

## Управление в технических системах

© 2023 г. А.В. АНТОНОВ, канд. техн. наук (antonov.av@imash.ru),  
А.С. ФОМИН, канд. техн. наук (alexey-nvkz@mail.ru)  
(Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва)

### РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЯТИПОДВИЖНОГО МАНИПУЛЯТОРА ГИБРИДНОЙ СТРУКТУРЫ<sup>1</sup>

Управление любой робототехнической системой невозможно реализовать без предварительного решения обратной кинематической задачи, состоящей в определении законов управления приводами, требуемых для реализации заданной траектории движения и закладываемых в систему управления. Настоящая статья посвящена решению обратной кинематической задачи для пятиподвижного манипулятора гибридной (параллельно-последовательной) структуры. После краткого описания структуры манипулятора, включающей трехподвижную параллельную и двухподвижную последовательную части и обеспечивающей выходному звену три вращательные и две поступательные степени свободы, в статье подробно изложен алгоритм решения обратной задачи. Алгоритм основан на представлении манипулятора в виде эквивалентной системы последовательной структуры и последующем использовании формулы произведения матричных экспонент. Предлагаемый алгоритм позволяет получить решение в аналитическом виде без каких-либо допущений на геометрию манипулятора; рассмотренный пример подтверждает работоспособность алгоритма. Методика решения обратной задачи может быть также адаптирована к анализу других манипуляторов гибридной структуры.

*Ключевые слова:* манипулятор, параллельно-последовательная (гибридная) структура, кинематический анализ, обратная кинематическая задача, кинематический винт, формула произведения матричных экспонент.

DOI: 10.31857/S0005231023030054, EDN: ZZBRNY

#### 1. Введение

Манипуляторы гибридной структуры — это механические устройства, включающие одновременно несколько кинематических цепей параллельной и/или последовательной структуры, которые служат основой для множества многоподвижных робототехнических систем [1]. Такие манипуляторы обладают рядом важных функциональных свойств, в том числе расширенными

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10304, <https://rscf.ru/project/22-79-10304/>.

габаритами рабочего пространства [2], а также возможностью обходить или исключать особые положения [3].

Настоящая статья посвящена классу манипуляторов гибридной структуры, обладающих пятью степенями свободы, в которых на параллельную кинематическую цепь наслаивается последовательная. Известен ряд манипуляторов такого типа, среди которых: CaNuMan — манипулятор, образованный трехподвижным модулем параллельной структуры и двухподвижным модулем последовательной структуры [4]; обрабатывающий станок, состоящий из параллельной части с двумя степенями свободы и последовательной части с тремя степенями свободы [5]; полировальный станок, включающий трехподвижный модуль параллельной структуры для вертикального движения и вращения относительно горизонтальных осей и двухподвижный модуль последовательной структуры для позиционирования вдоль данных осей [6].

В рамках решения задачи управления робототехническими системами, в частности манипуляторами гибридной структуры, необходимо получить решение обратной кинематической задачи (обратной задачи о положениях), заключающейся в определении законов управления приводами при заданной траектории движения выходного звена. Важность данной задачи обусловлена тем, что ее решение закладывается непосредственно в систему управления манипулятора.

Методы решения обратной кинематической задачи для разнообразных манипуляторов гибридной структуры можно найти в ряде исследований. Одним из первых исследований в данном направлении является [7], в котором решение обратной задачи о положениях удалось свести к определению решения системы трех алгебраических уравнений шестой степени; решение было найдено численными методами. В [8] автор сопоставил исходному манипулятору гибридной структуры эквивалентный манипулятор последовательной структуры; используя классический метод Денавита–Хартенберга [9, с. 506] и составляя соответствующие матрицы однородных преобразований, были получены кинематические соотношения, на основе которых были найдены выражения для искомым приводных координат в аналитическом виде. Аналогичный метод Денавита–Хартенберга был применен при анализе других манипуляторов гибридной структуры в [10] (совместно с геометрическим подходом) и [5, 11]. Представление исходного манипулятора гибридной структуры в виде эквивалентного манипулятора последовательной структуры было также использовано в [12], но вместо метода Денавита–Хартенберга авторы применили формулу произведения матричных экспонент [9, с. 119]. Данная формула была также использована в [13, 14]. В указанных выше исследованиях [12–14] структурно-геометрические особенности рассматриваемых манипуляторов дали возможность получить решение обратной кинематической задачи в аналитическом виде. Особенности структуры манипулятора и наличие кинематической развязки между поступательными и вращательными движениями выходного звена позволили авторам [15] рассматривать по отдельности параллельную и последовательную части манипулятора и получить решение

обратной задачи о положениях в упрощенном виде. Также в [3, 16–19] можно найти кинематический анализ других манипуляторов: большинство алгоритмов решения основано на использовании алгебраических или геометрических подходов, каждый из которых индивидуален и зависит от структуры рассматриваемого манипулятора.

Ранее в [1] был представлен ряд новых манипуляторов гибридной структуры, однако решение обратной задачи о положениях, непосредственно связанное с практической задачей управления данными устройствами, было рассмотрено лишь для одного из манипуляторов [20]. Настоящее исследование продолжает упомянутые выше статьи и рассматривает решение обратной задачи о положениях для другого манипулятора гибридной структуры, описание которого представлено в следующем разделе.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приведено описание исследуемого манипулятора. Раздел 3 посвящен алгоритму решения обратной задачи о положениях, а в разделе 4 приведен численный пример решения данной задачи согласно предложенному алгоритму. Раздел 5 содержит обсуждение особенностей алгоритма и краткий сравнительный анализ с другими исследованиями. Заключение обобщает результаты проведенного исследования и указывает направления его дальнейшего развития. Статья также имеет два приложения: Приложение 1 приводит краткие теоретические основы используемого метода решения, а Приложение 2 содержит выражения коэффициентов, используемых в уравнениях.

## 2. Описание манипулятора

Кинематическая схема исследуемого манипулятора представлена на рис. 1, где использованы следующие обозначения: 1 — основание; 2, ..., 5 — промежуточные звенья; 6 — платформа; 7 — каретка; 8 — выходное звено. Манипулятор состоит из параллельной части, образованной звеньями 1, ..., 6, и последовательной части, образованной звеньями 7 и 8. Промежуточные звенья 2, ..., 5 соединены с основанием 1 и платформой 6 вращательными (*B*) шарнирами, при этом звенья 2 и 3 соединены друг с другом вращательным шарниром, а звенья 4 и 5 — поступательным (*П*): таким образом, платформа 6 соединена с основанием 1 двумя кинематическими цепями типа *BVB* и двумя цепями типа *BПB*. Оси всех упомянутых выше вращательных шарниров параллельны друг другу, что обеспечивает платформе 6 плоское движение с тремя степенями свободы. Каретка 7 образует с платформой 6 поступательную пару, а с выходным звеном 8 — вращательную, что обеспечивает выходному звену 8 две степени свободы относительно платформы 6 и пять степеней свободы относительно основания 1. Единственная степень свободы, отсутствующая у выходного звена 8, — это вращение относительно оси, перпендикулярной осям всех прочих вращательных шарниров манипулятора, поэтому можно считать, что выходное звено 8 обладает тремя поступательными и двумя вращательными степенями свободы.

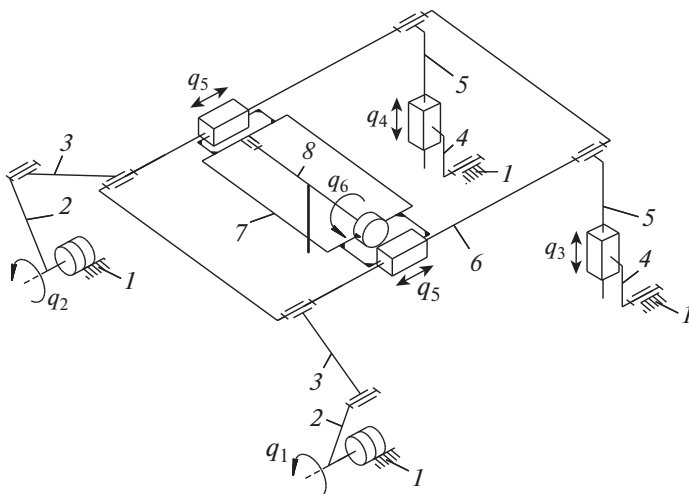


Рис. 1. Кинематическая схема исследуемого манипулятора.

В данном манипуляторе приводными (управляемыми) шарнирами являются шарниры, обозначенные на рис. 1 параметрами  $q_1, \dots, q_6$ , где:

- $q_1$  и  $q_2$  соответствуют вращениям в приводах цепей BBB;
- $q_3$  и  $q_4$  соответствуют поступательным перемещениям в приводах цепей BPP;
- $q_5$  соответствует поступательному перемещению в приводе каретки 7;
- $q_6$  соответствует вращению в приводе выходного звена 8.

Можно видеть, что манипулятор обладает приводной избыточностью: движение платформы 6 относительно основания 1 осуществляется за счет работы четырех приводов, в то время как она обладает тремя степенями свободы. И хотя такое решение требует согласованной работы данных приводов, наличие избыточного привода позволяет повысить жесткость манипулятора и исключить ряд особых положений, присущих манипуляторам параллельной структуры [21]. Кроме того, наличие четвертой кинематической цепи позволяет сделать манипулятор симметричным и увеличить его габариты таким образом, чтобы можно было выполнять операции над объектами протяженной формы, что и является одним из назначений данного манипулятора [1].

### 3. Решение обратной задачи о положениях

Фактически обратная задача о положениях заключается в определении относительного положения звеньев манипулятора в приводных шарнирах при известной конфигурации выходного звена. В связи с этим сперва необходимо рассмотреть, как описать эти относительные положения и конфигурацию. Первые можно представить в виде вектора приводных координат  $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_6]^T \in \mathbb{R}^6$ , соответствующих предыдущему разделу. Конфигурацию выходного звена можно описать при помощи вектора  $\mathbf{p}_S \in \mathbb{R}^3$ , определяющего положение некой точки  $S$  выходного звена, и единичного вектора  $\hat{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|\hat{\mathbf{n}}\|_2 = 1$ , определяющего его ориентацию (рис. 2, а). Параметры  $\mathbf{p}_S$

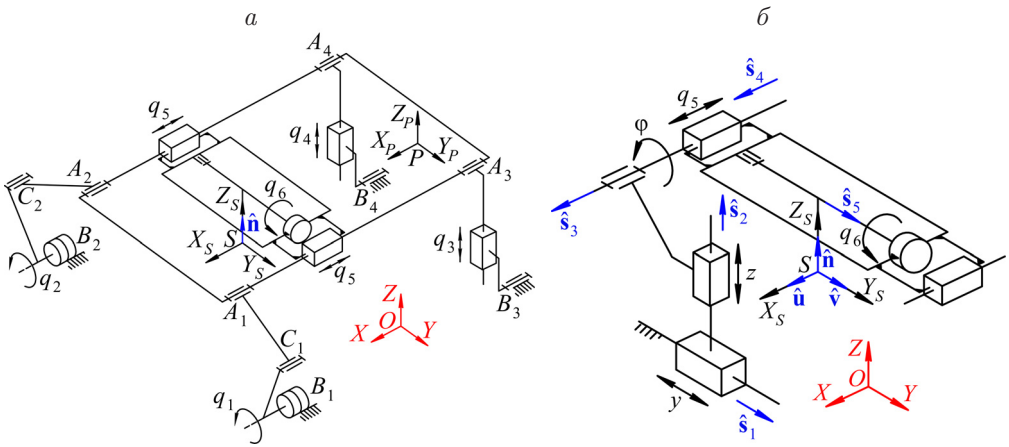


Рис. 2. Кинематический анализ: *a* — расположение систем координат и приводных координат; *б* — эквивалентная кинематическая цепь с последовательной структурой.

и  $\hat{n}$  задаются относительно неподвижной системы координат  $OXYZ$ , расположенной на основании манипулятора известным (заданным) образом. Поскольку в рассматриваемом манипуляторе вращательных степеней свободы у выходного звена всего две, вектора  $\hat{n}$  достаточно для описания его ориентации (нет необходимости использовать матрицу поворота).

Таким образом, решение обратной задачи о положениях сводится к нахождению вектор-функции  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ :

$$(1) \quad \mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{p}_S, \hat{n}), \quad \|\hat{n}\|_2 = 1.$$

Методику решения обратной задачи о положениях можно представить следующим образом.

Согласно структуре манипулятора, платформа совершает плоское движение и обладает тремя степенями свободы. В связи с этим мы можем представить, что платформа соединена с основанием некой «виртуальной» кинематической цепью типа *ППВ*, у которой оси поступательных пар параллельны плоскости движения, а ось вращательной пары перпендикулярна ей (рис. 2, *б*). Таким образом, мы можем рассматривать соединение выходного звена как эквивалентную кинематическую цепь с последовательной структурой *ППВППВ*. Как будет показано далее, такое представление дает возможность применить известные методы исследования манипуляторов последовательной структуры к манипулятору гибридного типа.

Пусть  $SX_S Y_S Z_S$  — система координат выходного звена, конфигурация которой относительно системы координат основания  $OXYZ$  определяется матрицей  $\mathbf{T}_S \in SE(3)$ , так, что:

$$(2) \quad \mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} \hat{u} & \hat{v} & \hat{n} & \mathbf{p}_S \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $\hat{\mathbf{u}}$  и  $\hat{\mathbf{v}}$  — единичные векторы, образующие вместе с вектором  $\hat{\mathbf{n}}$  правую тройку ортонормированных векторов; как будет показано далее, направление данных векторов не влияет на решение обратной задачи и потому может быть выбрано произвольным образом.

Рассматривая упомянутую выше кинематическую цепь с последовательной структурой *ППВПВ*, можно записать матрицу  $\mathbf{T}_S$  через произведение матричных экспонент следующим образом (см. Приложение 1 и выражение (П.2)):

$$(3) \quad \mathbf{T}_S = \left( \prod_{i=1}^5 e^{[\xi_i]\theta_i} \right) \mathbf{M}_S,$$

где  $\mathbf{M}_S \in SE(3)$  — матрица, определяющая положение и ориентацию выходного звена в некоторой начальной конфигурации манипулятора;  $i$  — порядковый номер шарнира цепи, считая от основания,  $i = 1, \dots, 5$ ;  $\xi_i \in \mathbb{R}^6$  — (единичный) кинематический винт, соответствующий оси  $i$ -го шарнира в начальной конфигурации манипулятора;  $[\xi_i]$  — матричное представление винта  $\xi_i$  согласно выражениям (П.1) и (П.3);  $\theta_i$  — перемещение в  $i$ -м шарнире.

Для рассматриваемой цепи *ППВПВ* кинематические винты  $\xi_i$  и перемещения  $\theta_i$  будут иметь следующий вид согласно выражению (П.1) и рис. 2, б:

$$(4) \quad \xi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hat{\mathbf{s}}_1 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hat{\mathbf{s}}_2 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_3 \\ \mathbf{r}_3 \times \hat{\mathbf{s}}_3 \end{bmatrix}, \quad \xi_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hat{\mathbf{s}}_4 \end{bmatrix}, \quad \xi_5 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_5 \\ \mathbf{r}_5 \times \hat{\mathbf{s}}_5 \end{bmatrix},$$

$$(5) \quad \theta_1 = y, \quad \theta_2 = z, \quad \theta_3 = \varphi, \quad \theta_4 = q_5, \quad \theta_5 = q_6,$$

где  $\hat{\mathbf{s}}_1, \dots, \hat{\mathbf{s}}_5$  — единичные векторы, параллельные осям соответствующих шарниров;  $\mathbf{r}_3$  и  $\mathbf{r}_5$  — векторы, определяющие координаты произвольных точек на осях соответствующих шарниров;  $y$  и  $z$  — линейные перемещения платформы в направлении векторов  $\hat{\mathbf{s}}_1$  и  $\hat{\mathbf{s}}_2$  (выбор таких обозначений станет понятен далее);  $\varphi$  — поворот платформы вокруг оси, определяемой вектором  $\hat{\mathbf{s}}_3$ .

Параметры  $\mathbf{M}_S$ ,  $\hat{\mathbf{s}}_1, \dots, \hat{\mathbf{s}}_5$ ,  $\mathbf{r}_3$  и  $\mathbf{r}_5$  определяются конструктивными особенностями манипулятора и выбранным расположением систем координат  $OXYZ$  и  $SX_S Y_S Z_S$ , и потому их можно считать известными. Таким образом, при заданной матрице  $\mathbf{T}_S$  выражение (3) представляет собой систему уравнений относительно неизвестных  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , приведенных в (5). Для упрощения решения данной системы уравнений можно без потери общности расположить систему координат  $OXYZ$  таким образом, чтобы ось  $OX$  была перпендикулярна плоскости, параллельной осям обоих шарниров  $\Pi$  «виртуальной» кинематической цепи *ППВ* (рис. 2, б). При этом оси данных шарниров можно направить параллельно осям  $OY$  и  $OZ$ , так, что

$$(6) \quad \hat{\mathbf{s}}_1 = [0 \ 1 \ 0]^T, \quad \hat{\mathbf{s}}_2 = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad \hat{\mathbf{s}}_3 = [1 \ 0 \ 0]^T.$$

Подставим (2) и (4)–(6) в (3) и рассмотрим уравнение, соответствующее первой строке и третьему столбцу выражения (3). Данное уравнение содер-

жит всего одну неизвестную  $q_6$  и имеет вид:

$$(7) \quad a_1 \cos q_6 + b_1 \sin q_6 + c_1 = 0,$$

где  $a_1$ ,  $b_1$  и  $c_1$  — коэффициенты, известные при решении обратной задачи о положениях и приведенные в Приложении 2.

Решение уравнения (7) можно найти следующим образом [22, с. 29]:

$$(8) \quad q_6 = 2 \operatorname{arctg} \frac{b_1 \pm \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2}}{a_1 - c_1}.$$

Для того чтобы уравнение выше имело действительное решение, подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Согласно Приложению 2, при известных геометрических параметрах манипулятора данное выражение будет зависеть лишь от одной переменной  $n^x$ , являющейся проекцией вектора  $\hat{n}$  на ось  $OX$ . Поэтому перед расчетом переменной  $q_6$  нужно сперва убедиться в неотрицательности подкоренного выражения для всех значений  $n^x$  или как минимум для тех значений  $n^x$ , для которых решается обратная задача о положениях. Позже в разделе 4 будет приведен пример такого анализа.

В числителе выражения (8) знак перед корнем соответствует различным решениям  $q_6$ . Функция  $\operatorname{arctg}$  в общем случае также определяет два различных решения, но, поскольку в правой части (8) перед данной функцией стоит множитель 2, два данных решения будут соответствовать одному и тому же значению  $q_6$ . В итоге получим два различных решения  $q_6$ , зависящие от знака перед корнем в числителе (8).

Далее рассмотрим уравнения, соответствующие второй и третьей строкам и третьему столбцу выражения (3). Их можно привести к виду, аналогичному (7):

$$(9) \quad \begin{aligned} a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi + c_2 &= 0, \\ a_3 \cos \varphi + b_3 \sin \varphi + c_3 &= 0, \end{aligned}$$

где  $a_2, \dots, c_3$  — коэффициенты, зависящие от найденной выше переменной  $q_6$  и приведенные в Приложении 2.

Уравнения (9) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно двух неизвестных  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ , причем, согласно Приложению 2,  $a_2 = b_3$  и  $b_2 = -a_3$ . При таком соотношении коэффициентов данная система уравнений в общем случае (при  $a_2 b_3 - a_3 b_2 \neq 0$ ) будет иметь единственное решение [22, с. 30], из которого далее можно найти угол  $\varphi$ , используя функцию  $\operatorname{atan2}$  [9, с. 188]. При этом каждое из двух решений (8) определит свое решение для угла  $\varphi$ .

Далее рассмотрим уравнение, соответствующее первой строке и четвертому столбцу выражения (3). Данное уравнение является линейным относительно переменной  $q_5$ :

$$(10) \quad a_4 q_5 + b_4 = 0,$$

где  $a_4$  и  $b_4$  — коэффициенты, зависящие от найденной выше переменной  $q_6$  и приведенные в Приложении 2.

При  $a_4 \neq 0$  уравнение (10) дает одно решение для каждого значения  $q_6$ . Согласно Приложению 2,  $a_4 = s_4^x$ , где  $s_4^x$  — проекция вектора  $\hat{s}_4$  на ось  $OX$ , определяемая геометрией манипулятора. Если геометрия такова, что данная проекция равна нулю, вектор  $\hat{s}_4$  будет параллелен плоскости  $OYZ$ , как и векторы  $\hat{s}_1$  и  $\hat{s}_2$ . Поскольку три указанных вектора соответствуют осям поступательных пар эквивалентной кинематической цепи (рис. 2,б), мы получим структуру манипулятора, в которой оси трех поступательных пар параллельны одной плоскости. В такой структуре при заданной конфигурации выходного звена существует бесконечное число комбинаций параметров  $q_5$ ,  $y$  и  $z$ , определяющих перемещения в поступательных парах, что также соответствует бесконечному числу решений уравнения (10). Однако данный случай имеет исключительно теоретический интерес, поскольку в реальном манипуляторе можно всегда обеспечить геометрию, при которой  $s_4^x \neq 0$ .

Наконец, можно рассмотреть уравнения соответствующие второй и третьей строкам и четвертому столбцу выражения (3). Данные уравнения являются линейными относительно переменных  $y$  и  $z$  и имеют вид, аналогичный (10):

$$(11) \quad \begin{aligned} a_5 y + b_5 &= 0, \\ a_6 z + b_6 &= 0, \end{aligned}$$

где  $a_5, \dots, b_6$  — коэффициенты, зависящие от найденных ранее переменных  $q_6$ ,  $\varphi$  и  $q_5$  и приведенные в Приложении 2.

Согласно данному Приложению,  $a_5 = a_6 = 1$ , и уравнения (11) также дают по одному решению для каждого значения переменной  $q_6$ .

Таким образом, при заданной конфигурации выходного звена, определяемой матрицей  $\mathbf{T}_S$ , были найдены все неизвестные  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , в том числе включающие две переменные  $q_5$  и  $q_6$ . Для того чтобы найти оставшиеся неизвестные  $q_1, \dots, q_4$ , можно снова воспользоваться формулой произведения матричных экспонент (П.2), записанной для  $i = 1, 2$  и  $3$ . Пусть  $PX_P Y_P Z_P$  — система координат платформы, конфигурация которой относительно системы координат основания  $OXYZ$  определяется матрицей  $\mathbf{T}_P$ , так, что начальной конфигурации платформы соответствует известная матрица  $\mathbf{M}_P$ . Тогда согласно (П.2) можно записать:

$$(12) \quad \mathbf{T}_P = \left( \prod_{i=1}^3 e^{[\xi_i] \theta_i} \right) \mathbf{M}_P,$$

где  $\xi_i$  и  $\theta_i$  соответствуют выражениям (4) и (5).

Поскольку параметры  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\theta_3$  соответствуют параметрам  $y$ ,  $z$  и  $\varphi$ , найденным ранее, выражение (12) позволяет рассчитать матрицу  $\mathbf{T}_P$ . Далее можно определить координаты  $\mathbf{p}_{Aj}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , точек  $A_j$ , соответствующих вращательным шарнирам платформы (рис. 2,а), из следующего выражения:

$$(13) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{Aj} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_P \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{Aj} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, 4,$$



где  $\mathbf{r}_{A_j}$  — координаты точек  $A_j$  в системе координат платформы  $PX_P Y_P Z_P$ ; данные координаты определяются конструкцией манипулятора и считаются известными.

Зная координаты  $\mathbf{p}_{A_j}$ , приводные координаты  $q_3$  и  $q_4$  можно определить как длину отрезка между точками  $A_j$  и  $B_j$ ,  $j = 3, 4$ , где  $B_j$  соответствуют вращательным шарнирам основания (рис. 2,а):

$$(14) \quad q_j = \sqrt{(\mathbf{p}_{A_j} - \mathbf{p}_{B_j})^2}, \quad j = 3, 4,$$

где  $\mathbf{p}_{B_j}$  — координаты точек  $B_j$  в системе координат основания  $OXYZ$ ; данные координаты определяются конструкцией манипулятора и считаются известными (мы полагаем без потери общности, что для каждого  $j = 1, \dots, 4$  обе точки  $A_j$  и  $B_j$  лежат в плоскости, перпендикулярной осям вращательных шарниров  $j$ -й кинематической цепи).

Чтобы найти оставшиеся приводные координаты  $q_1$  и  $q_2$ , сперва определим координаты  $\mathbf{p}_{C_j}$  точек  $C_j$ ,  $j = 1, 2$ , соответствующих промежуточным вращательным шарнирам цепей  $ВПВ$  (рис. 2,а). С учетом принятого ранее направления оси  $OX$  можно записать следующие соотношения:

$$(15) \quad \begin{aligned} \left(p_{A_j}^y - p_{C_j}^y\right)^2 + \left(p_{A_j}^z - p_{C_j}^z\right)^2 &= l_{A_j C_j}^2, \\ \left(p_{B_j}^y - p_{C_j}^y\right)^2 + \left(p_{B_j}^z - p_{C_j}^z\right)^2 &= l_{B_j C_j}^2, \end{aligned} \quad j = 1, 2,$$

где  $p_{A_j}^y, \dots, p_{C_j}^z$  — соответствующие компоненты векторов  $\mathbf{p}_{A_j}$ ,  $\mathbf{p}_{B_j}$  и  $\mathbf{p}_{C_j}$ ;  $l_{A_j C_j}$  и  $l_{B_j C_j}$  — длины звеньев  $A_j C_j$  и  $B_j C_j$  соответственно.

Для каждого  $j = 1, 2$  соотношения (15) представляют собой систему двух квадратных уравнений относительно двух неизвестных  $p_{C_j}^y$  и  $p_{C_j}^z$ . Вычитая одно уравнение из другого, можно выразить  $p_{C_j}^z$  через  $p_{C_j}^y$ :

$$(16) \quad p_{C_j}^z = a_7 p_{C_j}^y + b_7, \quad j = 1, 2,$$

где  $a_7$  и  $b_7$  — известные коэффициенты, приведенные в Приложении 2.

Подставляя (16) в любое из двух уравнений (15), получим квадратное уравнение относительно неизвестной  $p_{C_j}^y$ :

$$(17) \quad a_8 (p_{C_j}^y)^2 + b_8 p_{C_j}^y + c_8 = 0, \quad j = 1, 2,$$

где  $a_8$ ,  $b_8$  и  $c_8$  — известные коэффициенты, приведенные в Приложении 2.

Соотношение выше позволяет в общем случае получить два решения для переменной  $p_{C_j}^y$ , после чего из выражения (16) можно найти  $p_{C_j}^z$  (квадратное уравнение (17) будет иметь действительное решение тогда и только тогда, когда при известной конфигурации платформы манипулятора возможна сборка его кинематической цепи, т.е. при  $\|\mathbf{p}_{A_j} - \mathbf{p}_{B_j}\|_2 \leq l_{A_j C_j} + l_{B_j C_j}$ ). Наконец,

зная данные величины и полагая без потери общности, что приводная координата  $q_j$ ,  $j = 1, 2$ , отсчитывается от положительного направления оси  $Oy$ , данную координату можно определить следующим образом:

$$(18) \quad q_j = \text{atan2} \left( p_{Cj}^z - p_{Bj}^z, p_{Cj}^y - p_{Bj}^y \right), \quad j = 1, 2.$$

Выражения (8), (10), (14) и (18) позволяют определить приводные координаты  $\mathbf{q}$  при заданных координатах выходного звена  $\mathbf{p}_S$  и  $\hat{\mathbf{n}}$ , т.е. представляют собой искомую вектор-функцию (1), определяющую решение обратной задачи о положениях для рассматриваемого манипулятора. Согласно проведенному анализу видно, что данная задача может иметь несколько различных решений (в общем случае возможно получить восемь различных комбинаций значений приводных координат), и выбор конкретного решения зависит от конструктивных особенностей манипулятора и выполняемой им операции. Так, например, различные решения уравнения (17) соответствуют различным сборкам кинематических цепей  $BBB$  (рис. 1): в случае, когда промежуточный вращательный шарнир цепи выходит за пределы платформы, рабочая зона манипулятора возрастает, что может быть важно при выполнении операций над объектами протяженной формы; при этом, однако, также возрастают габаритные размеры манипулятора. Кроме того, в зависимости от сборки кинематической цепи меняются области близости к особым положениям [23], в которых снижается жесткость манипулятора и возможна потеря управляемости. Наконец, некоторые сборки могут быть заранее недостижимы в связи с существующими ограничениями на допустимые перемещения в шарнирах.

#### 4. Численный пример

Рассмотрим пример решения обратной задачи о положениях для манипулятора со следующими параметрами (линейные параметры указаны в мм):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_4 &= [1 \ 0 \ 0]^T, & \hat{\mathbf{s}}_5 &= [0 \ 1 \ 0]^T, & \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_5 = [0 \ 0 \ 250]^T, \\ \mathbf{r}_{A1} &= \mathbf{p}_{B1} = [300 \ 150 \ 0]^T, & \mathbf{r}_{A2} &= \mathbf{p}_{B2} = [300 \ -150 \ 0]^T, \\ \mathbf{r}_{A3} &= \mathbf{p}_{B3} = [-300 \ 150 \ 0]^T, & \mathbf{r}_{A4} &= \mathbf{p}_{B4} = [-300 \ -150 \ 0]^T, \\ \mathbf{M}_S &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{M}_P &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$l_{AjCj} = l_{BjCj} = 100, \quad j = 1, 2.$$

При указанных выше геометрических параметрах платформа и основание манипулятора имеют одинаковые размеры: прямоугольники  $A_1A_2A_4A_3$  и  $B_1B_2B_4B_3$  равны друг другу, причем одна из сторон в два раза длиннее

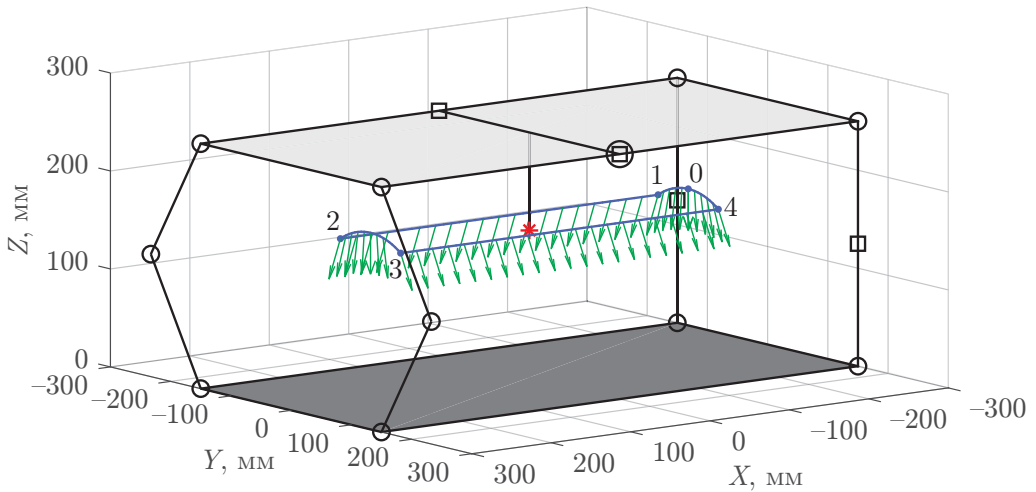


Рис. 3. Манипулятор в начальной конфигурации и заданная траектория движения.

другой (600 и 300 мм соответственно). В указанной начальной конфигурации, определяемой матрицами  $M_S$  и  $M_P$ , плоскость  $A_1A_2A_4A_3$  платформы параллельна плоскости  $OXY$  основания и находится на высоте 250 мм над ней. При этом точка  $S$  выходного звена расположена на высоте 150 мм над плоскостью основания (выходное звено представляется в виде стержня длиной 100 мм). На рис. 3 приведено схематичное изображение манипулятора в данной конфигурации.

Согласно Приложению 2, при указанных геометрических параметрах в выражении (8) получим  $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2} = \sqrt{1 - (n^x)^2}$ . Поскольку  $|n^x| \leq 1$ , подкоренное выражение будет всегда неотрицательным и уравнение (8) будет иметь решение. Кроме того, в системе уравнений (9) получим  $a_2b_3 - a_3b_2 = (\cos q_6)^2$ . Данное выражение будет равно нулю при  $q_6 = \pm \pi/2$ : в этом случае вектор  $\hat{n}$  параллелен оси  $OX$ . Очевидно, что при такой ориентации выходного звена платформа манипулятора может быть наклонена к плоскости основания под любым углом  $\varphi$ , так что обратная задача о положениях будет иметь бесконечное количество решений. В связи с этим при планировании траектории движения выходного звена рассматриваемого манипулятора необходимо избегать конфигураций, для которых  $q_6 = \pm \pi/2$ .

В качестве заданной траектории движения выходного звена рассмотрим кусочно-заданную кривую (рис. 3), которая может соответствовать обработке или анализу поверхности некоего протяженного объекта. Данная траектория симметрична относительно плоскостей  $OXZ$  и  $OYZ$  и состоит из двух прямолинейных участков (1–2 и 3–4) протяженностью 400 мм, расположенных над плоскостью  $OXY$  на высоте 156,6 мм и отстоящих друг от друга на 100 мм, и двух дугообразных участков (2–3 и 4–1), середина которых расположена над плоскостью  $OXY$  на высоте 170 мм. На всей траектории движения выходное

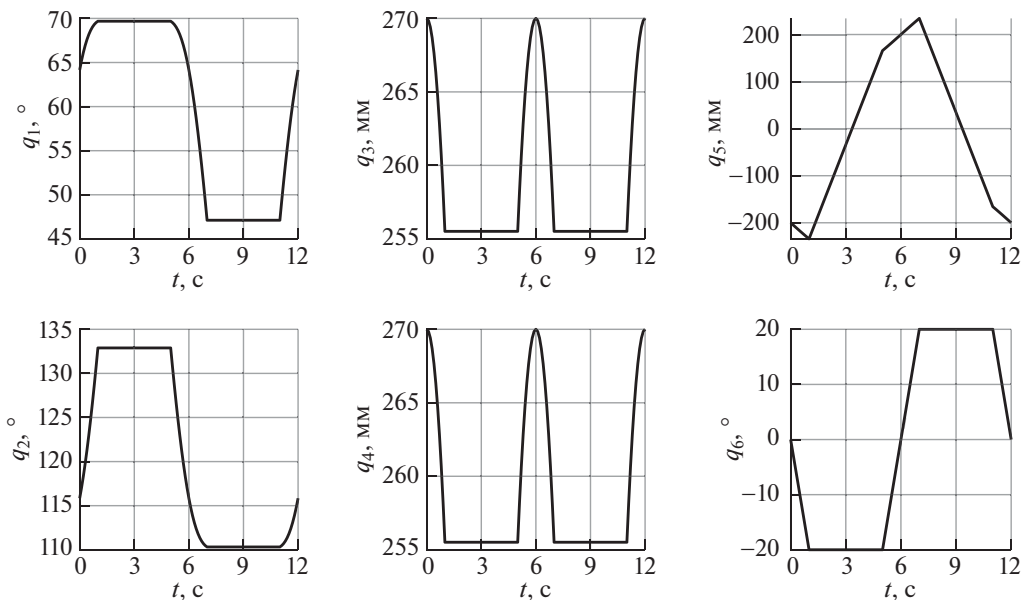


Рис. 4. Результат решения обратной задачи о положениях.

звено лежит в плоскости, параллельной плоскости  $OYZ$ , причем на участках 1–2 и 3–4 оно сохраняет свою ориентацию, образуя с осью  $OZ$  угол  $\pm 20^\circ$ , а на участках 2–3 и 4–1 оно меняет ориентацию от одного предельного значения угла до другого (на рис. 3 стрелки обозначают ориентацию инструмента и соответствуют направлению вектора  $-\hat{n}$ ). Движение начинается из точки 0, находящейся в середине участка 4–1. Временные интервалы движения вдоль участков 0–1, 1–2, 2–3, 3–4 и 4–0 составляют 1, 4, 2, 4 и 1 с соответственно.

Результаты решения обратной задачи о положениях для указанной геометрии манипулятора и траектории движения приведены на рис. 4 в виде графиков  $\mathbf{q}(t)$ , где  $t$  — время. Можно видеть, что результаты решения также имеют кусочный вид:

- 1) При  $t \leq 1$  с (движение вдоль участка 0–1) платформа манипулятора опускается и смещается в отрицательном направлении  $OY$ , о чем свидетельствует увеличение значений  $q_1$  и  $q_2$  и уменьшение значений  $q_3$  и  $q_4$ . При этом угол отклонения выходного звена меняется от 0 до  $-20^\circ$ , что соответствует изменению значения  $q_6$ . Координата  $q_5$  также незначительно изменяется, чтобы скомпенсировать наклон выходного звена и сохранить положение точки  $S$  вдоль оси  $OX$  неизменным.
- 2) При  $1 < t \leq 5$  с (движение вдоль участка 1–2) платформа манипулятора неподвижна, ориентация выходного звена неизменна, и его линейное перемещение осуществляется только за счет привода каретки платформы. Значения  $q_1, \dots, q_4$  и  $q_6$  остаются постоянными, а координата  $q_5$  изменяется соответствующим образом.

- 3) При  $5 < t \leq 7$  с (движение вдоль участка 2–3) платформа манипулятора смещается в положительном направлении оси  $OY$ , что соответствует уменьшению значений  $q_1$  и  $q_2$ . Кроме того, платформа сперва поднимается, а затем опускается, о чем свидетельствуют рост и последующее уменьшение значений  $q_3$  и  $q_4$ . При этом выходное звено меняет свой угол наклона от  $-20^\circ$  до  $+20^\circ$ , что соответствует изменению значения  $q_6$ . Координата  $q_5$  незначительно изменяется для компенсации данного наклона и сохранения неизменного положения точки  $S$  вдоль оси  $OX$ .
- 4) При  $7 < t \leq 11$  с (движение вдоль участка 4–5) характер изменения приводных координат аналогичен движению вдоль участка 1–2: значение  $q_5$  уменьшается, а остальные координаты остаются неизменными.
- 5) При  $11 < t \leq 12$  с (движение вдоль участка 5–0) платформа манипулятора поднимается и смещается в отрицательном направлении  $OY$ , о чем свидетельствует увеличение значений  $q_1, \dots, q_4$ . Угол отклонения выходного звена уменьшается от  $+20^\circ$  до  $0$ , что соответствует изменению значения  $q_6$ . Изменение координаты  $q_5$  направлено на компенсацию отклонения выходного звена и сохранение неизменным положения точки  $S$  вдоль оси  $OX$ . По окончании движения манипулятор возвращается в исходную точку траектории, что также подтверждается из рис. 4:  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(12)$ .

Рассчитанные значения и характер изменения приводных координат соответствуют геометрическим параметрам манипулятора и заданной траектории движения выходного звена, что подтверждает корректность предложенного алгоритма решения обратной задачи о положениях.

## 5. Обсуждение результатов

Приведенный алгоритм решения обратной задачи о положениях основан на использовании формул произведения матричных экспонент (3) и (12), которые позволили установить взаимосвязь между заданными координатами выходного звена и искомыми приводными координатами. Данный подход требует лишь значения ряда параметров ( $\xi_i, i = 1, \dots, 5, \mathbf{M}_S$  и  $\mathbf{M}_P$ ), соответствующих некоторой начальной конфигурации манипулятора, за которую может быть принята любая желаемая конфигурация, и определяемых исключительно геометрией манипулятора и выбранным расположением систем координат. При этом используемый метод позволяет легко учесть геометрические неточности расположения осей шарниров: например, если оси шарниров, соответствующих приводным координатам  $q_5$  и  $q_6$ , имеют какие-либо отклонения, достаточно изменить соответствующим образом кинематические винты  $\xi_4$  и  $\xi_5$  — алгоритм в целом сохранит свою работоспособность. Также согласно Приложению 2 можно видеть, что коэффициенты решаемых уравнений не зависят от векторов  $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}$  и их выражений в начальной конфигурации манипулятора (соответствующей матрице  $\mathbf{M}_S$ ): таким образом, как было

сказано ранее, направление данных векторов может быть выбрано произвольным образом.

Проводя сравнительный анализ с другими исследованиями, посвященными решению обратной задачи о положениях прочих манипуляторов гибридной структуры, отметим, что формула произведения матричных экспонент была использована в ограниченном количестве исследований. Так, например, в [13] авторы использовали данную формулу, но только для последовательной части рассматриваемого манипулятора; авторы также сделали ряд допущений на геометрию манипулятора, что позволило получить уравнения довольно простого вида. В [14] структурно-геометрические особенности исследуемого манипулятора также привели к простым соотношениям, из которых решение обратной задачи удалось найти методом обратных преобразований (используя обратные матрицы вида  $e^{-[\xi_i]\theta_i}$ ). Кроме того, стоит отметить исследование [12], в котором был применен схожий метод, а также представление исходного манипулятора гибридной структуры в виде эквивалентного манипулятора последовательной структуры аналогично текущей статье. Решение обратной задачи о положениях было найдено путем решения подзадач Падена–Кахана [24, с. 99], но, как отмечают сами авторы, такой подход можно использовать лишь для определенных структур манипуляторов. Что касается прочих исследований, в том числе упомянутых во введении, большинство из них либо основаны на составлении кинематических соотношений путем введения дополнительных систем координат (используя метод Денавита–Хартенберга), либо опираются на структурные особенности конкретного рассматриваемого манипулятора и учитывают различные геометрические допущения. Используемый в данной статье алгоритм не требует построения дополнительных систем координат или введения допущений, и потому его применение также представляет интерес для других манипуляторов гибридной структуры.

## 6. Заключение

Настоящая статья была посвящена разработке алгоритма решения обратной задачи о положениях для пятиподвижного манипулятора гибридной структуры, состоящего из параллельной части с тремя степенями свободы и последовательной части с двумя степенями свободы, а также имеющего приводную избыточность. Предложенный алгоритм основан на использовании формулы произведения матричных экспонент и позволяет получить решение в аналитическом виде, не предъявляя при этом никаких допущений к геометрическим параметрам манипулятора. Согласно алгоритму сперва определяются координаты, характеризующие ориентацию выходного звена, далее находятся оставшаяся координата последовательной части и координаты, описывающие расположение платформы параллельной части манипулятора, и, наконец, определяются неизвестные координаты в кинематических цепях параллельной части. Рассмотренный пример подтвердил работоспособность предложенного алгоритма.

Полученные кинематические соотношения могут быть использованы при решении прямой задачи о положениях, состоящей в определении конфигурации выходного звена при заданных значениях приводных координат, что имеет важное практическое значение и применяется для оценки реального положения выходного звена путем анализа данных с датчиков, установленных в приводах манипулятора. Рассмотренные соотношения также лежат в основе последующего анализа скоростей, особых положений манипулятора и определения его рабочих зон, что является направлением дальнейшего развития текущей работы. Кроме того, предложенные в данном исследовании методики могут быть адаптированы для изучения других манипуляторов гибридной структуры.

### Дополнительные материалы

Файлы MATLAB с текстами программ, соответствующих представленным в данной статье алгоритмам, находятся в свободном доступе онлайн по ссылке: <http://dx.doi.org/10.17632/tp8nx5jhyv.1>.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Данное Приложение содержит краткие сведения об использовании формулы произведения матричных экспонент (product of exponentials formula [9]) при анализе кинематики манипуляторов.

Пусть выходное звено манипулятора соединено с основанием разомкнутой кинематической цепью, состоящей из  $n$  одноподвижных шарниров (любой многоподвижный шарнир можно представить в виде комбинации одноподвижных). При этом  $i$ -му шарниру,  $i = 1, \dots, n$ , можно сопоставить (единичный) кинематический винт  $\xi_i \in \mathbb{R}^6$ :

$$(П.1) \quad \xi_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_i \\ \mathbf{r}_i \times \hat{\mathbf{s}}_i + h_i \hat{\mathbf{s}}_i \end{bmatrix}, & \text{если } h_i \neq \infty, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hat{\mathbf{s}}_i \end{bmatrix}, & \text{если } h_i = \infty, \end{cases}$$

где  $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathbb{R}^3$  — векторная часть винта;  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$  — моментная часть винта;  $\hat{\mathbf{s}}_i$  — единичный вектор, параллельный оси винта;  $\mathbf{r}_i$  — вектор, определяющий координаты произвольной точки на оси винта;  $h_i$  — шаг винта.

Пусть с выходным звеном связана некоторая система координат  $SX_S Y_S Z_S$ , конфигурацию которой относительно неподвижной системы координат основания  $OXYZ$  можно описать при помощи матрицы  $\mathbf{T}_S \in SE(3)$ . Пусть матрица  $\mathbf{M}_S$  описывает некую начальную конфигурацию манипулятора, в которой шарнирам цепи можно сопоставить кинематические винты  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , согласно выражению (П.1). Тогда матрицы  $\mathbf{T}_S$  и  $\mathbf{M}_S$  связаны

друг с другом следующим образом [9, с. 120]:

$$(П.2) \quad \mathbf{T}_S = \left( \prod_{i=1}^n e^{[\xi_i]\theta_i} \right) \mathbf{M}_S,$$

где  $\theta_i$  — перемещение в  $i$ -м шарнире;  $[\xi_i]$  — матричное представление винта  $\xi_i$ :

$$(П.3) \quad [\xi_i] = \begin{bmatrix} \Lambda(\boldsymbol{\omega}_i) & \mathbf{v}_i \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \in se(3),$$

$$\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i) = \Lambda \left( \begin{bmatrix} \omega_i^x \\ \omega_i^y \\ \omega_i^z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_i^z & \omega_i^y \\ \omega_i^z & 0 & -\omega_i^x \\ -\omega_i^y & \omega_i^x & 0 \end{bmatrix} \in so(3).$$

Выражение (П.2) представляет собой формулу произведения матричных экспонент  $e^{[\xi_i]\theta_i}$ , которые также можно представить следующим образом:

$$e^{[\xi_i]\theta_i} = \begin{bmatrix} e^{\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i)\theta_i} & (\mathbf{I}_{3 \times 3}\theta_i + (1 - \cos \theta_i)\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i) + (\theta_i - \sin \theta_i)\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i)^2) \mathbf{v}_i \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix},$$

где  $e^{\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i)\theta_i}$  соответствует матрице поворота вокруг оси, определяемой вектором  $\boldsymbol{\omega}_i$ , на угол  $\theta_i$ :

$$e^{\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i)\theta_i} = \mathbf{I}_{3 \times 3} + \sin \theta_i \Lambda(\boldsymbol{\omega}_i) + (1 - \cos \theta_i)\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i)^2.$$

Начальная конфигурация манипулятора  $\mathbf{M}_S$  и соответствующие ей кинематические винты  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , определяются конструктивными особенностями рассматриваемого манипулятора и выбором расположения систем координат  $SX_S Y_S Z_S$  и  $OXYZ$ , и потому при анализе кинематики данные параметры считаются заранее известными. Таким образом, соотношение (П.2) устанавливает связь между перемещениями  $\theta_i$  в шарнирах и конфигурацией выходного звена, описываемой матрицей  $\mathbf{T}_S$ . Данное соотношение может быть использовано не только для решения прямой задачи о положениях (для чего оно и применяется в большинстве случаев [9]), но также при решении обратной задачи, что демонстрируется в настоящей статье на примере манипулятора гибридной структуры.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Данное Приложение содержит коэффициенты уравнений, используемых при решении обратной задачи о положениях:

$$a_1 = n_0^x((s_5^y)^2 + (s_5^z)^2) - n_0^y s_5^x s_5^y - n_0^z s_5^x s_5^z,$$

$$b_1 = -n_0^y s_5^z + n_0^z s_5^y,$$

$$c_1 = n_0^x(s_5^x)^2 + n_0^y s_5^x s_5^y + n_0^z s_5^x s_5^z - n^x,$$



$$\begin{aligned}
a_2 &= n_0^x (s_5^x s_5^y (1 - \cos q_6) + s_5^z \sin q_6) + n_0^y ((s_5^y)^2 (1 - \cos q_6) + \cos q_6) - \\
&\quad - n_0^z (s_5^x \sin q_6 - s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6)), \\
b_2 &= n_0^x (s_5^x s_5^z (\cos q_6 - 1) + s_5^y \sin q_6) - n_0^y (s_5^x \sin q_6 + s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6)) + \\
&\quad + n_0^z ((s_5^z)^2 (\cos q_6 - 1) - \cos q_6), \\
c_2 &= -n^y, \\
a_3 &= n_0^x (s_5^x s_5^z (1 - \cos q_6) - s_5^y \sin q_6) + n_0^y (s_5^x \sin q_6 + s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6)) + \\
&\quad + n_0^z ((s_5^z)^2 (1 - \cos q_6) + \cos q_6), \\
b_3 &= n_0^x (s_5^x s_5^y (1 - \cos q_6) + s_5^z \sin q_6) + n_0^y ((s_5^y)^2 (1 - \cos q_6) + \cos q_6) - \\
&\quad - n_0^z (s_5^x \sin q_6 - s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6)), \\
c_3 &= -n^z, \\
a_4 &= s_4^x, \\
b_4 &= p_{S0}^x (((s_5^y)^2 + (s_5^z)^2) (\cos q_6 - 1) + 1) + p_{S0}^y (s_5^x s_5^y (1 - \cos q_6) - s_5^z \sin q_6) + \\
&\quad + p_{S0}^z (s_5^x s_5^z (1 - \cos q_6) + s_5^y \sin q_6) + r_5^x ((s_5^y)^2 + (s_5^z)^2) (1 - \cos q_6) + \\
&\quad + r_5^y (s_5^x s_5^y (\cos q_6 - 1) + s_5^z \sin q_6) + r_5^z (s_5^x s_5^z (\cos q_6 - 1) - s_5^y \sin q_6) - p_S^x, \\
a_5 &= 1, \\
b_5 &= p_{S0}^x (s_5^x s_5^y (1 - \cos q_6) \cos \varphi + s_5^x s_5^z (\cos q_6 - 1) \sin \varphi + s_5^y \sin q_6 \sin \varphi + \\
&\quad + s_5^z \sin q_6 \cos \varphi) + \\
&\quad + p_{S0}^y (-s_5^x \sin q_6 \sin \varphi + (s_5^y)^2 (1 - \cos q_6) \cos \varphi + s_5^y s_5^z (\cos q_6 - 1) \sin \varphi + \\
&\quad + \cos q_6 \cos \varphi) + \\
&\quad + p_{S0}^z (-s_5^x \sin q_6 \cos \varphi + s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6) \cos \varphi + (s_5^z)^2 (\cos q_6 - 1) \sin \varphi + \\
&\quad + \cos q_6 \sin \varphi) + \\
&\quad + q_5 (s_4^y \cos \varphi - s_4^z \sin \varphi) + r_3^y (1 - \cos \varphi) + r_3^z \sin \varphi + \\
&\quad + r_5^x (s_5^x (\cos q_6 - 1) (s_5^y \cos \varphi - s_5^z \sin \varphi) - s_5^y \sin q_6 \sin \varphi - s_5^z \sin q_6 \cos \varphi) + \\
&\quad + r_5^y (s_5^x \sin q_6 \sin \varphi + ((s_5^y)^2 \cos \varphi - s_5^y s_5^z \sin \varphi - \cos \varphi) (\cos q_6 - 1)) + \\
&\quad + r_5^z (s_5^x \sin q_6 \cos \varphi + (s_5^y s_5^z \cos \varphi - (s_5^z)^2 \sin \varphi + \sin \varphi) (\cos q_6 - 1)) - p_S^y, \\
a_6 &= 1, \\
b_6 &= p_{S0}^x (s_5^x s_5^y (1 - \cos q_6) \sin \varphi + s_5^x s_5^z (1 - \cos q_6) \cos \varphi - s_5^y \sin q_6 \cos \varphi + \\
&\quad + s_5^z \sin q_6 \sin \varphi) + \\
&\quad + p_{S0}^y (s_5^x \sin q_6 \cos \varphi + (s_5^y)^2 (1 - \cos q_6) \sin \varphi + s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6) \cos \varphi + \\
&\quad + \cos q_6 \sin \varphi) + \\
&\quad + p_{S0}^z (-s_5^x \sin q_6 \sin \varphi + s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6) \sin \varphi + (s_5^z)^2 (1 - \cos q_6) \cos \varphi + \\
&\quad + \cos q_6 \cos \varphi) + \\
&\quad + q_5 (s_4^y \sin \varphi + s_4^z \cos \varphi) - r_3^y \sin \varphi + r_3^z (1 - \cos \varphi) + \\
&\quad + r_5^x (s_5^x (\cos q_6 - 1) (s_5^y \sin \varphi + s_5^z \cos \varphi) + s_5^y \sin q_6 \cos \varphi - s_5^z \sin q_6 \sin \varphi) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r_5^y (-s_5^x \sin q_6 \cos \varphi + ((s_5^y)^2 \sin \varphi + s_5^y s_5^z \cos \varphi - \sin \varphi)(\cos q_6 - 1)) + \\
& + r_5^z (s_5^x \sin q_6 \sin \varphi + (s_5^y s_5^z \sin \varphi + (s_5^z)^2 \cos \varphi - \cos \varphi)(\cos q_6 - 1)) - p_{S^z}^z, \\
a_7 & = -\frac{p_{A_j}^y - p_{B_j}^y}{p_{A_j}^z - p_{B_j}^z}, \\
b_7 & = \frac{(p_{A_j}^y)^2 + (p_{A_j}^z)^2 - (p_{B_j}^y)^2 - (p_{B_j}^z)^2 - l_{A_j C_j}^2 + l_{B_j C_j}^2}{2(p_{A_j}^z - p_{B_j}^z)}, \\
a_8 & = 1 + a_7^2, \\
b_8 & = -2p_{A_j}^y - 2a_7(p_{A_j}^z - b_7), \\
c_8 & = (p_{A_j}^z - b_7)^2 - l_{A_j C_j}^2,
\end{aligned}$$

где  $p_S^x, p_S^y, p_S^z$  и  $n^x, n^y, n^z$  — соответствующие компоненты векторов  $\mathbf{p}_S$  и  $\hat{\mathbf{n}}$ ;  $p_{S_0}^x, p_{S_0}^y, p_{S_0}^z$  и  $n_0^x, n_0^y, n_0^z$  — те же компоненты, соответствующие начальной конфигурации манипулятора (матрице  $\mathbf{M}_S$  в выражении (3));  $s_4^x, \dots, s_5^z$  — соответствующие компоненты векторов  $\hat{\mathbf{s}}_4$  и  $\hat{\mathbf{s}}_5$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ganiev R.F., Glazunov V.A., Filippov G.S.* Urgent problems of machine science and ways of solving them: Wave and additive technologies, the machine tool industry, and robot surgery // *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2018. Vol. 47. P. 399–406. <https://doi.org/10.3103/S1052618818050059>
2. *Wen K., Harton D., Laliberté T., Gosselin C.* Kinematically redundant (6+3)-dof hybrid parallel robot with large orientational workspace and remotely operated gripper // *Proc. 2019 IEEE Inter. Conf. Robotics and Automation.* Montreal, QC, Canada, 20–24 May 2019. P. 1672–1678. <https://doi.org/10.1109/ICRA.2019.8793772>
3. *Liu Q., Huang T.* Inverse kinematics of a 5-axis hybrid robot with non-singular tool path generation // *Robot. Comp. Integ. Manuf.* 2019. Vol. 56. P. 140–148. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2018.06.003>
4. *Carbone G., Ceccarelli M.* A stiffness analysis for a hybrid parallel-serial manipulator // *Robotica.* 2004. Vol. 22. No. 5. P. 567–576. <https://doi.org/10.1017/S0263574704000323>
5. *Lai Y.-L., Liao C.-C., Chao Z.-G.* Inverse kinematics for a novel hybrid parallel-serial five-axis machine tool // *Robot. Comp. Integ. Manuf.* 2018. Vol. 50. P. 63–79. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2017.09.002>
6. *Oba Y., Kakinuma Y.* Simultaneous tool posture and polishing force control of unknown curved surface using serial-parallel mechanism polishing machine // *Prec. Eng.* 2017. Vol. 49. P. 24–32. <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2017.01.006>
7. *Waldron K.J., Raghavan M., Roth B.* Kinematics of a hybrid series-parallel manipulation system // *J. Dyn. Sys., Meas., Control.* 1989. Vol. 111. No. 2. P. 211–221. <https://doi.org/10.1115/1.3153039>
8. *Cheng H.H.* Real-time manipulation of a hybrid serial-and-parallel-driven redundant industrial manipulator // *J. Dyn. Sys., Meas., Control.* 1994. Vol. 116. No. 4. P. 687–701. <https://doi.org/10.1115/1.2899268>

9. *Lynch K.M., Park F.C.* Modern robotics: Mechanics, planning, and control. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. <https://doi.org/10.1017/9781316661239>
10. *Tang Z., Payandeh S.* Design and modeling of a novel 6 degree of freedom haptic device // Proc. 3rd Joint EuroHaptics Conf. and Symp. on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems. Guilin, China, 19–23 December 2009. P. 1941–1946. <https://doi.org/10.1109/WHC.2009.4810891>
11. *Yan C., Gao F., Zhang Y.* Kinematic modeling of a serial-parallel forging manipulator with application to heavy-duty manipulations // Mech. Based Des. Struct. Mach. 2010. Vol. 38. No. 1. P. 105–129. <https://doi.org/10.1080/15397730903455344>
12. *Sun P., Li Y.B., Wang Z.S., Chen K., Chen B., Zeng X., Zhao J., Yue Y.* Inverse displacement analysis of a novel hybrid humanoid robotic arm // Mech. Mach. Theory. 2020. Vol. 147. P. 103743. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.103743>
13. *Yang G., Chen W., Ho E.H.L.* Design and kinematic analysis of a modular hybrid parallel-serial manipulator // Proc. 7th Inter. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision. Singapore, 2–5 December 2002. Vol. 1. P. 45–50. <https://doi.org/10.1109/ICARCV.2002.1234788>
14. *Tang C., Zhang J., Cheng S.* Kinematics analysis for a hybrid robot in minimally invasive surgery // Proc. 2009 IEEE Inter. Conf. on Robotics and Biomimetics. Guilin, China, 19–23 December 2009. P. 1941–1946. <https://doi.org/10.1109/ROBIO.2009.5420534>
15. *Lee M.K., Park K.W., Choi B.O.* Kinematic and dynamic models of hybrid robot manipulator for propeller grinding // J. Robot. Sys. 1999. Vol. 16. No. 3. P. 137–150. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-4563\(199903\)16:3<137::AID-ROB1>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-4563(199903)16:3<137::AID-ROB1>3.0.CO;2-V)
16. *Pisla D., Gherman B., Vaida C., Suciu M., Plitea N.* An active hybrid parallel robot for minimally invasive surgery // Robot. Comp. Integ. Manuf. 2013. Vol. 29. No. 4. P. 203–221. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2012.12.004>
17. *Hu B., Shi Y., Xu L., Bai P.* Reconsideration of terminal constraint/mobility and kinematics of 5-DOF hybrid manipulators formed by one 2R1T PM and one RR SM // Mech. Mach. Theory. 2020. Vol. 149. P. 103837. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.103837>
18. *Ye H., Wang D., Wu J., Yue Y., Zhou Y.* Forward and inverse kinematics of a 5-DOF hybrid robot for composite material machining // Robot. Comp. Integ. Manuf. 2020. Vol. 65. P. 101961. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2020.101961>
19. *López-Custodio P.C., Fu R., Dai J.S., Jin Y.* Compliance model of Exechon manipulators with an offset wrist // Mech. Mach. Theory. 2022. Vol. 167. P. 104558. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104558>
20. *Antonov A., Fomin A., Glazunov V., Kiselev S., Carbone G.* Inverse and forward kinematics and workspace analysis of a novel 5-DOF (3T2R) parallel-serial (hybrid) manipulator // Int. J. Adv. Robot. Sys. 2021. Vol. 18. No. 2. P. 2963. <https://doi.org/10.1177/1729881421992963>
21. *Gosselin C., Schreiber L.-T.* Redundancy in parallel mechanisms: A review // Appl. Mech. Rev. 2018. Vol. 70. No. 1. P. 010802. <https://doi.org/10.1115/1.4038931>
22. *Waldron K.J., Schmiedeler J.* Kinematics // Springer Handbook of Robotics. Cham: Springer, 2016. P. 11–36. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-32552-1\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-32552-1_2)

23. *Liu S., Qiu Z., Zhang X.* Singularity and path-planning with the working mode conversion of a 3-DOF 3-RRR planar parallel manipulator // Mech. Mach. Theory. 2017. Vol. 107. P. 166–182. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.09.004>
24. *Murray R.M., Li Z., Sastry S.S.* A mathematical introduction to robotic manipulation. Boca Raton: CRC Press, 1994. <https://doi.org/10.1201/9781315136370>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.*

Поступила в редакцию 22.08.2022

После доработки 23.10.2022

Принята к публикации 26.10.2022