

© 2023 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru),
П.А. ГУЩИН, канд. техн. наук (guschin.p@mail.ru),
НГУЕН БА ХЮ (leningrat206@gmail.com)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ВХОДНЫЕ И ВЫХОДНЫЕ СИГНАЛЫ¹

Рассмотрено развитие метода, предложенного в публикации [1], на системы с произвольным соотношением количества входных и выходных сигналов. Получено решение, гарантирующее нахождение данных сигналов в заданном разработчиком множестве. Для решения задачи предложены две последовательные замены координат. Первая замена сводит выходную переменную объекта к новой переменной, размерность которой не превосходит размерности вектора управления. Вторая замена позволяет перейти от задачи управления с ограничениями к задаче управления без ограничений. В качестве иллюстрации работоспособности метода рассмотрено решение двух задач. Первая задача — управление по состоянию линейными системами с ограничениями на сигнал управления и фазовые переменные. Вторая задача — управление по выходу линейными системами с ограничением на выходной сигнал и сигнал управления. В обеих задачах проверка устойчивости замкнутой системы формулируется в терминах разрешимости линейных матричных неравенств. Полученные результаты сопровождаются примерами моделирования, иллюстрирующими эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: динамическая система, замена координат, устойчивость, управление.

DOI: 10.31857/S0005231023040049, **EDN:** CFNMVM

1. Введение

В [1, 2] приведен обзор методов управления с обеспечением выходного сигнала объекта в заданном множестве. Также в [1, 2] предложено новое решение данной задачи, которое состоит в использовании специальной замены координат, позволяющей перейти от задачи управления с ограничениями к задаче управления без ограничений.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-79-10104-П, <https://rscf.ru/project/18-79-10104/>).

Однако и решение [1, 2], и большая часть описанной литературы в [1, 2] ограничены рассмотрением объектов, у которых:

- 1) размерность сигнала управления больше или равна размерности регулируемого сигнала;
- 2) не накладываются ограничения на сигнал управления.

Касательно первого ограничения на практике существует достаточно много задач, когда размерность сигнала управления меньше размерности регулируемого сигнала, например управление неполноприводными системами: шагающие роботы, станки с программным управлением, летательные аппараты, водные суда, некоторые маятниковые системы и т.д. Для решения таких задач предложено много методов, в частности [3–6], однако они не гарантируют заданного качества регулирования в любой момент времени, а лишь в установившемся режиме.

Относительно второго ограничения логически возникает вопрос о величине сигнала управления, необходимого для обеспечения выходного сигнала в заданном множестве в любой момент времени.

В данной работе подход [1, 2] будет развит для решения следующих задач:

- 1) управление объектами, у которых размерность сигнала управления может быть меньше размерности регулируемого сигнала;
- 2) обеспечение регулируемого и управляющего сигналов в заданном множестве в любой момент времени;
- 3) использование аппарата линейных матричных неравенств для анализа устойчивости замкнутой системы и синтеза параметров регулятора.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 ставится общая задача управления с гарантией нахождения входного и выходного сигналов в заданном множестве в любой момент времени. В разделе 3 предложены две замены координат. Первая замена сводит выходную переменную объекта к новой переменной, размерность которой не превосходит размерности вектора управления. Вторая замена позволяет перейти от задачи управления с ограничениями к задаче управления без ограничений. В разделе 4 рассмотрено применение результата из раздела 3 к задаче управления по состоянию линейными системами с учетом ограничений на сигнал управления и фазовые переменные. В разделе 5 решена задача управления по выходу линейными системами с ограничением на выходной и управляющий сигналы. Полученные результаты сопровождаются примерами моделирования, иллюстрирующими эффективность предложенного метода.

В статье используются следующие *обозначения и определения*. \mathbb{R}^n — евклидово пространство размерности n с нормой $|\cdot|$; $\mathbb{R}^{n \times m}$ — множество всех $n \times m$ вещественных матриц; $P > 0$ — положительно определенная симметричная матрица; $\lambda_{\min}(P)$ — наименьшее собственное число матрицы $P > 0$; $p = d/dt$; символ «*» обозначает симметричный блок в симметричной матрице.

Определение 1 [3, 7]. Непрерывная функция $\alpha : [0, a) \rightarrow [0; \infty)$ принадлежит классу \mathcal{K} , если она является строго возрастающей и $\alpha(0) = 0$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему вида

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u, t), \\ y &= H(x, u, t), \end{aligned}$$

где $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ — сигнал управления, $y = \text{col}\{y_1, \dots, y_l\} \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^l$ — выходной сигнал, функции F и H определены для всех x, u и t , F кусочно-непрерывна и ограничена по t , функция H непрерывно дифференцируемая по всем аргументам и ограниченная по t . Объект управления (1) управляемый и наблюдаемый для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

В отличие от [1] в настоящей статье не требуются ограничения вида $\dim u \geq \dim y$, а возможно произвольное соотношение между размерностями сигналов u и y . Это достигается за счет замены вида

$$(2) \quad \xi = G(y, u, t),$$

где размерность ξ не превосходит размерности управляющего сигнала, т.е. $\xi = \text{col}\{\xi_1, \dots, \xi_v\}$, $v \leq m$, G — непрерывно дифференцируемая функция по всем аргументам и ограниченная по t .

Замечание 1. На самом деле можно не ограничиваться только классом непрерывно дифференцируемых функций G , но и рассмотреть более общий класс функций. Для этого рассмотрим следующее определение и комментарии к нему.

Определение 2 [8]. *Функция $u \rightarrow G(y, u, t)$ называется дифференцируемой в точке $u \in \mathbb{R}^m$ по направлению $v \in \mathbb{R}^m$, если существует конечный предел*

$$G'_u(y, u, t; v) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{G(y, u + \alpha v, t) - G(y, u, t)}{\alpha}.$$

Если функция $u \rightarrow G(y, u, t)$ дифференцируема в точке u по любому направлению $v \in \mathbb{R}^m$, то она называется дифференцируемой по направлениям в точке u , а функция $v \rightarrow G'_u(y, u, t; v)$ называется производной функции $u \rightarrow G(y, u, t)$ по направлениям.

Пусть функция $G(y, u, t)$ локально липшицева, непрерывно дифференцируема по y и t и дифференцируема по направлениям по u . Тогда для любых абсолютно непрерывных функций $y(t)$ и $u(t)$ функция $G(y(t), u(t), t)$ также будет абсолютно непрерывной. Более того, по правилу вычисления производной по направлениям сложной функции [8] будет

$$\frac{d}{dt} G(y(t), u(t), t) = \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + G'_u(y(t), u(t), t; \dot{u}(t)) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

для почти всех $t \geq 0$. Здесь $G'_u(y(t), u(t), t; \dot{u}(t))$ — производная функции $u \rightarrow G(y(t), u, t)$ в точке $u(t)$ по направлению $\dot{u}(t)$.

Таким образом, когда рассматриваемая в статье функция G не является дифференцируемой по u , но является дифференцируемой по направлениям по u , во всех выкладках величину $\frac{\partial G(y(t), u(t), t)}{\partial u} \dot{u}(t)$ можно заменить на $G'_u(y(t), u(t), t; \dot{u}(t))$.

Требуется разработать закон управления, который обеспечит выполнение условия

$$(3) \quad \underline{g}_i(t) < \xi_i(t) < \bar{g}_i(t), \quad i = 1, \dots, v$$

для всех t . Функция G и непрерывно дифференцируемые функции $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$ выбираются так, чтобы были учтены ограничения $u \in \mathcal{U}$ и $y \in \mathcal{Y}$. Таким образом, ограничения (3) вместе с преобразованием (2) должны включать в себя ограничения на входные и выходные сигналы объекта (1). Дополнительно, выбором функций $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$ можно задавать различную «конфигурацию» области, в которой осуществляется переходной процесс по $\xi_i(t)$.

Резюмируем: в статье требуется синтезировать закон управления, который обеспечит выполнение условия (3). С другой стороны, определение переменной ξ обуславливает поведение сигналов y и u . Так, в разделах 4 и 5 функция G будет задана в квадратичной форме, что вместе с (3) требует нахождения переменных y и u в некоторой области, проекциями на координатные плоскости которой являются кольца с переменными радиусами, зависящими от $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$ (подробнее см. ниже). В замечаниях 5 и 7 приведены примеры других видов замен (2), что обуславливает другие формы областей, где будут находиться y и u .

3. Метод решения

Следуя [1], введем замену переменной ξ в виде

$$(4) \quad \xi(t) = \Phi(\varepsilon(t), t),$$

где $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^v$ — непрерывно дифференцируемая функция по t , $\Phi(\varepsilon, t) = \text{col}\{\Phi_1(\varepsilon, t), \dots, \Phi_v(\varepsilon, t)\}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (а) $\underline{g}_i(t) < \Phi_i(\varepsilon, t) < \bar{g}_i(t)$, $i = 1, \dots, v$ для любых $t \geq 0$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$;
- (б) существует обратное отображение $\varepsilon = \Phi^{-1}(\xi, t)$ для любых ξ из (3) и $t \geq 0$;
- (в) функция $\Phi(\varepsilon, t)$ непрерывно дифференцируемая по ε и t , а также $\det \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right) \neq 0$ для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$ и $t \geq 0$;
- (г) $\left| \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right| \leq \gamma$, $\gamma > 0$ для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$ и $t \geq 0$. Величина γ известна, поскольку (4) определяется разработчиком.

Для синтеза закона управления потребуется знание динамики $\varepsilon(t)$. Найдем полные производные по времени от $y(t)$ и $\xi(t)$ вдоль траекторий (1), (2), (4) и приравняем полученные результаты для (2) и (4). В итоге получим

$$(5) \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} F + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Принимая во внимание условие в), выразим $\dot{\varepsilon}$ из (5) в виде

$$(6) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[\frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} F + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial u} \right) \dot{u} + \right. \\ \left. + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Замечание 2. Если по условию задачи не доступно измерению состояние x , то для синтеза закона управления вместо (6) удобно использовать выражение, полученное из второго выражения в (5) в виде

$$(7) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[\frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

В следующих разделах выражения (6) и (7) будут использоваться для синтеза законов управления. Теперь сформулируем основной результат настоящего раздела.

Теорема 1. Пусть для преобразования (4) выполнены условия (а)–(г), $\underline{g}_i(0) < \xi_i(0) < \bar{g}_i(0)$, $i = 1, \dots, v$, существует стабилизирующий закон управления $u = u(t, y, \varepsilon)$ для системы (6) или (7), кусочно-непрерывный по t и локально липшицевый по y и ε , а также существует функция Ляпунова $V(t, \varepsilon)$ такая, что

$$\alpha_1(|\varepsilon|) \leq V(t, \varepsilon) \leq \alpha_2(|\varepsilon|),$$

$$(8) \quad \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[\frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right] \leq -\alpha_3(|\varepsilon|),$$

где α_1 , α_2 и α_3 — \mathcal{K} -функции. Тогда будет выполнено условие (3).

Так как выполнены условия (8), то $\varepsilon(t)$ — предельно ограниченная функция. Тогда из условия (а) следует, что будет выполнено условие (3).

Замечание 3. Условия теоремы 1 остаются справедливыми при ослабленных предположениях о дифференцируемости функции G [9], а именно, если G локально липшицева по всем переменным, непрерывно дифференцируе-

ма по y и t , и дифференцируема по направлениям по u . В этом случае в правой части второго равенства (5) второе слагаемое заменится на $G'_u(y, u, t; v)$ (см. определение 2). Значит, равенства (5)–(7) будут выполнены только для почти всех t . В результате в (6) и (7) необходимо заменить $\frac{\partial G}{\partial u} \dot{u}$ на соответствующую производную по направлениям и рассматривать все выкладки для почти всех t . Поэтому ниже в доказательствах теорем 2 и 3 соответствующие (не-)равенства для производных выполняются для почти всех t .

В [1] предложены различные частные виды замены координат (4), не связанные друг с другом. Ниже приведем новый вид замены координат, который позволит связать преобразования из [1] и получить ряд новых видов замен.

Пример 1. Пусть $\Phi(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}$ в (4) задана в виде

$$(9) \quad \Phi(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t) - \underline{g}(t)}{2} T(\varepsilon) + \frac{\underline{g}(t) + \bar{g}(t)}{2},$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $T(\varepsilon)$ — строго монотонная функция такая, что $-1 < T(\varepsilon) < 1$ для любых ε .

Достоинство замены координат (9) по сравнению с [1] состоит в том, что она позволяет отдельно выделить функции $\bar{g}(t)$, $\underline{g}(t)$ и $T(\varepsilon)$. Функции $\bar{g}(t)$ и $\underline{g}(t)$ определяют желаемую область для регулируемой переменной и задаются разработчиком. Функция $T(\varepsilon)$ определяет замену координат. Например, $T(\varepsilon)$ может быть выбрана в виде

$$T(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + |\varepsilon|}, \quad T(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon + 1} = \text{th}(0,5\varepsilon), \quad T(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \arctg(\varepsilon) \quad \text{и т.п.}$$

Ниже рассмотрим применение предложенного подхода для тех же типов моделей, что и в [1]. Обобщение полученных результатов на случай неизвестных параметров модели может быть непосредственно получено как в [2].

4. Управление по состоянию с ограничением на фазовые переменные и сигнал управления

Рассмотрим объект управления

$$(10) \quad \dot{x} = Ax + Bu + Df,$$

где $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}$ и $|f(t)| \leq \bar{f}$ для всех t , матрицы A , B и D известны и имеют соответствующие размерности. Пара (A, B) управляема. В данном случае $y = x$. Множества \mathcal{X} и \mathcal{U} заданы как

$$(11) \quad \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_x x \leq 1\}, \quad \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : p_u |u| \leq 1\},$$

где $P_x > 0$ и $p_u > 0$ задаются разработчиком.

Для сравнения ограничений по x и u введем замены переменных $\tilde{x} = \sqrt{\lambda_{\min}(P_x)} x$ и $\tilde{u} = p_u u$, которые позволяют пропорционально преобразовать

$x^T P_x x \leq 1$ к новому эллипсоиду с наибольшей полуосью единичной длины и $p_u |u| \leq 1$ к новому отрезку длины 2. С учетом данной замены преобразуем уравнение объекта (10) и множества \mathcal{X}, \mathcal{U} к виду

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} + \tilde{D}f, \\ \tilde{\mathcal{X}} &= \left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{\lambda_{\min}\{P_x\}} \tilde{x}^T P_x \tilde{x} \leq 1 \right\}, \quad \tilde{\mathcal{U}} = \{ \tilde{u} \in \mathbb{R} : |\tilde{u}| \leq 1 \}, \end{aligned}$$

где $\tilde{B} = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}\{P_x\}}}{p_u} B$ и $\tilde{D} = \sqrt{\lambda_{\min}\{P_x\}} D$.

Представим новый сигнал управления \tilde{u} в виде следующей суммы:

$$(13) \quad \tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2,$$

где \tilde{u}_1 будет использоваться для стабилизации (12), \tilde{u}_2 — для обеспечения заданных ограничений на \tilde{x} и \tilde{u} .

С учетом неравенством Юнга ($2a^T b \leq \mu a^T a + \mu^{-1} b^T b$ для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$ и $\mu > 0$) рассмотрим следующую оценку: $\tilde{u}^2 = \tilde{u}_1^2 + 2\tilde{u}_1 \tilde{u}_2 + \tilde{u}_2^2 \leq (1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})\tilde{u}_2^2$, $r > 0$. Учитывая, что $y = x$ в (10), определим переменную ξ в (2) в виде

$$(14) \quad \xi = \frac{1}{\lambda_{\min}\{P_x\}} \tilde{x}^T P_x \tilde{x} + (1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})(|\tilde{u}_2| + \delta)^2,$$

где величина $\delta > 0$ задается разработчиком и потребуется для реализации закона управления \tilde{u}_2 с учетом того, что $|\tilde{u}_2| + \delta \neq 0$. Обозначив $P_1 = \frac{1}{\lambda_{\min}\{P_x\}} P_x$, $p_2 = 1+r$ и $p_3 = 1+r^{-1}$, перепишем (14) в виде

$$(15) \quad \xi = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta)^2.$$

В силу того, что ξ — скалярная величина, представим (3) как

$$(16) \quad \underline{g}(t) < \xi(t) < \bar{g}(t).$$

Так как

$$\tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + \tilde{u}^2 \leq \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 \tilde{u}_2^2 \leq \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta)^2,$$

то, выбрав $\bar{g}(t) \leq 1$, получим, что в (16) учтены ограничения (12).

Требуется синтезировать закон управления, который обеспечит выполнение (16). Тогда фазовые переменные и сигнал управления будут находиться в заданных множествах \mathcal{X} и \mathcal{U} с дополнительным выполнением условия (16).

Отметим, что метод [1] для объекта (10) позволяет решить только задачу нахождения одной компоненты вектора x в заданном множестве без ограничений на сигнал управления.

Сформулируем основной результат раздела 4.

Теорема 2. Пусть для преобразования (2) выполнены условия (а)–(г), $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для любых ε и t , а также $\underline{g}(0) < \xi(0) < \bar{g}(0)$. Если для заданных $\delta > 0$, $\mu > 0$, $P_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$, $\beta > 0$, $c > 0$ и $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ существуют $H > 0$, $\alpha > 0$, $\tau_i > 0$, $i = 1, \dots, 6$ такие, что при $v = \pm \bar{f}$ разрешимы следующие линейные неравенства:

$$(17) \quad \begin{bmatrix} -\alpha + 0,5\tau_1 & 0,5v\mu^{-1}\tilde{D}^T\tilde{D} & -0,5 \\ * & -\tau_2 & 0 \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0, \\ c\tau_1 \geq \bar{f}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3,$$

$$(18) \quad \begin{bmatrix} \bar{A}^T H + H\bar{A} + \beta H & H\tilde{B} & H\tilde{D} \\ * & -\tau_4 & 0 \\ * & * & -\tau_5 \end{bmatrix} \leq 0, \\ H \geq \bar{P}_1, \\ K^T K \leq \tau_6 H,$$

$$\frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}\beta \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}\tau_4 + \bar{f}^2\tau_5, \\ \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}\tau_6 \leq \frac{1}{1+r},$$

тогда закон управления

$$(19) \quad u = \frac{1}{p_u}(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2), \\ \tilde{u}_1 = K\tilde{x}, \\ \dot{\tilde{u}}_2 = -\frac{1}{2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)}\text{sign}(u_2) \left[\alpha\varepsilon + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \bar{A}\tilde{x} + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{B}\tilde{u}_2 + \mu\text{sign}(\varepsilon)\tilde{x}^T \bar{P}_1^2 \tilde{x} \right]$$

обеспечит выполнение (16), где $\bar{A} = A + \tilde{B}K$ и $\bar{P}_1 = P_1 + p_2 K^T K$.

Замечание 4. Для разрешимости (18) необходимо выбирать K из условия гурвицевости матрицы \bar{A} .

Доказательство. Отметим, что в статье решения уравнений с разрывной правой частью рассматриваются в смысле Филиппова. Поэтому в доказательствах теорем 2 и 3 соответствующие (не-)равенства для производных будут выполнены для почти всех t . Принимая во внимание (13) и (19), преобразуем (12) и (15) к виду

$$(20) \quad \dot{\tilde{x}} = \bar{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}_2 + \tilde{D}f, \\ \xi = \tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{x} + p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)^2.$$

С учетом (20) перепишем (6) как

$$(21) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \bar{A} \tilde{x} + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{B} \tilde{u}_2 + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{D} f + \right. \\ \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta) \text{sign}(\tilde{u}_2) \dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Для анализа устойчивости решений (21) рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$(22) \quad V_1 = 0,5\varepsilon^2.$$

Взяв полную производную по времени от (22) вдоль решений (21), получим:

$$(23) \quad \dot{V}_1 = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \varepsilon \left[2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \bar{A} \tilde{x} + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{B} \tilde{u}_2 + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{D} f + \right. \\ \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta) \text{sign}(\tilde{u}_2) \dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Воспользовавшись неравенством Юнга для

$$2\varepsilon \tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{D} f \leq \mu |\varepsilon| \tilde{x}^T \bar{P}_1^2 \tilde{x} + \mu^{-1} |\varepsilon| \tilde{D}^T \tilde{D} f^2$$

и учитывая третье выражение в (19), оценим (23) в виде

$$(24) \quad \dot{V}_1 \leq \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left(-\alpha \varepsilon^2 + \mu^{-1} |\varepsilon| \tilde{D}^T \tilde{D} f^2 - \varepsilon \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right).$$

Потребуем при $V_1 \geq c$ выполнение условия $\dot{V}_1 \leq 0$, принимая во внимание ограничения $f^2 \leq \bar{f}^2$ и $\left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right)^2 \leq \gamma^2$ (см. постановку задачи и условие (г)). Так как $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ не влияет на знак выражения (24), то перепишем выше-названные условия как

$$(25) \quad -\alpha \varepsilon^2 + \mu^{-1} \varepsilon \text{sign}(\varepsilon) \tilde{D}^T \tilde{D} f^2 - \varepsilon \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \leq 0 \quad \forall \left(\varepsilon, f, \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right) : \\ 0,5\varepsilon^2 \geq c, \quad f^2 \leq \bar{f}^2, \quad \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right)^2 \leq \gamma^2.$$

Обозначив $z = \text{col} \left\{ \varepsilon, f, \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right\}$, перепишем (25) в матричном виде:

$$(26) \quad z^T \begin{bmatrix} -\alpha & 0,5\mu^{-1} \text{sign}(\varepsilon) f \tilde{D}^T \tilde{D} & -0,5 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z \leq 0, \\ z^T \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z \leq -c, \quad z^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z \leq \bar{f}^2, \quad z^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} z \leq \gamma^2.$$

Согласно S-процедуре [10–12], неравенства (26) будут выполнены, если будут выполнены следующие условия:

$$(27) \quad \begin{bmatrix} -\alpha + 0,5\tau_1 & 0,5\text{sign}(\varepsilon)\mu^{-1}\tilde{D}^T\tilde{D} & -0,5 \\ * & -\tau_2 & 0 \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0,$$

$$c\tau_1 \geq \bar{f}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3.$$

Так как $\text{sign}(\varepsilon)f \in [-\bar{f}, \bar{f}]$, то имеем политопную неопределенность в (27) с двумя вершинами политопа $v = -\bar{f}$ и $v = \bar{f}$. Согласно [13, 14], если существуют решения $\alpha, \tau_i, i = 1, 2, 3$ первого ЛМН в (17) в вершинах $v = -\bar{f}$ и $v = \bar{f}$, то первое ЛМН в (27) будет иметь решение. Значит, система (21) устойчива по вход-состоянию. В силу замены координат (4) и свойства (а) переменная ξ в (20) будет ограничена. Тогда сигналы \tilde{x}, x и \tilde{u}_2 будут ограничены. Из третьего выражения (19) следует ограниченность $\dot{\tilde{u}}_2$.

Теперь получим дополнительные условия, накладывающие ограничения на \tilde{u}_1 в (19). Рассмотрим функцию Ляпунова

$$(28) \quad V_2 = \tilde{x}^T H \tilde{x}$$

и потребуем при $V_2 \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}$ выполнение условий $\dot{V} \leq 0$ и $H \geq \bar{P}_1$ (последнее означает, что эллипсоид $\tilde{x}^T H \tilde{x} = \inf\{\bar{g}(t)\}$ содержится внутри эллипсоида $\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{x} = \inf\{\bar{g}(t)\}$), принимая во внимание ограничения $\tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}$ и $f^2 \leq \bar{f}^2$. То есть потребуем, чтобы закон управления \tilde{u}_1 гарантировал нахождение фазовых траекторий в меньшем множестве по сравнению с (16). Перепишем данные условия как

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{V}_2 = \tilde{x}^T (\bar{A}^T H + H \bar{A}) \tilde{x} + 2\tilde{x}^T H \bar{B} \tilde{u}_2 + 2\tilde{x}^T H \bar{D} f &\leq 0 \quad \forall(\tilde{x}, \tilde{u}_2, f) : \\ \tilde{x}^T H \tilde{x} \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}, \quad \tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}, \quad f^2 \leq \bar{f}^2. \end{aligned}$$

Обозначив $s = \text{col}\{\tilde{x}, \tilde{u}_2, f\}$, преобразуем (29) к виду

$$(30) \quad \begin{aligned} s^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T H + H \bar{A} & H \bar{B} & H \bar{D} \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} s &\leq 0, \\ -s^T \begin{bmatrix} H & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} s &\geq -\frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}, \\ s^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & -1 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} s &\leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}, \quad s^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & -1 \end{bmatrix} s &\leq \bar{f}. \end{aligned}$$

С учетом $\tilde{u}^2 \leq 1$ из (12) и $\tilde{u}^2 \leq (1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})\tilde{u}_2^2$ из неравенства Юнга потребуем выполнение $(1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})\tilde{u}_2^2 \leq 1$. Значит, $\tilde{u}_1^2 \leq \frac{1}{1+r}$. Используя S-процедуру [13] и второе выражение в (19), в результате неравенства (30) и $\tilde{x}^T K^T K \tilde{x} \leq \frac{1}{1+r}$ при $\tilde{x}^T H \tilde{x} \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{P_1\}}$ будут выполнены одновременно, если будут выполнены условия (18). Теорема 2 доказана.

Замечание 5. В статье рассмотрены ограничения по состоянию в квадратичной форме. Подобные ограничения рассматривались также в [15]. Если ограничения заданы в виде параллелепипеда, то, например как в [16, 17], можно ввести новые ограничения в форме эллипсоида, вписанного в данный параллелепипед, и далее решать задачу с ограничениями в квадратичной форме.

С другой стороны, не обязательно рассматривать переменную ξ в квадратичной форме. Так, если априори заданы ограничения в квадратичной форме (11), то можно воспользоваться также заменой в квадратичной форме (15) или в качестве альтернативы $\xi = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + (|\tilde{u}| + \delta)^2$. Если же все ограничения заданы в интервальной форме на координаты вектора состояния и управление, то можно воспользоваться заменами вида $\xi = |\tilde{x}| + |\tilde{u}_1| + |\tilde{u}_2|$ или $\xi = \sum_{i=1}^n p_{1i} |\tilde{x}_i| + |\tilde{u}_1| + |\tilde{u}_2|$, $p_{1i} > 0$, $i = 1, \dots, n$ и т.п., дополнительно ослабив предположения о дифференцируемости функции G по x и u , см. замечание 3 и [9]. Очевидно, что для каждой замены будут получены другие формы закона управления и условия их работоспособности, отличные от предложенных в статье.

Пример 2. Рассмотрим неустойчивый объект (10) со следующими параметрами:

$$(31) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} -0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix}, \quad f(t) = 0,01[\text{sign}(\sin(1,7t)) + \sin(0,3t) + \text{sat}\{d(t)\}],$$

где $\text{sat}\{\cdot\}$ — функция насыщения, $d(t)$ — белый шум с ограниченной полосой пропускания и моделируемый в Matlab Simulink с помощью блока «Band-Limited White Noise» со следующими параметрами: мощность шума 0,3 и время выборки 0,2 соответственно. Тогда $\bar{f} = 0,03$.

Пусть $P_x = 0,81 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $p_u = 1$ определены в (11).

Зададим $\delta = 0,01$ в (15), $K = [-2 \quad -4]$ и $\mu = 0,01$ в (19), $T(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon + 1}$, $\bar{g} = 0,89e^{-0,1t} + 0,1$ и $\underline{g} = 0,01$ в (16), а также $r = 0,01$ в (14). Вычислим: $P_1 = I$, $p_2 = 1,01$, $p_3 = 101$ и $\gamma = \frac{3\bar{g} - \underline{g}}{2} = 1,475$. Если задать $c = 1$ и $\beta = 0,1$, то неравенства (17), (18) имеют решения, например, при $\alpha = 37,9$.

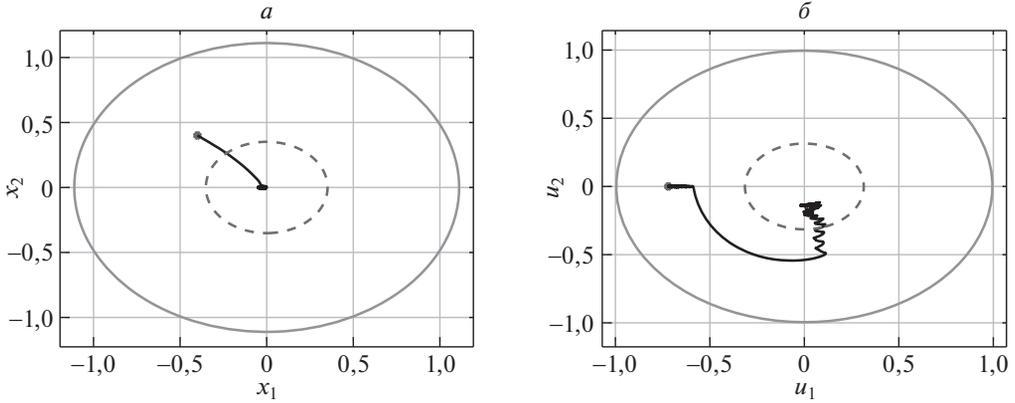


Рис. 1. Фазовые траектории в замкнутой системе по (x_1, x_2) — а и (u_1, u_2) — б.

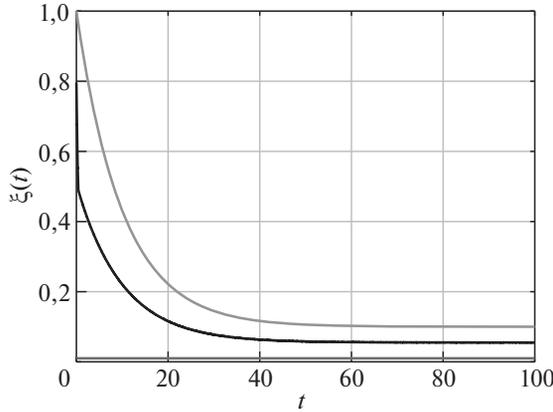


Рис. 2. Переходной процесс по $\xi(t)$ в замкнутой системе.

На рис. 1 изображены фазовые портреты по (x_1, x_2) и (u_1, u_2) , а на рис. 2 приведен переходной процесс по $\xi(t)$. На рис. 1 большие эллипсы соответствуют выражениям $x^T P_x x = \bar{g}(0)$ и $(1+r)p_u u_1^2 + (1+r^{-1})p_u u_2^2 = \bar{g}(0)$, а меньшие эллипсы — $x^T P_x x = \inf\{\bar{g}(t)\}$ и $(1+r)p_u u_1^2 + (1+r^{-1})p_u u_2^2 = \inf\{\bar{g}(t)\}$. Из рис. 1 видно, что фазовые траектории начинаются в большом эллипсе, с течением времени (примерно через 25 с после начала работы системы, см. рис. 2) достигают меньшего эллипса и остаются в нем, никогда не покидая его.

5. Управление по выходу

Рассмотрим объект управления вида

$$(32) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Df, \\ y &= Lx, \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$, $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}$ и $|f(t)| \leq \bar{f}$ для всех t . Матрицы A , B , D и L имеют соответствующие размерности. Пара (A, B) управляема и пара (L, A) наблюдаема. Объект управления (32) строго минимально-фазовый [3]. Множества \mathcal{Y} и \mathcal{U} заданы в виде

$$(33) \quad \mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R} : p_y |y| \leq 1\}, \quad \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : p_u |u| \leq 1\},$$

где $p_y > 0$ и $p_u > 0$ задаются разработчиком.

Для сравнения ограничений по y и u введем замены $\tilde{y} = p_y y$ и $\tilde{u} = p_u u$, которые позволят преобразовать ограничения (33) к отрезкам одинаковой длины. Преобразуем множества \mathcal{Y} и \mathcal{U} к виду

$$(34) \quad \tilde{\mathcal{Y}} = \{\tilde{y} \in \mathbb{R} : |\tilde{y}| \leq 1\}, \quad \tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{u} \in \mathbb{R} : |\tilde{u}| \leq 1\}.$$

Представим \tilde{u} в виде суммы (13) и определим переменную ξ в (2) как

$$(35) \quad \xi = \tilde{y}^2 + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta)^2,$$

где δ , p_2 и p_3 определены в разделе 4. Выбрав $\bar{g}(t) \leq 1$, получим, что (35) включает в себя ограничения (33). Цель управления состоит в поиске закона управления, гарантирующего выполнение условия (16) с учетом (35).

Метод [1] для объекта (32) гарантирует нахождение только выходного сигнала в заданном множестве. В отличие от [1] предложенный метод позволит обеспечить нахождение выходного и управляющего сигналов в заданном множестве.

Преобразуем (32) к виду

$$(36) \quad Q(p)\tilde{y}(t) = R(p)\tilde{u}(t) + \phi(t).$$

Здесь

$$Q(p) = \det(pI - A), \quad R(p) = \frac{p_y}{p_u} L(pI - A)^* B,$$

$(pI - A)^*$ — присоединенная матрица,

$$\phi(t) = p_y L(pI - A)^* [x(0) + Df(t) + Bu(0) + Bf(0)].$$

В дальнейшем, ради простоты выводов, например, как в [3, 18, 19] и ссылок на литературу в них, будем использовать одновременно запись в форме вход-выход (или передаточной функции) и пространства состояний.

Сформулируем основной результат раздела 5.

Теорема 3. Пусть для преобразования (2) выполнены условия (а)–(г), $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для любых ε и t , а также $\underline{g}(0) < \xi(0) < \bar{g}(0)$. Если для заданных $\delta > 0$, $\mu > 0$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$, $\beta > 0$, $c > 0$ и $k \in \mathbb{R}$ существуют $H > 0$, $\alpha > 0$, $\tau_i > 0$, $i = 1, \dots, 6$ такие, что при $v = \pm \bar{f}$ разрешимы следующие ли-

нейные неравенства:

$$(37) \quad \begin{bmatrix} -\alpha + 0,5\tau_1 & 0,5v\mu^{-1} & -0,5 \\ * & -\tau_2 & 0 \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0, \\ c\tau_1 \geq \hat{\phi}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3,$$

$$(38) \quad \begin{bmatrix} \bar{A}^T H + Q\bar{A} + \beta H & \frac{1}{p_u}HB & HD \\ * & -\tau_4 & 0 \\ * & * & -\tau_5 \end{bmatrix} \leq 0, \\ H \geq p_y^2 \bar{p}_1 L^T L, \\ L^T K^T K L \leq \tau_6 H, \\ \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1} \beta \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3} \tau_4 + \hat{\phi}^2 \tau_5, \\ \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1} \tau_6 \leq \frac{1}{1+r},$$

тогда закон управления

$$(39) \quad u = \frac{1}{p_u}(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2), \\ \tilde{u}_1 = k\tilde{y}, \\ \dot{\tilde{u}}_2 = -\frac{1}{2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)} \text{sign}(\tilde{u}_2) \left[\alpha\varepsilon + 2\bar{p}_1\tilde{y} \frac{pR(p)}{Q(p)} \tilde{u}_2 + \mu\bar{p}_1^2 \text{sign}(\varepsilon)\tilde{y}^2 \right]$$

обеспечит выполнение (16), где $\bar{A} = A + \frac{k}{p_u}BL$, $\bar{p}_1 = 1 + k^2p_2$.

Замечание 6. Для разрешимости (38) необходимо выбирать k из условия гурвицевости матрицы \bar{A} .

Доказательство. С учетом \tilde{u}_1 в (39) перепишем (35) и (36) в виде

$$(40) \quad \bar{Q}(p)\tilde{y}(t) = R(p)\tilde{u}_2(t) + \phi(t), \\ \xi = \bar{p}_1\tilde{y}^2 + p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)^2.$$

Здесь $\bar{Q}(p) = Q(p) - kR(p)$. Подставив (36) в (6), получим

$$(41) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon} \right)^{-1} \left[2\bar{p}_1\tilde{y} \frac{pR(p)}{Q(p)} \tilde{u}_2 + 2\bar{p}_1\tilde{y}\bar{\phi}(t) + \right. \\ \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)\text{sign}(\tilde{u}_2)\dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right],$$

где $\bar{\phi}(t) = \frac{p}{Q(p)}\phi(t)$ — ограниченная функция. Обозначим $\hat{\phi} = \sup\{\bar{\phi}(t)\}$.

Для анализа устойчивости (41) рассмотрим функцию Ляпунова (22). Взяв производную от (22) вдоль решений (41), получим

$$(42) \quad \dot{V}_1 = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \varepsilon \left[2\bar{p}_1 \tilde{y} \frac{pR(p)}{Q(p)} \tilde{u}_2 + 2\bar{p}_1 \tilde{y} \bar{\phi} + \right. \\ \left. + 2p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta) \text{sign}(\tilde{u}_2) \dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Воспользовавшись неравенством Юнга для $2\varepsilon \bar{p}_1 \tilde{y} \bar{\phi} \leq |\varepsilon| \mu \bar{p}_1^2 \tilde{y}^2 + \bar{\phi} + |\varepsilon| \mu^{-1} \bar{\phi}^2$ и учитывая третье выражение в (39), получим

$$(43) \quad \dot{V}_1 = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[-\alpha \varepsilon^2 + \mu^{-1} |\varepsilon| \varepsilon \bar{\phi}^2 - \varepsilon \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Дальнейшие действия для получения условий (37) аналогичны, как в доказательстве теоремы 2.

Теперь получим дополнительные условия, накладывающие ограничения на \tilde{u}_1 в (39). Рассмотрим функцию Ляпунова

$$(44) \quad V_2 = x^T H x.$$

Перепишем (40) как

$$(45) \quad \dot{x} = \bar{A}x + \frac{1}{p_u} B \tilde{u}_2 + D\phi, \quad \tilde{y} = p_y L x.$$

Потребуем при $V_2 \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1}$ выполнение условий $\dot{V}_2 \leq 0$ и $H \geq p_y^2 \bar{p}_1 L^T L$ (последнее означает, что эллипсоид $x^T H x = \inf\{\bar{g}(t)\}$ содержится внутри цилиндра $x^T p_y^2 \bar{p}_1 L^T L x = \inf\{\bar{g}(t)\}$), принимая во внимание ограничения $\tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}$ и $\phi^2 \leq \hat{\phi}^2$. Перепишем вышеназванные условия в виде

$$(46) \quad \dot{V}_2 = x^T (\bar{A}^T H + H \bar{A}) x + 2x^T \frac{1}{p_u} H B \tilde{u}_2 + 2x^T H D \phi \leq 0 \quad \forall (x, \tilde{u}_2, \phi) : \\ x^T H x \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1}, \quad \tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}, \quad \phi^2 \leq \hat{\phi}^2.$$

С учетом $(1+r)\tilde{u}_1^2 \leq 1$ зададим $x^T p_y^2 L^T K^T K L x \leq \frac{1}{1+r}$ при $x^T H x \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1}$. Дальнейшие действия для получения условий (38) аналогичны, как в доказательстве теоремы 2. Теорема 3 доказана.

Замечание 7. В разделе 5 могут быть получены другие формы закона управления, если изначально преобразование (2) (в частности, в разделе 5 заданное в виде (35)) будет определено по-другому, например, в виде $\xi = \tilde{y}^2 + \tilde{u}^2$, $\xi = |\tilde{y}| + |\tilde{u}_1| + |\tilde{u}_2|$ и т.п. (см. замечание 5).

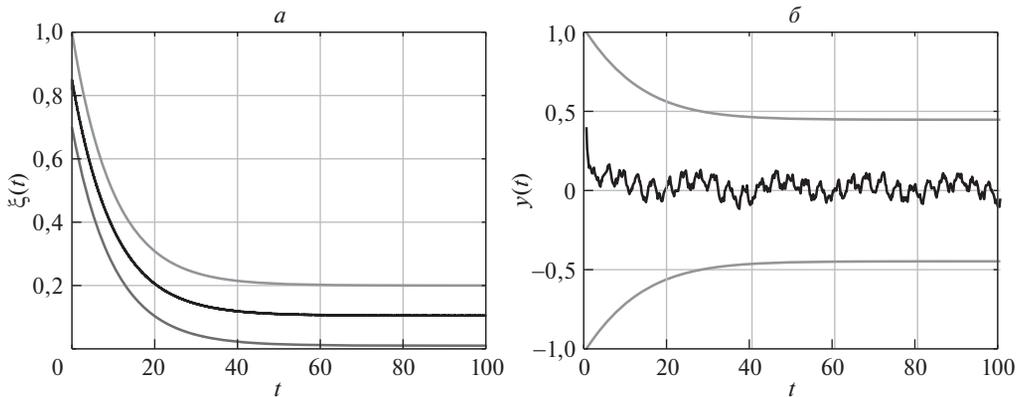


Рис. 3. Переходные процессы по $\xi(t)$ — а и $y(t)$ — б при ограничениях (16), заданных экспоненциальными функциями.

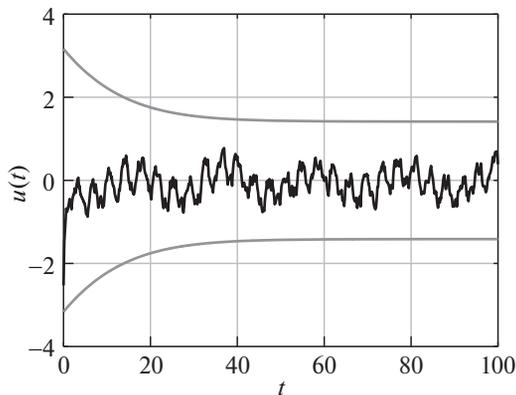


Рис. 4. Переходные процессы по $u(t)$ при ограничениях (16), заданных экспоненциальными функциями.

Пример 3. Рассмотрим неустойчивый объект (32) со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = [1 \quad 2 \quad 1], \quad x(0) = 0,1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

сигнал $f(t)$ определен в примере 2. Тогда $R(p) = (p + 1)^2$, $Q(p) = (p + 1)^3$ и $\hat{\phi} = 0,22$.

Пусть в (33) определены следующие параметры: $p_y = 1$ и $p_u = 0,3$.

Зададим $\delta = 0,01$, $k = -2$ и $\mu = 0,01$ в (39), $r = 0,01$ в (35), а также $T(\varepsilon)$ из примера 2. Если задать $\beta = 0,1$ и $c = 1$, то неравенства (37) будут разрешимы, например, при $\alpha = 374,3$.

На рис. 3, 4 изображены траектории по $\xi(t)$, $y(t)$ и $u(t)$ при $\bar{g} = 0,79e^{-0,1t} + 0,2$ и $\underline{g} = 0,69e^{-0,1t} + 0,01$ в (3), на рис. 5, 6 — при $\bar{g} = 0,45 \cos(0,5t) + 0,54$ и

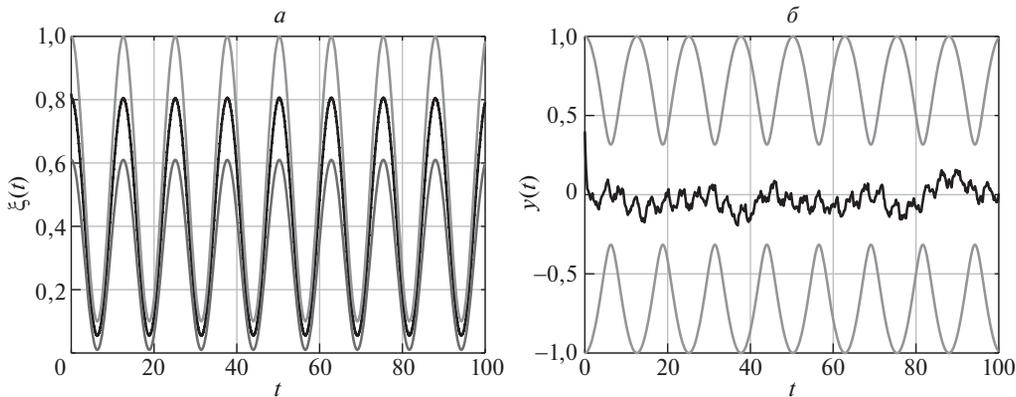


Рис. 5. Переходные процессы по $\xi(t)$ — *a* и $y(t)$ — *б* при ограничениях (16), заданных синусоидальными функциями.

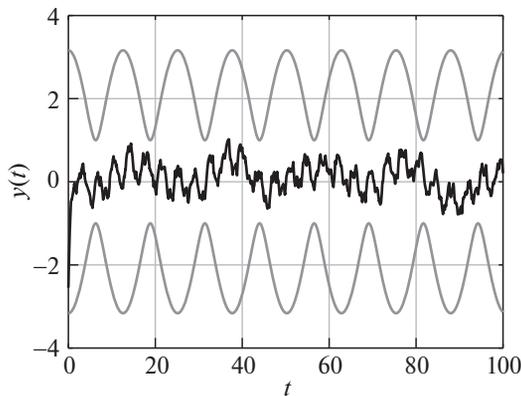


Рис. 6. Переходные процессы по $u(t)$ при ограничениях (16), заданных синусоидальными функциями.

$g = 0,3 \cos(0,5t) + 3,01$ в (3). Из рис. 3–6 видно, что сигналы ξ , y и u никогда не покидают заданных ограничений (33) и дополнительно заданных разработчиком ограничений (16), которые, например, могут быть определены экспоненциальными (см. рис. 3, 4) или синусоидальными (рис. 5, 6) функциями.

6. Заключение

В статье предложено развитие метода [1] на динамические системы с произвольным соотношением числа управлений и выходных сигналов и гарантией их нахождения в заданных множествах. Разработанный метод применяется для решения задач управления по состоянию и по выходу линейными системами с учетом ограничений на сигнал управления и выходные переменные, где размерность регулируемых переменных больше размерности сигнала управления. Также в отличие от [1] устойчивость замкнутой системы и

синтез параметров регулятора сформулированы в терминах разрешимости линейных матричных неравенств. Результаты моделирования подтвердили теоретические выводы и показали эффективность предложенного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А.* Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // *АиТ.* 2021. № 4. С. 121–139.
Furtat I.B., Gushchin P.A. Control of Dynamical Plants with a Guarantee for the Controlled Signal to Stay in a Given Set // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 4. P. 654–669.
2. *Furtat I., Gushchin P.* Nonlinear feedback control providing plant output in given set // *Int. J. Control.* 2022. V. 95. N. 6. P. 1533–1542.
<https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>
3. *Мирошник И.В., Никуфоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
4. *Spong M., Corke P., Lozano R.* Nonlinear control of the reaction wheel pendulum // *Automatica.* 2001. V. 37. P. 1845–1851.
5. *Sun W., Su S.F., Xia J., Wu Y.* Adaptive tracking control of wheeled inverted pendulums with periodic disturbances // *IEEE Trans. Cybernetics.* 2020. V. 50. No. 5. P. 1867–1876.
6. *Saleem O., Mahmood-ul-Hasan K.* Adaptive State-space Control of Under-actuated Systems Using Error-magnitude Dependent Self-tuning of Cost Weighting-factors // *Int. J. Control, Automat. Syst.* 2021. V. 19. P. 931–941.
7. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. 3rd edition. Pearson. 2001.
8. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
9. *Dolgopolik M.V., Fradkov A.L.* Nonsmooth and discontinuous speed-gradient algorithms // *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* 2017. V. 25. P. 99–113.
10. *Yakubovich V.* S-procedure in nonlinear control theory // *Vestn. Leningr. Univ.* 1971. No. 1. P. 62–77.
11. *Polyak B.T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // *J. Optim. Theory Appl.* 1998. V. 99. P. 553–583.
12. *Гусев С.В., Ликhtarников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // *АиТ.* 2006. № 11. С. 77–121.
Gusev S.V., Likhtarnikov A.L. Kalman-Popov-Yakubovich lemma and the S-procedure: A historical essay // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 11. P. 1768–1810.
13. *Fridman E.* A refined input delay approach to sampled-data control // *Automatica.* 2010. V. 46. P. 421–427.
14. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: Ленанд, 2014.

15. *Назин С.А., Поляк В.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2007. № 3. С. 106–125.
Nazin S.A., Polyak V.T., Topunov M.V. Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
16. *Leonessa A., Haddad W.M., Hayakawa T.* Adaptive Tracking for Nonlinear Systems with Control Constraints // *Proc. Amer. Control Conf.* 2001. P. 1292–1297.
17. *Lavretsky E., Hovakimyan N.* Positive μ -modification for Stable Adaptation in Dynamic Inversion Based Adaptive Control with Input Saturation // *Proc. Amer. Control Conf.* 2005. Portland, OR, USA. P. 3373–3378.
18. *Ioannou P.A., Sun J.* Robust Adaptive Control. PTR Prentice-Hall, 1996.
19. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Dover Publications, 2012.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Е. Поляковым.

Поступила в редакцию 12.10.2021

После доработки 17.06.2022

Принята к публикации 30.11.2022