

# Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. А.Н. ИГНАТОВ, канд. физ.-мат. наук  
(alexei.ignatov1@gmail.com)  
(Московский авиационный институт)

## ОБ ОБЩЕЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ РАСПИСАНИЯ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК И СПОСОБАХ ЕЕ РЕШЕНИЯ<sup>1</sup>

Формулируется новая математическая модель движения по транспортной сети, представляемой неориентированным мультиграфом. Движение между вершинами мультиграфа предполагается возможным в заранее определенные промежутки времени. Предлагается критерий оптимальности расписания грузоперевозок, содержащий в себе помимо временных характеристик перевозок их стоимость, также используется количество недоставленных грузов. Задача поиска оптимального расписания формулируется в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования. Предлагаются различные варианты алгоритма поиска приближенного решения в поставленной задаче. Рассматриваются наглядные примеры.

*Ключевые слова:* транспортная сеть, мультиграф, грузоперевозки, расписание, смешанное целочисленное линейное программирование.

DOI: 10.31857/S0005231023040098, EDN: CGPNQK

### 1. Введение

Задачи по поиску оптимального маршрута и времени движения по транспортной сети с учетом различных ограничений на пропускную способность, время транспортировок и их стоимость давно привлекают внимание исследователей. В таких задачах нередко для моделирования транспортной сети используют (не)ориентированный (мульти)граф. Исследования, посвященные поиску оптимального расписания движения грузов между вершинами графа, можно поделить на две категории по признаку фиксированности времени транспортировок.

В классических постановках задачи маршрутизации транспорта (vehicle routing problem) [1, 2] и задачи поиска маршрута по местам продажи товаров

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00046 А).

(traveling purchaser problem) [3] движение между вершинами графа может быть осуществлено в любое время. В англоязычной литературе, посвященной железнодорожной тематике, время движения между вершинами транспортной сети часто не задано. Это время определяется при построении расписания [4–9]. В [4, 5] рассматривается однопутная железная дорога. В [6, 7] рассматривается задача построения расписания для железнодорожных сетей общего вида при фиксированном наборе маршрутов для поездов. Также как и в [6, 7], в [8] рассматривалась железнодорожная сеть общего вида, однако предлагалась несколько более сложная методика формирования расписания, предполагающая итерационную процедуру, в которой последовательно модифицировались набор маршрутов для поездов и время их движения по железнодорожной сети. В [9] задача поиска маршрута движения поездов и времени их движения по железнодорожной сети решалась одновременно. Время в [9] полагалось дискретным, что может приводить к очень большой размерности поставленной задачи.

По сути, в задачах с нефиксированным временем движения из вершины в вершину предлагается мгновенная готовность некоего транспортного средства перевезти груз/покупателя из одной вершины в другую. Однако в реальной жизни такое не всегда возможно. Так, например, регулярные железнодорожные и авиаперевозки осуществляются по расписанию, а иррегулярные могут быть просто недоступны. А ввиду пробок на автомобильных дорогах, возникающих, например, утром и вечером, длительность поездки между вершинами неодинакова. Иными словами, пропускная способность ребер/дуг графа транспортной сети зависит от времени. В этой связи в настоящей статье рассматривается постановка задачи, в которой движение между вершинами мультиграфа возможно только в заранее определенные промежутки времени.

Среди публикаций, посвященных формированию расписания перевозок, когда движение между вершинами осуществляется согласно некоторому заранее заданному расписанию, выделим [10–16]. В [10] была рассмотрена задача одновременного формирования расписания и маршрутов движения вагонов, составов по железнодорожной сети общего вида. Отметим, что в [10] также предлагались постановки с нефиксированным временем движения между вершинами. Время в [10], как и в [9], полагалось дискретным. В [11] среди прочего исследовалась задача о перемещении вагонов, которые перевозятся поездами с фиксированным временем отправления, между двумя железнодорожными станциями. В [12, 13] рассматривалась задача о минимизации парка локомотивов, требуемых для перевозки железнодорожных составов. В [14] исследовалась задача назначения «технологического окна» — промежутка времени, в которое некоторые участки железнодорожного полотна закрываются для проведения ремонтных работ. В [14] одновременно строилось расписание движения поездов, маршрут их следования по железнодорожной сети и промежутки времени для ремонтных работ. В связи с большой размерностью задачи, сформулированной в [14], поиск ее решения осуществлялся долго. По-

этому в [15] была усовершенствована модель движения по мультиграфу железнодорожной сети из [14]. В [16] на основе модели движения из [15] задача назначения «технологического окна» была сформулирована в новой постановке. Были предложены алгоритмы поиска приближенного решения в этой задаче.

Следует подчеркнуть, что в постановках из [11–16] возникает проблема, связанная с конечностью промежутка времени, на которое строится расписание (далее — горизонт планирования). Внутри этого промежутка времени надо успеть развезти все грузы. Однако это не всегда бывает возможно как по причине недостатка в рамках горизонта планирования возможностей для транспортировки (иными словами, некому перевозить), так и по причине того, что потребность перевозки возникает к концу горизонта планирования (иными словами, не хватает времени). Таким образом, решение задачи поиска оптимального расписания может не существовать, так как останутся недоставленные грузы. При этом необходимость в доставке грузов не исчезает. Такая проблема поднималась в [10], где предлагалось расширить горизонт планирования, либо отказаться от ограничения на прибытия всех грузов в рамках горизонта планирования. Первый подход приводит к росту размерности оптимизационной задачи, а второй подход может привести к тому, что груз будет доставлен на станцию, с которой практически невозможно добраться в станцию назначения. Следовательно, актуальна разработка математической модели движения по графу транспортной сети, которая бы учитывала возможность и после окончания горизонта планирования находиться грузу в движении, если ожидаемое время в пути будет допустимым. Такая модель и формулируется в настоящей статье. Как и в [9, 10], математическая модель движения по транспортной сети в настоящей статье допускает любой вид графа, время движения и маршрут движения ищутся одновременно, при этом фиксация маршрута движения груза не обязательна.

Помимо новой математической модели движения по мультиграфу транспортной сети, в статье предлагается критерий оптимальности, в котором учитываются различные аспекты перевозок: стоимость, время перевозок, количество недоставленных грузов. Задача поиска оптимального расписания формулируется в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования. Предлагается и обсуждается алгоритм поиска приближенного решения в поставленной задаче. На наглядных примерах проводится сравнение различных вариантов предложенного алгоритма.

## 2. Основные обозначения и предположения

Рассмотрим транспортную систему, представляемую неориентированным мультиграфом  $G = \langle V, E \rangle$ , где  $V$  — множество вершин (городов, железнодорожных станций, заводов, аэропортов, морских портов) и  $E$  — множество граней (шоссе, железнодорожных путей, воздушных трасс, морских путей), соединяющих эти вершины. Пусть  $|V| = M \geq 2$ . Перенумеровав вершины мульт-

тиграфа  $G$  от 1 до  $M$ , составим множество индексов  $V' = \{1, 2, \dots, M\}$ . Каждый элемент этого множества единственным образом определяет вершину мультиграфа  $G$ .

Будем отсчитывать время в минутах относительно некоторого момента отсчета. Под горизонтом планирования будем понимать промежуток времени  $[0, T_{\text{макс.}})$ , на который строится расписание. Если план перевозок строится на день (1440 мин), то  $T_{\text{макс.}} = 1440$ .

Пусть имеется  $I$  грузов (посылок, контейнеров, поездов), для каждого из которых заданы:

- индекс вершины отправления  $v_i^{\text{отпр.}} \in V'$ ;
- индекс вершины прибытия (назначения)  $v_i^{\text{приб.}} \in V'$ ;
- время готовности к отправлению  $t_i^{\text{отпр.}} \in [0, T_{\text{макс.}})$ ;
- максимальное время  $d_i$ , в течение которого грузу позволяет находиться в пункте отправления с момента готовности;
- время груза в пути  $T_i$ , т.е. максимальное время, в течение которого грузу позволяет находиться в транспортной системе (исключая время в вершине отправления), вычисляемое в минутах;
- масса груза  $w_i \in \mathbb{R}_+$ .

Груз предполагается неделимым в том смысле, что его нельзя отправить по частям.

Движение между вершинами может выполняться только в определенные промежутки времени. Пусть доступно ровно  $K$  перемещений/транспортных перевозок (самолетами, морскими судами, поездами, грузовиками) между вершинами. Каждая транспортировка представима в виде семиэлементного вектора-строки  $z_k \stackrel{\text{def}}{=} (v_k^{\text{нач.}}, v_k^{\text{кон.}}, n_k, t_k^{\text{нач.}}, t_k^{\text{кон.}}, W_k, C_k)$ , где  $v_k^{\text{нач.}} \in V'$  — индекс вершины начала движения,  $v_k^{\text{кон.}} \in V'$  — индекс вершины конца движения, причем  $v_k^{\text{нач.}}$  и  $v_k^{\text{кон.}}$  — индексы смежных вершин в графе  $G$ ,  $n_k$  — номер пути, соединяющего вершины с индексами  $v_k^{\text{нач.}}$  и  $v_k^{\text{кон.}}$ ,  $t_k^{\text{нач.}} \in [0, T_{\text{макс.}})$  — время начала движения,  $t_k^{\text{кон.}}$  — время конца движения,  $W_k$  — максимальная перевозимая масса при транспортировке,  $C_k$  — стоимость транспортировки единицы массы,  $k = \overline{1, K}$ . Обозначим через  $\mathcal{Z}$  множество всех векторов  $z_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Перенумеруем элементы множества  $\mathcal{Z}$  от 1 до  $K$ . Таким образом, число от 1 до  $K$  однозначно определяет параметры транспортировки.

При выполнении перевозок склады, в которых хранятся грузы, могут быть заполнены. Кроме того, с грузом могут производиться некоторые операции, например, переупаковка. В этой связи введем минимально и максимально возможную длительность стоянки в вершине с индексом  $v_k^{\text{кон.}}$  после выполнения транспортировки с номером  $k$  груза с номером  $i$ :  $t_{i,k}^{\text{ст. мин.}}$  и  $t_{i,k}^{\text{ст. макс.}}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Очевидно,  $\forall i = \overline{1, I}$ ,  $k = \overline{1, K}$   $0 \leq t_{i,k}^{\text{ст. мин.}} \leq t_{i,k}^{\text{ст. макс.}}$ .

Для некоторых грузов может быть допустимо прибытие в вершину назначения и по окончании горизонта планирования. Однако во время движения необходимо учитывать ограничение на время нахождения в транспортной системе. С этой целью необходимо задать величину  $\tau_{m_1, m_2}$  — ожидаемое время

(начиная с момента готовности к отправлению) перевозки груза из вершины с индексом  $m_1$  в вершину с индексом  $m_2$ ,  $m_1, m_2 = \overline{1, M}$ . Очевидно, что  $\tau_{m_1, m_1} = 0$ ,  $m_1 = \overline{1, M}$ . Если доступны исторические наблюдения по перевозке из вершины с индексом  $m_1$  в вершину с индексом  $m_2$ , то в качестве  $\tau_{m_1, m_2}$  можно выбрать реализацию выборочного среднего по имеющимся наблюдениям,  $m_1, m_2 = \overline{1, M}$ . Если эти данные отсутствуют, то указанную величину можно оценить экспертным путем. Также введем величину  $\eta_{m_1, m_2}$  — ожидаемое время с момента готовности до отправления груза из вершины с индексом  $m_1$  в вершину с индексом  $m_2$ , которая вычисляется по аналогичному принципу, что и  $\tau_{m_1, m_2}$ ,  $m_1, m_2 = \overline{1, M}$ .

### 3. Математическая модель движения по транспортной сети

Сформулируем математическую модель движения введенных выше  $I$  грузов по транспортной сети, задаваемой мультиграфом  $G$ , на основе множества транспортировок  $\mathcal{Z}$ . Под маршрутом груза с номером  $i$  будем понимать набор номеров транспортировок, последовательно используемых этим грузом,  $i = \overline{1, I}$ . Как следствие, по маршруту можно определить набор вершин, последовательно пересекаемых этим грузом. Ограничим максимальное число транспортировок в маршруте в рамках горизонта планирования некоторым заранее заданным числом  $J$ . Под  $j$ -м этапом маршрута груза с номером  $i$  будем понимать движение этого груза, когда используется  $j$ -я по порядку использования транспортировка,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J + 1}$ . Будем называть вершину промежуточной для  $i$ -го груза, если она не является для него ни вершиной отправления, ни вершиной назначения,  $i = \overline{1, I}$ .

Введем вспомогательные переменные  $\delta_{i, j, k}$ , характеризующие использование грузом с номером  $i$  транспортировки с номером  $k$  на  $j$ -м этапе,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J + 1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Переменная  $\delta_{i, j, k}$  равна нулю, если транспортировка с номером  $k$  не используется  $i$ -м грузом на  $j$ -м этапе, и 1 — в противоположном случае.

Теперь сформулируем множество допустимых стратегий.

По определению переменных  $\delta_{i, j, k}$  имеем

$$(1) \quad \delta_{i, j, k} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J + 1}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Используем ограничения из [15, 16], которые задают движение исключительно по смежным вершинам графа  $G$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i, j, k} v_k^{\text{кон.}} \leq \sum_{k=1}^K \delta_{i, j+1, k} v_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i, j+1, k}\right) M^3, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J-1},$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i, j, k} v_k^{\text{кон.}} \geq \sum_{k=1}^K \delta_{i, j+1, k} v_k^{\text{нач.}} - \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i, j+1, k}\right) M, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J-1}.$$

Согласно [15] если для некоторого  $\tilde{i} \in \{1, \dots, I\}$  и некоторого  $\tilde{j} \in \{1, \dots, J\}$  справедливо

$$\sum_{k=1}^K \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}, k} = 0, \quad \text{то} \quad \sum_{k=1}^K \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}+1, k} = 0, \quad j = \overline{\tilde{j}, J}.$$

Если же

$$\sum_{k=1}^K \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}, k} = 1, \quad \text{то} \quad \sum_{k=1}^K \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}+1, k} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^K \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}+1, k} = 1.$$

Поскольку этапов для движения может быть не более  $J$ , введем ограничение

$$(4) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \delta_{i, J+1, k} = 0.$$

Так как груз неделим, то на любом этапе (в том числе первом) можно использовать максимум одну транспортировку

$$(5) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k} \leq 1, \quad i = \overline{1, I}.$$

Если перевозка груза начинается, то она должна быть осуществлена из соответствующей вершины отправления

$$(6) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k} v_k^{\text{нач.}} = v_i^{\text{отпр.}} \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Груз может быть не отправлен, если время готовности к отправлению в сумме с максимальным количеством времени пребывания в вершине отправления выходят за пределы горизонта планирования. В противном случае нужно отправить груз не позднее максимального количества времени в вершине отправления с момента готовности. Поэтому наложим ограничения

$$(7) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k}\right) T_{\text{макс.}} \leq t_i^{\text{отпр.}} + d_i, \quad i = \overline{1, I}.$$

Для того чтобы отправить груз не ранее момента готовности, введем ограничение

$$(8) \quad t_i^{\text{отпр.}} \leq \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k}\right) T_{\text{макс.}}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Запретим грузу выходить из вершины и входить в вершину более чем один раз

$$(9) \quad \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k: v_k^{\text{нач.}}=m, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} \leq 1, \quad i = \overline{1, I}, \quad m = \overline{1, M},$$

$$(10) \quad \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k: v_k^{\text{кон.}}=m, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} \leq 1, \quad i = \overline{1, I}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Отправление в промежуточных вершинах маршрута не должно происходить раньше прибытия в эти вершины. Поэтому с учетом ограничений на минимальное и максимальное время стоянки, имеем

$$(11) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. мин.}}) \leq \\ \leq \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} t_k^{\text{нач.}} + \left( 1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} \right) \underline{T}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J-1},$$

где

$$(12) \quad \underline{T} = \max_{i \in \{1, \dots, I\}, k \in \{1, \dots, K\}} t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. мин.}}, \\ \sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс.}}) \geq \\ \geq \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} t_k^{\text{нач.}}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J-1}.$$

Ограничения (11) идентичны ограничениям из [15, 16], однако произведена замена  $2T_{\text{макс.}}$  на  $\underline{T}$ . Данная замена требуется в связи с тем, что в рассматриваемой модели перевозок для некоторого  $k \in \{1, \dots, K\}$  может оказаться  $t_k^{\text{кон.}} > T_{\text{макс.}}$ . Ограничения (12) аналогичны использованным в [15, 16] с учетом того, что контроль времени стоянки требуется только в промежуточных вершинах маршрута.

В [15, 16] не учитывался тот факт, что отправление не обязано прибыть в пункт назначения в рамках горизонта планирования. Поэтому, если предполагается, что груз будет стоять в некоторой промежуточной вершине в момент окончания горизонта планирования, необходимо гарантировать допустимость такой стоянки

$$(13) \quad \sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} - T_{\text{макс.}}) + \\ + T_{\text{макс.}} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} \geq 0, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Также необходимо запретить дальнейшее движение груза после прибытия в пункт назначения. С этой целью введем ограничения

$$(14) \quad \sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k} \leq 2 \left( 1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} \right), \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Введем величину  $\hat{T}_{i,j}$  — количество времени, проводимого грузом с номером  $i$  в  $j$ -й (по порядку следования) промежуточной вершине своего маршрута в рамках горизонта планирования

$$(15) \quad \hat{T}_{i,j} = \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} (t_k^{\text{нач.}} - T_{\text{макс.}}) + \\ + \sum_{k: v_k^{\text{кон.}} \neq v_i^{\text{приб.}}, t_k^{\text{кон.}} < T_{\text{макс.}}, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} (T_{\text{макс.}} - t_k^{\text{кон.}}), \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Для удобства формулирования математической модели также положим  $\hat{T}_{i,j+1} = 0$ .

Введем новые переменные  $\mathcal{F}_i$ , характеризующие ожидаемое количество времени, требуемого до прибытия в пункт назначения грузу с номером  $i$ , после окончания горизонта планирования

$$(16) \quad \mathcal{F}_i \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}} + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} \left( \tau_{v_k^{\text{кон.}}, v_i^{\text{приб.}}} - \tau_{v_k^{\text{нач.}}, v_i^{\text{приб.}}} \right) + \\ + \sum_{j=1}^J \sum_{k: t_k^{\text{кон.}} \geq T_{\text{макс.}}, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} - T_{\text{макс.}}), \quad i = \overline{1, I}.$$

Движение грузов должно осуществляться с учетом ожидаемого времени до прибытия в пункт назначения. Например, продолжительное пребывание в промежуточных вершинах в маршруте должно быть возможно, когда подобная стратегия не приведет к тому, что время пребывания груза в транспортной системе будет превышено. В этой связи введем ограничения

$$(17) \quad \mathcal{F}_i + \sum_{j=1}^J \sum_{k: t_k^{\text{кон.}} < T_{\text{макс.}}, v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} - T_{\text{макс.}}) + \\ + \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} (T_{\text{макс.}} - t_k^{\text{нач.}}) \leq T_i + \left( 1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} \right) \eta_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Если требуется жесткое задание набора вершин, пересекаемых грузом, можно добавить соответствующие ограничения из [15].

Теперь введем переменные  $\omega_i$ , характеризующие, прибыл ли груз с номером  $i$  в пункт назначения в рамках горизонта планирования: 0 — прибыл, 1 — не прибыл

$$(18) \quad \omega_i = 1 - \sum_{j=1}^J \sum_{k: t_k^{\text{кон.}} < T_{\text{макс.}}, v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Прокомментируем введенные ограничения. Рассмотрим груз с номером  $i^* \in \{1, \dots, I\}$ .

Рассмотрим (13)–(15). Для этого вначале отметим, что возможны несколько случаев (выберем  $j^* \in \{1, \dots, J\}$ ):

- 1) при движении груза с номером  $i^*$  этап с номером  $j^*$  не задействован;
- 2) при движении груза с номером  $i^*$  этап с номером  $j^*$  задействован, груз не прибыл в пункт назначения, этап с номером  $j^* + 1$  не задействован;
- 3) при движении груза с номером  $i^*$  этап с номером  $j^*$  задействован, груз не прибыл в пункт назначения, этап с номером  $j^* + 1$  задействован;
- 4) при движении груза с номером  $i^*$  этап с номером  $j^*$  задействован, по окончании этапа груз прибыл в рамках горизонта планирования или прибывает после окончания горизонта планирования в пункт назначения.

В случае 1)  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*, j^*, k} = 0$ . В виду ограничений (1)

$$\sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*, j^*, k} = \sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*, j^*, k} = 0,$$

а из-за ограничений (2), (3)  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*, j^*+1, k} = 0$ . Поэтому (13), (14) выполняются.

Величина  $\hat{T}_{i^*, j^*}$  окажется равной нулю.

В случае 2)

$$\sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*, j^*, k} = 1, \quad \sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*, j^*, k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^K \delta_{i^*, j^*+1, k} = 0.$$

Ограничение (14) выполняется, так как его левая часть окажется равной нулю, а правая — двум. Если груз, не прибыв в пункт назначения, находится в момент окончания горизонта планирования в движении, то ограничение (13)

выполнится автоматически. Это связано с тем, что время окончания транспортировки будет не меньше  $T_{\max}$ . При этом величина  $\hat{T}_{i^*,j^*}$  окажется равной нулю, что логично, так как остановка, если таковая будет, в  $j^*$ -й промежуточной по порядку следования вершине произойдет уже после горизонта планирования. Если же груз, не прибыв в пункт назначения, стоит в момент окончания горизонта планирования, то ограничение (13) будет гарантировать допустимость стоянки по крайней мере до конца горизонта планирования. Переменная  $\hat{T}_{i^*,j^*}$  будет равна времени стоянки в  $j^*$ -й промежуточной по порядку следования вершине в рамках горизонта планирования.

В случае 3)

$$\sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*,j^*,k} = 1, \quad \sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*,j^*,k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j^*+1,k} = 1.$$

Ограничение (14) выполняется, так как его левая и правая часть окажется равной нулю. Ограничение (13) выполнится по определению, так как для всех  $i = \overline{1, I}$ ,  $k = \overline{1, K}$  по условию  $t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} \geq 0$ . Величина  $\hat{T}_{i^*,j^*}$  окажется равной разности между временем отправления и временем прибытия в  $j^*$ -ю промежуточную по порядку следования вершину.

В случае 4)

$$\sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*,j^*,k} = 0, \quad \sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*,j^*,k} = 1.$$

Ввиду ограничений (2), (3)  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j^*+1,k}$  может быть равна либо нулю, либо единице. Ограничения (13) выполняются в любом из указанных вариантов.

Если  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j^*+1,k}$  равна нулю, то ограничение (14) выполняется. Величина  $\hat{T}_{i^*,j^*}$  будет равна нулю, что соответствует смыслу введенной переменной, так как у груза будет только  $j^* - 1$  промежуточных вершин. Если же  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j^*+1,k}$  равна единице, то ограничение (14) не выполняется. Значит, такой вариант недопустим. Это соответствует здравому смыслу, так как в случае прибытия в пункт назначения, не имеет смысла перевозить груз дальше.

Теперь обсудим (16)–(18). Если груз с номером  $i^*$  не отправляется из пункта отправления, то  $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,1,k} = 0$ . Как следствие, из ограничений (2),

$$(3) \sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j,k} = 0, \quad j = \overline{2, J}. \text{ Значит, } \mathcal{F}_{i^*} \text{ будет равна ожидаемому времени в}$$

пути из вершины отправления в вершину назначения. Если будет использовано ровно  $\bar{j} \in \{1, \dots, J\}$  транспортировок, то суммирование первой и второй компоненты  $\mathcal{F}_{i^*}$  даст  $\tau_{v_{k^*}^{\text{кон.}}, v_{i^*}^{\text{приб.}}}$ , где  $k^*$  — номер  $\bar{j}$ -й по порядку использования транспортировки груза с номером  $i^*$ . Иными словами, получится ожидаемое количество времени, которое требуется грузу для прибытия в вершину с индексом  $v_{i^*}^{\text{приб.}}$  из вершины с индексом  $v_{k^*}^{\text{кон.}}$ . Если груз по окончании горизонта планирования находится в движении, то третья компонента  $\mathcal{F}_{i^*}$  окажется ненулевой и будет характеризовать время, которое потребуется грузу до прибытия в вершину с индексом  $v_{k^*}^{\text{кон.}}$  после окончания горизонта планирования.

Если груз не отправлен в рамках горизонта планирования, то вторая и третья компоненты левой части неравенства (17) равны нулю. В этом случае требуется, чтобы ожидаемое время прибытия из вершины отправления в вершину назначения было не больше допустимого времени нахождения на графе суммарно с ожидаемым временем от момента готовности до момента отправления. Если груз отправлен и доставлен в рамках горизонта планирования, то  $\mathcal{F}_{i^*} = 0$ , а суммирование второй и третьей компоненты левой части неравенства даст время между окончанием движения груза и началом движения груза. Если груз отправлен, но не доставлен в рамках горизонта планирования, то вторая компонента неравенства (17) равна нулю, а  $\mathcal{F}_{i^*}$  будет складываться суммарно с количеством времени, которое груз уже находится на сети после отправления из вершины отправления.

Если на каком-то этапе груз с номером  $i^*$  прибыл в вершину назначения, причем этап был закончен до окончания горизонта планирования, тогда  $\omega_i^* = 1$ . В противном случае окажется  $\omega_i^* = 0$ .

Необходимость не превысить максимально допустимый вес при транспортировке с номером  $k$  приводит к ограничениям

$$(19) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J+1} \delta_{i,j,k} w_i \leq W_k, \quad k = \overline{1, K}.$$

Отметим, что ограничения (1)–(19) могут оказаться несовместными, а значит, множество допустимых стратегий, задаваемое этими ограничениями, пусто. Такой случай может возникнуть, например, когда транспортировки между вершинами слишком медленные. Для того чтобы гарантировать совместность ограничений (1)–(19), можно потребовать выполнение условий

$$(20) \quad t_i^{\text{отпр.}} + d_i \geq T_{\text{макс.}}, \quad \tau_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}} \leq T_i + \eta_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Если эти условия выполнены, то каждый груз имеет возможность остаться в вершине отправления в рамках горизонта планирования. Однако даже если условия (20) нарушаются, это не означает, что ограничения (1)–(19) обязательно несовместны.

#### 4. Критерий для формирования плана грузоперевозок

Сформулируем критерий для поиска оптимального расписания

$$\begin{aligned}
 & c_1 \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} (\min\{t_k^{\text{кон.}}, T_{\text{макс.}}\} - t_k^{\text{нач.}})}_{\text{суммарное время в движении в рамках горизонта планирования}} + c_2 \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J+1} \hat{T}_{i,j}}_{\text{суммарное время стоянки в промежуточных вершинах}} + \\
 & + c_3 \underbrace{\sum_{i=1}^I \left( \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач.}} + \left( 1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} \right) T_{\text{макс.}} - t_i^{\text{отпр.}} \right)}_{\text{суммарное время стоянки в вершинах отправления с момента готовности к отправлению}} + \\
 & + c_4 \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} w_i C_k}_{\text{суммарная стоимость транспортировок}} + c_5 \underbrace{\sum_{i=1}^I \mathcal{F}_i}_{\text{суммарное ожидаемое время до доставки}} + c_6 \underbrace{\sum_{i=1}^I \omega_i}_{\text{суммарное количество недоставленных грузов в рамках горизонта планирования}} \rightarrow \\
 & \rightarrow \min_{\delta_{i,j,k}, \hat{T}_{i,j} \geq 0, \hat{T}_{i,J+1} = 0, \mathcal{F}_i \geq 0, \omega_i \in \{0,1\}, i=\overline{1,I}, j=\overline{1,J+1}, k=\overline{1,K}},
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

при ограничениях (1)–(19), где  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  — некоторые неотрицательные числа. Отметим, что, с одной стороны, требование неотрицательности переменных  $\mathcal{F}_i, \hat{T}_{i,j}$  избыточно, так как эти переменные неотрицательны по определению,  $i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}$ . Более того, ввиду ограничений (16), (17) сами эти переменные избыточны — их можно заменить на другие участвующие в оптимизации переменные, причем при замене получится задача целочисленного линейного программирования. Однако, с другой стороны, непосредственное наличие этих переменных и ограничение на их неотрицательность позволяет в некоторых задачах ускорить поиск оптимального решения. И, кроме того, использование этих переменных позволяет сделать запись критериальной функции лаконичнее и понятнее.

Под  $r$ -й компонентой критерия будем понимать множитель числа  $c_r$  в (21),  $r = \overline{1, 6}$ .

При различных значениях чисел  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  получается целый спектр различных прикладных задач. При  $c_1 = \dots = c_5 = 0, c_6 = 1$  имеем задачу по минимизации количества недоставленных в рамках горизонта планирования грузов, или, иными словами, задачу о максимизации количества перевезенных грузов. При  $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0, c_4 = 1$  получаем задачу по минимизации стоимости перевозок. При  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_6 = 0, c_5 = 1$

имеем задачу по минимизации суммарного ожидаемого времени до прибытия грузов в соответствующие пункты назначения. При  $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = 1$ ,  $c_4 = c_6 = 0$  получаем задачу по минимизации суммарного прошедшего и ожидаемого оставшегося времени в пути. При  $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ ,  $c_4 = c_5 = c_6 = 0$  имеем задачу по минимизации суммарного количества времени на стоянках и в движении в рамках горизонта планирования. Возможно использование и других комбинаций чисел  $c_1, \dots, c_6$  [15]. Следует отметить, что не все компоненты критерия имеют одинаковую размерность и порядок значений: первая, вторая, третья, пятая компоненты измеряются в минутах, четвертая — в единицах стоимости, шестая — в штуках. Для учета разной природы компонент критерия можно, например, дополнительно вводить ограничения на их значения. Например, количество перевезенных грузов должно быть не меньше 10. Некоторые ограничения возникают из логики конкретной задачи. К примеру, бюджетное ограничение — суммарная стоимость перевозок не должна превышать имеющийся бюджет перевозок. Его можно ввести дополнительно.

Следует отметить, что представленная математическая модель движения прежде всего предназначена для задачи перевозки тех или иных грузов (посылок, контейнеров) различными транспортными средствами (самолетами, поездами и др.). А именно представленная модель позволяет «привязать» тот или иной груз к тому или иному транспортному средству и назначить время перевозки грузу. При этом представленную модель можно использовать и для формирования расписания движения самих транспортных средств. Так, например, при помощи предложенной модели можно формировать расписание движения грузовых поездов: в терминологии настоящей статьи грузом станет грузовой поезд, транспортным средством — локомотив, а понятие транспортировка будет синонимично «поднитке». Масса поезда будет полагаться единице, как и максимальный вес при той или иной транспортировке. При этом предложенную модель можно использовать и для других отраслей транспорта, добавляя при необходимости те или иные ограничения из конкретной предметной области. Отсюда резюмируем, что предложенная математическая модель движения по графу и критерий формируют универсальную постановку задачи грузоперевозок.

## 5. Алгоритм для нахождения начального/приближенного решения

Ввиду возможной высокой размерности задачи (21) при ограничениях (1)–(19) предложим следующий алгоритм для нахождения начального/приближенного решения поставленной задачи. Алгоритм основывается на последовательном решении задачи (21) с ограничением (1)–(19) для некоторого набора грузов.

1. Множество номеров грузов расщепляется на  $S$  непересекающихся подмножеств  $\mathcal{I}_s$ , т.е.  $\{i \in \mathbb{N} : i \leq I\} = \bigcup_{s=1}^S \mathcal{I}_s$ , причем  $\forall s_1 \in \overline{1, S}, s_2 \in \overline{1, S} : s_1 \neq s_2$   
 $\mathcal{I}_{s_1} \cap \mathcal{I}_{s_2} = \emptyset$ .

2. Инициализируется параметр  $s = 1$ .

3. Решается задача

$$\begin{aligned}
 & c_1 \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} (\min\{t_k^{\text{коп.}}, T_{\text{макс.}}\} - t_k^{\text{нач.}}) + c_2 \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \hat{T}_{i,j} + \\
 & + c_3 \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \left( \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач.}} + \left( 1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} \right) T_{\text{макс.}} - t_i^{\text{отпр.}} \right) + \\
 & + c_4 \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} w_i C_k + c_5 \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \mathcal{F}_i + \\
 & + c_6 \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \omega_i \rightarrow \min_{\delta_{i,j,k}, \hat{T}_{i,j} \geq 0, \hat{T}_{i,J+1} = 0, \mathcal{F}_i \geq 0, \omega_i \in \{0,1\}, i \in \mathcal{I}_s, j = \overline{1, J+1}, k = \overline{1, K}}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

при ограничениях (1)–(18) и ограничениях

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \delta_{i,j,k} w_i \leq W_k - \sum_{\substack{s=1 \\ i \in \bigcup_{p=1}^{s-1} \mathcal{I}_p}} \sum_{j=1}^{J+1} \tilde{\delta}_{i,j,k} w_i, \quad k = \overline{1, K}.$$

Если решение этой задачи существует, то задаются величины  $\tilde{\delta}_{i,j,k}$  равные единице, если груз с номером  $i$  на этапе с номером  $j$  использует транспортровку с номером  $k$ , и нулю иначе,  $i \in \mathcal{I}_s$ ,  $j = \overline{1, J+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Происходит переход к шагу 4. Если решение задачи (22) при ограничениях (1)–(18), (23) не существует, то процедура поиска приближенного решения завершена неуспешно.

4. Если  $s < S$ , то  $s$  увеличивается на единицу и происходит переход к шагу 3. Если  $s = S$ , то процедура поиска приближенного решения завершена успешно.

Если  $S = 1$ , то предложенный алгоритм позволит найти точное решение, поскольку в этом случае решается непосредственно задача (21) при ограничениях (1)–(19). Если  $S > 1$ , то гарантировать оптимальность в задаче (21) при ограничениях (1)–(19) полученного при помощи алгоритма решения нельзя. В некоторых случаях может оказаться, что решение непосредственно задачи (21) при ограничениях (1)–(19) находится быстрее, чем приближенное решение при помощи алгоритма. Однако, как будет показано в дальнейшем в примере, использование алгоритма в ряде случаев позволяет быстро найти допустимое решение в задаче (21) при ограничениях (1)–(19) с приемлемым значением критерия (порядка 5–10% увеличения значения критерия относительно критерия на оптимальном решении).

В примере также будет продемонстрирован случай, когда представленный выше алгоритм завершается неуспешно, т.е. допустимое решение в задаче (21)

при ограничениях (1)–(19) при работе алгоритма не было найдено. В общем случае неуспешное завершение алгоритма может быть вызвано как исходной несовместностью ограничений (1)–(19), так и спецификой построения приближенного решения, когда расписание ищется итерационно для групп грузов. Для гарантированно успешного завершения алгоритма можно потребовать выполнения условий (20). Другим способом получения решения по отправке хотя бы какого-то количества грузов является использование другого алгоритма, отличающегося от представленного выше тем, что на шаге 3 при отсутствии решения алгоритм не прекращает свою работу. Опишем два способа построения такого алгоритма. В первом способе при отсутствии решения на шаге 3 происходит вычеркивание грузов, которым не удалось построить расписание, из списка перевозок, т.е. происходит отказ в перевозке для данных грузов. Подобный подход использовался, например, в [4, 7]. Вторым способом является использование величин  $T_i$ ,  $d_i$  в задаче (22) при ограничениях (1)–(18), (23) не в качестве фиксированных, а в качестве переменных оптимизации,  $i \in \mathcal{I}_s$ . В этом случае получится как минимум одно решение — остаться в вершине отправления в рамках горизонта планирования. Отметим, что предложенные модификации, вообще говоря, требуют изменения начальных данных, поэтому в дальнейшем в примере они не используются.

Аналогично [15, 16] предложим несколько вариантов предложенного алгоритма. *Алгоритмом по направлению* (алгоритмом 1) будем называть такой алгоритм, в котором на 1-м шаге дробление происходит по принципу нахождения во множествах  $\mathcal{I}_s$  номеров грузов, у которых одинаковые вершины отправления, а также одинаковые вершины назначения,  $s = \overline{1, S}$ . Чем меньше элементов во множестве, тем меньше номер этого множества. *Алгоритмом по наименьшему/наибольшему времени* (алгоритмом 2.1/алгоритмом 2.2) будем называть такой алгоритм, при котором на 1-м шаге дробление происходит по возрастанию/убыванию времени готовности грузов к отправлению. А именно множество  $\mathcal{I}_1$  будет состоять из номера груза с самым ранним/поздним временем готовности к отправлению,  $\mathcal{I}_2$  — со вторым/предпоследним и так далее.

## 6. Пример

Рассмотрим задачу формирования грузовых перевозок на участке железнодорожной сети из [15, 16]. Ввиду большого количества исходных данных для лаконичности изложения приведем лишь значения параметров из настоящей постановки задачи, которые не использовались при построении модели движения по графу в [15, 16]:  $C_k = 2$ ,  $W_k = 1$ ,  $w_i = 1$ ,  $i = \overline{1, 62}$ ,  $k = \overline{1, 1249}$ . Значения величин  $\tau_{m_1, m_2}$  зададим как минимальное время в пути до вершины с индексом  $m_2$  при отправлении из вершины  $m_1$  через 360 мин от начала отсчета (по сути в 6 утра),  $m_1, m_2 = \overline{1, 42}$ . Если допустимых транспортировок не оказывается, то  $\tau_{m_1, m_2}$  полагаем равной 4000,  $m_1, m_2 = \overline{1, 42}$ . Для простоты будем предполагать, что  $\eta_{m_1, m_2} = 0$ ,  $m_1, m_2 = \overline{1, 42}$ . В [15, 16] вводились

только первые 3 компоненты критерия, поэтому для сравнимости результатов в настоящей постановке задачи и [15, 16] положим  $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ ,  $c_4 = c_5 = c_6 = 0$ . При таком задании чисел  $c_1, \dots, c_6$  критериальная функция в (21) и в [15, 16] совпадают. Отметим, что хотя формально величины  $W_k$ ,  $w_i$ ,  $i = \overline{1, 62}$ ,  $k = \overline{1, 1249}$  в [15, 16] не использовались, при приведенных выше значениях этих величин ограничения на максимальный вес (19) идентичны ограничениям на максимальное количество поездов, использующих одну «поднитку», из [15, 16]. А при заданных значениях чисел  $c_1, \dots, c_6$  величины  $C_k$  никак в оптимизации не участвуют,  $k = \overline{1, 1249}$ . Таким образом, главным отличием настоящей постановки задачи от постановки в [15, 16] является то, что прибытие в пункты назначения в [15, 16] должно случиться обязательно в рамках горизонта планирования, в то время как в настоящей постановке это может и не произойти. Условия (20) нарушаются.

По итогам численного эксперимента оказалось, что алгоритмы 1 и 2.1 завершились успешно, алгоритм 2.2 — нет. Оптимальное значение критериальной функции в (21) на решении, полученном при помощи алгоритма 1/алгоритма 2.1, составило 26 951/27 790. Значение критерия в [16] на решениях по алгоритмам 1 и 2 из этой же работы, которые аналогичны алгоритмам 1 и 2.1 соответственно — 26 951 и 27 755. Решение и по алгоритму 1, и по алгоритму 2.1 таково, что все поезда прибывают в соответствующие пункты назначения в рамках горизонта планирования, хотя, повторимся, это и не было обязательным требованием. Маршруты для поездов по алгоритмам из настоящей статьи и по их аналогам из [16] совпали частично. Некоторое ухудшение значения критерия в (21) на решении по алгоритму 2.1 относительно значения критерия в [16] на решении по алгоритму 2 вызвано тем, что в настоящей постановке задачи в каждой вершине, в которой находится груз, производится контроль времени до прибытия в вершину назначения. Однако более важной причиной является то, что потенциально в задаче (22) при ограничениях (1)–(18), (23) оптимум не единственный. При этом от выбора конкретного решения на  $s$ -м шаге зависит движение грузов, для которых расписание будет находиться далее — на  $s + 1$ ,  $s + 2$ ,  $\dots$ ,  $S$  шагах любого варианта алгоритма. Таким образом, следует проводить дополнительную оптимизацию среди оптимальных решений в задаче (22) при ограничениях (1)–(18), (23). Однако формализация критерия такой оптимизации нетривиальна и представляет отдельный научный интерес.

Заметим, что если рассмотреть даже не все грузы, а их часть, например, первые 15 грузов (т.е. грузы с номерами 1, 2,  $\dots$ , 15) из списка перевозок, то оптимальное решение в задаче (21) при ограничениях (1)–(19) за 2 ч счета не находится. В этой связи для данного примера сделать вывод о точности полученного приближенного решения, к сожалению, невозможно.

Время поиска решения по алгоритму 1/алгоритму 2.1 составило 45,5/9,5 мин. Следует отметить деградацию времени поиска решения по алгоритму 1 в сравнении с [15, 16]. Это вызвано тем, что в рамках поставленной задачи появились дополнительные возможности: не отправляться из пункта

назначения, не прибыть в пункт назначения по окончании горизонта планирования. При этом для алгоритма 2.1 расход времени увеличился несущественно.

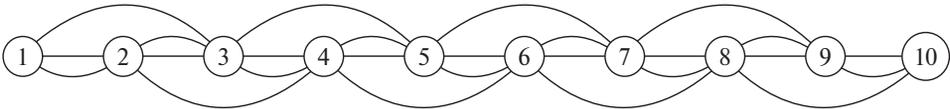
Проанализируем теперь время работы алгоритма 2.1 в зависимости от количества грузов, планируемых к перевозке. Выберем 5, 10, 15, ..., 55, 60 первых грузов из списка перевозок и вычислим для каждого случая время работы алгоритма 2.1 в минутах.

**Таблица 1.** Время работы алгоритма 2.1 в минутах

Количество грузов к перевозке	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Время работы алгоритма	0,71	1,51	2,65	3,13	4,16	4,8	6,97	6,73	7,28	8	8,5	9,1

Как следует из представленных результатов, увеличение количества грузов не обязательно ведет к увеличению времени счета. Этот факт вызван тем, что добавление каждого нового груза к списку перевозок запускает цепную реакцию и приводит к полному пересчету расписания ввиду того, что согласно алгоритму 2.1 расписание в первую очередь ищется для груза с минимальным временем готовности к отправлению, а не для груза с минимальным номером. Исходный же список перевозок не является отсортированным по возрастанию времени готовности к отправлению. При этом добавление каждых 5 новых грузов для расчета, как правило, приводит к увеличению времени работы алгоритма на 0,5–1,5 мин.

Рассмотрим другой пример, который является модельным. Пусть транспортная сеть имеет следующий вид



Мультиграф  $G$  транспортной сети.

Нумерация путей на рисунке опущена. Если две смежные вершины соединены двумя ребрами, т.е. двумя путями, то ребро, представляемое прямой линией, имеет номер 1, в ином случае — 2.

Положим  $T_{\text{макс.}} = 1440$  мин. Выбран некоторый момент отсчета. Начиная с момента отсчета:

- каждые 60 мин в вершине с индексом 1 появляется по 10 грузов одинакового веса в 1 единицу, эти грузы требуется перевезти в вершину с индексом 10;
- каждые 60 мин из вершины с индексом  $m$  в вершину с индексом  $m + 1$  по пути номер 2 отправляется некоторое транспортное средство, которое может перевезти не более 5 единиц веса, стоимость транспортировки

составляет 3 условные единицы за единицу веса, время транспортировки — 120 мин,  $m = \overline{1,9}$ .

- каждые 60 мин из вершины с индексом  $m$  в вершину с индексом  $m + 1$  по пути номер 1 отправляется некоторое транспортное средство, которое может перевезти не более 5 единиц веса, стоимость транспортировки составляет 9 условных единиц за единицу веса, время транспортировки — 60 мин,  $m = \overline{1,9}$ .
- каждые 60 мин из вершины с индексом  $m$  в вершину с индексом  $m + 2$  отправляется некоторое транспортное средство, которое может перевезти не более 5 единиц веса, стоимость транспортировки составляет 81 условных единиц за единицу веса, время транспортировки — 60 мин,  $m = \overline{1,8}$ .

Именно такой выбор стоимостей транспортировок был вызван тем, что более быстрая транспортировка по одному и тому же направлению должна стоить дороже. Максимальное время каждого груза в пути с момента начала движения — 1 сут.

Положим  $\tau_{m_1, m_2} = 60|m_2 - m_1|$ ,  $m_1 = \overline{1,10}$ ,  $m_2 = \overline{1,10}$ . Такой выбор вызван тем, что время в пути между смежными вершинами мультиграфа  $G$  может составлять 60 мин,  $m_1, m_2 = \overline{1,10}$ . Предположим, что  $\eta_{m_1, m_2} = 0$ ,  $m_1, m_2 = \overline{1,10}$ .

Учитывая вышесказанное, получается  $I = 240$ ,  $K = 624$ . Положим  $d_i = 180$ ,  $t_{i,k}^{\text{ст. мин.}} = 0$  и  $t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} = 120$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Поскольку максимальное количество транспортировок, которые нужны при перемещении из вершины с индексом 1 в вершину с индексом 10, равно девяти, то положим  $J = 9$ . Условия (20) не выполняются.

Проиллюстрируем работу алгоритмов 1, 2.1 и 2.2 при различных значениях чисел  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ . Предварительно отметим, что алгоритм 1 продуцирует точное решение, так как в исследуемой задаче у всех грузов совпадают вершины отправления, а также вершины назначения.

Жирным шрифтом в табл. 2 выделены значения критериальной функции в (21) на том или ином решении.

Как следует из табл. 2, иногда поиск точного решения занимает примерно столько же времени, сколько и поиск приближенного. Но в некоторых случаях ( $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0$ ,  $c_4 = 1$ ;  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_6 = 0$ ,  $c_5 = 1$ ;  $c_1 = \dots = c_5 = 0$ ,  $c_6 = 1$ ) приближенное решение находится в разы быстрее. При этом для любого из рассмотренных вариантов чисел  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  поиск приближенного решения стабильно занимает 6–7 мин. Как правило, алгоритм 2.2 точнее алгоритма 2.1. Погрешность наилучшего из приближенных решений составляет порядка 5–10% относительно точного. При задаче минимизации стоимости перевозок велико время перевозок, так как дешевые перевозки длительны по времени. И, напротив, в задаче максимизации числа доставленных грузов растет стоимость перевозок. Задача по минимизации ожидаемого оставшегося времени до прибытия в пункты назначения ожидае-

Таблица 2. Результаты численного эксперимента

Решение	Параметры критерия						Компоненты критерия						Время поиска решения, мин
	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	1	2	3	4	5	6	
Точное							61 440	2460	2100	65 151	22 140	50	6,75
Алгоритм 2.1	1	1	1	0	0	0	64 200	6000	6600	54 510	29 700	60	7
Алгоритм 2.2							63 900	1800	6000	57 990	27 300	55	6,5
Точное							66 000	0	0	73 260	10 800	50	6,85
Алгоритм 2.1	1	1	1	0	1	0	71 100	4800	2100	63 645	15 300	65	7
Алгоритм 2.2							71 400	0	0	67 365	11 700	55	6,5
Точное							82 740	62 760	33 060	<b>3615</b>	83 160	235	183,5
Алгоритм 2.1	0	0	0	1	0	0	76 200	66 300	37 500	<b>3855</b>	84 600	240	6,5
Алгоритм 2.2							116 700	34 500	9300	<b>5955</b>	60 000	190	7
Точное							86 940	15 180	1620	60 165	<b>10 800</b>	55	73,15
Алгоритм 2.1	0	0	0	0	1	0	87 600	42 600	12 600	47 355	<b>23 700</b>	130	6
Алгоритм 2.2							81 300	17 100	0	60 105	<b>11 700</b>	60	6,5
Точное							80 460	13 860	5700	49 209	25 140	<b>50</b>	250,3
Алгоритм 2.1	0	0	0	0	0	1	73 500	41 700	30 000	31 200	52 500	<b>125</b>	5,65
Алгоритм 2.2							73 800	18 000	6300	49 815	27 900	<b>55</b>	6,25

мо приводит к тому, что большинство грузов (для решений по алгоритмам 1 и 2.2) прибывает в вершины назначения в рамках горизонта планирования.

Отдельно следует отметить, что время работы алгоритмов существенно зависит не только от размера матрицы ограничений, но и от ее содержимого. Так, например, иногда некоторый набор ограничений может быть вычеркнут из матрицы ограничений в силу их избыточности. В таком случае размерность задачи снизится. Однако ввиду большого количества входных данных априорно высказать предположение о количестве таких исключений и (не)большом времени счета алгоритмов представляется затруднительным.

Все численные эксперименты проводились при помощи математического пакета ILOG CPLEX 12.5.1 на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 8 GB DDR3 RAM).

## 7. Заключение

В настоящей работе была сформулирована задача формирования расписания в общей постановке. С этой целью была предложена новая математическая модель движения по мультиграфу транспортной сети, задающаяся в виде системы линейных ограничений. Был предложен универсальный критерий оптимизации, позволяющий при различных значениях параметров получать важные прикладные задачи, например, задачу минимизации стоимости перевозок или же задачу максимизации количества доставленных в рамках

горизонта планирования грузов. В работе были предложены алгоритмы для поиска приближенного решения в поставленной задаче. Основной идеей этих алгоритмов является декомпозиция задачи путем поиска расписания последовательно для некоторых групп грузов. Использование такой декомпозиции не всегда приводит к точному или хотя бы допустимому решению. Однако благодаря декомпозиции в ряде задач с порядка 1–1,5 млн бинарных переменных оказалось возможным за относительно небольшое время находить допустимое решение с точностью в некоторых случаях 5–10%. Отличительной чертой предложенной модели движения по мультиграфу транспортной сети является то, что допускается прибытие грузов и после горизонта планирования, если прогнозируется, что доставка будет выполнена вовремя. Данное обстоятельство открывает путь к еще одной декомпозиции — по дроблению горизонта планирования. А именно горизонт планирования можно расщепить на несколько частей и искать расписание движения грузов последовательно на каждой части горизонта планирования. Такая декомпозиция должна позволить формирование расписания для еще большего количества грузов/транспортных единиц при фиксированном времени счета.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mor A., Speranza M.G.* Vehicle routing problems over time: a survey // *Quart. J. Oper. Res.* 2020. V. 18. No. 2. P. 129–149.
2. *Vidal T., Crainic T.G., et. al.* A unified solution framework for multi-attribute vehicle routing problems // *Eur. J. Oper. Res.* 2014. V. 234. No. 3. P. 658–673.
3. *Boctor F.F., Laporte G., Renaud J.* Heuristics for the traveling purchaser problem // *Comput. Oper. Res.* 2003. V. 30. No. 4. P. 491–504.
4. *Cacchiani V., Caprara A., Toth P.* A column generation approach to train timetabling on a corridor // *4OR.* 2008. V. 6. No. 2. P. 125–142.
5. *Gao Yu., Kroon L., et. al.* Three-stage optimization method for the problem of scheduling additional trains on a high-speed rail corridor // *Omega.* 2018. V. 80. P. 175–191.
6. *Mu S., Dessouky M.* Scheduling freight trains traveling on complex networks // *Transport. Res. Part B: Methodologic.* 2011. V. 45. No. 7. P. 1103–1123.
7. *Forsgren M., Aronsson M., Gestrelus S.* Maintaining tracks and traffic flow at the same time // *J. Rail Transport Planning Management.* 2013. V. 3. No. 3. P. 111–123.
8. *Sama M., D’Ariano A., et. al.* A variable neighbourhood search for fast train scheduling and routing during disturbed railway traffic situations // *Comput. Oper. Res.* 2017. V. 78. P. 480–499.
9. *Meng L., Zhou X.* Simultaneous train rerouting and rescheduling on an N-track network: A model reformulation with network-based cumulative flow variables // *Transport. Res. Part B: Methodologic.* 2014. V. 67. P. 208–234.
10. *Lazarev A.A., Musatova E.G.* The problem of trains formation and scheduling: Integer statements // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 12. P. 2064–2068.
11. *Архипов Д.И., Лазарев А.А.* Минимизация максимального взвешенного временного смещения доставки заказов между двумя железнодорожными станциями // *АиТ.* 2016. № 12. С. 3–25.

*Arkhipov D.I., Lazarev A.A.* Minimizing the maximal weighted lateness of delivering orders between two railroad stations // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 12. P. 2091–2109.

12. *Буянов М.В., Иванов С.В. и др.* Развитие математической модели управления грузоперевозками на участке железнодорожной сети с учетом случайных факторов // Информатика и ее применения. 2017. Т. 11. № 4. С. 85–93.
13. *Буянов М.В., Наумов А.В.* Оптимизация функционирования подвижного состава при организации грузовых перевозок на участке железнодорожной сети // АиТ. 2018. № 9. С. 143–158.  
*Buyanov M.V., Naumov A.V.* Optimizing the Operation of Rolling Stock in Organizing Cargo Transportation at a Railway Network Segment // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 9. P. 1661–1672.
14. *Гайнанов Д.Н., Игнатов А.Н. и др.* О задаче назначения “технологического окна” на участках железнодорожной сети // АиТ. 2020. № 6. С. 3–16.  
*Gainanov D.N., Ignatov A.N., et al.* On track procession assignment problem at the railway network sections // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 967–977.
15. *Ignatov A.N.* On the scheduling problem of cargo transportation on a railway network segment and algorithms for its solution // Bull. South Ural State Univer. Ser. Mat. Model. Progr. 2021. V. 14. No. 3. P. 61–76.
16. *Босов А.В., Игнатов А.Н., Наумов А.В.* Алгоритмы приближенного решения задачи назначения «технологического окна» на участках железнодорожной сети // Информатика и ее применения. 2021. Т. 15. № 4. С. 3–11.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.*

Поступила в редакцию 29.03.2022

После доработки 25.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022