

# Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. А.Г. ЧЕНЦОВ, чл.-корр. РАН (chentsov@imm.uran.ru),  
П.А. ЧЕНЦОВ, канд. физ.-мат. наук (chentsov.p@mail.ru)  
(Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,  
Екатеринбург;  
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина,  
Екатеринбург)

## ДВУХЭТАПНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ С ЭЛЕМЕНТАМИ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Рассматривается экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями. Одно из таких ограничений связано с выделением в составе исходной задачи предваряющей и финальной подзадач; задания, относящиеся к предваряющей подзадаче, должны быть выполнены прежде, чем начнется выполнение заданий финальной подзадачи. Такое условие может, в частности, возникать в задаче об управлении инструментом при термической резке на машинах с числовым программным управлением (ЧПУ): при наличии среди заготовок так называемых длинномерных деталей вблизи узкой границы материала процесс резки следует начинать с этих заготовок, так как такие детали подвержены тепловым деформациям, что потенциально может привести к браку. В рассматриваемой постановке выделяются две зоны, связанные с обслуживанием деталей. Предполагается, что совокупный маршрутный процесс в исходной задаче включает точку старта, собственно маршрут (перестановку индексов) и конкретную траекторию, согласованную с упомянутыми маршрутом и точкой старта. Предполагается, что в каждой из подзадач выделены свои условия предшествования, а функции стоимости, формирующие аддитивный критерий, могут допускать зависимость от списка заданий. Для применения динамического программирования в качестве метода решения вводится специальная двухэтапная процедура. Установлена структура оптимального решения и, на ее основе, построен алгоритм, реализованный на персональной электронно-вычислительной машине (ПЭВМ). Проведен вычислительный эксперимент.

*Ключевые слова:* динамическое программирование, маршрут, мегаполис, условия предшествования.

**DOI:** 10.31857/S0005231023050070, **EDN:** AJGKXO

### 1. Введение

В прикладных задачах нередко возникает необходимость в выборе очередности тех или иных заданий с соблюдением разнообразных ограничений.

Последнее обстоятельство приводит к существенным отличиям уже на уровне постановки данных задач в сравнении с естественным прототипом — задачей коммивояжера (ЗК или TSP в англоязычных публикациях); см. [1–7] и др. Ряд обстоятельств, включая наличие ограничений, потребовал разработки специальной теории для решения задач маршрутизации прикладной направленности (сейчас отметим только монографии [8–10]).

Так, в частности, выяснилось [8, § 4.9], что условия предшествования, естественные для инженерных приложений, можно использовать “в положительном направлении” в смысле снижения вычислительной сложности; данный факт был установлен теоретическим путем. Оказалось также, что ограничение, являющееся основным в данной работе (см. также [11, 12]), также работает “в положительном направлении”, что видно, например, из результатов [11, раздел 10].

Речь идет о постановке, когда все множество заданий, подлежащих последовательному выполнению, разбито на два (дизъюнктных) подмножества (п/м), причем выполнение заданий, относящихся ко второму п/м, можно начинать только после выполнения всех заданий, относящихся к первому п/м (отметим, что в данной задаче могут присутствовать свои условия предшествования, а функции стоимости, формирующие аддитивный критерий, допускают зависимость от списка заданий). Такая ситуация складывается в задаче, связанной с фигурной термической резкой деталей на машинах с ЧПУ. Речь идет о возможности эффективного отвода тепла, что мотивируется соображениями, связанными с термическими деформациями (подробнее см. в [10, § 1.3]: правила жесткости детали и жесткости листа). Упомянутые соображения приводят, в частности, к идее резки зонами (см. [10, § 1.3.3]); в связи с реализацией данной идеи отметим, в частности, построения [12, § 12], относящиеся к многоэтапному варианту процедуры на основе динамического программирования (ДП).

Опуская подробности (см. [10, гл. 1]), ограничимся сейчас обсуждением одного характерного случая двух зон. Рассмотрим вопрос о предваряющей резке длинномерных деталей (см. [11, раздел 10]); это детали, у которых [10, с. 46] один из габаритов больше другого не менее чем в 10 раз. Такие заготовки подвержены максимальным тепловым деформациям, а потому, если заготовки находятся вблизи узкой границы материала, процесс резки следует начинать с них; тогда при осуществлении резки этих заготовок возле точек врезки и выключения инструмента будет находиться достаточно “много” сплошного металла. Естественная реализация данного принципа состоит в формировании зоны, включающей длинномерные (и, возможно, еще какие-то) детали; данную зону следует связать с предваряющей задачей. Оставшиеся детали образуют вторую (финальную) зону. Разумеется, данный вариант является простейшим всего лишь в части резки зонами, но на нем остановимся подробнее, продолжая построения [11, 12] и сопровождая алгоритмические построения теоретическими обоснованиями. В частности,

положения [11, 12] будут дополнены некоторыми свойствами предваряющей задачи.

Отметим, что разделение исходной задачи на совокупность двух подзадач можно свести к наложению новых условий предшествования. В этом случае реализуется “стандартная” (в смысле [8, 13, 14]) экстремальная задача маршрутизации, для которой структура оптимального решения известна; однако для задач ощутимой размерности возникают (понятные в связи с известной труднорешаемостью ЗК) трудности с вычислительной реализацией. Декомпозиционный подход [11, 12] позволяет в значительной степени эти трудности преодолеть (см. результаты вычислительного эксперимента в [11, 12]), не теряя оптимальность. Это делает целесообразным его детальное исследование особенно в связи с работами по фигурной листовой резке на машинах с ЧПУ (см., в частности, [10, 15–18]). Здесь будем ориентироваться на вариант с предваряющей резкой длинномерных деталей. Условия предшествования полагаем сразу локализованными для предваряющей и финальной подзадач.

## 2. Общие понятия и обозначения; постановка задачи

Отметим используемые ниже аббревиатуры: в/з (вещественнозначная), ДП (динамическое программирование), ДР (допустимое решение), ЗК (задача коммивояжера), МП (маршрутный процесс), п/м (подмножество), УП (упорядоченная пара). Задачи, исследуемые в статье и традиционно рассматриваемые как труднорешаемые, требуют для построения оптимальных процедур прежде всего обстоятельной формализации. Это тем более существенно в условиях ограничений, которые возникают в инженерных приложениях и существенно осложняют постановку в сравнении с более традиционными для дискретной оптимизации задачами типа ЗК. В этой связи потребуются сводка определений общего характера, включая некоторые положения теории множеств. Последнее существенно уже для корректной постановки задачи.

Используем стандартную теоретико-множественную символику (кванторы, связки и др.);  $\emptyset$  — пустое множество,  $\triangleq$  — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Как обычно [19, с. 62], выражение  $\{a \in A \mid \dots\}$  обозначает множество всех элементов  $a \in A$  со свойством  $\dots$ ; данное соглашение широко используется в дальнейшем.

Двум любым объектам  $x$  и  $y$  сопоставляется неупорядоченная пара  $\{x; y\} : \{x; y\}$  — множество, содержащее  $x$ ,  $y$  и не содержащее никаких других элементов. Тогда объекту  $z$  сопоставляем синглетон  $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ , содержащий  $z$ . Множество является объектом, а потому, следуя [19, с. 67], любым двум объектам  $u$  и  $v$  сопоставляем их упорядоченную пару (УП)  $(u, v) \triangleq \{\{u\}; \{u; v\}\}$  с первым элементом  $u$  и вторым элементом  $v$ . Если же  $h$  есть УП, то через  $\text{pr}_1(h)$  и  $\text{pr}_2(h)$  обозначаем соответственно первый и второй элементы  $h$ ,  $h = (\text{pr}_1(h), \text{pr}_2(h))$ . Трем любым объектам  $x$ ,  $y$  и  $z$  сопоставляется их (упорядоченный) триплет  $(x, y, z) \triangleq ((x, y), z)$  [20, с. 17] с первым

элементом  $x$ , вторым элементом  $y$  и третьим элементом  $z$ . Итак, упорядоченный триплет вводится (см. [20, с. 17]), строго говоря, как УП специального вида (соглашение, используемое в теории множеств); иногда это используется в дальнейшем.

Через  $\mathcal{P}(H)$  и  $\mathcal{P}'(H)$  обозначаем соответственно семейства всех и всех непустых п/м произвольного множества  $H$ , а через  $\text{Fin}(H)$  — семейство всех непустых конечных п/м  $H$ ;  $\text{Fin}(H) \subset \mathcal{P}'(H)$ . Для конечного множества  $H$  имеем  $\text{Fin}(H) = \mathcal{P}'(H)$ . Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  — три множества, то [20, с. 17]  $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$ ; поэтому при  $x \in A \times B$  и  $y \in C$  имеем  $(x, y) \in A \times B \times C$ . Для любых непустых множеств  $S$  и  $T$  через  $T^S$  обозначаем (см. [19, с. 76]) множество всех отображений (функций) из  $S$  в  $T$ ; выражения  $h \in T^S$  и  $h : S \rightarrow T$  отождествимы. Значение отображения в точке области определения (здесь — множество  $S$ ) обозначается традиционно: при  $g \in T^S$  и  $s \in S$  имеем  $g(s) \in T$ . Для непустых множеств  $S$ ,  $T$ ,  $C \in \mathcal{P}'(S)$  и отображения  $h \in T^S$

$$h^1(C) \triangleq \{h(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}'(T)$$

есть образ  $C$  при действии  $h$ . Следуем традиционным обозначениям для функций нескольких переменных; отметим только, что для непустых множеств  $S$ ,  $T$ ,  $P$ ,  $Q$ , отображения  $\psi \in Q^{S \times T \times P}$  и точек  $h \in S \times T$ ,  $l \in P$  определено  $\psi(h, l) = \psi(\text{pr}_1(h), \text{pr}_2(h), l) \in Q$ . В качестве  $Q$  часто используем  $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$ , где  $\mathbb{R}$  — вещественная прямая. Если  $H$  — непустое множество, то  $\mathcal{R}_+[H] \triangleq (\mathbb{R}_+)^H$  есть множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на  $H$ .

В дальнейшем  $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$  и  $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$ ; при  $K \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$  и  $m \in \mathbb{N}$  имеем  $K \oplus m \triangleq \{k + m : k \in K\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ . При  $p \in \mathbb{N}_0$  и  $q \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leq k) \& (k \leq q)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$$

(случай  $\overline{p, q} = \emptyset$  не исключается). Заметим, что  $\overline{1, 0} = \emptyset$  и  $\overline{1, m} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq m\}$  при  $m \in \mathbb{N}$ . Для непустого конечного множества  $K$  в виде  $|K| \in \mathbb{N}$  имеем мощность  $K$  и, в виде  $\overline{1, |K|} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq |K|\}$ , непустой дискретный интервал  $\mathbb{N}$ . Если  $m \in \mathbb{N}$ , то (bi) $\overline{1, m}$  есть (непустое) множество всех перестановок [21, с. 87] дискретного интервала  $\overline{1, m}$ ; при  $\alpha \in (\text{bi})\overline{1, m}$  в виде  $\alpha^{-1} \in (\text{bi})\overline{1, m}$  имеем перестановку, обратную к  $\alpha$ :

$$\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k \quad \forall k \in \overline{1, m}.$$

Отображения, определенные на конечных п/м  $\mathbb{N}_0$ , называем кортежами, используя для них понятие образа непустых п/м области определения; в частности, это касается перестановок. Будем часто использовать индексную форму записи отображений и, в частности, кортежей (семейство с индексом; см. [22, с. 11]). Символы  $\diamond$  и  $\square$  будут использоваться для обозначения операций склеивания кортежей.

Как и принято в теории множеств (см. [19]), отношением называем множество, состоящее из УП.

### 2.1. Постановка задачи

В дальнейшем  $X$  — непустое множество,  $X^0 \in \text{Fin}(X)$  — множество возможных точек старта рассматриваемых процессов,  $\mathbf{n} \in N$ ,  $\mathbf{n} \geq 4$ ; фиксированы множества

$$(2.1) \quad M_1 \in \text{Fin}(X), \dots, M_{\mathbf{n}} \in \text{Fin}(X),$$

называемые мегаполисами, а также отношения

$$(2.2) \quad \mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \dots, \mathbb{M}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{P}'(M_{\mathbf{n}} \times M_{\mathbf{n}}).$$

При каждом  $j \in \overline{1, N}$  предполагается, что элементами отношения  $\mathbb{M}_j$  являются всякий раз УП, включающая пункт прибытия в мегаполис  $M_j$  и пункт отправления из  $M_j$ ; само  $\mathbb{M}_j$  есть множество всех УП упомянутого вида. В отношении  $X^0$  и мегаполисов (2.1) полагаем, что

$$(2.3) \quad (M_j \cap X^0 = \emptyset \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}) \& (M_p \cap M_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1, \mathbf{n}} \quad \forall q \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \{p\}).$$

Условия (2.3) типичны для обсуждаемых задач маршрутизации. В виде  $\mathcal{M} \triangleq \{M_i : i \in \overline{1, \mathbf{n}}\}$  получаем семейство мегаполисов основной задачи, подлежащих посещению из той или иной точки  $X^0$ . Полагаем, что  $\mathcal{M}$  реализуется в виде суммы двух непустых подсемейств. Для их введения фиксируем число  $N \in \overline{2, \mathbf{n} - 2}$ , в терминах которого полагаем, что

$$(2.4) \quad \mathcal{M}_1 \triangleq \{M_i : i \in \overline{1, N}\}, \quad \mathcal{M}_2 \triangleq \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1 = \{M_i : i \in \overline{N+1, \mathbf{n}}\}$$

(последнее в (2.4) свойство легко проверяется с учетом (2.3)). Каждое из семейств (2.4) содержит не менее двух мегаполисов. Определяя семейства (2.4), рассмотрим задачу о посещении мегаполисов из  $\mathcal{M}$  как совокупность двух связанных подзадач: задачу о посещении мегаполисов из  $\mathcal{M}_1$  и задачу о посещении мегаполисов из  $\mathcal{M}_2$ . В этой связи полагаем при  $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ , что (см. (2.2))

$$M^{(j)} \triangleq M_{N+j} \in \text{Fin}(X) \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}.$$

Из (2.4) следует, что  $\mathcal{M}_2 = \{M^{(j)} : j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}\}$ . В связи с упомянутым подходом уместно принять соглашение о том, что условия предшествования, возможно имеющиеся в  $\mathcal{M}$ -задаче, локализуются в  $\mathcal{M}_1$ - и  $\mathcal{M}_2$ -задаче. С учетом этих соображений введем множества

$$(\mathbf{K}_1 \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N})) \& (\mathbf{K}_2 \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n} - N} \times \overline{1, \mathbf{n} - N})),$$

элементы которых (а это УП) называем адресными парами; у каждой такой пары первый элемент называем отправителем, а второй — получателем. Полагаем далее, что

$$(2.5) \quad (\forall \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_1) \exists z^0 \in \mathbf{K}^0 : \text{pr}_1(z^0) \neq \text{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}^0) \\ \& (\forall \tilde{\mathbf{K}}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_2) \exists z^0 \in \tilde{\mathbf{K}}^0 : \text{pr}_1(z^0) \neq \text{pr}_2(z) \quad \forall z \in \tilde{\mathbf{K}}^0).$$

Условия (2.5) обычно выполняются в практических задачах (см. обсуждение в [8, часть 2]). Так, в случае листовой резки к этому условию сводится следующее традиционное требование: если вырезаемая деталь имеет ряд внутренних контуров, то их резка должна осуществляться раньше по отношению к резке внешнего (объемлющего) контура; см. далее [8, замечание 2.2.1].

*Замечание 1.* Если ввести  $\tilde{\mathbf{K}}_2 \triangleq \{(\text{pr}_1(z) + N, \text{pr}_2(z) + N) : z \in \mathbf{K}_2\}$ , то в виде  $\mathbf{K}_1$  и  $\tilde{\mathbf{K}}_2$  получим два п/м  $\overline{1, \mathbf{n}} \times \overline{1, \mathbf{n}}$ . Можно рассматривать случай, когда  $\mathbf{K}_1 \subset \tilde{\mathbf{K}}$  и  $\tilde{\mathbf{K}}_2 \subset \tilde{\mathbf{K}}$ , где  $\tilde{\mathbf{K}} \subset \overline{1, \mathbf{n}} \times \overline{1, \mathbf{n}}$ , а  $\tilde{\mathbf{K}} \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n}} \times \overline{1, \mathbf{n}})$  можно рассматривать как совокупное множество адресных пар и использовать для введения совокупных условий предшествования. Если при этом УП  $\hat{z} \in \tilde{\mathbf{K}}$  такова, что  $\hat{k} \triangleq \text{pr}_1(\hat{z}) \in \overline{1, N}$  и  $\hat{l} \triangleq \text{pr}_2(\hat{z}) \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$ , то в рамках данной постановки с выделением  $\mathcal{M}_1$ - и  $\mathcal{M}_2$ -задачи посещение  $M_{\hat{k}}$  раньше, чем  $M_{\hat{l}}$ , будет осуществляться автоматически и специального учета  $\hat{z}$  как адресной пары уже не требуется. Если же  $\tilde{z} \in \tilde{\mathbf{K}}$  обладает свойством  $\tilde{k} \triangleq \text{pr}_1(\tilde{z}) \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$  и  $\tilde{l} \triangleq \text{pr}_2(\tilde{z}) \in \overline{1, N}$ , то задача с условиями предшествования, определенными посредством  $\tilde{\mathbf{K}}$ , неразрешима при предваряющем решении  $\mathcal{M}_1$ -задачи и последующем решении  $\mathcal{M}_2$ -задачи. С учетом этих соображений вполне естественным, в рамках данной постановки с выделением  $\mathcal{M}_1$ -задачи и  $\mathcal{M}_2$ -задачи, представляется случай, когда  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_1 \cup \tilde{\mathbf{K}}_2$ , т.е. дополнительное рассмотрение перекрестных условий предшествования не требуется, если только рассматривается разрешимая, в условиях вышеупомянутой декомпозиции, совокупная задача.

Пусть  $\mathbb{P}_1 \triangleq (\text{bi})[\overline{1, N}]$  и  $\mathbb{P}_2 \triangleq (\text{bi})[\overline{1, \mathbf{n} - N}]$ ; тогда (см. [8, (2.1.5), (2.2.53); 10, (4.4.6)]) имеем с учетом (2.5), что

$$(2.6) \quad \mathcal{A}_1 \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P}_1 \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}_1\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_1),$$

$$(2.7) \quad \mathcal{A}_2 \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P}_2 \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_2).$$

Итак, имеем (при условиях (2.5)) непустые множества допустимых по предшествованию маршрутов (перестановки индексов называем маршрутами) в  $\mathcal{M}_1$ - и  $\mathcal{M}_2$ -задаче. Пусть теперь  $\mathbb{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, \mathbf{n}}]$  (множество всех маршрутов полной задачи). При  $\alpha \in \mathbb{P}_1$  и  $\beta \in \mathbb{P}_2$  (склеенный) маршрут  $\alpha \diamond \beta \in \mathbb{P}$  определяется правилом

$$(2.8) \quad \left( (\alpha \diamond \beta)(k) \triangleq \alpha(k) \quad \forall k \in \overline{1, N} \right) \& \\ \& \left( (\alpha \diamond \beta)(l) \triangleq \beta(l - N) + N \quad \forall l \in \overline{N+1, \mathbf{n}} \right).$$

Здесь говорится о склеивании перестановок специального вида (склейка со сдвигом). Ниже будет введена еще одна операция склеивания, которая будет применяться уже не к перестановкам, а к фрагментам траекторий, в связи с чем там будет использоваться другое обозначение. В (2.8) можно, в частности, использовать маршруты из множеств (2.6), (2.7). С учетом этого получаем, что

$$(2.9) \quad \mathbf{P} \triangleq \{\alpha \diamond \beta : \alpha \in \mathcal{A}_1, \beta \in \mathcal{A}_2\} = \{\text{pr}_1(z) \diamond \text{pr}_2(z) : z \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}).$$

Маршруты из  $\mathbf{P}$  (2.9) рассматриваем как допустимые в  $\mathcal{M}$ -задаче (исходя из идеи предварительного решения  $\mathcal{M}_1$ -задачи и последующего решения  $\mathcal{M}_2$ -задачи). Следуя [11, (2.11)–(2.13)], естественным образом приходим к траекториям [11, (2.14)]. Для этого полагаем сначала, что  $\mathfrak{Z} \triangleq (X \times X)^{\overline{0, \mathbf{n}}}$ . Тогда при  $x \in X^0$  и  $\gamma \in \mathbf{P}$  в виде

$$(2.10) \quad \mathcal{Z}_\gamma[x] \triangleq \left\{ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z} \mid (z_0 = (x, x)) \& (z_\tau \in \mathbb{M}_{\gamma(\tau)} \quad \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n}}) \right\} \in \text{Fin}(\mathfrak{Z})$$

имеем (см. [11, (2.11)–(2.13)]) пучок траекторий, стартующих из  $x$  (в редакции [11, 12] из  $(x, x)$ ; различие несущественно) и согласованных с  $\gamma$ . Кроме того, при  $x \in X^0$

$$(2.11) \quad \tilde{\mathbf{D}}[x] \triangleq \left\{ (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \mid (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x] \right\} \in \text{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z})$$

рассматриваем как множество всех допустимых решений (ДР) в  $\mathcal{M}$ -задаче со стартом в  $x$ , т.е. допустимых в  $(\mathcal{M}, x)$  — задаче. Наконец в виде

$$(2.12) \quad \mathbf{D} \triangleq \left\{ (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0 \mid (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] \right\} \in \text{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0)$$

имеем множество всех ДР  $\mathcal{M}$ -задачи, называемых маршрутными процессами (МП). Подробности содержательного характера см. в [11, 12]. Следуя [11, (2.17)], при  $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$  введем (см. (2.2)) множества

$$\left( \mathfrak{M}_j \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \text{Fin}(M_j) \right) \& \left( \mathbf{M}_j \triangleq \{\text{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \text{Fin}(M_j) \right)$$

со свойством  $\mathbb{M}_j \subset \mathfrak{M}_j \times \mathbf{M}_j \subset M_j \times M_j$ . При  $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$  имеем, конечно, что

$$(2.13) \quad M^{(j)} = M_{N+j} \in \text{Fin}(X), \quad \mathbb{M}^{(j)} \triangleq \mathbb{M}_{N+j} \in \mathcal{P}'(M^{(j)} \times M^{(j)}), \\ \mathfrak{M}^{(j)} \triangleq \mathfrak{M}_{N+j} \in \text{Fin}(M^{(j)}), \quad \mathbf{M}^{(j)} \triangleq \mathbf{M}_{N+j} \in \text{Fin}(M^{(j)}).$$

Здесь имеем простую перенумерацию множеств, используемых в финальной задаче. Кроме того, с учетом (2.13) полагаем (см. [11, (2.18)]), что  $\mathbf{M}$  есть объединение всех множеств  $\mathbf{M}^{(i)}$ ,  $i \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ . Пусть, наконец,  $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n}})$ ; множества из  $\mathfrak{N}$  называем далее списками. Следуя [11, (2.19)], имеем, что

$$(2.14) \quad \left( \mathbb{X} \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathfrak{M}_i \in \text{Fin}(X) \right) \& \left( \mathbf{X} \triangleq \left( \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_i \right) \cup X^0 \in \text{Fin}(X) \right);$$

фиксируем в дальнейшем следующие в/з функции:

$$(2.15) \quad \mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}], \quad \dots, \\ c_{\mathbf{n}} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_{\mathbf{n}} \times \mathfrak{N}], \quad f \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbb{M}}].$$

Отметим в этой связи, что при  $\gamma \in \mathbf{P}$  и  $\tau \in \overline{\mathbb{1}, \mathbf{n}}$  в виде  $\gamma^1(\overline{\tau}, \mathbf{n}) \in \mathfrak{N}$  имеем образ дискретного интервала  $\overline{\tau}, \mathbf{n}$  при действии  $\gamma$ . Значения  $\mathbf{c}$  используем для оценивания внешних перемещений, значения  $c_1, \dots, c_{\mathbf{n}}$  — для оценивания внутренних работ, связанных с посещением мегаполисов, а значения  $f$  — для оценивания терминального состояния. Заметим, что одним из аргументов функций  $\mathbf{c}, c_1, \dots, c_{\mathbf{n}}$  является список заданий. Данная зависимость может возникать в задаче, связанной с листовой резкой, из соображений учета возможности тепловых деформаций деталей при врезке путем введения штрафов. Говоря об общей постановке, отметим, что зависимость от списка заданий может возникать и в силу других причин (например, в задачах последовательного демонтажа радиационно опасных объектов “светят” те и только те объекты, которые не демонтированы на данный момент). Приступаем к построению аддитивного критерия. Итак, следуя [11, (2.21)], имеем при  $x \in X^0$ ,  $\gamma \in \mathbf{P}$  и  $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$ , что

$$(2.16) \quad \mathfrak{C}_\gamma \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} \left[ \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \gamma^1(\overline{t}, \mathbf{n})) + \right. \\ \left. + c_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t}, \mathbf{n})) \right] + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}}));$$

разумеется (см. (2.11)), значение (2.16) определено при  $x \in X^0$  и  $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$ . При  $x \in X^0$  вводим  $(\mathcal{M}, x)$ -задачу

$$(2.17) \quad \mathfrak{C}_\gamma \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] \rightarrow \min, \quad (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x],$$

для которой определен экстремум  $\tilde{V}[x] \in \mathbb{R}_+$  и непустое множество  $(\text{sol})[x]$  всех ее оптимальных решений:

$$(2.18) \quad \tilde{V}[x] \triangleq \min_{(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]} \mathfrak{C}_\gamma \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(2.19) \quad (\text{sol})[x] \triangleq \left\{ \left( \gamma^0, (z_t^0)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] \mid \mathfrak{C}_{\gamma^0} \left[ (z_t^0)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] = \tilde{V}[x] \right\} \in \text{Fin}(\tilde{\mathbf{D}}[x]).$$

В (2.17) оптимизируется сумма затрат на внешние перемещения, внутренние работы и реализацию терминального состояния. В случае листовой резки в первом случае имеется в виду оценивание фрагментов холостого хода, во втором — оценивание собственно резки, реализуемой в режиме рабочего хода; в третьем случае может, например, оцениваться перемещение инструмента к точке “парковки” в режиме холостого хода. В простейшем случае все



упомянутые компоненты могут иметь смысл соответствующих времен исполнения указанных операций. В общем случае имеем задачу на минимум аддитивного критерия (2.16) в классе ДР, определяемых каждое в виде УП маршрут-траектория; (2.19) есть множество всех экстремальных в упомянутом смысле УП маршрут-траектория. Допускаем возможность варьирования  $x \in X^0$ . Как следствие, возникает основная  $\mathcal{M}$ -задача:

$$(2.20) \quad \mathfrak{C}_\gamma \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] \rightarrow \min, \quad \left( \gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x \right) \in \mathbf{D};$$

задаче (2.20) сопоставляется глобальный экстремум  $\mathbb{V}$  и непустое множество **SOL** всех оптимальных МП:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \mathbb{V} &\triangleq \min_{(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{D}} \mathfrak{C}_\gamma \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] = \\ &= \min_{x \in X^0} \min_{(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]} \mathfrak{C}_\gamma \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] = \min_{x \in X^0} \tilde{V}[x] \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

$$(2.22) \quad \mathbf{SOL} \triangleq \left\{ (\gamma^0, (z_t^0)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x^0) \in \mathbf{D} \mid \mathfrak{C}_{\gamma^0}[(z_t^0)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathbb{V} \right\} \in \text{Fin}(\mathbf{D})$$

(в (2.21) учтены (2.12) и (2.18)). Элементы множества (2.22) суть оптимальные МП. Они являются триплетами в отличие от элементов (2.19). С зависимостью

$$(2.23) \quad \tilde{V}[\cdot] \triangleq (\tilde{V}[x])_{x \in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0]$$

связываем задачу оптимизации точки старта

$$(2.24) \quad \tilde{V}[x] \rightarrow \min, \quad x \in X^0,$$

в которой (2.23) выступает в роли критерия; экстремум задачи (2.24) совпадает (см. (2.21)) с  $\mathbb{V}$ , а экстремальное множество есть

$$(2.25) \quad X_{\text{opt}}^0 \triangleq \left\{ x \in X^0 \mid \tilde{V}[x] = \mathbb{V} \right\} \in \mathcal{P}'(X^0).$$

В (2.24) оптимизируется точка старта при том условии, что в случае конкретного ее выбора ДР в виде УП маршрут-траектория также выбирается оптимальным. Результатом является реализация глобального экстремума.

*Предложение 1.* Если  $x \in X_{\text{opt}}^0$  и  $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in (\text{sol})[x]$ , то  $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{SOL}$ .

Доказательство получается очевидной комбинацией (2.19), (2.22) и (2.25). Действительно, здесь речь идет фактически о последовательной реализации в (2.21): сначала минимум по ДР типа элементов (2.11) при фиксации точки старта, а затем — по самой точке старта (см. (2.24), (2.25)).

### 3. Предваряющая и финальная задачи маршрутизации

Как уже отмечалось, для решения задачи (2.20) здесь используем (по сути дела) декомпозицию в совокупность  $\mathcal{M}_1$ -задачи и  $\mathcal{M}_2$ -задачи. Данная декомпозиция будет в некотором смысле оптимальной: будем находить (2.21) и какой-либо МП из множества (2.22). Данный оптимальный способ (см. [11, 12]) обсудим на содержательном уровне после формулировки упомянутых частичных задач. При этом постановка  $\mathcal{M}_1$ -задачи будет зависеть от набора параметров, определяемых при решении  $\mathcal{M}_2$ -задачи. По этой причине сначала мы обсудим  $\mathcal{M}_2$ -задачу (задачу верхнего уровня) или финальную задачу. Однако в самой ее постановке присутствует объект, связанный очень просто с  $\mathcal{M}_1$ -задачей. С него и начнем. Речь идет о множестве точек старта в  $\mathcal{M}_2$ -задаче. Итак, полагая

$$(3.1) \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 \triangleq \{\text{pr}_1(h) : h \in \mathbf{K}_1\},$$

получаем [8, (4.9.9), предложение 4.9.3], что  $\overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1 \in \mathcal{P}'(\overline{1, N})$ , и определяем (см. (2.14)) в виде

$$(3.2) \quad X^{00} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1} M_i \in \text{Fin}(\mathbf{X})$$

множество всех возможных точек старта  $\mathcal{M}_2$ -задачи, в которой  $M^{(1)}, \dots, M^{(n-N)}$  определяют семейство мегаполисов, подлежащих посещению.

Множество  $X^{00}$  играет роль “входной переменной” для  $\mathcal{M}_2$ -задачи. С момента построения  $X^{00}$  (3.2) она является вполне определенной с точки зрения набора параметров. Далее осуществляется ее решение в части определения нужных фрагментов (слоев) функции Беллмана (построение оптимального решения  $\mathcal{M}_2$ -задачи откладывается) и, как результат, нахождение функции экстремума, определенной на  $X^{00}$ . Данная функция определяет затем терминальную компоненту аддитивного критерия  $\mathcal{M}_1$ -задачи и в этом смысле имеет смысл “выходной переменной”  $\mathcal{M}_2$ -задачи.  $\mathcal{M}_2$ -задача участвует в построении критерия предваряющей  $\mathcal{M}_1$ -задачи. В результате получаем возможность решения  $\mathcal{M}_1$ -задачи (критерий полностью определен). Осуществляем теперь построение нужных фрагментов (слоев) функции Беллмана данной задачи и, в частности, функции экстремума, определенной на  $X^0$ . Этого достаточно, как показано в [12], для нахождения  $\mathbb{V}$  и оптимальной точки старта, для которой затем стандартно строится  $\mathcal{M}_1$ -оптимальное ДР, фиксируется его финишная точка, из которой реализуется оптимальное  $\mathcal{M}_2$ -решение в виде УП маршрут-траектория, которое склеивается с  $\mathcal{M}_1$ -решением и образует оптимальное ДР полной задачи с фиксированным стартом. Дополняя последним склеенное (покомпонентно) ДР, получаем оптимальный МП. Такова общая схема исследования; к ней еще вернемся, а сейчас напомним некоторые понятия, связанные с финальной задачей.

При  $j \in \overline{1, n-N}$  с мегаполисом  $M^{(j)}$  связывается отношение  $\mathbb{M}^{(j)}$ , для которого (см. (2.13))

$$(3.3) \quad \left( \mathfrak{M}^{(j)} = \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}^{(j)}\} \in \text{Fin}(M^{(j)}) \right) \& \\ \& \left( \mathbf{M}^{(j)} = \{\text{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}^{(j)}\} \in \text{Fin}(M^{(j)}) \right).$$

Посредством  $\mathcal{A}_2$  определяется множество всех допустимых маршрутов  $\mathcal{M}_2$ -задачи. Пусть  $\mathfrak{Z}^* \triangleq (X \times X)^{\overline{0, \mathbf{n}-N}}$ ; при  $x \in X^{00}$  и  $\beta \in \mathcal{A}_2$  в виде

$$(3.4) \quad \mathcal{Z}_\beta^*[x] \triangleq \left\{ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^* \mid (z_0 = (x, x)) \& \right. \\ \left. \& (z_t \in \mathbb{M}^{(\beta(t))} \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}-N}) \right\} \in \text{Fin}(\mathfrak{Z}^*)$$

имеем пучок траекторий  $\mathcal{M}_2$ -задачи, стартовых из  $x$  и согласованных с  $\beta$ . Из (2.13) и (2.14) имеем, что  $\mathbf{M}^{(j)} \subset \mathbf{X}$  при  $j \in \overline{1, \mathbf{n}-N}$ ; кроме того, в силу (2.14) и (3.2)  $X^{00} \subset \mathbf{X}$ . Из (2.13), (2.14), (3.3) и (3.4) получаем при  $x \in X^{00}$ ,  $\beta \in \mathcal{A}_2$ ,  $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$  и  $\tau \in \overline{1, \mathbf{n}-N}$ , что  $\text{pr}_1(z_\tau) \in \mathbb{X}$  и  $\text{pr}_2(z_\tau) \in \mathbf{X}$ . Поэтому (см. (2.13)) при  $x \in X^{00}$ ,  $\beta \in \mathcal{A}_2$ ,  $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$  и  $\tau \in \overline{1, \mathbf{n}-N}$  определено  $\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{\tau-1}), \text{pr}_1(z_\tau), K) \in \mathbb{R}_+$  и  $c_{N+\beta(\tau)}(z_\tau, K) \in \mathbb{R}_+$ , где  $K \in \mathfrak{N}$ . С учетом (3.4) имеем при  $x \in X^{00}$ , что

$$(3.5) \quad \mathbf{D}^*[x] \triangleq \left\{ (\beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathcal{A}_2 \times \mathfrak{Z}^* \mid (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x] \right\} \in \\ \in \text{Fin}(\mathcal{A}_2 \times \mathfrak{Z}^*)$$

есть множество всех ДР ( $\mathcal{M}_2, x$ )-задачи, т.е.  $\mathcal{M}_2$ -задачи со стартом в  $x$ . Пусть  $\mathfrak{N}^* \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n}-N})$  (семейство всех непустых п/м  $\overline{1, \mathbf{n}-N}$ ); при  $K \in \mathfrak{N}^*$  имеем список

$$(3.6) \quad K \oplus N = \{k + N : k \in K\} \in \mathfrak{N}$$

основной задачи. Легко видеть (см. [11, (4.9)]), что при  $x \in X^{00}$ ,  $\beta \in \mathcal{A}_2$  и  $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$  определено значение

$$(3.7) \quad \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} \left[ \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N) + \right. \\ \left. + c_{N+\beta(t)}(z_t, \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N) \right] + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}-N})) \in \mathbb{R}_+.$$

Для представления данных значений введем преобразование функций стоимости с целью получения выражений, подобных [14, (3.16)]. Для этого сначала введем

$$(3.8) \quad \left( \mathbb{X}^* \triangleq \left( \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}-N} \mathfrak{M}^{(i)} \right) \in \text{Fin}(X) \right) \& \\ \& \left( \mathbf{X}^* \triangleq \left( \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{M}^{(i)} \right) \cup X^{00} \in \text{Fin}(X) \right)$$

со свойством  $\mathbb{X}^* \subset \mathbb{X}$  и  $\mathbf{X}^* \subset \mathbf{X}$  (учитываем (2.13), (2.14), (3.2)), после чего  $\mathbf{c}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^* \times \mathbb{X}^* \times \mathfrak{N}^*]$  определяем правилом (см. (2.15), (3.6))

$$(3.9) \quad \mathbf{c}^*(x, y, K) \triangleq \mathbf{c}(x, y, K \oplus N) \quad \forall x \in \mathbf{X}^* \quad \forall y \in \mathbb{X}^* \quad \forall K \in \mathfrak{N}^*.$$

Посредством (3.8), (3.9) определены стоимости внешних перемещений  $\mathcal{M}_2$ -задачи (см. (3.7)). При  $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$  определяем  $c_j^* \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^{(j)} \times \mathfrak{N}^*]$  посредством правила

$$(3.10) \quad c_j^*(z, K) \triangleq c_{N+j}(z, K \oplus N) \quad \forall z \in \mathbb{M}^{(j)} \quad \forall K \in \mathfrak{N}^*;$$

посредством (3.10) определяются стоимости внутренних работ для  $\mathcal{M}_2$ -задачи. Наконец, терминальную компоненту аддитивного критерия полагаем совпадающей с  $f$  (см. (2.15)). Итак, в виде  $(\mathbf{c}^*, c_1^*, \dots, c_{\mathbf{n}-N}^*, f)$  имеем кортеж в/з функций стоимости  $\mathcal{M}_2$ -задачи. Тогда при  $x \in X^{00}$ ,  $\beta \in \mathcal{A}_2$  и  $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$  выражение (3.7) сводится к виду

$$(3.11) \quad \mathfrak{C}_\beta^* \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \right] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} \left[ \mathbf{c}^*(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N})) \right) + \\ + c_{\beta(t)}^*(z_t, \beta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N})) \right] + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}-N})) \in \mathbb{R}_+.$$

Тем самым определен аддитивный критерий  $\mathcal{M}_2$ -задачи. При  $x \in X^{00}$  получаем  $(\mathcal{M}_2, x)$ -задачу

$$(3.12) \quad \mathfrak{C}_\beta^* \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \right] \rightarrow \min, \quad \left( \beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \right) \in \mathbf{D}^*[x],$$

которой сопоставляется экстремум  $\tilde{V}^*[x] \in \mathbb{R}_+$  и (непустое) множество  $(\text{sol})^*[x]$  всех оптимальных решений:

$$(3.13) \quad \tilde{V}^*[x] \triangleq \min_{(\beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}}) \in \mathbf{D}^*[x]} \mathfrak{C}_\beta^* \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \right] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(3.14) \quad (\text{sol})^*[x] \triangleq \left\{ \left( \beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \right) \in \mathbf{D}^*[x] \mid \mathfrak{C}_\beta^* \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \right] = \tilde{V}^*[x] \right\} \in \\ \in \text{Fin}(\mathbf{D}^*[x]).$$

Посредством (3.13) определена важная функция  $\tilde{V}^*[\cdot]$  вида

$$(3.15) \quad x \mapsto \tilde{V}^*[x] : X^{00} \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Рассмотрим (3.14), (3.15) как своеобразные результаты  $\mathcal{M}_2$ -задачи; с использованием (3.15) сконструируем аддитивный критерий  $\mathcal{M}_1$ -задачи, к рассмотрению которой сейчас приступаем.

Пусть  $\mathfrak{Z}^\natural \triangleq (X \times X)^{\overline{0, N}}$ ; при  $x \in X^0$  и  $\alpha \in \mathcal{A}_1$  в виде

$$(3.16) \quad \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x] \triangleq \left\{ (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{Z}^\natural \mid (z_0 = (x, x)) \& (z_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)} \quad \forall \tau \in \overline{1, N}) \right\} \in \\ \in \text{Fin}(\mathfrak{Z}^\natural)$$

имеем пучок траекторий  $\mathcal{M}_1$ -задачи, стартовых из  $x$  и согласованных с маршрутом  $\alpha$ . Введем в рассмотрение множества

$$(3.17) \quad \left( \mathbb{X}^\natural \triangleq \bigcup_{i=1}^N \mathfrak{M}_i \in \text{Fin}(X) \right) \& \left( \mathbf{X}^\natural \triangleq \left( \bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i \right) \cup X^0 \in \text{Fin}(X) \right),$$

для которых (см.(2.14))  $\mathbb{X}^\natural \subset \mathbb{X}$  и  $\mathbf{X}^\natural \subset \mathbf{X}$ . При  $x \in X^0$  определяем множество всех ДР ( $\mathcal{M}_1, x$ )-задачи (т.е.  $\mathcal{M}_1$ -задачи со стартом в  $x$ ):

$$(3.18) \quad \mathbf{D}^\natural[x] \triangleq \left\{ \left( \alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \right) \in \mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^\natural \mid (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x] \right\} \in \text{Fin}(\mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^\natural).$$

Отметим весьма очевидное, но важное свойство, позволяющее “привязывать”  $\mathcal{M}_2$ -задачу к  $\mathcal{M}_1$ -задаче. А именно (см. [11, предложение 3.3]): если  $x \in X^0$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}_1$  и  $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x]$ , то

$$(3.19) \quad \text{pr}_2(z_N) \in X^{00}.$$

Теперь последовательно введем функции стоимости, формирующие аддитивный критерий  $\mathcal{M}_1$ -задачи. Начнем с терминальной компоненты, фактически отождествляя ее с функцией  $\tilde{V}^*[\cdot]$  (3.15). Точнее, полагая, что  $\mathbf{M}^\natural$  есть объединение всех множеств  $\mathbf{M}_i$ ,  $i \in \overline{1, N}$ , принимаем, что  $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}^\natural]$  определяется правилом

$$(3.20) \quad \left( \mathbf{f}(x) \triangleq \tilde{V}^*[x] \quad \forall x \in X^{00} \right) \& \left( \mathbf{f}(x) \triangleq 0 \quad \forall x \in \mathbf{M}^\natural \setminus X^{00} \right).$$

Второе выражение в (3.20) несущественно и введено для согласования с [14]. Пусть  $\mathfrak{N}^\natural \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$  (семейство всех непустых п/м  $\overline{1, N}$ ). Полагаем с учетом (2.15), что  $\mathbf{c}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^\natural \times \mathbb{X}^\natural \times \mathfrak{N}^\natural]$  определяется условиями

$$(3.21) \quad \mathbf{c}^\natural(z, K) \triangleq \mathbf{c}(z, K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \quad \forall z \in \mathbf{X}^\natural \times \mathbb{X}^\natural \quad \forall K \in \mathfrak{N}^\natural.$$

При  $j \in \overline{1, N}$  функцию  $\mathbf{c}_j^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_j \times \mathfrak{N}^\natural]$  определяем правилом

$$(3.22) \quad \mathbf{c}_j^\natural(z, K) \triangleq c_j(z, K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \quad \forall z \in \mathbb{M}_j \quad \forall K \in \mathfrak{N}^\natural.$$

Итак, посредством (3.20)–(3.22) определен кортеж  $(\mathbf{c}, c_1^\natural, \dots, c_N^\natural, \mathbf{f})$  в/з функций стоимости  $\mathcal{M}_1$ -задачи. При  $x \in X^0$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}_1$  и  $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x]$  полагаем, что (см. (3.20)–(3.22))

$$(3.23) \quad \mathbf{c}_\alpha^\natural[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] \triangleq \sum_{t=1}^N \left[ \mathbf{c}^\natural(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t, N})) + \right. \\ \left. + c_{\alpha(t)}^\natural(z_t, \alpha^1(\overline{t, N})) \right] + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_N)) = \sum_{t=1}^N \left[ \mathbf{c}^\natural(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t, N})) + \right. \\ \left. + c_{\alpha(t)}^\natural(z_t, \alpha^1(\overline{t, N})) \right] + \tilde{V}^*[\text{pr}_2(z_N)];$$

здесь учтено (3.19) и (3.20). Если  $x \in X^0$ , то  $(\mathcal{M}_1, x)$ -задачу определяем как

$$(3.24) \quad \mathfrak{C}_\alpha^\natural \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \right] \rightarrow \min, \quad \left( \alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \right) \in \mathbf{D}^\natural[x];$$

данной задаче сопоставляем экстремум  $V^\natural[x]$  и (непустое) множество  $(\text{sol})^\natural[x]$  всех оптимальных решений:

$$(3.25) \quad V^\natural[x] \triangleq \min_{(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x]} \mathfrak{C}_\alpha^\natural \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \right] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(3.26) \quad (\text{sol})^\natural[x] \triangleq \left\{ \left( \alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \right) \in \mathbf{D}^\natural[x] \mid \mathfrak{C}_\alpha^\natural \left[ (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \right] = V^\natural[x] \right\} \in \text{Fin}(\mathbf{D}^\natural[x]).$$

В виде  $x \mapsto V^\natural[x] : X^0 \rightarrow \mathbb{R}_+$  имеем функцию  $V^\natural[\cdot]$  экстремума  $\mathcal{M}_1$ -задачи, аргументом которой является точка старта. Выделяем для отдельного рассмотрения задачу

$$(3.27) \quad V^\natural[x] \rightarrow \min, \quad x \in X^0,$$

которой сопоставляется экстремум  $\mathbb{V}^\natural \in \mathbb{R}_+$  и (непустое) множество  $X_{\text{opt}}^\natural \in \text{Fin}(X^0)$  всех оптимальных точек старта:

$$(3.28) \quad \mathbb{V}^\natural \triangleq \min_{x \in X^0} V^\natural[x] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(3.29) \quad X_{\text{opt}}^\natural \triangleq \left\{ x \in X^0 \mid V^\natural[x] = \mathbb{V}^\natural \right\} \in \text{Fin}(X^0).$$

Итак, введены две взаимосвязанные задачи, ориентированные на (декомпозиционное) решение основной задачи.

#### 4. Структура решения на функциональном уровне (содержательное обсуждение)

В настоящем кратком разделе наметим схему оптимального решения (основной)  $\mathcal{M}$ -задачи, соответствующую построениям двух предыдущих разделов; ограничиваемся здесь описанием логической цепочки. Фактически речь идет об алгоритме на функциональном уровне.

*Шаг 1.* Используя (3.2), определить множество  $X^{00}$  возможных точек старта  $\mathcal{M}_2$ -задачи.

*Шаг 2.* Сформировать  $\mathcal{M}_2$ -задачу в виде системы  $(\mathcal{M}_2, x)$ -задач (3.12), где  $x \in X^{00}$ , определить при этом функцию  $\tilde{V}^*[\cdot]$  (3.15) экстремума, которая используется для построения терминальной компоненты критерия  $\mathcal{M}_1$ -задачи (см. (3.20)).

*Шаг 3.* Сформировать  $\mathcal{M}_1$ -задачу в виде системы  $(\mathcal{M}_1, x)$ -задач (3.24), где  $x \in X^0$ , найти функцию экстремума  $V^{\natural}[\cdot]$ , экстремум  $\mathbb{V}^{\natural}$  задачи (3.27) и некоторую (оптимальную) точку старта  $x^0 \in X_{\text{opt}}^{\natural}$ ; также определить оптимальное в  $(\mathcal{M}_1, x^0)$ -задаче решение из множества (3.26), где  $x = x^0$ , называя его  $\mathcal{M}_1$ -решением.

*Шаг 4.* Принять финишную точку  $x^{00}$   $\mathcal{M}_1$ -решения, являющуюся элементом  $X^{00}$  (см. (3.19)), за стартовую в  $\mathcal{M}_2$ -задаче. После этого построить оптимальное решение  $(\mathcal{M}_2, x^{00})$ -задачи, получая  $\mathcal{M}_2$ -решение.

*Шаг 5.* Склеить  $\mathcal{M}_1$ -решение и  $\mathcal{M}_2$ -решение (раздельно склеиваются маршруты и траектории), получая в совокупности с  $x^0$  оптимальный МП.

Важно отметить равенство  $\mathbb{V} = \mathbb{V}^{\natural}$ , установленное в [11, 12]. Это позволяет более просто реализовать  $\mathbb{V}$  в условиях, когда не требуется определять оптимальный МП, а важно установить только глобальный экстремум и оптимальную точку старта. В этом случае этапы 1) и 2) сохраняются, а этап 3) сводится к нахождению функции экстремума  $V^{\natural}[\cdot]$ , минимизация которой на  $X^0$  как раз и доставит требуемое значение  $\mathbb{V}$  и точку старта, его реализующую.

Заметим, что в качестве инструмента реализации этапов 1)–4) используется широко понимаемое ДП.

Введем в рассмотрение процедуру естественного склеивания траекторий. Данная процедура отличается от склеивания перестановок; она относится к траекториям, а это — совсем другие объекты. В этой связи введем новое обозначение. Для этого сначала полагаем, что при  $\mathbf{z}' \in \mathfrak{Z}^{\natural}$  и  $\mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}^*$  кортеж  $\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}$  определяется правилом

$$(4.1) \quad \left( (\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(\tau) \triangleq \mathbf{z}'(\tau) \quad \forall \tau \in \overline{0, N} \right) \& \\ \& \left( (\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(\tau) \triangleq \mathbf{z}''(\tau - N) \quad \forall \tau \in \overline{N+1, \mathbf{n}} \right).$$

В частности, в качестве  $\mathbf{z}'$  и  $\mathbf{z}''$  в (4.1) могут использоваться траектории. При этом (см. [11, предложение 6.4])  $\forall x \in X^0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_1 \quad \forall \beta \in \mathcal{A}_2 \quad \forall \mathbf{z}' \in \mathcal{Z}_{\alpha}^{\natural}[x] \quad \forall \mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_{\beta}^*[\text{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]$

$$(4.2) \quad \mathbf{z}' \square \mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x].$$

Легко видеть, что (см. (3.19))  $\text{pr}_2(z_N) \in X^{00}$  при  $x \in X^0$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}_1$ ,  $\beta \in \mathcal{A}_2$  и  $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x]$ . Напомним здесь же [11, предложение 6.5]: если  $x \in X^0$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}_1$ ,  $\beta \in \mathcal{A}_2$ ,  $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x]$  и кортеж  $(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*$  определяется правилом

$$\left( z_0^* \triangleq (\text{pr}_2(z_N), \text{pr}_2(z_N)) \right) \& \left( z_{\tau}^* \triangleq z_{\tau+N} \quad \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n}-N} \right),$$

то непременно реализуется включение

$$(4.3) \quad (z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_{\beta}^*[\text{pr}_2(z_N)].$$

С учетом (4.2), (4.3) устанавливается следующее уже упоминавшееся положение (см. [12, теорема 1]):

$$(4.4) \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}^\natural;$$

в (4.4) следует учитывать (3.28) и [12, (6.12)]. В связи с логической цепочкой 1)–5) отметим следующее положение.

*Предложение 2.*

Пусть  $x^0 \in X_{\text{opt}}^\natural$ ,  $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in (\text{sol})^\natural[x^0]$  и  $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}) \in (\text{sol})^*[\text{pr}_2(y_N)]$ . Тогда решение

$$(4.5) \quad \left( \xi \diamond \eta, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}} \right) \in \tilde{\mathbf{D}}[x^0]$$

таково, что

$$(4.6) \quad \mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta} \left[ (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}} \right] = \mathbb{V}.$$

Предложение 2 (доказательство — в Приложении) указывает фактически конкретный способ построения оптимального МП.

В самом деле, пусть выполнены все условия предложения 2 (имеются в виду условия на  $x^0$ ,  $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}})$ ,  $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}})$ ). Тогда в силу (2.12) и (4.5) имеем, поскольку  $x^0 \in X^0$  (см. (3.29)), что

$$(4.7) \quad \left( \xi \diamond \eta, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}, x^0 \right) \in \mathbf{D}$$

(получили допустимый МП со свойством (4.6)). В силу (2.22) и (4.6) имеем теперь, что

$$(4.8) \quad \left( \xi \diamond \eta, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}, x^0 \right) \in \mathbf{SOL},$$

т.е. построен оптимальный МП. Заметим здесь же, что в силу (2.18), (2.21), (4.4)–(4.6)  $\tilde{V}[x^0] = \mathbb{V}$ , а потому (см. (2.25))  $x^0 \in X_{\text{opt}}^0$ . В следующих разделах обсудим реализацию этапов 1)–5) в свете (4.4) и (4.8).

Отметим в дополнение к положениям [11, 12] ряд свойств, подобных, в части конструкций склеивания, обсуждаемому в предложении 2 и важных для последующего применения ДП.

*Предложение 3.* Если  $x \in X^0$ ,  $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x]$  и  $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}) \in \mathbf{D}^*[\text{pr}_2(y_N)]$ , то

$$\mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta} \left[ (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}} \right] = \mathfrak{C}_\xi^\natural \left[ (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \right] - \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] + \mathfrak{C}_\eta^* \left[ (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}} \right].$$

Доказательство проводится в существенной части подобно обоснованию предложения 2.



*Следствие 1.* Если  $x \in X^0$ ,  $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x]$  и  $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in (\text{sol})^*[\text{pr}_2(y_N)]$ , то

$$\mathfrak{C}_{\xi \circ \eta} \left[ (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \right] = \mathfrak{C}_{\xi}^{\natural} \left[ (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \right].$$

*Следствие 2.* Если  $x \in X^0$ ,  $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in (\text{sol})^{\natural}[x]$  и  $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in (\text{sol})^*[\text{pr}_2(y_N)]$ , то

$$\mathfrak{C}_{\xi \circ \eta} \left[ (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \right] = V^{\natural}[x].$$

*Предложение 4.* Справедливо равенство  $X_{\text{opt}}^0 = X_{\text{opt}}^{\natural}$ .

Доказательство приведено в Приложении. Из (4.4) и предложения 4 следует, что при таком построении  $\mathcal{M}_1$ -задача воспроизводит наиболее важные элементы исходной  $\mathcal{M}$ -задачи: глобальный экстремум (2.21) и экстремальное множество задачи (2.24). Отметим еще одно полезное, хотя и не используемое в дальнейшем, положение о совпадении функций экстремума.

*Предложение 5.* Если  $x \in X^0$ , то  $V^{\natural}[x] = \tilde{V}[x]$ .

Обоснование осуществляется по схеме, подобной доказательству предложения 4.

## 5. Финальная задача

В настоящем разделе обсудим вопрос о том, как именно реализовать этапы 1)–5), применяя аппарат широко понимаемого ДП (см. [13, 14] и др.). Рассмотрение начнем с решения  $\mathcal{M}_2$ -задачи, следуя этапу 2) и придерживаясь алгоритмического варианта изложения, подобного [13, 14]. Речь пойдет о построении слоев функции Беллмана, где активно используются условия предшествования. Данные конструкции неоднократно использовались авторами и ранее, а потому вводятся в достаточно краткой форме с необходимыми ссылками. Прежде всего введем оператор вычеркивания (заданий из списка)  $\mathbf{I}^*$ , действующий в  $\mathfrak{N}^*$  по правилу: при  $K \in \mathfrak{N}^*$  и  $\Xi^*[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K}_2 \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K)\}$  полагаем, что множество  $\mathbf{I}^*(K) \in \mathfrak{N}^*$  есть

$$(5.1) \quad \mathbf{I}^*(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z) : z \in \Xi^*[K]\}$$

(определение  $\mathbf{I}^*$  (5.1) соответствует [8, (2.2.27), (2.2.28)]). С использованием  $\mathbf{I}^*$  определяются существенные [13, 14] списки заданий. Полагаем, что

$$(5.2) \quad \mathfrak{S}^* \triangleq \{K \in \mathfrak{N}^* \mid \forall z \in \mathbf{K}_2 \ (\text{pr}_1(z) \in K) \implies (\text{pr}_2(z) \in K)\};$$

множества — элементы (5.2) — назовем существенными списками в  $\mathcal{M}_2$ -задаче. При  $s \in \overline{1, \mathbf{n}-N}$  полагаем  $\mathfrak{S}_s^* \triangleq \{K \in \mathfrak{S}^* \mid s = |K|\}$ . Тогда  $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N}^* = \{\overline{1, \mathbf{n}-N}\}$  (синглетон) и при  $\hat{\mathbf{K}}_2 \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}_2\}$

$$\mathfrak{S}_1^* = \{\{t\} : t \in \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \hat{\mathbf{K}}_2\}.$$

Кроме того, имеем (см. [14, (4.6)]) при  $s \in \overline{2, \mathbf{n} - N}$

$$(5.3) \quad \mathfrak{S}_{s-1}^* = \{ K \setminus \{t\} : K \in \mathfrak{S}_s^*, t \in \mathbf{I}^*(K) \}.$$

Посредством (5.3) определена следующая рекуррентная процедура:

$$(5.4) \quad \mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N}^* \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N-1}^* \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathfrak{S}_1^*.$$

Регулярный шаг процедуры (5.4) реализуется посредством (5.3).

Располагая множествами  $\mathfrak{S}_s^*$ ,  $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ , приступаем к построению слоев пространства позиций, обозначаемых через  $D_0^*, D_1^*, \dots, D_{\mathbf{n}-N}^*$ . При этом

$$(5.5) \quad D_0^* \triangleq \{(x, \emptyset) : x \in \hat{\mathcal{M}}^*\},$$

где  $\hat{\mathcal{M}}^*$  отождествляется с объединением всех множеств  $\mathbf{M}^{(j)}$ ,  $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \hat{\mathbf{K}}_2$ . Кроме того, полагаем, что

$$(5.6) \quad D_{\mathbf{n}-N}^* \triangleq \{(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) : x \in X^{00}\}.$$

Рассмотрим построение  $D_s^*$  при  $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N - 1}$ ; сначала при всяком  $K \in \mathfrak{S}_s^*$  конструируем последовательно

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_s^*(K) &\triangleq \{j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}_{s+1}^*\}, \quad \mathcal{M}_s^*[K] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s^*(K)} \mathbf{M}^{(j)}, \\ \mathbb{D}_s^*[K] &\triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s^*[K]\} \end{aligned}$$

(реализуется процедура:  $\mathcal{J}_s^*(K) \rightarrow \mathcal{M}_s^*[K] \rightarrow \mathbb{D}_s^*[K]$ ), после чего полагаем

$$(5.7) \quad D_s^* \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s^*} \mathbb{D}_s^*[K].$$

Каждый слой  $D_j^*$ ,  $j \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ , есть непустое множество (см. [8, предложение 4.9.3]). Отметим важное свойство [11, (5.5)]. При  $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ ,  $(x, K) \in D_s^*$ ,  $j \in \mathbf{I}^*(K)$  и  $z \in \mathbf{M}^{(j)}$

$$(5.8) \quad (\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^*$$

(см. также [8, предложение 4.9.4]).

Следующий шаг — построение слоев функции Беллмана:  $v_0^*, v_1^*, \dots, v_{\mathbf{n}-N}^*$ . Используем уравнение Беллмана (см. [23, теорема 5.1]) и сужения получающейся функции Беллмана на слои пространства позиций. Данные построения можно свести к рекуррентной процедуре

$$(5.9) \quad v_0^* \rightarrow v_1^* \rightarrow \dots \rightarrow v_{\mathbf{n}-N}^*.$$

При этом  $v_0^* \in \mathcal{R}_+[D_0^*]$  определяется правилом

$$(5.10) \quad v_0^*(x, \emptyset) \triangleq f(x) \quad \forall x \in \hat{\mathcal{M}}^*.$$

Регулярный шаг процедуры реализуется следующим образом, учитывающим (5.8): при  $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$  определяем  $v_s^* \in \mathcal{R}_+[D_s^*]$  на основе  $v_{s-1}^* \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}^*]$  по правилу [11, (5.6)], т.е.

$$(5.11) \quad v_s^*(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}^*(K)} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \left[ \mathbf{c}^*(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j^*(z, K) + \right. \\ \left. + v_{s-1}^*(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \right] \quad \forall (x, K) \in D_s^*.$$

Для финальной функции  $v_{\mathbf{n}-N}^* \in \mathcal{R}_+[D_{\mathbf{n}-N}^*]$  имеем, что

$$(5.12) \quad \tilde{V}^*[x] = v_{\mathbf{n}-N}^*(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \quad \forall x \in X^{00}.$$

*Замечание 2.* Подчеркнем, что в случае, когда требуется определить  $\tilde{V}^*[\cdot]$  и не требуется построение оптимального в  $\mathcal{M}_2$ -задаче маршрутного процесса, реализацию (5.9) можно осуществить с перезаписью слоев (отметим построения [24] для несколько иной задачи). В этом случае предполагается, что при  $s \in \overline{1, N - 1}$  в памяти вычислителя находится слой  $v_{s-1}^*$  функции Беллмана, который после определения  $v_s^*$  уничтожается и заменяется слоем  $v_s^*$ . Если при этом  $s \leq N - 2$ , то для построения  $v_{s+1}^*$  используется слой  $v_s^*$ . Данное простое обстоятельство непосредственно следует из (5.11) и доставляет некоторую экономию ресурсов памяти (см. [25]).

После построения  $v_{\mathbf{n}-N}^*$  приступаем к решению  $\mathcal{M}_1$ -задачи, используя (5.12). Итак, переходим к этапу 3), используя (3.20) для определения терминальной компоненты аддитивного критерия.

## 6. Предваряющая задача

Посредством (3.20) и (5.12) находим функцию  $\mathbf{f}$  (теперь существенно, что

$$\mathbf{f}(x) \triangleq v_{\mathbf{n}-N}^*(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \quad \forall x \in X^{00},$$

что позволяет явным образом определить  $\mathbf{f}$ ). Дальнейшие построения аналогичны построениям для  $\mathcal{M}_2$ -задачи и потому излагаются в краткой форме; имеется в виду реализация ДП в духе [13, 14] (в основе находятся конструкции [8, §4.9]).

Вводим оператор вычеркивания  $\mathbf{I}^\sharp$ , действующий в  $\mathfrak{N}^\sharp$ : при  $K \in \mathfrak{N}^\sharp$  и

$$\Xi^\sharp[K] \triangleq \{ z \in \mathbf{K}_1 \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K) \}$$

полагаем, что множество  $\mathbf{I}^\sharp(K)$  есть

$$(6.1) \quad \mathbf{I}^\sharp(K) \triangleq K \setminus \{ \text{pr}_2(z) : z \in \Xi^\sharp[K] \}.$$

Далее рассматривается построение существенных списков заданий в  $\mathcal{M}_1$ -задаче; пусть

$$(6.2) \quad \mathfrak{S}^{\natural} \triangleq \{ K \in \mathfrak{N}^{\natural} \mid \forall z \in \mathbf{K}_1 \text{ (pr}_1(z) \in K) \implies (\text{pr}_2(z) \in K) \},$$

множества — элементы семейства (6.2) — называем существенными списками в  $\mathcal{M}_1$ -задаче. При  $s \in \overline{1, N}$  полагаем, что

$$\mathfrak{S}_s^{\natural} \triangleq \{ K \in \mathfrak{S}^{\natural} \mid s = |K| \}.$$

Легко видеть, что  $\mathfrak{S}_N^{\natural} = \{ \overline{1, N} \}$  (синглетон). Далее, при  $\hat{\mathbf{K}}_1 \triangleq \{ \text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}_1 \}$ , получаем, что  $\mathfrak{S}_1^{\natural} = \{ \{t\} : t \in \overline{1, N} \setminus \hat{\mathbf{K}}_1 \}$ . Легко видеть, что при  $s \in \overline{2, N}$

$$(6.3) \quad \mathfrak{S}_{s-1}^{\natural} = \{ K \setminus \{j\} : K \in \mathfrak{S}_s^{\natural}, j \in \mathbf{I}^{\natural}(K) \}.$$

Посредством (6.3) определена рекуррентная процедура

$$(6.4) \quad \mathfrak{S}_N^{\natural} \longrightarrow \mathfrak{S}_{N-1}^{\natural} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathfrak{S}_1^{\natural}$$

((6.3) определяет регулярный шаг процедуры (6.4)). Располагая множествами  $\mathfrak{S}_s^{\natural}$ ,  $s \in \overline{1, N}$ , конструируем слои пространства позиций, обозначаемые через  $D_0^{\natural}, D_1^{\natural}, \dots, D_N^{\natural}$ . Полагаем, что

$$(6.5) \quad \left( D_0^{\natural} \triangleq \{ (x, \emptyset) : x \in X^{00} \} \right) \& \left( D_N^{\natural} \triangleq \{ (x, \overline{1, N}) : x \in X^0 \} \right),$$

получая крайние слои пространства позиций. Если  $s \in \overline{1, N-1}$ , то сначала при  $K \in \mathfrak{S}_s^{\natural}$  последовательно определяем

$$(6.6) \quad \mathcal{J}_s^{\natural}(K) \triangleq \{ j \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}_{s+1}^{\natural} \}, \quad \mathcal{M}_s^{\natural}(K) \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s^{\natural}(K)} \mathbf{M}_j,$$

$$\mathbb{D}_s^{\natural}[K] \triangleq \{ (x, K) : x \in \mathcal{M}_s^{\natural}(K) \}$$

(реализуется процедура  $\mathcal{J}_s^{\natural}(K) \rightarrow \mathcal{M}_s^{\natural}(K) \rightarrow \mathbb{D}_s^{\natural}[K]$ ); слой  $D_s^{\natural}$  определяем правилом

$$(6.7) \quad D_s^{\natural} \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s^{\natural}} \mathbb{D}_s^{\natural}[K].$$

Итак, все слои  $D_0^{\natural}, D_1^{\natural}, \dots, D_N^{\natural}$  построены; при этом все эти слои — непустые множества (см. [8, предложение 4.9.3]). Отметим, что при  $s \in \overline{1, N}$ ,  $(x, K) \in D_s^{\natural}$ ,  $j \in \mathbf{I}^{\natural}(K)$  и  $z \in \mathbb{M}_j$

$$(6.8) \quad (\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^{\natural}.$$

Конструкция (6.6)–(6.8) используется при построении слоев функции Беллмана: последовательно определяем функции  $v_0^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_0^{\natural}]$ ,  $v_1^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_1^{\natural}]$ ,  $\dots$ ,  $v_N^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_N^{\natural}]$ , совпадающие с сужениями функции Беллмана на слои пространства позиций. При этом

$$(6.9) \quad v_0^{\natural}(x, \emptyset) \triangleq \tilde{V}^*[x] = v_{\mathbf{n}-N}^*(x, \overline{\mathbf{1}, \mathbf{n}-N}) \quad \forall x \in X^{00}.$$

Если  $s \in \overline{\mathbf{1}, N}$  и функция  $v_{s-1}^{\natural}$  уже построена, то с учетом (6.8) полагаем, что  $v_s^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_s^{\natural}]$  такова, что

$$(6.10) \quad v_s^{\natural}(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbb{I}^{\natural}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \left[ c^{\natural}(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j^{\natural}(z, K) + v_{s-1}^{\natural}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \right] \quad \forall (x, K) \in D_s.$$

Получили следующую рекуррентную процедуру:

$$(6.11) \quad v_0^{\natural} \longrightarrow v_1^{\natural} \longrightarrow \dots \longrightarrow v_N^{\natural};$$

регулярный шаг процедуры (6.11) характеризуется посредством (6.10). При этом

$$(6.12) \quad v_N^{\natural}(x, \overline{\mathbf{1}, N}) = V^{\natural}[x] \quad \forall x \in X^0.$$

Это свойство следует из того, что все функции в (6.11) суть сужения функции Беллмана; см. также (6.5). Располагая функцией  $v_N^{\natural}$ , определяем (см. (3.28), (3.29))  $\mathbb{V}^{\natural}$  и точку из  $X_{\text{opt}}^{\natural}$ . При этом в силу (3.28), (4.4) и (6.12)

$$(6.13) \quad \mathbb{V} = \min_{x \in X^0} v_N^{\natural}(x, \overline{\mathbf{1}, N}),$$

а точка  $x^0 \in X_{\text{opt}}^{\natural}$  (см. (4.4), предложение 4) определяется из следующего условия: точка  $x^0 \in X^0$  такова, что

$$(6.14) \quad \mathbb{V} = v_N^{\natural}(x^0, \overline{\mathbf{1}, N}).$$

Посредством (6.13), (6.14) определили глобальный экстремум и оптимальную точку старта, не прибегая к построению МП. Тем самым реализована существенная часть этапа 3). Отметим, что логика замечания 2 полностью применима к процедуре (6.11): для получения  $\mathbb{V}$  и  $x^0$  может использоваться вариант с перезаписью слоев. По сути дела, имеем единую склеенную процедуру

$$(6.15) \quad (v_0^* \longrightarrow v_1^* \longrightarrow \dots \longrightarrow v_{\mathbf{n}-N}^*) \rightarrow (v_0^{\natural} \longrightarrow v_1^{\natural} \longrightarrow \dots \longrightarrow v_N^{\natural}),$$

где склеивание реализуется посредством (6.9).

Рассмотрим сейчас построение оптимального МП, полагая при этом, что владеем всеми функциями, участвующими в (6.15), т.е. процедура (6.15)

реализована с сохранением упомянутых функций в памяти вычислителя. Следуя 3), начинаем с определения  $\mathcal{M}_1$ -решения. Итак, имеем  $\mathbb{V} \in \mathbb{R}_+$  и  $x^0 \in X_{\text{opt}}^{\natural}$  (см. (6.13), (6.14)). Учитываем (4.4) и предложение 4. Полагаем, что  $y_0 \triangleq (x^0, x^0)$ , получая по выбору  $x^0$ , что (см. (6.5))

$$(6.16) \quad (\text{pr}_2(y_0), \overline{1, N}) = (x^0, \overline{1, N}) \in D_N^{\natural}.$$

Из (6.10) и (6.14) имеем равенство

$$(6.17) \quad \mathbb{V} = \min_{j \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \left[ \mathbf{c}^{\natural}(x^0, \text{pr}_1(z), \overline{1, N}) + c_j^{\natural}(z, \overline{1, N}) + v_{N-1}^{\natural}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \right].$$

С учетом (6.16), (6.17) выбираем  $\xi_1 \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1, N})$  и  $y_1 \in \mathbb{M}_{\xi_1}$ , для которых

$$(6.18) \quad \mathbb{V} = \mathbf{c}^{\natural}(x^0, \text{pr}_1(y_1), \overline{1, N}) + c_{\xi_1}^{\natural}(y_1, \overline{1, N}) + v_{N-1}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}).$$

Из (6.8) и (6.16) вытекает, что  $(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) \in D_{N-1}^{\natural}$ . Поэтому согласно (6.10) имеем равенство

$$(6.19) \quad v_{N-1}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1, N} \setminus \{\xi_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \left[ \mathbf{c}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \text{pr}_1(z), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + c_j^{\natural}(z, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v_{N-2}^{\natural}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; j\}) \right].$$

С учетом (6.19) выбираем  $\xi_2 \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1, N} \setminus \{\xi_1\})$  и  $y_2 \in \mathbb{M}_{\xi_2}$ , для которых

$$(6.20) \quad v_{N-1}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) = \mathbf{c}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \text{pr}_1(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + c_{\xi_2}^{\natural}(y_2, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v_{N-2}^{\natural}(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\});$$

при этом согласно (6.8)  $(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}) \in D_{N-2}^{\natural}$ . Согласно (6.18) и (6.20) имеет место равенство

$$(6.21) \quad \mathbb{V} = \mathbf{c}^{\natural}(x^0, \text{pr}_1(y_1), \overline{1, N}) + \mathbf{c}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \text{pr}_1(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + c_{\xi_1}^{\natural}(y_1, \overline{1, N}) + c_{\xi_2}^{\natural}(y_2, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v_{N-2}^{\natural}(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}).$$

*Замечание 3.* При  $N = 2$  из (6.21) легко извлекается свойство оптимальности УП  $((\xi_i)_{i \in \overline{1, 2}}, (y_i)_{i \in \overline{0, 2}})$  в  $(\mathcal{M}_1, x^0)$ -задаче.

В общем случае  $N \geq 2$  процедуры, подобные (6.18), (6.20), следует продолжать вплоть до исчерпания  $\overline{1, N}$ . В результате будут построены кортежи  $\xi \triangleq (\xi_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathcal{A}_1$  и  $(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\xi}^{\natural}[x^0]$  со свойством

$$(6.22) \quad \mathbf{e}_{\xi}^{\natural}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}}] = \mathbb{V}.$$

Тогда (см. (3.18))  $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x^0]$ . При этом согласно (3.25), (3.28), (4.4) и (6.22)

$$\mathbb{V}^{\natural} \leq V^{\natural}[x^0] \leq \mathbf{C}_{\xi}^{\natural}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}}] = \mathbb{V} = \mathbb{V}^{\natural},$$

а потому  $\mathbf{C}_{\xi}^{\natural}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}}] = V^{\natural}[x^0] = \mathbb{V} = \mathbb{V}^{\natural}$ . Из (3.26) имеем теперь свойство

$$(6.23) \quad (\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in (\text{sol})^{\natural}[x^0].$$

С другой стороны, поскольку  $V^{\natural}[x^0] = \mathbb{V}^{\natural}$ , имеем из (3.29), что  $x^0 \in X_{\text{opt}}^{\natural}$ . Следовательно (см. (6.23)),

$$(6.24) \quad x^0 \in X_{\text{opt}}^{\natural} : (\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in (\text{sol})^{\natural}[x^0].$$

Итак, этап 3) завершен построением  $\mathcal{M}_1$ -решения (6.23).

## 7. Композиционное решение полной задачи: оптимальный маршрутный процесс

В настоящем разделе завершаем этапы 4), 5). Напомним в этой связи, что  $\text{pr}_2(y_N) \in X^{00}$  согласно (3.19). С учетом этого полагаем, что  $x^{00} \triangleq \text{pr}_2(y_N)$ , получая, что

$$(7.1) \quad x^{00} \triangleq \text{pr}_2(y_N) \in X^{00}.$$

Напомним, что функции  $v_0^*, v_1^*, \dots, v_{\mathbf{n}-N}^*$  известны; особо отметим (5.12). С учетом (7.1) полагаем, что

$$\hat{y}_0 \triangleq (x^{00}, x^{00}) = (\text{pr}_2(y_N), \text{pr}_2(y_N));$$

$\hat{y}_0 \in X^{00} \times X^{00}$ . При этом согласно (5.6)

$$(7.2) \quad (x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = (\text{pr}_2(\hat{y}_0), \overline{1, \mathbf{n} - N}) \in D_{\mathbf{n}-N}^*.$$

С учетом (5.11) и (7.2) получаем следующее равенство:

$$(7.3) \quad v_{\mathbf{n}-N}^*(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \left[ \mathbf{c}^*(x^{00}, \text{pr}_1(z), \overline{1, \mathbf{n} - N}) + c_j^*(z, \overline{1, \mathbf{n} - N}) + v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{j\}) \right].$$

С учетом (7.3) выбираем  $\eta_1 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N})$  и  $\hat{y}_1 \in \mathbb{M}^{(\eta_1)}$ , для которых

$$(7.4) \quad v_{\mathbf{n}-N}^*(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \mathbf{c}^*(x^{00}, \text{pr}_1(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N}) + c_{\eta_1}^*(\hat{y}_1, \overline{1, \mathbf{n} - N}) + v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}),$$

где  $(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) \in D_{\mathbf{n}-N-1}^*$  согласно (5.8). Из (5.11) имеем поэтому следующее равенство:

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) &= \\ &= \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \left[ \mathbf{c}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \text{pr}_1(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + \right. \\ &\quad \left. + c_j^*(z, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{\mathbf{n}-N-2}^*(\text{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; j\}) \right]. \end{aligned}$$

С учетом этого выбираем  $\eta_2 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})$  и  $\hat{y}_2 \in \mathbb{M}^{(\eta_2)}$ , для которых

$$\begin{aligned} (7.5) \quad & v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) = \\ &= \mathbf{c}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \text{pr}_1(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ &+ c_{\eta_2}^*(\hat{y}_2, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{\mathbf{n}-N-2}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}), \end{aligned}$$

причем  $(\text{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D_{\mathbf{n}-N-2}^*$  согласно (5.8). Отметим, что из (7.4), (7.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} (7.6) \quad & v_{\mathbf{n}-N}^*(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \mathbf{c}^*(x^{00}, \text{pr}_1(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N}) + \\ &+ \mathbf{c}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \text{pr}_1(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ &+ c_{\eta_1}^*(\hat{y}_1, \overline{1, \mathbf{n} - N}) + c_{\eta_2}^*(\hat{y}_2, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ &+ v_{\mathbf{n}-N-2}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \end{aligned}$$

(легко видеть, что при  $\mathbf{n} = N + 2$  из (7.6) вытекает оптимальность решения  $((\eta_i)_{i \in \overline{1, 2}}, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, 2}})$  в  $(\mathcal{M}_2, x^{00})$ -задаче; здесь имеется аналогия с замечанием 3). В общем случае  $N \in \overline{2, \mathbf{n} - 2}$  процедуры выбора (а на самом деле, решения локальных экстремальных задач), подобные (7.4), (7.5), следует продолжать вплоть до исчерпывания  $\overline{1, \mathbf{n} - N}$ . В итоге будут построены кортежи  $\eta \triangleq (\eta_i)_{i \in \overline{1, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{A}_2$  и  $(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_\eta^*[x^{00}]$ , для которых (см. (5.12))

$$(7.7) \quad \mathfrak{C}_\eta^*[(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = v_{\mathbf{n}-N}^*(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \tilde{V}^*[x^{00}].$$

Поскольку при этом (см. (3.5))  $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x^{00}]$ , имеем из (3.14) и (7.7), что

$$(7.8) \quad (\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in (\text{sol})^*[x^{00}].$$

С учетом (7.1) и (7.8) имеем, конечно, свойство

$$(7.9) \quad (\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in (\text{sol})^*[\text{pr}_2(y_N)].$$

С учетом (6.24), (7.9) и предложения 2 получаем, что

$$(\xi \diamond \eta, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x^0]$$



и (см. (4.6))  $\mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}] = \mathbb{V}$ . Тогда в силу (2.12), (3.29) и (6.24) триплет

$$(\xi \diamond \eta, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}, x^0) \in \mathbf{D}$$

непрерывно является оптимальным МП, т.е. справедливо (4.8). Итак, реализована двухэтапная процедура

$$\begin{aligned} [x^0 \rightarrow (\xi_1, y_1) \rightarrow \dots \rightarrow (\xi_N, y_N)] \rightarrow \\ \rightarrow [x^{00} = \text{pr}_2(y_N) \rightarrow (\eta_1, \hat{y}_1) \rightarrow \dots \rightarrow (\eta_{n-N}, \hat{y}_{n-N})], \end{aligned}$$

приводящая к оптимальному МП (4.8). При этом  $x^0 \in X_{\text{opt}}^0$  в силу предложения 4, т.е.  $x^0$  есть оптимальная точка старта в смысле (2.24).

## 8. Вычислительный эксперимент (предваряющая резка длинномерных деталей)

Рассмотрим модельный пример, касающийся вопросов листовой резки деталей на машинах с ЧПУ. Полагаем в настоящем разделе, что  $X = [0, a] \times [0, b]$ , где  $a > 0$ ,  $b > 0$  — два заданных числа. Предполагается заданным (для листа  $X$ ) раскройный план. Имеется  $\mathbf{n}$  попарно дизъюнктивных контуров, подлежащих резке. Мегаполисы сопоставлены контурам по стандартному правилу: для каждого контура задается эквидистанта, на которой располагаются возможные точки врезки и отвечающие им точки выключения инструмента. Внешние перемещения (между мегаполисами, а также из точки старта к мегаполисам) осуществляются в режиме холостого хода, т.е. “быстро”. Каждое перемещение от точки врезки до точки начала реза на контуре и, после окончания реза, к точке выключения инструмента реализуются в режиме рабочего хода, т.е. “медленно”. Оптимизируем совокупное время, исключая собственно время резки самих контуров, которое является одним и тем же для всех вариантов решения задачи. При этом, однако, учитываются соображения, связанные с тепловыми деформациями и приводящие к использованию штрафов за нарушение требований по эффективному отводу тепла; см. [14, разделы 5, 6]. Такое использование приводит (см. [14, раздел 6]) к функциям стоимости с зависимостью от списка заданий.

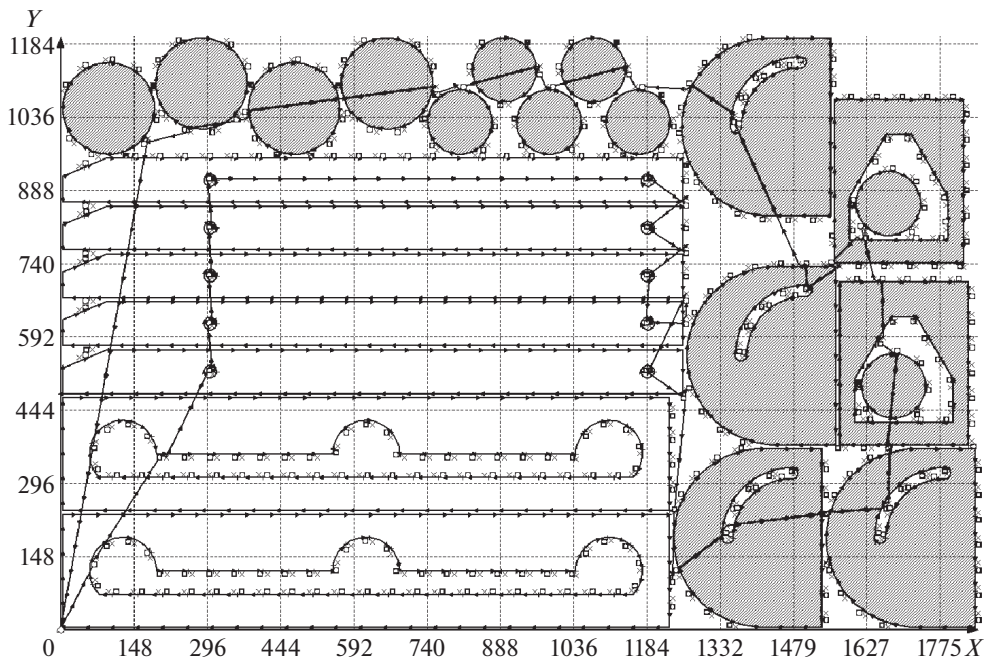
Условия предшествования в совокупной задаче определяются соображениями, связанными с вложенностью контуров и деталей. Так, у детали, имеющей внутренние контуры, их резка должна предшествовать резке внешнего контура; аналогичное требование относится к резке вложенных деталей (см. [10, § 1.3.2]). Таким образом, определяется множество  $\tilde{\mathbf{K}}$  (см. замечание 1) совокупных адресных пар. Предполагаем, однако, что семейство  $\mathcal{M}$  мегаполисов разбито в дизъюнктивную сумму подсемейств  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  (см. раздел 2), с учетом что в  $\mathcal{M}_1$  включены мегаполисы, отвечающие контурам длинномерных деталей (см. раздел 1). Отметим, что имеются и другие варианты выделения контуров для первоочередной резки, см. в этой связи [10, § 1.3.3]). Предполагается, что  $\tilde{\mathbf{K}}$ -ограничение сведено к варианту, определяемому мно-

жествами  $\mathbf{K}_1$  и  $\tilde{\mathbf{K}}_2$  замечания 1, где  $\tilde{\mathbf{K}}_2$  определяется посредством рационального выбора  $\mathbf{K}_2$ . Эти соображения легко реализовать, опираясь на правила вложенности (грубо говоря, используя распределение по объемлющим деталям и их контурам). При этом, конечно, построение  $M_1$  и  $M_2$  требует предварительной работы, связанной с реализацией условий предшествования, отвечающих  $M_1$ - и  $M_2$ -задаче. Полагаем далее этот (весьма несложный) этап постановки выполненным.

Допускаем возможность выбора различных точек старта в интересах оптимизации аддитивного критерия, задавая конечное множество  $X^0$ ; как правило,  $X^0$  является п/м границы листа  $X$ . Это множество является одновременно множеством возможных точек старта  $M_1$ -задачи; множество  $X^{00}$ , исполняющее аналогичную роль для  $M_2$ -задачи, формируется алгоритмом на этапе 1).

*Вычислительный эксперимент.* Вычисления производились на персональной ЭВМ с процессором Intel i5-11300H с 8Гб оперативной памяти, работающей под управлением Windows 11 (64-bit). Для разработки программы были использованы язык C++, компилятор MinGW и интерфейсная библиотека Qt. Далее приводятся данные примера (непосредственно координаты точек контуров, точек врезки, точек начала реза контура и точек выключения инструмента не приводятся из соображений экономии места). Количество контуров — 42, количество деталей — 24, количество адресных пар — 20. Все контуры разделены на два кластера. В первый вошли контуры семи длинномерных деталей (19 контуров). Во второй — контуры семнадцати компактных деталей (23 контура). Для простоты здесь предполагается, что  $X^0$  — одноэлементное множество (синглетон), соответствующее началу координат. Значения  $f$  отвечают вычислению времени холостого хода при возвращении инструмента в начало координат (исследуется более понятный случай замкнутой задачи). В примере учитывались тепловые ограничения, описанные в [14, разделы 5, 6]. Речь идет о формировании специальных областей завершения реза с выделением порогового отношения (значения), характеризующего долю сплошного металла в каждой такой области. Именно, область завершения реза имеет длину 100 мм и ширину 25 мм. Пороговое значение для использования штрафа равно 0,5 от площади области завершения реза.

На рисунке указано размещение на листе деталей, подлежащих резке, и траектория процесса, полученная в результате вычислительного эксперимента. Ромб в начале координат — точка начала и завершения движения. Квадраты — точки врезки. Крестики — точки выключения инструмента. Плюсы на контурах — точки начала и завершения реза. Траектория холостого хода — набор отдельных линий. Именно, линия от точки старта до точки врезки для первого контура, линии от точки выключения инструмента для предыдущего контура до точки врезки следующего контура и линия от точки выключения инструмента для последнего контура до точки завершения движения. Траектория резки — набор линий, каждая из которых состоит из линии, идущей от точки врезки до точки начала реза контура, самого контура и линии, идущей от точки завершения реза контура до точки выключения инструмента.



Результат работы алгоритма.

Подробное описание постановки данной конкретной задачи соответствует [14, разделы 5, 6], и здесь ограничимся совсем краткими напоминаниями. Как уже отмечалось, оптимизируется совокупное время (единицы измерения — секунды). Все штрафные константы совпадают с 1 000 000. Полученный результат (значение  $V$ ) 97,724 существенно меньше данной константы, что означает соблюдение всех ограничений, связанных с отводом тепла (общие соображения на эту тему приведены в начале раздела). Время счета составило 7 мин 8 с, что вполне приемлемо с точки зрения решения реальных практических задач, при том что 42 контура соответствуют задаче ощутимой размерности. Полезно отметить (см. [26, раздел 5]), что для задач меньшей размерности при решении по методу ДП без применения декомпозиции время счета существенно выше (при  $N = 30$  и  $|K| = 20$  в [26, раздел 5] получено время счета 51 мин 58 с; имеется в виду вариант стандартной резки). Таким образом, прием, использованный в настоящей работе, является актуальным с точки зрения учета технологических ограничений и позволяет надеяться на возможность применения в практических задачах.

В заключение отметим, что в [26, Введение] приведен детальный обзор исследований, связанных с листовой резкой на машинах с ЧПУ.

## 9. Заключение

В работе построен метод решения экстремальной задачи маршрутизации с выделенной системой первоочередных заданий. В основе исследования нахо-

дится декомпозиция с выделением предваряющей и финальной экстремальных задач и применением в каждой из упомянутых частичных задач широко понимаемого динамического программирования. Это позволяет решать маршрутные задачи ощутимой размерности за приемлемое время. Одно из возможных применений разработанного метода касается задачи управления инструментом при фигурной листовой резке деталей зонами на машинах с ЧПУ.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство предложения 2.* Учитываем (4.2),

$$(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \triangleq (y_t)_{t \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_{\xi \diamond \eta}[x^0].$$

Поскольку  $\xi \diamond \eta \in \mathbf{P}$ , получаем (4.5), т.е.

$$(II.1) \quad (\xi \diamond \eta, (\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x^0].$$

При этом согласно (3.26) и (3.21)  $\mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_t)_{t \in \overline{0, N}}] = V^{\natural}[x^0] = \mathbb{V}^{\natural}$ , причем  $\text{pr}_2(y_N) \in X^{00}$  в силу (3.19);  $\tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] \in \mathbb{R}_+$ . Кроме того,

$$(II.2) \quad \mathfrak{C}_{\eta}^*[(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)].$$

Заметим, что в силу (3.9)–(3.11) имеем, однако, что

$$(II.3) \quad \mathfrak{C}_{\eta}^*[(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} \left[ \mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{y}_{t-1}), \text{pr}_1(\hat{y}_t), \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N) + c_{N+\eta(t)}(\hat{y}_t, \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N) \right] + f(\text{pr}_2(\hat{y}_{\mathbf{n}-N})).$$

Кроме того, по выбору  $\xi$  и  $(y_t)_{t \in \overline{0, N}}$  имеем, что (см. (3.21), (3.22))

$$(II.4) \quad \mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_t)_{t \in \overline{0, N}}] = \sum_{t=1}^N \left[ \mathbf{c}(\text{pr}_2(y_{t-1}), \text{pr}_1(y_t), \xi^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) + c_{\xi(t)}(y_t, \xi^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \right] + \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)].$$

Наконец, с учетом (2.16) и (II.1) получаем равенство

$$(II.5) \quad \mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^N \left[ \mathbf{c}(\text{pr}_2(\omega_{t-1}), \text{pr}_1(\omega_t), (\xi \diamond \eta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{(\xi \diamond \eta)(t)}(\omega_t, (\xi \diamond \eta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) \right] + \sum_{t=N+1}^{\mathbf{n}} \left[ \mathbf{c}(\text{pr}_2(\omega_{t-1}), \text{pr}_1(\omega_t), (\xi \diamond \eta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{(\xi \diamond \eta)(t)}(\omega_t, (\xi \diamond \eta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) \right] + f(\text{pr}_2(\omega_{\mathbf{n}})).$$

С учетом (4.1), (П.5) и определения  $(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}$  получаем, что

$$\begin{aligned}
 (\text{П.6}) \quad \mathfrak{C}_{\xi \circ \eta}[(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] &= \sum_{t=1}^N \left[ \mathbf{c}(\text{pr}_2(y_{t-1}), \text{pr}_1(y_t), \xi^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) + \right. \\
 &\quad \left. + c_{\xi(t)}(y_t, \xi^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \right] + \\
 &\quad + \sum_{t=N+1}^{\mathbf{n}} \left[ \mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{y}_{t-N-1}), \text{pr}_1(\hat{y}_{t-N}), \eta^1(\overline{t-N, \mathbf{n}-N}) \oplus N) + \right. \\
 &\quad \left. + c_{\eta(t-N)+N}(\hat{y}_{t-N}, \eta^1(\overline{t-N, \mathbf{n}-N}) \oplus N) \right] + f(\text{pr}_2(\hat{y}_{\mathbf{n}-N})).
 \end{aligned}$$

Учтена цепочка равенств  $\text{pr}_2(\omega_N) = \text{pr}_2(y_N) = \text{pr}_2(\hat{y}_0)$  (см. (3.4), (3.5), (3.14)). Из (П.3), (П.4) и (П.6) вытекает, что

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{C}_{\xi \circ \eta}[(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] &= \mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_t)_{t \in \overline{0, N}}] - \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] + \\
 &\quad + \sum_{\tau=1}^{\mathbf{n}-N} \left[ \mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{y}_{\tau-1}), \text{pr}_1(\hat{y}_{\tau}), \eta^1(\overline{\tau, \mathbf{n}-N}) \oplus N) + \right. \\
 &\quad \left. + c_{\eta(\tau)+N}(\hat{y}_{\tau}, \eta^1(\overline{\tau, \mathbf{n}-N}) \oplus N) \right] + f(\text{pr}_2(\hat{y}_{\mathbf{n}-N})) = \\
 &= \mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_t)_{t \in \overline{0, N}}] - \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] + \mathfrak{C}_{\eta}^*[(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}],
 \end{aligned}$$

а потому с учетом (П.2) получаем равенство

$$(\text{П.7}) \quad \mathfrak{C}_{\xi \circ \eta}[(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_t)_{t \in \overline{0, N}}],$$

где по выбору  $(\xi, (y_t)_{t \in \overline{0, N}})$  имеем из (3.26), что  $\mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_t)_{t \in \overline{0, N}}] = V^{\natural}[x^0] = \mathbb{V}^{\natural}$ . В силу (4.4) и (П.7) получаем цепочку равенств

$$\mathfrak{C}_{\xi \circ \eta}[(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathbb{V}^{\natural} = \mathbb{V};$$

с учетом определения  $(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}$  получаем теперь (4.6), где (4.5) выполнено в силу (П.1).

*Доказательство предложения 4.* Пусть  $x_* \in X_{\text{opt}}^{\natural}$ , т.е.  $x_* \in X^0$  и  $V^{\natural}[x_*] = \mathbb{V}$  (см. (4.4)). Используя (3.27), выберем

$$(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in (\text{sol})^{\natural}[x_*],$$

получая  $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x_*]$  со свойством  $\mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}}] = V^{\natural}[x_*]$  (оптимальное в  $(\mathcal{M}_1, x_*)$ -задаче ДР). Тогда (см. (4.4))  $\mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}}] = \mathbb{V}$ . С учетом (3.15) выберем

$$(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in (\text{sol})^*[\text{pr}_2(y_N)],$$

получая  $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[\text{pr}_2(y_N)]$  со свойством

$$\mathfrak{C}_{\eta}^*[(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)].$$

Из предложения 2 следует, что  $(\xi \diamond \eta, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x_*]$  таково, что справедливо (4.6). С учетом (2.18) имеем неравенство

$$\tilde{V}[x_*] \leq \mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = \mathbb{V},$$

где  $\mathbb{V} \leq \tilde{V}[x_*]$  в силу (2.21). В итоге  $\tilde{V}[x_*] = \mathbb{V}$ , а потому (см. (2.25))  $x_* \in X_{\text{opt}}^0$ . Итак,

$$(II.8) \quad X_{\text{opt}}^{\natural} \subset X_{\text{opt}}^0.$$

Пусть  $x^* \in X_{\text{opt}}^0$ , т.е.  $x^* \in X^0$  и  $\tilde{V}[x^*] = \mathbb{V}$ . С учетом (2.19) выберем оптимальное ДР

$$(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in (\text{sol})[x^*];$$

тогда  $\mathfrak{C}_{\alpha}[(z_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \tilde{V}[x^*] = \mathbb{V}$ . При этом  $\alpha \in \mathbf{P}$ , а потому  $\alpha = \alpha_1 \diamond \alpha_2$ , где  $\alpha_1 \in \mathcal{A}_1$  и  $\alpha_2 \in \mathcal{A}_2$ . Поэтому (см. (2.11))  $(z_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha_1 \diamond \alpha_2}[x^*]$ . Тогда  $(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha_1}^{\natural}[x^*]$ , а потому (см. (3.18))

$$(\alpha_1, (z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x^*].$$

Введем кортеж  $(\tilde{z}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}$  в  $X \times X$  посредством правила

$$(\tilde{z}_0 \triangleq (\text{pr}_2(z_N), \text{pr}_2(z_N))) \& (\tilde{z}_t \triangleq z_{N+t} \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}-N}).$$

Легко видеть, что  $(\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha_2}^*[\text{pr}_2(z_N)]$  (см. (4.3)), а потому (см. (3.5))

$$(\alpha_2, (\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[\text{pr}_2(z_N)].$$

При этом  $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} = (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \square (\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}$ . Поэтому согласно предложению 3 и (4.4)

$$\mathbb{V}^{\natural} = \mathfrak{C}_{\alpha}[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}_{\alpha_1}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] - \tilde{V}^*[\text{pr}_2(z_N)] + \mathfrak{C}_{\alpha_2}^*[(\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}],$$

где (см. (3.14))  $\tilde{V}^*[\text{pr}_2(z_N)] \leq \mathfrak{C}_{\alpha_2}^*[(\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}]$ . Получаем теперь, что

$$\mathfrak{C}_{\alpha_1}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] = \mathbb{V}^{\natural} - \mathfrak{C}_{\alpha_2}^*[(\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] + \tilde{V}^*[\text{pr}_2(z_N)] \leq \mathbb{V}^{\natural}.$$

Тогда  $\mathbb{V}^{\natural} \leq \mathfrak{C}_{\alpha_1}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] \leq \mathbb{V}^{\natural}$ . В итоге  $\mathfrak{C}_{\alpha_1}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] = \mathbb{V}^{\natural}[x^*] = \mathbb{V}^{\natural}$ , а потому (см. (3.29))  $x^* \in X_{\text{opt}}^{\natural}$ , чем завершается проверка свойства  $X_{\text{opt}}^0 \subset X_{\text{opt}}^{\natural}$ , а следовательно (см. (II.8)), и равенства  $X_{\text{opt}}^0 = X_{\text{opt}}^{\natural}$ .  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gutin G., Punnen A.* The traveling salesman problem and its variations. Berlin: Springer, 2002.
2. *Cook W.J.* In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2012.
3. *Гимади Э.Х., Хачай М.Ю.* Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
4. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера // *АиТ.* 1989. № 9. С. 3–33; № 10. С. 3–29; № 11. С. 3–26.
5. *Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К.* Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // *Экономика и математические методы.* 1965. Т. 1. № 1. С. 94–107.
6. *Беллман Р.* Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере / *Кибернетический сборник.* М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
7. *Хелд М., Карп Р. М.* Применение динамического программирования к задачам упорядочения / *Кибернетический сборник.* М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
8. *Ченцов А.Г.* Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижев. ин-т компьют. исслед., 2008.
9. *Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Сесекин А.Н.* Задачи маршрутизации перемещений с неаддитивным агрегированием затрат, М.: Ленанд, 2021.
10. *Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы. Екатеринбург: УрФУ, 2020.
11. *Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант // *Вестник российских университетов. Математика.* 2022. Т. 27. № 137. С. 95–124.
12. *Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Экстремальная двухэтапная задача маршрутизации и процедуры на основе динамического программирования // *Тр. Ин-та мат. и механики УрО РАН.* 2022. Т. 28. № 2. С. 215–248.
13. *Ченцов А.Г.* Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования. *АиТ.* 2014. № 4. С. 170–190.
14. *Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // *АиТ.* 2016. № 11. С. 96–117.
15. *Петунин А.А.* О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // *Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та.* 2009. Т. 13. № 2. С. 280–286.
16. *Фроловский В.Д.* Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ // *Информ. технологии в проектировании и производстве.* 2005. № 4. С. 63–66.
17. *Wang G.G., Xie S.Q.* Optimal process planning for a combined punch-and-laser cutting machine using ant colony optimization // *Int. J. Product. Res.,* 43:11, Jun. (2005), P. 2195–2216.
18. *Lee M.-K., Kwon K.-B.* Cutting path optimization in CNC cutting processes using a two-step genetic algorithm // *Int. J. Product. Res.* 2006. No. 44. P. 5307–5326.

19. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
20. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
21. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2002.
22. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
23. Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82.
24. Lawler E.L. Efficient implementation of dynamic programming algorithms for sequencing problems, Report BW106, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1979. P. 1–16.
25. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. К вопросу о нахождении значения маршрутной задачи с ограничениями // Проблемы управления и информатики. 2016. № 1. С. 41–54.
26. Петушин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Оптимальная маршрутизация в задачах последовательного обхода мегаполисов при наличии ограничений // Челяб. физ.-мат. журн. 2022. Т. 7. № 2. С. 209–233.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.*

Поступила в редакцию 17.10.2022

После доработки 24.01.2023

Принята к публикации 26.01.2023