц  $B$  и  $\mathcal{H}$ , а  $\Delta \mathcal{H}$  — известная ошибка, характеризующая точность обращения. Из указанных равенств вытекает, что

$$(П.1) \quad B\mathcal{H} = I + \Delta \mathcal{H} - \Delta m - B\delta \mathcal{H}.$$

Прямые вычисления матрицы  $\Delta \mathcal{H}$  показывают, что ее элементы удовлетворяют неравенству  $|(\Delta \mathcal{H})_{ij}| \leq 10^{-14}$ ,  $i, j = 1, \dots, 9$ . Положим, что для элементов  $\Delta m$  и  $\delta \mathcal{H}$  справедливы ограничения

$$|\Delta m_{ij}| \leq \epsilon, \quad |\delta \mathcal{H}_{ij}| \leq \epsilon, \quad i, j = 1, \dots, 9, \quad \text{где } \epsilon \ll 1.$$

Тогда  $|(B\delta \mathcal{H})_{ij}| \leq \epsilon \sum_{s=1}^9 |B_{is}|$  и, следовательно,

$$|(\Delta \mathcal{H} - \Delta m - B\delta \mathcal{H})_{ij}| \leq 10^{-14} + \epsilon \left[ 1 + \sum_{s=1}^9 |B_{is}| \right] \quad i, j = 1, \dots, 9.$$

Элементы известной матрицы  $B$  находятся в следующих пределах:  $0,1 < |B_{ij}| < 12$ . Поэтому  $|(\Delta \mathcal{H} - \Delta m - B\delta \mathcal{H})_{ij}| \leq 109\epsilon + 10^{-14}$ . Будем считать, что  $\epsilon \leq 10^{-5}$ ; это заведомо гарантируется современными вычислительными средствами. Тогда матрица  $I + \Delta \mathcal{H} - \Delta m - B\delta \mathcal{H}$  из (П.1) имеет диагональное доминирование и, следовательно, по теореме Леви-Деспланка [31] является невырожденной. Стало быть, невырождена и  $\mathcal{H}$ , и  $B$ .

Рассмотрим случай  $a = a_{(1)}$ . В соответствии с (П.1)

$$\Phi = \mathcal{H}^{-1}a = (I + \Delta \mathcal{H} - \Delta m - B\delta \mathcal{H})^{-1}Ba = (I + W)Ba = \Phi_{\text{calc}} + \Delta \Phi,$$

где  $\Phi_{\text{calc}} = Ba$  — вычисленное значение  $\Phi$ ,  $\Delta \Phi = WBa$  — ошибка вычислений,

$$\|W\| \leq \frac{\|\Delta \mathcal{H} - \Delta m - B\delta \mathcal{H}\|}{1 - \|\Delta \mathcal{H} - \Delta m - B\delta \mathcal{H}\|},$$

где  $\|W\|$  — спектральная норма  $W$ . Тогда  $\|\Delta \Phi\| \leq \|W\| \|Ba\|$ , где  $\|\Delta \Phi\|$  и  $\|Ba\|$  — евклидовы нормы соответствующих векторов. Ясно, что

$$\|W\| \leq \frac{\|\Delta \mathcal{H}\|_F + \|\Delta m + B\delta \mathcal{H}\|_F}{1 - \|\Delta \mathcal{H}\|_F - \|\Delta m + B\delta \mathcal{H}\|_F};$$

здесь индексом F обозначена норма Фробениуса, мажорирующая спектральную норму (величину ошибки вычисления спектральной нормы труднее оценить). Поэтому

$$\|W\| \leq \frac{3\epsilon R + 10^{-13}}{1 - 3\epsilon R - 10^{-13}}, \quad R = \sqrt{\sum_{i=1}^9 \left[ 1 + \sum_{s=1}^9 |B_{is}| \right]^2}.$$

Положим, что точность вычисления величины  $R$  не превышает  $\epsilon$ . Тогда (с учетом, что  $\|Ba\| \leq 16$ )

$$\|W\| \leq \frac{429\epsilon + 3\epsilon^2 + 10^{-13}}{1 - (429\epsilon + 3\epsilon^2 + 10^{-13})} \quad \text{и} \quad \|\Delta\Phi\| \leq \frac{0,069 \cdot 10^5 \epsilon + 3\epsilon^2 + 2 \cdot 10^{-12}}{1 - (0,005 \cdot 10^5 \epsilon + 3\epsilon^2 + 10^{-12})}.$$

Таким образом,  $\|\Delta\Phi\| \leq 0,07$  при  $\epsilon = 10^{-5}$  и  $\|\Delta\Phi\| \leq 0,007$  при  $\epsilon = 10^{-6}$ .

Принимая во внимание, что известные элементы вектора  $Ba = Ba_{(1)}$  по абсолютной величине не меньше числа 1,8, мы доказали, что приближенные вычисления гарантированно устанавливают знаки компонент искомого вектора  $\Phi$ . Для  $\nu = 4$  и  $\nu = 7$  обоснование аналогично.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976.
2. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. I. Математические модели инерциальной навигации. М.: МАКС Пресс, 2011.
3. *Cai Q., Yang G., Song N., Lin Y.* Systematic calibration for ultra-high accuracy of inertial measurement unit // *Sensors*. 2016. V. 16. P. 940–955.
4. *Secer G., Barshan B.* Improvements in deterministic error modeling and calibration of inertial sensors and magnetometers // *Sensors and Actuators A*. 2016. (247). P. 522–538.
5. *Вавилова Н.Б., Васинева И.А., Голован А.А., Козлов А.В., Папуша И.А., Парусников Н.А.* Калибровка в инерциальной навигации // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2018. Т. 22. № 2. С. 89–115.
6. *Kozlov A., Tarygin I.* Real-time estimation of temperature time derivative in inertial measurement unit by finite-impulse-response exponential regression on updates // *Sensors*. V. 20. No. 5. P. 1299–1319.
7. *Голован А.А., Матасов А.И., Тарыгин И.Е.* Калибровка блока ньютометров с асимметричными моделями показаний чувствительных элементов // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2022. № 5. С. 107–119.
8. *Bolotin Y., Savin V.* Turntable IMU calibration algorithm based on the Fourier transform technique // *Sensors*. 2023. No. 2. P. 1045–1060.
9. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // *Космич. исследования*. 1964. Т. 2. № 5. С. 713–715.
10. *Красовский Н.Н.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // *Прикл. математика и механика*. 1964. Т. 28. № 1. С. 3–14.
11. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
12. *Лидов М.Л.* Минимаксные методы оценивания. М.: Препринт № 71. Ин-т прикл. мат. им. М.В. Келдыша РАН. 2010.
13. *Бахтияр Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.
14. *Белюсов Л.Ю.* Оценивание параметров движения космических аппаратов. М.: Физматлит, 2002.
15. *Матасов А.И.* Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.



16. *Matasov A.I.* Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Dordrecht–Boston–London: Springer Science+Business Media, B.V., 2013.
17. *Бобрюк Г.И., Матасов А.И.* Оптимальное гарантирующее оценивание параметров блока акселерометров // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. № 5. С. 8–14.
18. *Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Гарантирующее оценивание и  $l_1$ -аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012.
19. *Матасов А.И.* Вариационные задачи для калибровки блока ньютонометров // АиТ. 2019. № 12. С. 59–79. 2019.
20. *Браславский Д.А., Поликовский Е.Ф., Якубович А.М.* Метод калибровки трехосного блока акселерометров // Заявка на изобретение № 2422425/23 с приоритетом от 24 ноября 1976 г.
21. *Чесноков Г.И., Поликовский Е.Ф., Молчанов А.В., Кремер В.И.* Некоторые пути улучшения тактико-технических характеристик бесплатформенных инерциальных навигационных систем / Сб. X СПб междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. СПб.: ГНЦ РФ “ЦНИИ Электроприбор”, 2003. С. 155–164.
22. *Измайлов Е.А., Лепе С.Н., Молчанов А.В., Поликовский Е.Ф.* Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем / Сб. Юбилейная XV СПб междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. СПб.: ГНЦ РФ “ЦНИИ Электроприбор”, 2008. С. 145–154.
23. *Болотин Ю.В., Голиков В.П., Ларионов С.В., Требухов А.В.* Алгоритм калибровки платформенной инерциальной навигационной системы // Гироскопия и навигация. 2008. № 3. С. 13–27.
24. *Смоляк С.А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Механико-мат. факультет МГУ, 1965.
25. *Марчук А.Г., Осипенко Л.Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Математические заметки. 1975. Т. 17. № 3. С. 359–368.
26. *Milanese M., Tempo R.* Optimal algorithms theory for robust estimation and prediction // IEEE Transact. Autom. Control. 1985. AC-30. No. 8. P. 730–743.
27. *Матасов А.И.* Об оптимальности линейных алгоритмов гарантированного оценивания, I, II // Космич. исследования. 1988. Т. 26. № 5–6. С. 643–653, 807–812.
28. *Эккланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
29. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2007.
30. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Книжный дом “Либроком”, 2011.
31. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 19.10.2022

После доработки 18.03.2023

Принята к публикации 30.03.2023