

# Стохастические системы

*Автор посвящает эту статью  
светлой памяти своего учителя и друга  
Бориса Теодоровича Поляка*

© 2023 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;  
Национальный исследовательский университет  
“Московский физико-технический институт”)

## СРАВНЕНИЕ ГАРАНТИРУЮЩЕГО И КАЛМАНОВСКОГО ФИЛЬТРОВ<sup>1</sup>

Предлагается новый подход к задаче фильтрации при произвольных ограниченных внешних возмущениях, основанный на ее сведении к задаче оптимизации. Подход обладает невысокой вычислительной сложностью, предполагая на каждом итерационном шаге лишь решение уравнений Ляпунова. При этом его преимуществами, существенными с инженерно-практической точки зрения, являются возможность ограничения величины матрицы фильтра, а также возможность строить оптимальные матрицы фильтра по каждой из координат вектора состояния системы в отдельности.

Выписан градиентный метод для отыскания матрицы фильтра. Как показывают примеры, предлагаемая рекуррентная процедура является весьма эффективной и приводящей к вполне удовлетворительным результатам. Статья продолжает серию работ, посвященную синтезу обратной связи в задачах управления с позиций оптимизации.

*Ключевые слова:* линейная система, внешние возмущения, фильтрация, фильтр Калмана, наблюдатель Люенбергера, оптимизация, уравнение Ляпунова, градиентный метод, метод Ньютона, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231023040050, EDN: CGBMY

### 1. Введение

Классическая постановка задачи фильтрации (т.е. оценки состояния динамической системы по измерениям) при случайных возмущениях допускает практически исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана [1]; см. подробнее монографию [2], а также [3]. Однако часто известно лишь, что все возмущения являются ограниченными, а в остальном произвольными; в этом

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30005), <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>

случае можно строить гарантирующие (а не вероятностные) оценки состояний. В начале 1970-х гг. в работах Швеппе [4], Куржанского [5] и Черноусько [6] была развита эллипсоидальная техника фильтрации. Позже в [7, 8] рассматривалась проблема фильтрации с ограниченными неслучайными возмущениями для стационарных задач: искалась оценка состояния такая, что ее ошибка гарантированно заключена в единый эллипсоид для всех моментов времени, т.е. оценка является равномерной, а сам фильтр искался в классе линейных стационарных фильтров. В этом классе задач и оценок проблема оказалась полностью разрешимой: удалось построить оптимальный фильтр и оценку состояния. С технической точки зрения в [7, 8] был применен аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) [9], а исходная задача сведена к параметрической задаче полуопределенного программирования. Систематическое изложение этой техники можно найти в монографии [10].

С другой стороны, в последнее время стал очень популярным подход к задачам управления линейными системами как к задачам оптимизации, однако обоснование подобных методов появилось лишь недавно, см. [11–15]. В [16] подобный подход был впервые применен к задачам с внешними возмущениями, в [17] — к задаче синтеза обратной связи по выходу при помощи наблюдателя, а в [18] — к задаче синтеза ПИД-регуляторов.

Настоящая статья, цель которой состоит в упрощении алгоритма вычисления гарантирующего фильтра и его численном сравнении с фильтром Калмана, продолжает обе эти линии исследований. В ней предлагается оптимизационный алгоритм решения задачи фильтрации при неслучайных ограниченных внешних возмущениях. Он обладает невысокой вычислительной сложностью, предполагая на каждом итерационном шаге лишь решение уравнений Ляпунова. При этом существенным с инженерно-практической точки зрения преимуществом предлагаемого подхода по сравнению с ЛМН-подходом является возможность ограничения величины матрицы фильтра. Как показывают примеры, предлагаемая рекуррентная процедура является эффективной и приводящей к вполне удовлетворительным результатам.

При этом важно отметить, что в отличие от фильтра Калмана в рамках предлагаемого подхода оказывается возможным строить оптимальные матрицы фильтра по каждой из координат вектора состояния системы в отдельности.

Структура статьи следующая: раздел 2 содержит постановку задачи, в разделе 3 обсуждается предлагаемый подход к построению гарантирующего фильтра, в разделе 4 приводится и обосновывается алгоритм вычисления оптимальной матрицы фильтра, раздел 5 посвящен непрерывной постановке задачи, раздел 6 содержит описание и обсуждение результатов вычислений для нескольких примеров, в заключении обсуждаются возможные обобщения полученных результатов.

Всюду далее  $|\cdot|$  — евклидова норма вектора,  $\|\cdot\|$  — спектральная норма матрицы,  $\|\cdot\|_F$  — фробениусова норма матрицы,  $^T$  — символ транспо-

нирования,  $\text{tr}$  — след матрицы,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение Фробениуса для матриц,  $I$  — единичная матрица соответствующей размерности,  $\lambda_i(A)$  — собственные значения матрицы  $A$ ,  $\sigma_i(A)$  — сингулярные числа матрицы  $A$ , а  $\sigma(A) = -\max_i \text{Re}(\lambda_i(A))$  — степень устойчивости гурвицевой матрицы  $A$ ,  $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$  — спектральный радиус шуровской матрицы  $A$ . Все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему в дискретном времени

$$(1) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 u_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + B_2 u_k + D_2 w_k, \\ z_k &= C_1 x_k, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{\ell \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ , с состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , входом  $u_k \in \mathbb{R}^p$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^\ell$ , оцениваемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^r$  и внешним возмущением (шумом)  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в каждый момент времени:

$$|w_k| \leq 1 \quad \text{для всех } k = 0, 1, \dots;$$

пара  $(A, D_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Пусть состояние  $x_k$  системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y_k$ . Для оценивания выхода  $z_k$  будем использовать фильтр, описываемый линейным разностным уравнением относительно оценки состояния  $\hat{x}_k$ :

$$(2) \quad \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + B_1 u_k + L(y_k - C\hat{x}_k - B_2 u_k), \quad \hat{x}_0 = 0,$$

где  $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ . Подчеркнем, что структура фильтра задается заранее — он является линейным стационарным, подлжит выбору лишь постоянная матрица  $L$ . Эта структура фильтра такая же, как и в известном наблюдателе Люенбергера [19, 20]. По сути, можно рассматривать этот фильтр как обобщение наблюдателя Люенбергера на задачи с помехами.

Задачей является минимизация ошибки оценки

$$z_k - \hat{z}_k = C_1(x_k - \hat{x}_k) = C_1 e_k,$$

где  $e_k = x_k - \hat{x}_k$  — невязка, удовлетворяющая согласно (1), (2) разностному уравнению

$$(3) \quad e_{k+1} = (A - LC)e_k + (D_1 - LD_2)w_k, \quad e_0 = x_0.$$

Обратим внимание, что *допустимая* матрица фильтра  $L$  стабилизирует систему (3), обращая матрицу  $A - LC$  в шуровскую. Ее существование вытекает из свойства наблюдаемости исходной системы.

Важно отметить, что здесь рассматривается случай неслучайных ограниченных помех. Для случайного, гауссовского шума вполне естественно применять калмановскую фильтрацию, однако одна из целей настоящей статьи — привлечь внимание к фильтрации с ограниченными шумами. Также на демонстрационных примерах будет рассмотрено, как работает фильтр Калмана с ограниченными помехами и наоборот — к чему приведет применение к случайным помехам рассматриваемой модели с ограниченным шумом.

Заметим также, что в настоящей статье рассматривается более общая постановка задачи, чем в [7]: в описании системы присутствует вход  $u_k$ .

Наконец, учет ограничения на внешнее возмущение вида

$$|w_k| \leq \gamma \quad \text{для всех } k = 0, 1, \dots$$

производится очевидным путем масштабирования матриц:  $D_1 := \gamma D_1$ ,  $D_2 := \gamma D_2$ .

### 3. Гарантирующий фильтр

В настоящей статье предлагается гарантирующий подход к решению задачи фильтрации при ограниченных шумах, для которого можно явным образом выписать прямые формулы, основанные на градиентом спуске. Он основывается на концепции инвариантных эллипсоидов, см. подробнее [10, 21].

Один из основных результатов статьи представлен следующим утверждением.

*Теорема 1. Пусть  $L^*$ ,  $P^*$  — решение оптимизационной задачи*

$$(4) \quad \min f(L, \alpha), \quad f(L, \alpha) = \text{tr } C_1 P C_1^T + \rho \|L\|_F^2,$$

*при ограничении*

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha}(A - LC)P(A - LC)^T - P + \frac{1}{1 - \alpha}(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T = 0$$

*относительно матричных переменных  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .*

*Тогда ошибка оценки  $z_k - \hat{z}_k$  выхода системы (1) с нулевым начальным условием при помощи наблюдателя (2) с матрицей  $L^*$  заключена в минимальный ограничивающий эллипсоид с матрицей*

$$C_1 P^* C_1^T.$$

Переходя к обоснованию теоремы, напомним следующий результат [22].

*Лемма 1. Пусть матрица  $A$  шуровская,  $\rho = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$ , пара  $(A, D)$  управляема, а матрица  $P(\alpha) \succ 0$ ,  $\rho^2 < \alpha < 1$ , удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова*

$$(6) \quad \frac{1}{\alpha} A P A^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0.$$

Тогда:

1) задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде для выхода системы

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \\z_k &= Cx_k,\end{aligned}$$

с начальным условием  $x_0$  и ограниченными внешними возмущениями  $|w_k| \leq 1$  сводится к минимизации одномерной функции  $f(\alpha) = \text{tr} CP(\alpha)C^T$  на интервале  $\rho^2 < \alpha < 1$ ;

2) если  $\alpha^*$  — точка минимума и  $x_0$  удовлетворяет условию

$$x_0^T P^{-1}(\alpha^*) x_0 \leq 1,$$

то гарантируется оценка

$$|z_k|^2 \leq f(\alpha^*), \quad k = 0, 1, \dots$$

Итак, рассмотрим величину  $C_1 e_k$  в качестве линейного выхода системы (3). Тогда если заключить невязку  $e_k$  в инвариантный эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{e \in \mathbb{R}^n: e^T P^{-1} e \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

то  $C_1 e_k$  будет содержаться в ограничивающем эллипсоиде

$$(7) \quad \mathcal{E}_z = \{e_z \in \mathbb{R}^r: e_z^T (C_1 P C_1^T)^{-1} e_z \leq 1\},$$

размер которого и будем минимизировать. Таким образом, оценивается асимптотическая (а при малых отклонениях и равномерная по  $k$ ) точность фильтрации.

В соответствии с леммой 1 исходная задача свелась к матричной оптимизационной задаче (4)–(5). Обратим внимание, что в минимизируемую функцию  $f(L, \alpha)$  помимо компоненты, определяющей размер ограничивающего эллипсоида (7) по критерию следа, введен штраф за величину матрицы фильтра (при этом коэффициент  $\rho > 0$  регулирует его важность). В то же время его наличие гарантирует коэрцитивность минимизируемой функции по  $L$ . Запись  $f(L, \alpha)$  подчеркивает, что при заданных  $L$  и  $\alpha$  матрица  $P$  находится из уравнения Ляпунова (5); тем самым независимыми переменными являются  $L$  и  $\alpha$ .

Сделаем важное

*Замечание 1.* Рассматриваемый гарантирующий подход позволяет строить оптимальные матрицы фильтра по каждой из координат вектора состояния системы в отдельности (этой возможности нет в фильтре Калмана). Действительно, положив в задаче из теоремы 1 в качестве матрицы  $C_1$  транспонированный  $i$ -й координатный вектор, приходим к матрице фильтра, минимизирующей невязку  $x_k^{(i)} - \hat{x}_k^{(i)}$ .

#### 4. Вычисление оптимальной матрицы фильтра

Напомним, что в [7] был предложен вариант гарантирующего подхода к решению задачи фильтрации при ограниченных шумах, который основан на технике линейных матричных неравенств и предполагает решение параметрической задачи полуопределенного программирования. В рамках рассматриваемой оптимизационной задачи (4)–(5) нет необходимости применять этот, технически сравнительно сложный, аппарат (несмотря на то, что и минимизируемая функция, и ограничение невыпуклы по совокупности переменных  $P$ ,  $L$  и  $\alpha$ ). В этом разделе будет предложен регулярный итеративный подход к ее решению, в основе которого лежит применение градиентного метода по переменной  $L$  и минимизации по  $\alpha$  по методу Ньютона. Приведем принципиальную схему алгоритма.

*Алгоритм 1* для минимизации  $f(L, \alpha)$ :

1. Задаемся параметрами  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $0 < \tau < 1$  и начальным допустимым приближением  $L_0$ . Вычисляем величину  $\alpha_0 = (1 + \rho^2(A - L_0 C)) / 2$ .

2. На  $j$ -й итерации, имея величины  $L_j$  и  $\alpha_j$ , находим градиент  $H_j = \nabla_L f(L_j, \alpha_j)$ . Если  $\|H_j\| \leq \varepsilon$ , то  $L_j$  принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$L_{j+1} = L_j - \gamma_j H_j,$$

при этом длину шага  $\gamma_j > 0$  подбираем дроблением  $\gamma$  до выполнения условий:

а.  $L_{j+1}$  обращает матрицу  $(A - LC) / \sqrt{\alpha_j}$  в шуровскую;

б.  $f(L_{j+1}) \leq f(L_j) - \tau \gamma_j \|H_j\|^2$ .

4. Для полученного  $L_{j+1}$  решаем задачу минимизации  $f(L_{j+1}, \alpha)$  по  $\alpha$  по методу Ньютона:<sup>2</sup>

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)}$$

и получаем  $\alpha_{j+1}$ . Переходим к п. 2.

В Алгоритме 1 величины  $\nabla_L f(L, \alpha)$ ,  $f'(\alpha)$  и  $f''(\alpha)$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_L f(L, \alpha) &= 2 \left( \rho L - \frac{1}{\alpha} Y(A - LC) P C^T - \frac{1}{1 - \alpha} Y(D_1 - LD_2) D_2^T \right), \\ f'(\alpha) &= \text{tr} Y \left( \frac{1}{(1 - \alpha)^2} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T - \frac{1}{\alpha^2} (A - LC) P (A - LC)^T \right), \\ f''(\alpha) &= 2 \text{tr} Y \left( \frac{1}{(1 - \alpha)^3} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^3} (A - LC)(P - X)(A - LC)^T \right), \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Реально требуется не более трех–четырёх итераций для получения решения с большой точностью, если начальная точка не слишком близка к границам интервала  $(\rho^2(A - L_{j+1}C), 1)$ .

где матрицы  $P$ ,  $Y$  и  $X$  являются решениями дискретных уравнений Ляпунова (5),

$$(8) \quad \frac{1}{\alpha}(A - LC)^T Y (A - LC) - Y + C_1^T C_1 = 0$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}(A - LC)X(A - LC)^T - X + \frac{1}{(1 - \alpha)^2}(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T - \\ - \frac{1}{\alpha^2}(A - LC)P(A - LC)^T = 0 \end{aligned}$$

соответственно.

Обоснование Алгоритма 1 с выводом соответствующих формул помещено в Приложение 1.

Важным моментом является выбор пробного шага градиентного метода. Весьма перспективным является его выбор из следующих соображений. Найдем для некоторого допустимого  $L$  решение  $P$  дискретного уравнения Ляпунова

$$(A - LC)P(A - LC)^T - P = -I.$$

Рассмотрим приращение по  $L$ :

$$L \rightarrow L - \gamma H, \quad H = \nabla_L f(L, \alpha),$$

и найдем, для каких  $\gamma$  матрица  $P$  останется матрицей квадратичной функции Ляпунова для  $A - (L - \gamma H)C$ , т.е.

$$(A - (L - \gamma H)C)P(A - (L - \gamma H)C)^T - P \prec 0$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} P & A - (L - \gamma H)C \\ (A - (L - \gamma H)C)^T & P^{-1} \end{pmatrix} \succ 0.$$

Полученное матричное неравенство, которому можно придать вид

$$\begin{pmatrix} P & A - LC \\ (A - LC)^T & P^{-1} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & HC \\ (HC)^T & 0 \end{pmatrix} \succ 0,$$

выполняется при

$$\gamma < \lambda_{\max}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 0 & HC \\ (HC)^T & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & A - LC \\ (A - LC)^T & P^{-1} \end{pmatrix} \right).$$

## 5. Непрерывный случай

Рассмотрим непрерывную систему

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1u + D_1w, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + B_2u + D_2w, \\ z &= C_1x, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{\ell \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ , с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , входом  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^\ell$ , оцениваемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  и внешним возмущением (шумом)  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0;$$

пара  $(A, D_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Для оценивания выхода  $z$  используется фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния  $\hat{x}$ :

$$(10) \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1u + L(y - C\hat{x} - B_2u), \quad \hat{x}(0) = 0,$$

где  $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ .

Как и в дискретном случае, задачей является минимизация ошибки оценки

$$z - \hat{z} = C_1(x - \hat{x}) = C_1e,$$

где  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  — невязка, удовлетворяющая согласно (9), (10) дифференциальному уравнению

$$(11) \quad \dot{e} = (A - LC)e + (D_1 - LD_2)w, \quad e(0) = x_0.$$

При этом *допустимая* матрица фильтра  $L$  стабилизирует систему (11), обращая матрицу  $A - LC$  в гурвицевую. Ее существование вытекает из свойства наблюдаемости исходной системы.

Следующая лемма является непрерывным аналогом леммы 1.

*Лемма 2* [9, 10]. Пусть матрица  $A$  гурвицева,  $\sigma = -\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) > 0$ , пара  $(A, D)$  управляема, а матрица  $P(\alpha) \succ 0$ ,  $0 < \alpha < 2\sigma$ , удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha}DD^T = 0.$$

Тогда:

1) задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде для выхода системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx \end{aligned}$$



с ограниченными внешними возмущениями  $|w(t)| \leq 1$  сводится к минимизации одномерной функции  $f(\alpha) = \text{tr} CP(\alpha)C^T$  на интервале  $0 < \alpha < 2\sigma$ ;

2) если  $\alpha^*$  — точка минимума и  $x(0)$  удовлетворяет условию

$$x^T(0)P^{-1}(\alpha^*)x(0) \leq 1,$$

то гарантируется оценка

$$|z(t)|^2 \leq f(\alpha^*), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Рассуждая аналогично дискретному случаю и воспользовавшись леммой 2, приходим к следующему результату.

*Теорема 2.* Пусть  $L^*, P^*$  — решение оптимизационной задачи

$$\min f(L, \alpha), \quad f(L, \alpha) = \text{tr} C_1 P C_1^T + \rho \|L\|_F^2,$$

при ограничении

$$(12) \quad \left(A - LC + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A - LC + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha}(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T = 0$$

относительно матричных переменных  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда ошибка оценки  $z - \hat{z}$  выхода системы (9) с нулевым начальным условием при помощи наблюдателя (10) с матрицей  $L^*$  заключена в минимальный ограничивающий эллипсоид с матрицей

$$C_1 P^* C_1^T.$$

Свойства минимизируемой функции и ее производных, установленные в Приложении 2, позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость.

*Алгоритм 2* для минимизации  $f(L, \alpha)$ :

1. Задаемся параметрами  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $0 < \tau < 1$  и начальным допустимым приближением  $L_0$ . Вычисляем величину  $\alpha_0 = \sigma(A - L_0 C)$ .

2. На  $j$ -й итерации, имея величины  $L_j$  и  $\alpha_j$ , находим градиент  $H_j = \nabla_L f(L_j, \alpha_j)$ . Если  $\|H_j\| \leq \varepsilon$ , то  $L_j$  принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$L_{j+1} = L_j - \gamma_j H_j,$$

при этом длину шага  $\gamma_j > 0$  подбираем дроблением  $\gamma$  до выполнения условий:

а.  $L_{j+1}$  обращает матрицу  $A - LC + \frac{\alpha_j}{2}I$  в гурвицевую;

б.  $f(L_{j+1}) \leq f(L_j) - \tau \gamma_j \|H_j\|^2$ .

4. Для полученного  $L_{j+1}$  решаем задачу минимизации  $f(L_{j+1}, \alpha)$  по  $\alpha$  и получаем  $\alpha_{j+1}$ . Переходим к п. 2.

В Алгоритме 2 величины  $\nabla_L f(L, \alpha)$ ,  $f'(\alpha)$  и  $f''(\alpha)$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\nabla_L f(L, \alpha) &= 2 \left( \rho L - Y P C^T - \frac{1}{\alpha} Y (D_1 - L D_2) D_2^T \right), \\ f'(\alpha) &= \text{tr} Y \left( P - \frac{1}{\alpha^2} (D_1 - L D_2) (D_1 - L D_2)^T \right), \\ f''(\alpha) &= 2 \text{tr} Y \left( X + \frac{1}{\alpha^3} (D_1 - L D_2) (D_1 - L D_2)^T \right),\end{aligned}$$

где матрицы  $P$ ,  $Y$  и  $X$  являются решениями дискретных уравнений Ляпунова (12),

$$(13) \quad \left( A - LC + \frac{\alpha}{2} I \right)^T Y + Y \left( A - LC + \frac{\alpha}{2} I \right) + C_1^T C_1 = 0$$

и

$$(14) \quad \begin{aligned} &\left( A - LC + \frac{\alpha}{2} I \right) X + X \left( A - LC + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\ &+ P - \frac{1}{\alpha^2} (D_1 - L D_2) (D_1 - L D_2)^T = 0. \end{aligned}$$

Обоснование Алгоритма 2 с выводом соответствующих формул помещено в Приложение 2.

Выбор пробного шага градиентного метода предлагается проводить из следующих соображений. Найдем для некоторого допустимого  $L$  решение  $P$  уравнения Ляпунова

$$(A - LC)P + P(A - LC)^T = -I.$$

Рассмотрим приращение по  $L$ :

$$L \rightarrow L - \gamma H, \quad H = \nabla_L f(L, \alpha),$$

и найдем, для каких  $\gamma$  матрица  $P$  останется матрицей квадратичной функции Ляпунова для  $A - (L - \gamma H)C$ , т.е.

$$(A - (L - \gamma H)C)P + P(A - (L - \gamma H)C)^T \prec 0.$$

С учетом исходного уравнения имеем

$$\gamma (HCP + P(HC)^T) \prec I,$$

откуда

$$\gamma < \lambda_{\max}^{-1} (HCP + P(HC)^T).$$

## 6. Примеры и обсуждение

Рассмотрим дискретную модель объекта в пространстве состояний:

$$(15) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 u_k + G w_k, \\ y_k &= Cx_k + B_2 u_k + v_k, \end{aligned}$$

с состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , входом  $u_k \in \mathbb{R}^p$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^\ell$ , шумом  $w_k \in \mathbb{R}^m$  и ошибкой измерений  $v_k \in \mathbb{R}^\ell$ ; здесь  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C$  и  $G$  — известные матрицы соответствующих размерностей; величины  $w_k$  и  $v_k$  предполагаются независимыми.

Применительно к системе (15) фильтр Калмана имеет следующий вид (в предположении, что величины  $w_k$  и  $v_k$  распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами  $Q$  и  $R$  соответственно).

Этап экстраполяции:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= A\hat{x}_{k|k} + B_1 u_k, \\ P_{k+1|k} &= AP_{k|k}A^T + GQG^T. \end{aligned}$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned} K_k &= P_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1}, \\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C\hat{x}_{k|k-1} - B_2 u_k), \\ P_{k|k} &= (I - K_kC)P_{k|k-1}. \end{aligned}$$

Будем рассматривать три следующие постановки задачи.

1. Модель  $\mathcal{M}_1$  со случайными помехами: шум  $w_k$  распределен по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $Q$ , а погрешность измерений  $v_k$  имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $R$ :

$$w_k \sim N(0, Q), \quad v_k \sim N(0, R).$$

2. Модель  $\mathcal{M}_2$  со случайными ограниченными помехами: величина  $w_k$  равномерно распределена на кубе  $[-w, w]^m$ , а величина  $v_k$  равномерно распределена на кубе  $[-v, v]^\ell$ :

$$w_k \sim U([-w, w]^m), \quad v_k \sim U([-v, v]^\ell).$$

3. Модель  $\mathcal{M}_3$  с неслучайными ограниченными помехами: величины  $w_k$  и  $v_k$  могут принимать произвольные значения на кубах  $[-w, w]^m$  и  $[-v, v]^\ell$  соответственно:

$$|w_k|_\infty \leq w, \quad |v_k|_\infty \leq v.$$

В рамках этих моделей сравним работоспособность фильтра Калмана и гарантирующего подхода на следующих примерах (несмотря на то, что гарантирующие оценки не обоснованы для модели  $\mathcal{M}_1$ , а фильтр Калмана — для модели  $\mathcal{M}_3$ ).

На приводимых ниже рисунках показаны истинная траектория системы, ее наблюдение (если оно имеется) и оценки, предоставляемые калмановским (ФК) и гарантирующим (ГФ) фильтром; в последнем случае также показана трубка, в которой заведомо содержится оценка при всех допустимых помехах.

*Пример 1.* Рассмотрим вагонетку, которая может двигаться без трения по бесконечным рельсам [23]. В начальный момент вагонетка находится в нулевом положении и на нее воздействуют внешние возмущения. Положение вагонетки измеряется каждые  $\Delta t$  секунд, при этом измерения неточны. Задача состоит в отслеживании положения  $s$  и скорости  $\dot{s} = v$  вагонетки.

Соответствующая система представима в формате (15) при

$$x_k = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \end{pmatrix}, \quad x_0 = 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = B_2 = 0, \quad C = (1 \ 0), \quad G = \begin{pmatrix} ((\Delta t)^2/2) \\ \Delta t \end{pmatrix}.$$

1. В рамках модели  $\mathcal{M}_1$  предполагается, что на  $k$ -м такте вагонетка движется с постоянным ускорением, распределенным по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением  $\sigma_x$ , а погрешность измерений имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением  $\sigma_y$ :

$$w_k \sim N(0, \sigma_x), \quad v_k \sim N(0, \sigma_y).$$

Построим фильтр Калмана, а также воспользуемся гарантирующим подходом, объединив помехи  $w_k$  и  $v_k$  в общий вектор возмущений

$$(16) \quad \tilde{w}_k = \begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix}.$$

При этом матрицы  $D_1$  и  $D_2$  в системе (1) примут вид

$$D_1 = 3\sigma_x\sqrt{2} \begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = 3\sigma_y\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что позволит варьировать величины  $w_k$  и  $v_k$  независимо друг от друга на интервалах

$$|w_k| \leq 3\sigma_x, \quad |v_k| \leq 3\sigma_y.$$

Гарантирующий подход привел к оптимальным матрицам фильтра

$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0,2359 \\ 0,1412 \end{pmatrix}$$

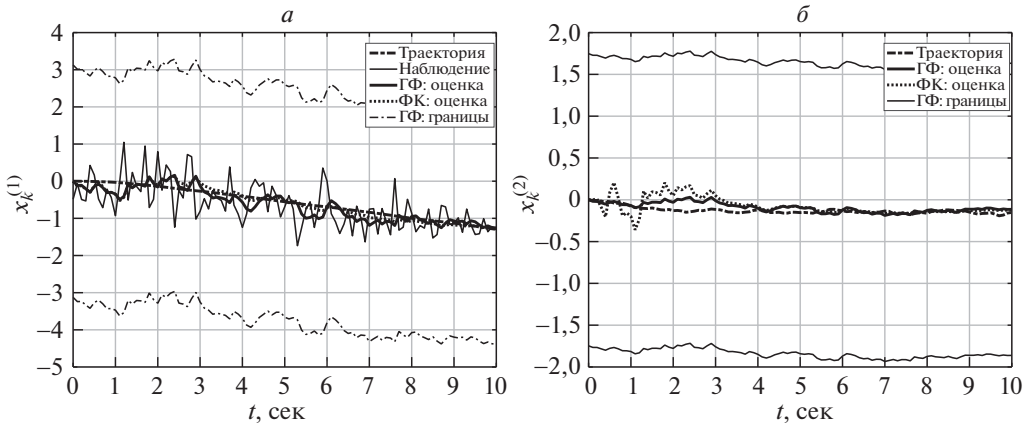


Рис. 1. Динамика координат и их оценок в примере 1 (модель  $\mathcal{M}_1$ ).

для координаты  $x^{(1)} = s$  и

$$L_2^* = \begin{pmatrix} 0,1122 \\ 0,0386 \end{pmatrix}$$

для координаты  $x^{(2)} = \dot{s}$ .

Результаты сравнения с фильтром Калмана при

$$\Delta t = 0,1, \quad \sigma_x = 0,1, \quad \sigma_y = 0,5$$

показаны на рис. 1,а и 1,б.

2. В рамках модели  $\mathcal{M}_2$  будем предполагать, что на  $k$ -м такте вагонетка движется с постоянным ускорением, равномерно распределенным на отрезке  $[-a, a]$ , а погрешность измерений равномерно распределена на отрезке  $[-v, v]$ :

$$w_k \sim U(-a, a), \quad v_k \sim U(-v, v).$$

Построим фильтр Калмана (при  $\sigma_x = a/3$ ,  $\sigma_y = v/3$ ), а также воспользуемся гарантирующим подходом — для возмущения (16) и матриц

$$D_1 = a\sqrt{2} \begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = v\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Гарантирующий подход привел к оптимальным матрицам фильтра

$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0,1393 \\ 0,0489 \end{pmatrix}$$

для координаты  $x^{(1)} = s$  и

$$L_2^* = \begin{pmatrix} 0,0574 \\ 0,0101 \end{pmatrix}$$

для координаты  $x^{(2)} = \dot{s}$ .

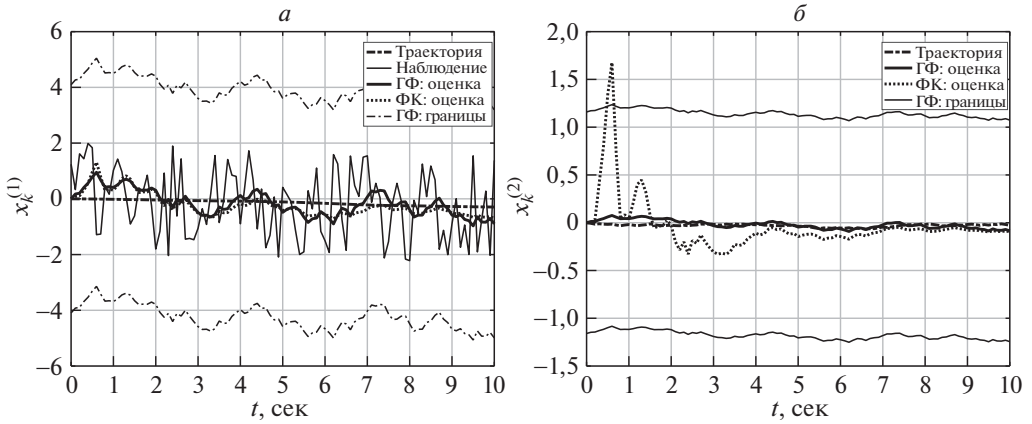


Рис. 2. Динамика координат и их оценок в примере 1 (модель  $\mathcal{M}_2$ ).

Результаты сравнения с фильтром Калмана при

$$\Delta t = 0,1, \quad a = 0,1, \quad v = 2$$

показаны на рис. 2,а и 2,б.

3. В рамках модели  $\mathcal{M}_3$  будем предполагать, что  $w_k$  и  $v_k$  принимают произвольные значения на отрезках  $[-a, a]$  и  $[-v, v]$  соответственно:

$$|w_k| \leq a, \quad |v_k| \leq v.$$

Применим фильтр Калмана (для  $\sigma_x = a$ ,  $\sigma_y = v$ ), а также воспользуемся гарантирующим подходом — для возмущения (16) и матриц

$$D_1 = a\sqrt{2} \begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = v\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Гарантирующий подход привел к оптимальным матрицам фильтра

$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0,1397 \\ 0,0492 \end{pmatrix}$$

для координаты  $x^{(1)} = s$  и

$$L_2^* = \begin{pmatrix} 0,0574 \\ 0,0101 \end{pmatrix}$$

для координаты  $x^{(2)} = \dot{s}$ .

Результаты сравнения с фильтром Калмана при

$$\Delta t = 0,1, \quad a = 0,1, \quad v = 2$$

показаны на рис. 3,а и 3,б.

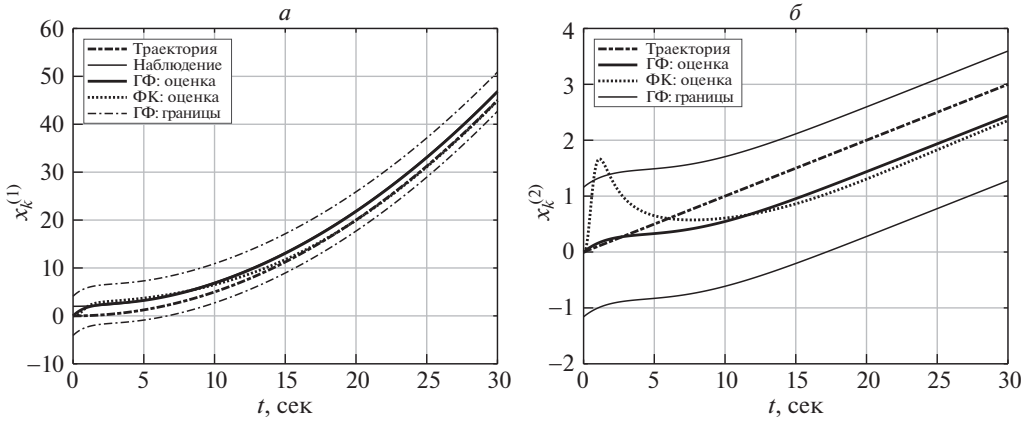


Рис. 3. Динамика координат и их оценок в примере 1 (модель  $\mathcal{M}_3$ ).

*Пример 2.* Следующий пример [24] связан с оцениванием движения снаряда по баллистической траектории при наличии внешних возмущений и доступных наблюдению (зашумленных) координатах. Соответствующая система имеет вид (15), где

$$x = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

есть вектор состояния системы, состоящий из проекций координаты и скорости снаряда на горизонтальную и вертикальную оси, а

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g\Delta t \end{pmatrix},$$

$$B_1 = G = I, \quad B_2 = 0, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\Delta t$  — интервал между измерениями,  $0 < b \ll 1$  — коэффициент сопротивления воздуха,  $g$  — гравитационная постоянная, шум  $w_k$  распределен нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $Q_k \succ 0$ , а помехи измерения  $v_k$  распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $R_k \succ 0$ . При этом

$$\Delta t = 0,1, \quad b = 10^{-4}, \quad g = 9,8, \quad Q = 0,1I, \quad R = 500I.$$

1. В рамках “стандартной” модели  $\mathcal{M}_1$  предполагается, что

$$\begin{aligned} w_k &\sim N(0, \sigma_x I), & \sigma_x^2 &= 0,1, \\ v_k &\sim N(0, \sigma_y I), & \sigma_y^2 &= 500. \end{aligned}$$

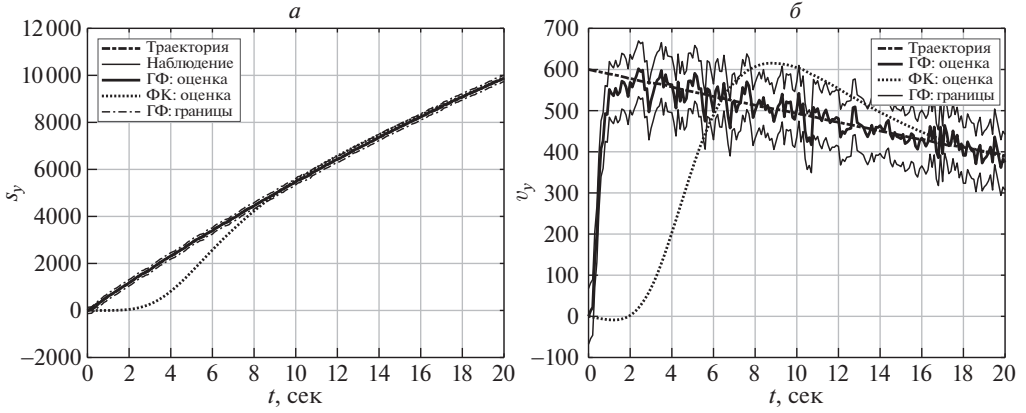


Рис. 4. Динамика координат и их оценок в примере 2 (модель  $M_1$ ).

Как и в предыдущем примере, для того чтобы воспользоваться гарантирующим подходом, объединим помехи  $w_k$  и  $v_k$  в общий вектор возмущений, а матрицы  $D_1$  и  $D_2$  в системе (1) примут вид

$$D_1 = 3\sigma_x \sqrt{2} (G \ 0), \quad D_2 = 3\sigma_y \sqrt{2} (0 \ I),$$

что позволит варьировать величины  $w_k$  и  $v_k$  независимо друг от друга на интервалах

$$|w_k| \leq 3\sigma_x, \quad |v_k| \leq 3\sigma_y.$$

Гарантирующий подход доставил следующие оптимальные матрицы фильтра для каждой из четырех координат (здесь и далее в матрицах фильтра обнулены элементы, по абсолютной величине не превосходящие  $10^{-6}$ ):

$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0,5946 & 0 \\ 0 & 0,6822 \\ 0,8467 & 0 \\ 0 & 1,0590 \end{pmatrix}, \quad L_2^* = \begin{pmatrix} 0,7277 & 0 \\ 0 & 0,6340 \\ 1,2376 & 0 \\ 0 & 0,9879 \end{pmatrix},$$

$$L_3^* = \begin{pmatrix} 0,0971 & 0 \\ 0 & 0,1389 \\ 0,0284 & 0 \\ 0 & 0,0456 \end{pmatrix}, \quad L_4^* = \begin{pmatrix} 0,1393 & 0 \\ 0 & 0,0975 \\ 0,0459 & 0 \\ 0 & 0,0285 \end{pmatrix}.$$

Результаты сравнения для координат  $s_y$  и  $v_y$  показаны на рис. 4,а и 4,б.

Обратим внимание, что поведение траекторий оценок на начальном участке обусловлено тем, что фактическая начальная точка

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \\ 600 \end{pmatrix}$$



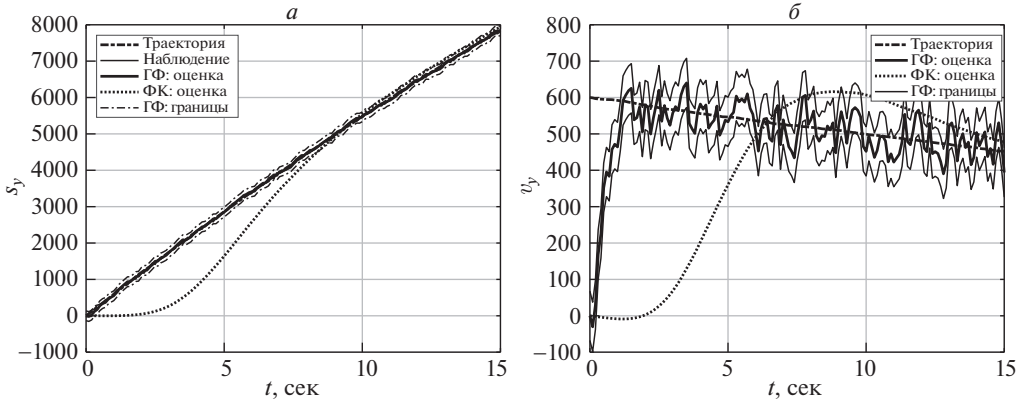


Рис. 5. Динамика координат и их оценок в примере 2 (модель  $\mathcal{M}_2$ ).

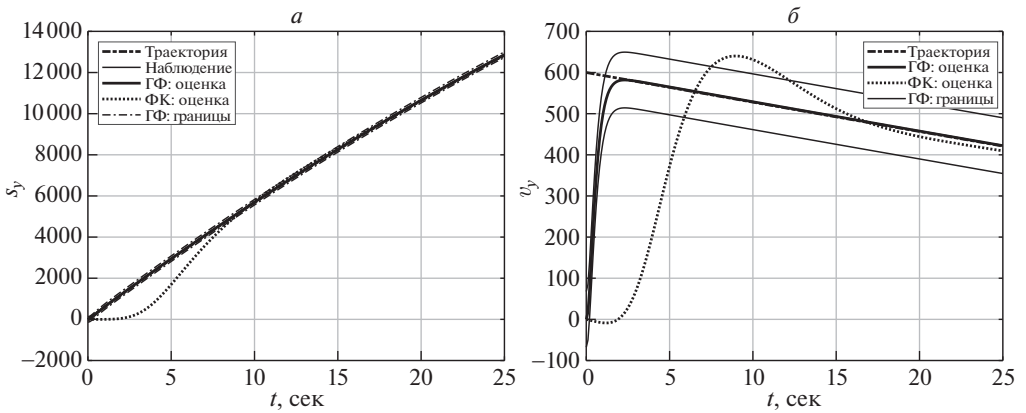


Рис. 6. Динамика координат и их оценок в примере 2 (модель  $\mathcal{M}_3$ ).

оказалась вне минимального инвариантного эллипсоида для невязки. Однако в силу того, что инвариантный эллипсоид обладает свойством притягиваемости, после нескольких шагов гарантирующие оценки начинают охватывать истинную траекторию.

2. В рамках модели  $\mathcal{M}_2$  будем предполагать, что

$$w_k \sim U(-w, w), \quad v_k \sim U(-v, v),$$

где  $w = 3\sigma_x$ ,  $v = 3\sigma_y$ .

Поскольку в этом случае

$$D_1 = w\sqrt{2} \begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = v\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix},$$

то гарантирующий подход приводит к тем же матрицам фильтра, что и в модели  $\mathcal{M}_2$ . Результаты его сравнения с фильтром Калмана для координат  $s_y$  и  $v_y$  показаны на рис. 5,а и 5,б.

3. В рамках модели  $\mathcal{M}_3$  будем предполагать, что

$$|w_k| \leq \sigma_x, \quad |v_k| \leq \sigma_y.$$

Гарантирующий подход при

$$D_1 = \sigma_x \sqrt{2} (G \ 0), \quad D_2 = \sigma_y \sqrt{2} (0 \ I)$$

привел к оптимальным матрицам фильтра

$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0,6362 & 0 \\ 0 & 0,7256 \\ 0,9779 & 0 \\ 0 & 1,2126 \end{pmatrix}, \quad L_2^* = \begin{pmatrix} 0,6697 & 0 \\ 0 & 0,5747 \\ 1,0517 & 0 \\ 0 & 0,8206 \end{pmatrix},$$

$$L_3^* = \begin{pmatrix} 0,0971 & 0 \\ 0 & 0,1389 \\ 0,0284 & 0 \\ 0 & 0,0456 \end{pmatrix}, \quad L_4^* = \begin{pmatrix} 0,1393 & 0 \\ 0 & 0,0975 \\ 0,0459 & 0 \\ 0 & 0,0285 \end{pmatrix}.$$

Результаты его сравнения с фильтром Калмана для координат  $s_y$  и  $v_y$  показаны на рис. 6,а и 6,б.

Как видно из примеров, и фильтр Калмана, и гарантирующий фильтр, с одной стороны, не слишком сильно отличаются по своим результатам, а с другой — во всех трех моделях они вполне работоспособны. При этом, как ожидалось, для гауссовских помех фильтр Калмана дает немного (но не кардинально) лучшее поведение оценки по сравнению с гарантирующим фильтром, тогда как для неслучайных ограниченных помех преимущество остается за гарантирующим фильтром.

Отметим также, что ширина трубки, в которую гарантированно заключена соответствующая оценка, довольно сильно завышена, что хорошо видно на рисунках; это — характерное поведение методов гарантированного оценивания, направленных на противодействие “наихудшей” из возможных реализаций неопределенности.

Наконец, гарантирующий фильтр позволяет получить равномерную оценку точности фильтрации; здесь уместно обратить внимание на поведение гарантирующей и калмановской оценок на начальном участке траектории (при этом последняя также имеет явно выраженный всплеск).

## 7. Заключение

Предложен новый подход к задаче синтеза гарантирующего фильтра, основанный на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменной является матрица фильтра. Далее эта задача решается градиентным методом; его сходимость теоретически обосновывается для ряда важных частных случаев.

Рассмотренные примеры демонстрируют работоспособность и эффективность предлагаемого алгоритма; проведено его сравнение с фильтром Калмана на трех различных постановках задач.

В статье рассматривалась задача построения стационарного фильтра; представляет явный интерес обобщение данного подхода и на динамическую задачу фильтрации в духе работ [25, 26] с помощью инструментария [27, 28].

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

*Лемма П.1.1.* Пусть  $X$  и  $Y$  — решения двойственных дискретных уравнений Ляпунова с шуровской матрицей  $A$ :

$$A^T X A - X + W = 0 \quad \text{и} \quad A Y A^T - Y + V = 0.$$

Тогда  $\text{tr}(XV) = \text{tr}(YW)$ .

*Доказательство леммы П.1.1.* В самом деле, прямым вычислением имеем

$$\begin{aligned} \text{tr}(XV) &= \text{tr}(X(Y - AY A^T)) = \text{tr}(XY) - \text{tr}(XAY A^T) = \\ &= \text{tr}(YX) - \text{tr}(Y A^T X A) = \text{tr}(Y(X - A^T X A)) = \text{tr}(YW). \end{aligned}$$

Лемма П.1.1 доказана.

*Лемма П.1.2.* Для решения  $P$  дискретного уравнения Ляпунова

$$A P A^T - P + Q = 0$$

с шуровской матрицей  $A$  и  $Q \succ 0$  справедливы оценки:

$$(П.1.1) \quad \lambda_{\max}(P) \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{1 - \rho^2}, \quad \lambda_{\min}(P) \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{1 - \sigma_{\min}^2(A)},$$

где  $\rho = \max_i |\lambda_i(A)|$ , а  $\sigma_{\min}(A)$  — наименьшее сингулярное число матрицы  $A$ .

Если же  $Q = D D^T$  и пара  $(A, D)$  управляема, то

$$(П.1.2) \quad \lambda_{\max}(P) \geq \frac{\|u^* D\|^2}{1 - \rho^2} > 0,$$

где

$$u^* A = \lambda u^*, \quad |\lambda| = \rho, \quad \|u\| = 1,$$

т.е.  $u$  — левый собственный вектор матрицы  $A$ , отвечающий собственному значению  $\lambda$  матрицы  $A$  с наибольшим модулем. Вектор  $u$  и число  $\lambda$  могут быть комплексными; здесь  $u^*$  означает комплексное сопряжение и транспонирование.

*Доказательство леммы П.1.2.* Оценки (П.1.1) хорошо известны, см., например, [29]. Докажем справедливость оценки (П.1.2). Явное решение дискретного уравнения Ляпунова для шуровской матрицы  $A$  имеет вид

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} A^k D D^T (A^T)^k.$$

Умножая это равенство справа на  $u$  и слева на  $u^*$  и учитывая, что  $u^* A^k = \lambda^k u^*$ ,  $(A^T)^k u = (\lambda^*)^k u$ , получаем, что

$$\lambda_{\max}(P) \geq u^* P u = \sum_{k=0}^{\infty} u^* A^k D D^T (A^T)^k u = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \lambda^*)^k u^* D D^T u = \frac{\|u^* D\|^2}{1 - \rho^2},$$

причем  $\|u^* D\| > 0$  в силу управляемости пары  $(A, D)$ , см., например, [10, теорема Д.1.5]. Лемма П.1.2 доказана.

Итак, начнем с оптимизации функции  $f(\alpha)$  и рассмотрим оптимизационную задачу

$$\min f(\alpha), \quad f(\alpha) = \operatorname{tr} C P C^T$$

при ограничении

$$\frac{1}{\alpha} A P A^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0$$

относительно матричных переменных  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Здесь наложены более жесткие требования к постановке задачи, чем обычно: будем предполагать, что матрица  $C$  выхода системы — квадратная невырожденная. Это предположение можно было бы ослабить, но цель сейчас — получить наиболее простые и наглядные результаты.

*Лемма П.1.3.* Пусть матрица  $A$  шуровская,  $\rho$  — спектральный радиус матрицы  $A$ ,  $\rho^2 < \alpha < 1$ , пара  $(A, D)$  управляема, а матрица  $C$  такова, что  $C^T C \succ 0$ . Тогда функция  $f(\alpha) = \operatorname{tr} C P(\alpha) C^T$  обладает следующими свойствами:

а) функция  $f(\alpha)$  определена, положительна и сильно выпукла на интервале  $\rho^2 < \alpha < 1$ , а ее значения стремятся к бесконечности на концах интервала, причем существует  $c > 0$  такое, что

$$(П.1.3) \quad f(\alpha) \geq \frac{\alpha}{(1 - \alpha)(\alpha - \rho^2)} c, \quad \rho^2 < \alpha < 1;$$

б) производная функции  $f(\alpha)$  имеет вид

$$f'(\alpha) = \operatorname{tr} Y \left( \frac{1}{(1 - \alpha)^2} D D^T - \frac{1}{\alpha^2} A P A^T \right),$$

где  $P$  и  $Y$  — решения дискретных уравнений Ляпунова

$$(П.1.4) \quad \frac{1}{\alpha}APA^T - P + \frac{1}{1-\alpha}DD^T = 0$$

и

$$(П.1.5) \quad \frac{1}{\alpha}A^TYA - Y + C^TC = 0.$$

в) вторая производная функции  $f(\alpha)$  определяется формулой

$$f''(\alpha) = 2 \operatorname{tr} Y \left( \frac{1}{(1-\alpha)^3} DD^T + \frac{1}{\alpha^3} A(P-X)A^T \right),$$

где  $P$ ,  $Y$  и  $X$  — решения дискретных уравнений Ляпунова (П.1.4) и (П.1.5) и

$$\frac{1}{\alpha}AXA^T - X + \frac{1}{(1-\alpha)^2}DD^T - \frac{1}{\alpha^2}APA^T = 0,$$

причем  $f''(\alpha^*) > 0$  и  $f''(\alpha)$  монотонно возрастает слева и справа от  $\alpha^*$ .

*Доказательство леммы П.1.3.*

а. Уравнение (6) представимо в виде

$$\left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}}A \right) P \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}}A \right)^T - P = -\frac{1}{1-\alpha}DD^T$$

и согласно [10, лемма 1.2.6] имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}A$  шуровская:  $|\lambda_i(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}A)| < 1$ , т.е. при  $\rho^2 < \alpha < 1$ .

Оценим величину  $f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^T$ , используя лемму П.1.2 с очевидными заменами:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \operatorname{tr} CP(\alpha)C^T \geq \lambda_{\min}(C^TC)\lambda_{\max}(P(\alpha)) \geq \\ &\geq \frac{\|u^*D\|^2 \lambda_{\min}(C^TC)}{(1-\alpha)(1-\rho^2(A/\sqrt{\alpha}))} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(\alpha-\rho^2)} \|u^*D\|^2 \lambda_{\min}(C^TC), \end{aligned}$$

где  $u$  имеет тот же смысл, что и в лемме П.1.2, а величина  $\|u^*D\|^2$  положительна в силу предположения об управляемости пары  $(A, D)$ , а тем самым и пары  $(A/\sqrt{\alpha}, D)$ .

Покажем теперь, что функция  $f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^T$  строго выпукла на интервале  $(\rho^2, 1)$ . В соответствии с [10, лемма 1.2.6] решение уравнения (П.1.4) представимо в явном виде как

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}}A \right)^k \frac{1}{1-\alpha} DD^T \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}}A^T \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(1-\alpha)\alpha^k}}_{g(\alpha,k)} \underbrace{A^k DD^T (A^T)^k}_{H_k}.$$

Но  $H_k \succ 0$  и  $g(\alpha, k) > 0$  при  $0 < \alpha < 1$ , поэтому на интервале  $(\rho^2, 1)$  имеем

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} g(\alpha, k) H_k \succ 0$$

и

$$f(\alpha) = \text{tr } P(\alpha) C^T C > 0.$$

Прямым вычислением получаем

$$g'(\alpha, k) = \left( \frac{1}{1-\alpha} - \frac{k}{\alpha} \right) g(\alpha, k),$$

$$g''(\alpha, k) = \left( \left( \frac{1}{1-\alpha} - \frac{k}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{(1-\alpha)^2} + \frac{k}{\alpha^2} \right) g(\alpha, k) \geq \frac{1}{(1-\alpha)^2} g(\alpha, k)$$

(здесь дифференцирование производится по  $\alpha$ ), так что

$$f''(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} g''(\alpha, k) \text{tr } C H_k C^T \geq \frac{1}{(1-\alpha)^2} f(\alpha) \geq \frac{1}{(1-\rho^2)^2} f(\alpha^*) > 0.$$

Таким образом, вторая производная функции  $f(\alpha)$  положительна и стремится к бесконечности на концах интервала  $(\rho^2, 1)$ .

Далее, прямым вычислением четвертой производной получаем

$$g^{(IV)}(\alpha, k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{\alpha^{k+4}} + \frac{24}{(1-\alpha)^4} \geq \frac{24}{(1-\alpha)^4},$$

так что

$$f^{(IV)}(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(IV)}(\alpha, k) \text{tr } C H_k C^T \geq$$

$$\geq \frac{24}{(1-\alpha)^4} \sum_{k=0}^{\infty} \text{tr } C H_k C^T > \frac{24}{(1-\rho^2)^4} \sum_{k=0}^{\infty} \text{tr } C H_k C^T > 0,$$

т.е. вторая производная  $f''(\alpha)$  сама является выпуклой и растет на границах интервала.

б. Выведем теперь формулу для производной функции  $f(\alpha)$ . В уравнении (П.1.4) решение  $P$  является функцией от  $\alpha$ . Продифференцируем это уравнение; под  $P'$  будем понимать производную по  $\alpha$ :

$$(П.1.6) \quad \frac{1}{\alpha} A P' A^T - P' + \frac{1}{(1-\alpha)^2} D D^T - \frac{1}{\alpha^2} A P A^T = 0.$$

Применяя лемму П.1.1 к двойственным уравнениям (П.1.6) и (П.1.5), получаем желаемую формулу

$$f'(\alpha) = \text{tr} CP' C^T = \text{tr} P' C^T C = \text{tr} Y \left( \frac{1}{(1-\alpha)^2} DD^T - \frac{1}{\alpha^2} APA^T \right).$$

в. Аналогично получим выражение для второй производной  $f(\alpha)$ . Дифференцируя уравнение (П.1.6) по  $\alpha$ , получаем

$$\frac{1}{\alpha} AP'' A^T - P'' + \frac{2}{(1-\alpha)^3} DD^T + \frac{2}{\alpha^3} APA^T - \frac{2}{\alpha^3} AP' A^T = 0.$$

Вновь применяя лемму П.1.1 к этому уравнению и уравнению (П.1.5) (и имея в виду, что  $X = P'$ ), получаем

$$f''(\alpha) = \text{tr} CP'' C^T = \text{tr} P'' C^T C = 2 \text{tr} Y \left( \frac{1}{(1-\alpha)^3} DD^T + \frac{1}{\alpha^3} A(P-X)A^T \right).$$

Лемма П.1.3 доказана.

Заметим, что для вычисления функции  $f(\alpha)$  и двух ее производных достаточно решить три дискретных уравнения Ляпунова.

Указанные свойства функции позволяют применить метод Ньютона для ее минимизации. Задаемся начальным приближением  $\rho^2(A) < \alpha_0 < 1$ , например  $\alpha_0 = (1 + \rho^2(A)) / 2$ , и применяем итерационный процесс

$$(П.1.7) \quad \alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)}.$$

Следующая теорема гарантирует глобальную сходимость алгоритма; ее справедливость устанавливается аналогично сходному результату в [16].

*Теорема П.1.1 [16]. В методе (П.1.7) справедливы оценки*

$$|\alpha_j - \alpha^*| \leq \frac{f''(\alpha_0)}{2j f''(\alpha^*)} |\alpha_0 - \alpha^*|, \quad |\alpha_{j+1} - \alpha^*| \leq c |\alpha_j - \alpha^*|^2,$$

где  $c > 0$  — некоторая константа (она может быть выписана явно).

Первая оценка гарантирует глобальную сходимость метода (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом  $1/2$ ), а вторая — квадратичную сходимость в окрестности решения. Реально требуется не более трех — четырех итераций для получения решения с большой точностью (если только начальная точка не слишком близка к границам интервала).

Вернемся к оптимизационной задаче (4)–(5) и займемся минимизацией функции

$$f(L) = \min_{\alpha} f(L, \alpha),$$

предварительно исследовав ее свойства.

*Лемма П.1.4. Функция  $f(L)$  определена и положительна на множестве  $\mathcal{S}$  допустимых матриц фильтра.*

Действительно, если матрица  $A - LC$  шуровская, то  $\rho(A - LC) < 1$  и для  $\rho^2(A - LC) < \alpha < 1$  существует решение  $P \succ 0$  дискретного уравнения Ляпунова (5). Тем самым определена строго положительная функция  $f(L, \alpha)$ , при этом  $f(L) > 0$  в силу (П.1.3). Как и в непрерывном случае, множество ее определения  $\mathcal{S}$  может быть невыпуклым и несвязным, а его границы — негладкими.

*Лемма П.1.5. На множестве  $\mathcal{S}$  функция  $f(L)$  коэрцитивна (т.е. стремится к бесконечности на границе области), причем справедливы следующие оценки:*

$$(П.1.8) \quad f(L) \geq \frac{1}{1 - \rho^2(A - LC)} \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A - LC)} \|D_1 - LD_2\|_F^2, \\ f(L) \geq \rho \|L\|^2.$$

*Доказательство леммы П.1.5.* Рассмотрим последовательность допустимых матриц  $\{L_j\} \subseteq \mathcal{S}$  такую, что  $L_j \rightarrow L \in \partial\mathcal{S}$ , т.е.  $\rho(A - LC) = 1$ . Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что неравенство

$$|\rho(A - L_j C) - \rho(A - LC)| = 1 - \rho(A - L_j C) < \varepsilon$$

справедливо для всех  $j \geq N(\varepsilon)$ .

Пусть  $P_j$  — решение уравнения (5), ассоциированного с матрицей фильтра  $L_j$ :

$$\frac{1}{\alpha_j}(A - L_j C)P_j(A - L_j C)^T - P_j + \frac{1}{1 - \alpha_j}(D_1 - L_j D_2)(D_1 - L_j D_2)^T = 0,$$

а  $Y_j$  — решение двойственного к нему дискретного уравнения Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha_j}(A - L_j C)^T Y_j (A - L_j C) - Y_j + C_1 C_1^T = 0.$$

Тогда с учетом леммы П.1.2 имеем:

$$f(L_j) = \text{tr}(C_1 P_j C_1^T) + \rho \|L_j\|_F^2 \geq \text{tr}(P_j C_1 C_1^T) = \\ = \text{tr}\left(Y_j \frac{1}{1 - \alpha_j}(D_1 - L_j D_2)(D_1 - L_j D_2)^T\right) \geq \\ \geq \frac{1}{1 - \alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \geq \frac{1}{1 - \alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A - L_j C)} \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \geq \\ \geq \frac{1}{1 - \rho^2(A - L_j C)} \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A - L_j C)} \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \geq \\ \geq \frac{1}{\varepsilon} \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A - L_j C)} \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty,$$

поскольку  $\rho^2(A - L_j C) < \alpha_j < 1$ .



С другой стороны,

$$f(L_j) = \text{tr}(C_1 P_j C_1^T) + \rho \|L_j\|_F^2 \geq \rho \|L_j\|_F^2 \geq \rho \|L_j\|^2 \xrightarrow{\|L_j\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Лемма П.1.5 доказана.

Введем в рассмотрение множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{L \in \mathcal{S} : f(L) \leq f(L_0)\}.$$

Из леммы П.1.5 вытекает очевидное

*Следствие П.1.1.* Для любых  $L_0 \in \mathcal{S}$  множество  $\mathcal{S}_0$  ограничено.

С другой стороны, у функции  $f(L)$  на множестве  $\mathcal{S}_0$  существует точка минимума (как у непрерывной — в силу свойств решения дискретного уравнения Ляпунова — функции на компактном множестве), но множество  $\mathcal{S}_0$  не имеет общих точек с границей  $\mathcal{S}$  в силу (П.1.8). Далее будет показано, что  $f(L)$  дифференцируема на  $\mathcal{S}_0$ . Следовательно, справедливо

*Следствие П.1.2.* Существует точка минимума  $L_*$  на множестве  $\mathcal{S}$ , и в ней градиент функции  $f(L)$  обращается в нуль.

Перейдем к свойствам градиента функции  $f(L, \alpha)$ .

*Лемма П.1.6.* Функция  $f(L, \alpha)$  определена на множестве стабилизирующих  $L$  и для  $\rho^2(A - LC) < \alpha < 1$ . На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$(П.1.9) \quad \nabla_{\alpha} f(L, \alpha) = \text{tr} Y \left( \frac{1}{(1 - \alpha)^2} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T - \frac{1}{\alpha^2} (A - LC)P(A - LC)^T \right),$$

$$(П.1.10) \quad \nabla_L f(L, \alpha) = 2 \left( \rho L - \frac{1}{\alpha} Y(A - LC)PC^T - \frac{1}{1 - \alpha} Y(D_1 - LD_2)D_2^T \right),$$

где матрицы  $P$  и  $Y$  являются решениями дискретных уравнений Ляпунова (5) и (8).

Минимум  $f(L, \alpha)$  достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется условиями

$$\nabla_L f(L, \alpha) = 0, \quad \nabla_{\alpha} f(L, \alpha) = 0.$$

При этом  $f(L, \alpha)$  как функция от  $\alpha$  строго выпукла на  $\rho^2(A - LC) < \alpha < 1$  и достигает минимума во внутренней точке этого интервала.

*Доказательство леммы П.1.6.* Имеем задачу:

$$\min f(L, \alpha), \quad f(L, \alpha) = \text{tr} C_1 P C_1^T + \rho \|L\|_F^2$$

при ограничении в виде дискретного уравнения Ляпунова (5) относительно матрицы  $P$  инвариантного эллипсоида.

Следуя лемме П.1.3, дифференцирование по  $\alpha$  производится в соответствии с соотношениями (П.1.9), (5) и (8). Для дифференцирования по  $L$  дадим ему приращение  $\Delta L$  и обозначим соответствующее приращение  $P$  через  $\Delta P$ ; в результате (5) примет вид

$$\frac{1}{\alpha} (A - (L + \Delta L)C) (P + \Delta P) (A - (L + \Delta L)C)^T - (P + \Delta P) + \\ + \frac{1}{1 - \alpha} (D_1 - (L + \Delta L)D_2) (D_1 - (L + \Delta L)D_2)^T = 0.$$

Оставляя обозначение  $\Delta P$  для главной части приращения, получаем

$$\frac{1}{\alpha} ((A - LC)P(A - LC)^T - \Delta LCP(A - LC)^T - (A - LC)P(\Delta LC)^T + \\ + (A - LC)\Delta P(A - LC)^T) - (P + \Delta P) + \\ + \frac{1}{1 - \alpha} ((D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T - \Delta LD_2(D_1 - LD_2)^T - \\ - (D_1 - LD_2)(\Delta LD_2)^T) = 0.$$

После вычитания уравнения (12) из этого уравнения, имеем:

$$(П.1.11) \quad \frac{1}{\alpha} (A - LC)\Delta P(A - LC)^T - \\ - \Delta P - \frac{1}{\alpha} (\Delta LCP(A - LC)^T + (A - LC)P(\Delta LC)^T) - \\ - \frac{1}{1 - \alpha} (\Delta LD_2(D_1 - LD_2)^T + (D_1 - LD_2)(\Delta LD_2)^T) = 0.$$

Вычислим приращение функционала  $f(L)$ , линеаризуя соответствующие величины:

$$\Delta f(L) = \text{tr } C_1 \Delta P C_1^T + \rho \text{tr } L^T \Delta L + \rho \text{tr } (\Delta L)^T L = \text{tr } \Delta P C_1^T C_1 + 2\rho \text{tr } L^T \Delta L.$$

По лемме П.2.1 из двойственных уравнений (П.1.11) и (8) имеем

$$\Delta f(L) = -2 \text{tr } Y \left( \frac{1}{\alpha} \Delta LCP(A - LC)^T + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 - \alpha} \Delta LD_2(D_1 - LD_2)^T \right) + 2\rho \text{tr } L^T \Delta L = \\ = 2 \text{tr} \left( \rho L^T \Delta L - \frac{1}{\alpha} CP(A - LC)^T Y - \frac{1}{1 - \alpha} D_2(D_1 - LD_2)^T Y \right) \Delta L = \\ = \left\langle 2 \left( \rho L - \frac{1}{\alpha} Y(A - LC)PC^T - \frac{1}{1 - \alpha} Y(D_1 - LD_2)D_2^T \right), \Delta L \right\rangle.$$

Таким образом, приходим к соотношению (П.1.10). Лемма П.1.6 доказана.

Градиент функции  $f(L)$  не является липшицевым на множестве  $\mathcal{S}$ , однако можно показать, что он обладает этим свойством на его подмножестве  $\mathcal{S}_0$  (аналогично тому, как это было сделано в [16]).

Установленные свойства минимизируемой функции и ее производных обосновывают метод минимизации, реализованный в виде Алгоритма 1.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

*Лемма П.2.1* [16]. Пусть  $X$  и  $Y$  — решения двойственных уравнений Ляпунова с гурвицевой матрицей  $A$ :

$$A^T X + X A + W = 0 \quad \text{и} \quad A Y + Y A^T + V = 0.$$

Тогда  $\text{tr}(XV) = \text{tr}(YW)$ .

Свойства функции  $f(\alpha)$ , установленные в [16], полностью переносятся на рассматриваемый случай. В частности, функция  $f(\alpha)$  определена, положительна и сильно выпукла на интервале  $0 < \alpha < 2\sigma(A - LC)$ , а ее значения стремятся к бесконечности на концах интервала, причем существует  $c > 0$  такое, что

$$(П.2.1) \quad f(\alpha) \geq \frac{c}{\alpha(2\sigma - \alpha)}, \quad 0 < \alpha < 2\sigma(A - LC).$$

Минимизацию функции  $f(\alpha)$  можно эффективно осуществлять при помощи метода Ньютона. Зададимся начальным приближением  $0 < \alpha_0 < 2\sigma(A - LC)$ , например  $\alpha_0 = \sigma(A - LC)$ , и применим итерационный процесс

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)},$$

где согласно [16]

$$(П.2.2) \quad f'(\alpha) = \text{tr} Y \left( P - \frac{1}{\alpha^2} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T \right),$$

$$f''(\alpha) = 2 \text{tr} Y \left( X + \frac{1}{\alpha^3} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T \right),$$

а  $P$ ,  $Y$  и  $X$  — решения уравнений Ляпунова (12), (13) и (14). При этом теорема П.1.1 сохраняет свою силу.

Следующая лемма является непрерывным аналогом леммы П.1.4.

*Лемма П.2.2.* Функция  $f(L)$  определена и положительна на множестве  $\mathcal{S}$  допустимых матриц фильтра.

Действительно, если матрица  $A - LC$  гурвицева, то  $\sigma(A - LC) > 0$  и для  $0 < \alpha < 2\sigma(A - LC)$  существует решение  $P \succ 0$  уравнения Ляпунова (12). Тем самым определена строго положительная функция  $f(L, \alpha)$ , при этом  $f(L) > 0$  в силу (П.2.1). Множество ее определения  $\mathcal{S}$  может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими, см. [16].

Лемма П.2.3. На множестве  $\mathcal{S}$  допустимых матриц функция  $f(L)$  коэрцитивна (т.е. стремится к бесконечности на границе области), причем справедливы следующие оценки:

$$(П.2.3) \quad f(L) \geq \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T) \|D_1 - L D_2\|_F^2}{4\sigma(A - LC) (\|A - LC\| + \sigma(A - LC))},$$

$$f(L) \geq \rho \|L\|^2.$$

Доказательство леммы П.2.3. Рассмотрим последовательность допустимых матриц  $\{L_j\} \subseteq \mathcal{S}$  такую, что  $L_j \rightarrow L \in \partial\mathcal{S}$ , т.е.  $\sigma(A - LC) = 0$ . Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что неравенство

$$|\sigma(A - L_j C) - \sigma(A - LC)| = \sigma(A - L_j C) < \varepsilon$$

справедливо для всех  $j \geq N(\varepsilon)$ .

Пусть  $P_j$  — решение уравнения (12), ассоциированного с матрицей фильтра  $L_j$ :

$$\begin{aligned} & \left(A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I\right) P_j + P_j \left(A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I\right)^T + \\ & + \frac{1}{\alpha_j} (D_1 - L_j D_2)(D_1 - L_j D_2)^T = 0, \end{aligned}$$

а  $Y_j$  — решение двойственного к нему уравнения Ляпунова

$$\left(A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I\right)^T Y_j + Y_j \left(A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I\right) + C_1 C_1^T = 0.$$

Тогда с учетом [16, лемма П.3] имеем:

$$\begin{aligned} f(L_j) &= \text{tr}(C_1 P_j C_1^T) + \rho \|L_j\|_F^2 \geq \\ &\geq \text{tr}(P_j C_1 C_1^T) = \text{tr}\left(Y_j \frac{1}{\alpha_j} (D_1 - L_j D_2)(D_1 - L_j D_2)^T\right) \geq \\ &\geq \frac{1}{\alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \geq \frac{1}{\alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T)}{2\|A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I\|} \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{4\sigma(A - L_j C) \|A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I\|} \lambda_{\min}(C_1 C_1^T) \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T)}{4\varepsilon(\|A - L_j C\| + \varepsilon)} \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

поскольку  $0 < \alpha_j < 2\sigma(A - L_j C)$  и

$$\|A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I\| \leq \|A - L_j C\| + \frac{\alpha_j}{2}.$$

С другой стороны,

$$f(L_j) = \text{tr}(C_1 P_j C_1^T) + \rho \|L_j\|_F^2 \geq \rho \|L_j\|_F^2 \geq \rho \|L_j\|^2 \xrightarrow{\|L_j\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Лемма П.2.3 доказана.

Введем в рассмотрение множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{L \in \mathcal{S} : f(L) \leq f(L_0)\}.$$

Из леммы П.2.3 вытекает очевидное

*Следствие П.2.3.* Для любых  $L_0 \in \mathcal{S}$  множество  $\mathcal{S}_0$  ограничено.

С другой стороны, у функции  $f(L)$  на множестве  $\mathcal{S}_0$  существует точка минимума (как у непрерывной — в силу свойств решения уравнения Ляпунова — функции на компактном множестве), но множество  $\mathcal{S}_0$  не имеет общих точек с границей  $\mathcal{S}$  в силу (П.2.3). Далее будет показано, что  $f(L)$  дифференцируема на  $\mathcal{S}_0$ . Следовательно, справедливо

*Следствие П.2.4.* Существует точка минимума  $L_*$  на множестве  $\mathcal{S}$ , и в ней градиент функции  $f(L)$  обращается в нуль.

Перейдем к свойствам градиента функции  $f(L, \alpha)$ .

*Лемма П.2.4.* Функция  $f(L, \alpha)$  определена на множестве допустимых  $L$  и для  $0 < \alpha < 2\sigma(A - LC)$ . На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha f(L, \alpha) &= \text{tr} Y \left( P - \frac{1}{\alpha^2} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T \right), \\ \nabla_L f(L, \alpha) &= 2 \left( \rho L - Y P C^T - \frac{1}{\alpha} Y (D_1 - LD_2) D_2^T \right), \end{aligned} \quad (\text{П.2.4})$$

где матрицы  $P$  и  $Y$  являются решениями уравнений Ляпунова (12) и (13).

Минимум  $f(L, \alpha)$  достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется условиями

$$\nabla_L f(L, \alpha) = 0, \quad \nabla_\alpha f(L, \alpha) = 0.$$

При этом  $f(L, \alpha)$  как функция от  $\alpha$  строго выпукла на  $0 < \alpha < 2\sigma(A - LC)$  и достигает минимума во внутренней точке этого интервала.

*Доказательство леммы П.2.4.* Имеем задачу:

$$\min f(L, \alpha), \quad f(L, \alpha) = \text{tr} C_1 P C_1^T + \rho \|L\|_F^2$$

при ограничении в виде уравнения Ляпунова (12) относительно матрицы  $P$  инвариантного эллипсоида.

Дифференцирование по  $\alpha$  производится в соответствии с соотношениями (П.2.2), (12) и (13). Для дифференцирования по  $L$  дадим ему приращение

$\Delta L$  и обозначим соответствующее приращение  $P$  через  $\Delta P$ ; в результате (12) примет вид

$$\begin{aligned} & \left( A - (L + \Delta L)C + \frac{\alpha}{2}I \right) (P + \Delta P) + (P + \Delta P) \left( A - (L + \Delta L)C + \frac{\alpha}{2}I \right)^T + \\ & + \frac{1}{\alpha} (D_1 - (L + \Delta L)D_2) (D_1 - (L + \Delta L)D_2)^T = 0. \end{aligned}$$

Оставляя обозначение  $\Delta P$  для главной части приращения, получаем

$$\begin{aligned} & \left( A - (L + \Delta L)C + \frac{\alpha}{2}I \right) P + P \left( A - (L + \Delta L)C + \frac{\alpha}{2}I \right)^T + \\ & + \left( A - LC + \frac{\alpha}{2}I \right) \Delta P + \Delta P \left( A - LC + \frac{\alpha}{2}I \right)^T + \\ & + \frac{1}{\alpha} \left( (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T - \Delta LD_2(D_1 - LD_2)^T - \right. \\ & \left. - (D_1 - LD_2)(\Delta LD_2)^T \right) = 0. \end{aligned}$$

После вычитания уравнения (12) из этого уравнения, имеем:

$$\begin{aligned} \text{(П.2.5)} \quad & \left( A - LC + \frac{\alpha}{2}I \right) \Delta P + \Delta P \left( A - LC + \frac{\alpha}{2}I \right)^T - \\ & - \Delta LCP - P(\Delta LC)^T - \frac{1}{\alpha} (\Delta LD_2(D_1 - LD_2)^T + (D_1 - LD_2)(\Delta LD_2)^T) = 0. \end{aligned}$$

Вычислим приращение функционала  $f(L)$ , линеаризуя соответствующие величины:

$$\Delta f(L) = \text{tr } C_1 \Delta P C_1^T + \rho \text{tr } L^T \Delta L + \rho \text{tr } (\Delta L)^T L = \text{tr } \Delta P C_1^T C_1 + 2\rho \text{tr } L^T \Delta L.$$

По лемме П.2.1 из двойственных уравнений (П.2.5) и (13) имеем

$$\begin{aligned} \Delta f(L) &= -\text{tr } 2Y \left( \Delta LCP + \frac{1}{\alpha} \Delta LD_2(D_1 - LD_2)^T \right) + 2\rho \text{tr } L^T \Delta L = \\ &= 2 \text{tr} \left( \rho L^T \Delta L - CPY \Delta L - \frac{1}{\alpha} D_2(D_1 - LD_2)^T Y \Delta L \right) = \\ &= \left\langle 2 \left( \rho L - YPC^T - \frac{1}{\alpha} Y(D_1 - LD_2)D_2^T \right), \Delta L \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к соотношению (П.2.4). Лемма П.2.4 доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // J. Basic Engineer. 1960. V. 82. I. 1. P. 35–45.
2. *Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B.* Linear Estimation. N.J.: Prentice Hall, 2000.

3. *Матасов А.И.* Основы теории фильтра Калмана. М.: Изд-во МГУ, 2021.
4. *Schwerpe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. N.J.: Prentice Hall, 1973.
5. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
6. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
7. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Докл. РАН. 2008. Т. 418. № 6. С. 749–753.  
*Polyak B.T., Topunov M.V.* Filtering under Nonrandom Disturbances: The Method of Invariant Ellipsoids // Dokl. Math. 2008. V. 77. No. 1. P. 158–162.
8. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т.* Фильтрация при произвольных ограниченных внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств // 13-я Мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2020). Матер. XXXII Конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. Санкт-Петербург, 6–8 октября 2020 г. СПб.: Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”, 2020. С. 291–294.
9. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
10. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
11. *Fazel M., Ge R., Kakade S., Mesbahi M.* Global Convergence of Policy Gradient Methods for the Linear Quadratic Regulator // Proc. 35th Int. Conf. Machine Learning. Stockholm, Sweden, July 10–15, 2018. V. 80. P. 1467–1476.
12. *Mohammadi H., Zare A., Soltanolkotabi M., Jovanović M.R.* Global Exponential Convergence of Gradient Methods Over the Nonconvex Landscape of the Linear Quadratic Regulator // Proc. 2019 IEEE 58th Conf. Decision Control. Nice, France, December 11–13, 2019. P. 7474–7479.
13. *Zhang K., Hu B., Başar T.* Policy Optimization for  $\mathcal{H}_2$  Linear Control with  $\mathcal{H}_\infty$  Robustness Guarantee: Implicit Regularization and Global Convergence // Proc. 2nd Conference on Learning for Dynamics and Control (2nd L4DC). Zürich, Switzerland, June 11–12, 2020. P. 179–190.
14. *Bu J., Mesbahi A., Fazel M., Mesbahi M.* LQR through the Lens of First Order Methods: Discrete-Time Case // arXiv:1907.08921, 2019.
15. *Fatkhullin I., Polyak B.* Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM J. Control Optim. 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.
16. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // АиТ. 2021. № 9. С. 86–115.  
*Polyak B.T., Khlebnikov M.V.* Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
17. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации // АиТ. 2022. № 3. С. 7–32.  
*Polyak B.T., Khlebnikov M.V.* Observer-Aided Output Feedback Synthesis as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 303–324.

18. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // *АиТ.* 2022. № 11. С. 62–82.  
*Polyak B.T., Khlebnikov M.V.* New Criteria for Tuning PID Controllers // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 11. P. 1724–1741.
19. *Luenberger D.G.* Observing the State of a Linear System // *IEEE Transactions on Military Electronics.* 1964. V. 8. P. 74–80.
20. *Luenberger D.G.* An Introduction to Observers // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1971. V. 35. P. 596–602.
21. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // *АиТ.* 2021. № 1. С. 3–54.  
*Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
22. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2007. № 3. С. 106–125.  
*Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V.* Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
23. URL [en.wikipedia.org/wiki/Kalman\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter)
24. *Humpherys J., Redd P., West J.* A Fresh Look at the Kalman Filter // *SIAM Rev.* 2012. V. 54. Iss. 4. P. 801–823.
25. *Tang W., Zhang Q., Wang Z., Shen Y.* Ellipsoid Bundle and its Application to Set-Membership Estimation // *IFAC-PapersOnLine.* 2020. V. 53. I. 2. P. 13688–13693.
26. *Tang W., Zhang Q., Wang Z., Shen Y.* Set-Membership Filtering with Incomplete Observations // *Inform. Sci.* 2020. V. 517. P. 37–51.
27. *Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E.* Ellipsoidal Parameter or State Estimation under Model Uncertainty // *Automatica.* 2004. V. 40. I. 7. P. 1171–1179.
28. *Durieu C., Walter E., Polyak B.* Multi-Input Multi-Output Ellipsoidal State Bounding // *J. Optim. Theory Appl.* 2001. V. 111. No. 2. P. 273–303.
29. *Kwon W.H., Moon Y.S., Ahn S.C.* Bounds in Algebraic Riccati and Lyapunov Equations: A Survey and Some New Results // *Int. J. Control.* 1996. V. 64. P. 377–389.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.*

Поступила в редакцию 23.09.2022

После доработки 21.12.2022

Принята к публикации 29.12.2022