

© 2023 г. И.С. ГРИГОРЬЕВ, канд. физ.-мат. наук (iliagri@yandex.ru)  
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова),  
А.И. ПРОСКУРЯКОВ (ap\_91@mail.ru)  
(филиал Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова в г. Баку)

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕЛЕТА КА СО СБРОСОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ТОПЛИВНОГО БАКА И РАЗГОННОГО БЛОКА В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Рассматривается идея сокращения замусоренности околоземного пространства за счет сброса отработавших частей космического аппарата на орбитах, касающихся условной границы атмосферы Земли. Решается задача оптимизации траектории перелета космического аппарата с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли на целевую эллиптическую орбиту в модифицированной импульсной постановке. Для улучшения сходимости метода Ньютона используется прием, заключающийся во введении серии вспомогательных систем координат в каждой точке приложения импульсного воздействия. Производные в условиях трансверсальности вычисляются при помощи специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирования.

*Ключевые слова:* космический аппарат, космический мусор, дополнительный топливный бак, разгонный блок, сброс в атмосферу, импульсная постановка, краевая задача, принцип Лагранжа.

DOI: 10.31857/S0005231023030029, EDN: ZYOYBI

### 1. Введение

С начала космической эры в околоземном пространстве скопилось значительное количество космического мусора (КМ) — объектов искусственного происхождения и их фрагментов, которые уже неисправны, не функционируют и не могут служить никаким полезным целям, но являются опасным фактором воздействия на функционирующие космические аппараты (КА). Причем с каждым годом количество объектов КМ непрерывно растет. Эти объекты можно разделить на несколько больших групп: полезная нагрузка, ступени ракет, разгонные блоки, баки. Наибольшее скопление космического мусора наблюдается на низких околоземных орбитах и в зоне геостационарной орбиты (ГСО) [1]. Столкновение крупногабаритных объектов КМ друг с другом и взрывы остатков топлива в баках могут стать причиной значительного увеличения мелких объектов КМ. Описанные процессы могут привести к цепной реакции — так называемому эффекту Кесслера [2].

Большое число работ посвящено составлению каталогов нефункционирующих космических аппаратов и мониторингу состояния околоземного пространства [3–7].

В [3] проводится анализ сложившейся техногенной обстановки в околоземном пространстве на основе имеющегося каталога космических объектов, приводится перечень основных мер, направленных на сокращение КМ, дается описание автоматизированной системы для предупреждения об опасных ситуациях в околоземном космическом пространстве.

В [4] рассматриваются организационно-методические и технологические проблемы построения системы информационного мониторинга, направленной на сокращение замусоренности околоземного пространства, описываются базы данных, на основе которых строится система.

В [5] дается описание математического и программного обеспечения, предназначенного для исследования совокупностей объектов искусственного происхождения. Предлагаемое программно-математическое обеспечение позволяет прогнозировать вероятность столкновения объектов КМ с функционирующими КА и моделировать процесс образования КМ в результате взрывов и столкновений.

В [6] предлагается алгоритм, ускоряющий время построения орбиты некаталогизированного объекта КМ.

В [7] описываются три поколения оптико-электронных комплексов, предназначенных для мониторинга околоземного пространства.

Разработка мер по очистке и предотвращению или уменьшению образования КМ актуальна [8]. Пути решения проблемы КМ можно разделить на две большие группы: профилактика и уборка. В настоящее время разрабатываются различные проекты по очистке околоземного пространства: захват фрагмента космического мусора с помощью сети [9–11], захват с помощью гарпуна [12–15], использование лазерной установки [16–20]. В [21, 22] рассматривается идея облета крупногабаритного КМ с последующим переводом его на орбиту захоронения. Однако экономически приемлемых проектов пока не существует.

В принятых международных документах в качестве одной из мер по предотвращению образования КМ указывается увод с рабочих орбит космических средств после окончания их активного функционирования [23, 24]. В [25–30] рассматривается задача перевода закончившего работу КА на орбиту захоронения с заданным сроком существования. Идеи увода отработавших КА и их частей в плотные слои атмосферы рассматриваются в [27–33].

В [25] рассматривается задача перелета завершившего работу КА на орбиту захоронения с заданным сроком существования. Проведенные исследования позволяют для конкретного КА выбрать тип орбиты захоронения (круговая или эллиптическая) и момент перевода КА на эту орбиту.

В [26] рассматривается возможность выполнения требований «Руководящих принципов организации работ по снижению техногенного засорения кос-

мического пространства». В качестве одного из наиболее простых и эффективных способов предотвращения замусоренности средневысотных орбит отмечается минимизация эксцентриситета спутников после окончания их активного функционирования. На основе статистических данных делается вывод о том, что почти половина спутников с 1999 по 2011 г. была уведена на орбиту захоронения, соответствующую требованиям, указанным в документах Межагентского координационного комитета по предупреждению образования космического мусора.

В [27] рассматривается увод КА «Гонец-М» после завершения его активного функционирования на орбиту захоронения и в плотные слои атмосферы, проводятся оценки характеристической скорости, которая потребуется для осуществления маневра, и времени существования рассматриваемого КА на орбите захоронения.

Одним из вопросов, рассматриваемым в [28], является описание различных способов предотвращения замусоренности околоземного пространства: сокращение продуктов выхлопа твердотопливных двигателей, пассивация КА и ракета-носителей (РН), уменьшение осколкообразования вследствие столкновений, перевод КА и РН на орбиты захоронения, принудительный ввод в атмосферу КА и РН и сокращение длительности существования космических объектов и т.д. Для осуществления ввода КА в атмосферу предлагается использовать специальные реактивные двигатели или основные двигатели. На низких орбитах для усиления торможения в атмосфере предлагается возможность использования изменения геометрии поверхности для увеличения ее площади (например, надувные баллоны).

В [29] рассматривается задача увода в атмосферу и на орбиты захоронения на примере нескольких спутников. Строятся зависимости относительной массы топлива от различных параметров.

В [30] отмечается, что принудительный ввод КА в атмосферу с применением замедляющих полет приемов является одним из перспективных способов, однако для реализации такого типа маневров необходима модификация традиционных проектов КА и РН.

В [31], помимо различных методов удаления объектов КМ, приводится идея сокращения замусоренности околоземного пространства за счет увода вышедших из строя спутников в верхние слои атмосферы Земли при помощи установленного на них солнечного паруса.

В [32] предлагается уводить сверхмалые КА, являющиеся частью распределенного КА, в плотные слои атмосферы.

В [33] в качестве одного из методов по сокращению замусоренности околоземного пространства рассматривается использование невыработанных остатков топлива для совершения маневра, изменяющего высоту перигея орбиты, для оперативного и контролируемого увода отделившихся частей КА в плотные слои атмосферы. Ставится задача оптимизации. На основе ана-

лиза парка существующих космических средств выведения делается вывод о возможности применения данного метода.

В [34] рассматривается задача выбора орбит, на которые могут переводиться крупноразмерные космические объекты после окончания их активного функционирования, проводится анализ зависимости времени баллистического существования космических объектов от высот орбит увода. Из представленных результатов можно сделать вывод, что при уменьшении минимальной высоты орбиты время существования космического объекта на этой орбите стремится к нулю. В работе предполагалось, что объект прекращает баллистическое существование по достижении им высоты над поверхностью Земли, меньшей 80 км.

Рассматриваемая в статье задача оптимизации перелета КА со сбросом отработавших ступеней в атмосферу является оригинальной, у других авторов оптимизационных работ такой темы нет.

В работе рассматривается идея сокращения замусоренности околоземного пространства за счет сброса на этапе выведения отработавших частей КА на орбитах, касающихся условной границы атмосферы. Найденное в [35] в апсидальной импульсной постановке решение с исключительно малыми накладными расходами, оказавшееся также решением в задаче без априорного предположения апсидальности [36, 37], позволяет надеяться на успех применения методики «лестницы задач» — последовательной формализации и решения серии задач с постепенным уточнением и усложнением постановки, с использованием полученных решений более простых задач для решения следующих по сложности в качестве начального приближения непосредственно или на основе метода продолжения решения по параметру. Использование хорошего начального приближения и хорошей вычислительной схемы метода стрельбы позволяет построить одну из возможных экстремалей в задаче. Попытки построить произвольную экстремаль без предварительного анализа траектории заканчиваются неудачно — не удается построить экстремаль.

В работе решается задача оптимизации траектории выведения КА с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли заданного радиуса и наклона на целевую эллиптическую орбиту. Перелет рассматривается в центральном ньютоновском гравитационном поле, т.е. Земля считается точечным притягивающим центром, никакие другие гравитационные влияния не учитываются. Исследование проводится в импульсной постановке. Как и ранее, предполагается, что сумма импульсов довыведения с целевой на геостационарную орбиту ограничена заданной величиной. Учет характеристической скорости маневров довыведения осуществляется по упрощенной схеме апсидальной импульсной постановки.

Рассматривается траектория перелета КА для случая ограничения характеристической скорости маневров довыведения величиной 1,5 км/с. Как показало проведенное ранее исследование, при характеристической скорости

маневров довыведения меньше 1,47... км/с структура траектории будет иной и накладные расходы оказываются значительными.

В отличие от модели КА, состоящего из двух ступеней и спутника [36, 37], в настоящей работе предполагается, что КА состоит из разгонного блока (РБ), дополнительного топливного бака (ДТБ) и спутника. При этом первая серия маневров выведения КА осуществляется за счет топлива из ДТБ. По окончании этой серии маневров КА должен оказаться на орбите «сброса» — орбите, касающейся условной границы атмосферы (с высотой перигея 100 км). Далее следует участок пассивного полета продолжительностью 120 с, на котором осуществляется сброс ДТБ. По окончании участка сброса ДТБ остается на орбите сброса, а КА импульсным воздействием переводится на «безопасную» орбиту с высотой перигея 200 км. Это и последующие импульсные воздействия осуществляются за счет топлива из основного бака РБ. Наконец, после второй серии маневров КА оказывается на целевой орбите — одной из множества эллиптических орбит, таких что характеристическая скорость довыведения спутника на ГСО ограничена заданной величиной. На этой орбите осуществляется отстыковка спутника от РБ. Сброс РБ, как и в предыдущих работах, происходит с апогея целевой орбиты за счет топлива основного бака.

В предыдущих исследованиях [35–37] при помощи параметрического анализа показано, что на построенной на основе принципа Лагранжа экстремали достигается локальный минимум.

Задача оптимизации формализуется, и на основе соответствующего принципа Лагранжа [38] ее решение сводится к решению многоточечной краевой задачи. Краевая задача принципа Лагранжа импульсной постановки решается численно методом стрельбы. Громоздкие производные в условиях трансверсальности вычисляются при помощи специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирования<sup>1</sup>.

## 2. Формализация задачи

Перелет рассматривается в центральном ньютоновском гравитационном поле в вакууме в прямоугольной декартовой системе координат, связанной с центром Земли. Ось  $z$  этой системы перпендикулярна плоскости экватора и направлена с юга на север, ось  $x$  лежит в плоскости экватора и направлена по линии узлов начальной круговой орбиты от нисходящего узла к восходящему, ось  $y$  дополняет систему координат до правой. Система дифференциальных уравнений пассивного движения центра масс КА имеет следующий вид:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_x(t), & \dot{y}(t) &= v_y(t), & \dot{z}(t) &= v_z(t), \\ \dot{v}_x(t) &= -\frac{\mu x(t)}{r^3(t)}, & \dot{v}_y(t) &= -\frac{\mu y(t)}{r^3(t)}, & \dot{v}_z(t) &= -\frac{\mu z(t)}{r^3(t)}, \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Проект численно-аналитического дифференцирования представлен по ссылке: [http://mech.math.msu.su/~iliagri/ext\\_value.htm](http://mech.math.msu.su/~iliagri/ext_value.htm)

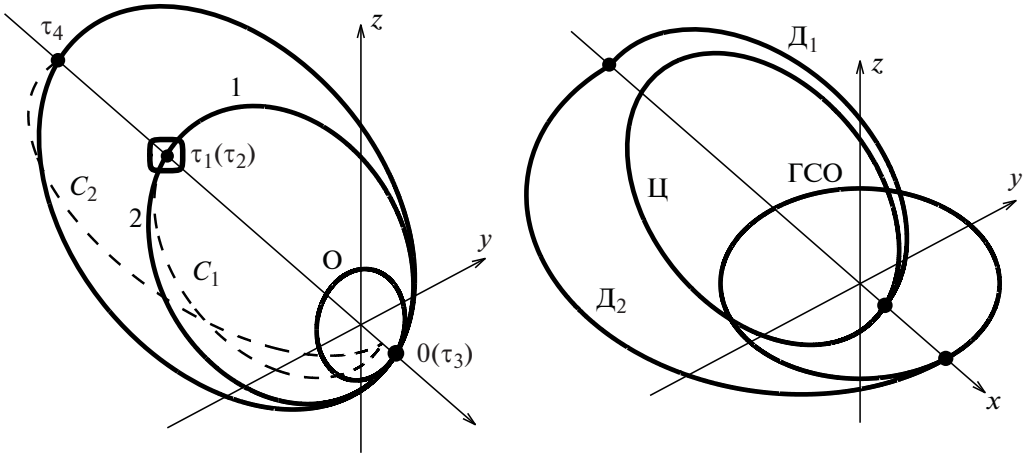


Схема перелета КА на целевую орбиту (слева) и схема довыведения с целевой орбиты на геостационарную (справа): О — опорная орбита, 1 — первая переходная орбита (до выделенной области), 2 — «безопасная» орбита (после выделенной области, апогеи первой переходной и безопасной орбит визуально неотличимы), Ц — целевая орбита, С<sub>1</sub> — орбита сброса ДТБ, С<sub>2</sub> — орбита сброса РБ, Д<sub>1</sub> — первая орбита довыведения, Д<sub>2</sub> — вторая орбита довыведения, ГСО — геостационарная орбита.

где  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  — координаты центра масс КА;

$$r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

— расстояние от КА до центра Земли;  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $v_z(t)$  — компоненты вектора скорости центра масс КА;  $\mu$  — гравитационный параметр Земли.

Проведенные ранее исследования показали, что структурно искомая траектория перелета КА с опорной на целевую орбиту состоит из четырех пассивных участков и пяти импульсных воздействий (см. рисунок).

Пусть в момент  $\tau$  подается импульсное воздействие. Оно происходит мгновенно и не меняет координат КА:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x(\tau_+) - x(\tau_-) &= 0, & y(\tau_+) - y(\tau_-) &= 0, & z(\tau_+) - z(\tau_-) &= 0, \\ \tau_+ - \tau_- &= 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее  $\tau_-$  обозначает окончание пассивного участка,  $x(\tau_-)$ ,  $y(\tau_-)$ ,  $z(\tau_-)$  — фазовые переменные в этот момент времени (функции непрерывные слева);  $\tau_+$  — начало следующего пассивного участка,  $x(\tau_+)$ ,  $y(\tau_+)$ ,  $z(\tau_+)$  — фазовые переменные в этот момент времени (функции непрерывные справа). С точки зрения формализации задачи и применения принципа Лагранжа [38] это разные участки и разные фазовые переменные. В основной теореме [38] подчеркивается, что они различны и обозначаются по-разному. Единая система обозначений в статье приведена для упрощения записи (индексы опущены).

В начальный момент времени КА до первого импульсного воздействия находится на опорной круговой орбите заданного наклона  $i_0$  и радиуса  $R_0$ . В силу выбора системы координат долгота восходящего узла  $\Omega_0 = 0$ :

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad & x^2(0_-) + y^2(0_-) + z^2(0_-) = R_0^2, \\
 & x(0_-)C_{0x} + y(0_-)C_{0y} + z(0_-)C_{0z} = 0, \\
 & v_x(0_-) + \frac{v_0}{R_0} (y(0_-) \cos i_0 + z(0_-) \sin i_0) = 0, \\
 & v_y(0_-) - \frac{v_0}{R_0} x(0_-) \cos i_0 = 0, \\
 & v_z(0_-) - \frac{v_0}{R_0} x(0_-) \sin i_0 = 0,
 \end{aligned}$$

где  $C_0 = \sqrt{\mu R_0}$ ,  $C_{0x} = 0$ ,  $C_{0y} = -C_0 \sin i_0$ ,  $C_{0z} = C_0 \cos i_0$  — величина и компоненты вектора кинетического момента КА относительно центра Земли;  $R_0 = R_3 + h_0$  — радиус опорной орбиты,  $R_3$  — радиус Земли,  $h_0$  — высота опорной орбиты над поверхностью Земли;  $v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}$  — величина вектора скорости на опорной орбите.

Начальный момент  $t = 0_-$  соответствует условиям до импульсного воздействия на круговой орбите, никакому пассивному участку он не соответствует. Величины  $x(0_-)$ ,  $y(0_-)$ ,  $z(0_-)$ ,  $v_x(0_-)$ ,  $v_y(0_-)$ ,  $v_z(0_-)$  — координаты и компоненты вектора скорости на круговой орбите до импульсного воздействия с учетом (2.2) — при формализации задачи в соответствии с [38] из рассмотрения исключаются:

$$(2.4) \quad x^2(0_+) + y^2(0_+) + z^2(0_+) = R_0^2, \quad x(0_+)C_{0x} + y(0_+)C_{0y} + z(0_+)C_{0z} = 0.$$

Отметим, что из пяти условий (2.3) в формализованной постановке задачи остается два (2.4). Три последних условия (2.3) входят составной частью в величину начального импульса:

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad & \Delta v_{0x} = v_x(0_+) + \frac{v_0}{R_0} (y(0_+) \cos i_0 + z(0_+) \sin i_0), \\
 & \Delta v_{0y} = v_y(0_+) - \frac{v_0}{R_0} x(0_+) \cos i_0, \\
 & \Delta v_{0z} = v_z(0_+) - \frac{v_0}{R_0} x(0_+) \sin i_0, \\
 & \Delta v_0 = \sqrt{\Delta v_{0x}^2 + \Delta v_{0y}^2 + \Delta v_{0z}^2}.
 \end{aligned}$$

Импульсное воздействие в начальный момент времени  $t = 0$  переводит КА на первую переходную орбиту. В не известный заранее момент времени  $\tau_1$  (согласно проведенным ранее исследованиям в окрестности апогея первой переходной орбиты) подается импульс, переводящий КА на «орбиту сброса

ДТБ» — эллиптическую орбиту, касающуюся условной границы атмосферы (с высотой перигея 100 км):

$$\begin{aligned}
 x(\tau_{1+}) - x(\tau_{1-}) &= 0, & y(\tau_{1+}) - y(\tau_{1-}) &= 0, & z(\tau_{1+}) - z(\tau_{1-}) &= 0, \\
 \tau_{1+} - \tau_{1-} &= 0, \\
 R_{\text{п}}(x(\tau_{1+}), y(\tau_{1+}), z(\tau_{1+}), v_x(\tau_{1+}), v_y(\tau_{1+}), v_z(\tau_{1+})) &= R_3 + 100 \text{ км}, \\
 \Delta v_1 &= \sqrt{(v_x(\tau_{1+}) - v_x(\tau_{1-}))^2 + (v_y(\tau_{1+}) - v_y(\tau_{1-}))^2 + (v_z(\tau_{1+}) - v_z(\tau_{1-}))^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Радиус перигея  $R_{\text{п}}(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  в зависимости от координат и скоростей КА в момент выведения на орбиту сброса ДТБ определяется по формуле

$$R_{\text{п}}(\cdot) = a(\cdot)(1 - e(\cdot)),$$

где  $a(\cdot)$  и  $e(\cdot)$  — большая полуось и эксцентриситет, которые вычисляются как функции координат и скоростей КА по формулам из [39].

На следующем пассивном участке продолжительностью 120 с ДТБ отстыковывается от КА. В момент времени  $\tau_2$  КА импульсным воздействием переводится на «безопасную» орбиту (с высотой перигея 200 км):

$$\begin{aligned}
 x(\tau_{2+}) - x(\tau_{2-}) &= 0, & y(\tau_{2+}) - y(\tau_{2-}) &= 0, & z(\tau_{2+}) - z(\tau_{2-}) &= 0, \\
 \tau_{2+} - \tau_{2-} &= 0, \\
 R_{\text{п}}(x(\tau_{2+}), y(\tau_{2+}), z(\tau_{2+}), v_x(\tau_{2+}), v_y(\tau_{2+}), v_z(\tau_{2+})) &= R_3 + 200 \text{ км}, \\
 \tau_{2-} - \tau_{1+} &= 120 \text{ с}, \\
 \Delta v_2 &= \sqrt{(v_x(\tau_{2+}) - v_x(\tau_{2-}))^2 + (v_y(\tau_{2+}) - v_y(\tau_{2-}))^2 + (v_z(\tau_{2+}) - v_z(\tau_{2-}))^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

В не известный заранее момент времени  $\tau_3$  (согласно проведенным ранее исследованиям в окрестности перигея «безопасной» орбиты) КА импульсным воздействием переводится на целевую орбиту:

$$\begin{aligned}
 x(\tau_{3+}) - x(\tau_{3-}) &= 0, & y(\tau_{3+}) - y(\tau_{3-}) &= 0, & z(\tau_{3+}) - z(\tau_{3-}) &= 0, \\
 \tau_{3+} - \tau_{3-} &= 0, \\
 \Delta v_3 &= \sqrt{(v_x(\tau_{3+}) - v_x(\tau_{3-}))^2 + (v_y(\tau_{3+}) - v_y(\tau_{3-}))^2 + (v_z(\tau_{3+}) - v_z(\tau_{3-}))^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

На продолжительном пассивном участке целевой орбиты спутник отделяется от РБ. Далее довыведение спутника на геостационар осуществляется за счет топлива спутника.

Проведенные ранее исследования показали, что наилучшей точкой перехода РБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, является апогей целевой орбиты. При этом импульс сброса направлен против скорости дви-



жения РБ, угол наклона не меняется:

$$R_{\text{ца}} = r(\tau_{4-}) = \sqrt{x^2(\tau_{4-}) + y^2(\tau_{4-}) + z^2(\tau_{4-})},$$

$$V_{\text{ца}} = v(\tau_{4-}) = \sqrt{v_x^2(\tau_{4-}) + v_y^2(\tau_{4-}) + v_z^2(\tau_{4-})},$$

$$V_{\text{атм}} = \sqrt{\frac{2\mu r_{\text{атм}}}{r(\tau_{4-})(r(\tau_{4-}) + r_{\text{атм}})}},$$

$$\Delta v_4 = V_{\text{ца}} - V_{\text{атм}},$$

где  $\tau_4$  — момент прохождения апогея целевой орбиты,  $r_{\text{атм}} = R_3 + 100$  км,  $V_{\text{атм}}$  — скорость в апогее орбиты, касающейся условной границы атмосферы, на которую переходит после импульса РБ,  $R_{\text{ца}}$  — радиус апогея целевой орбиты,  $V_{\text{ца}}$  — скорость в апогее целевой орбиты.

Отметим, что характеристическая скорость маневров довыведения спутника с целевой орбиты на геостационар учитывается по упрощенной схеме и осуществляется за счет трех импульсных воздействий:

$$\Delta v_{\text{дов}}(\cdot) = \Delta v_{\text{дов1}}(\cdot) + \Delta v_{\text{дов2}}(\cdot) + \Delta v_{\text{дов3}}.$$

Все три импульса довыведения вычисляются по апсидальным формулам [39].

Первое импульсное воздействие  $\Delta v_{\text{дов1}}(\cdot)$  подается в перигее целевой орбиты, и оно, не меняя наклона, повышает апогей до максимально возможного удаления КА от Земли  $R_{\text{max}}$ :

$$(2.9) \quad \Delta v_{\text{дов1}}(\cdot) = \sqrt{V_{\text{цп}}^2 + V_{\text{1п}}^2 - 2V_{\text{цп}}V_{\text{1п}}},$$

$$V_{\text{цп}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{ца}}}{R_{\text{цп}}(R_{\text{ца}} + R_{\text{цп}})}}, \quad V_{\text{1п}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{max}}}{R_{\text{цп}}(R_{\text{max}} + R_{\text{цп}})}},$$

где  $R_{\text{цп}}$  — радиус перигея целевой орбиты,  $V_{\text{цп}}$  — скорость в перигее целевой орбиты.

Отметим, что в формулах (2.9) вместо “более естественного и понятного” соотношения

$$(2.10) \quad \Delta v_{\text{дов1}} = V_{\text{1п}} - V_{\text{цп}}$$

используется формализованное соотношение  $\Delta v_{\text{дов1}} = |V_{\text{1п}} - V_{\text{цп}}|$ . Разумеется, на оптимальном решении имеем  $V_{\text{1п}} > V_{\text{цп}}$  и модуль (корень из квадрата) в формуле вычисления  $\Delta v_{\text{дов1}}$  не нужен. Однако при промежуточных расчетах желательно учесть потенциальную возможность  $V_{\text{1п}} < V_{\text{цп}}$ . В случае отсутствия модуля в таких потенциально возможных случаях использование упрощенной формулы (2.10) приводит к  $\Delta v_{\text{дов1}} < 0$ , что, хотя и “нефизично”, но в то же время само по себе не страшно, так как на найденном “оптимальном”<sup>2</sup> решении проблема не возникает. Главная причина использования более

<sup>2</sup> Более точным термином вместо “оптимальный” является “экстремальный”, потому что проверяются только условия первого порядка (принцип Лагранжа), а условия второго порядка и достаточные условия не проверяются.

сложной формулы с модулем состоит в ухудшении сходимости итерационного процесса как в случае использования более простой формулы, так и в случае использования “не всюду определенных” условий.

Второе импульсное воздействие  $\Delta v_{\text{дов2}}(\cdot)$  подается в апогее, увеличивает перигей до радиуса ГСО  $R_{\text{ГСО}}$  и меняет наклон до нуля:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \Delta v_{\text{дов2}}(\cdot) &= \sqrt{V_{1a}^2 + V_{2a}^2 - 2V_{1a}V_{2a} \cos i_{\text{ц}}}, \\ V_{1a} &= \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{цп}}}{R_{\text{max}}(R_{\text{max}} + R_{\text{цп}})}}, \quad V_{2a} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{ГСО}}}{R_{\text{max}}(R_{\text{max}} + R_{\text{ГСО}})}}, \end{aligned}$$

где  $i_{\text{ц}}$  — угол наклона целевой орбиты к плоскости экватора. В момент прохождения апогея эта величина может быть вычислена по формуле

$$(2.12) \quad \cos i_{\text{ц}} = \frac{\sqrt{v_x^2(\tau_{4-}) + v_y^2(\tau_{4-})}}{\sqrt{v_x^2(\tau_{4-}) + v_y^2(\tau_{4-}) + v_z^2(\tau_{4-})}}.$$

Третье импульсное воздействие  $\Delta v_{\text{дов3}}$  в перигее, не меняя наклона, уменьшает апогей до радиуса ГСО, тем самым переводя спутник в не заданную заранее точку геостационарной орбиты:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \Delta v_{\text{дов3}} &= V_{2\text{п}} - v_{\text{ГСО}}, \\ V_{2\text{п}} &= \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{max}}}{R_{\text{ГСО}}(R_{\text{max}} + R_{\text{ГСО}})}}, \quad v_{\text{ГСО}} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{\text{ГСО}}}}. \end{aligned}$$

Отметим, что величина  $\Delta v_{\text{дов3}}$  фактически является константой (зависит от заданной величины  $R_{\text{ГСО}}$  и заданного параметра задачи  $R_{\text{max}}$ ).

Входящие в формулы величины  $R_{\text{цп}}$ ,  $R_{\text{ца}}$ ,  $i_{\text{ц}}$  являются кеплеровскими интегралами и могут быть вычислены в любой момент нахождения КА на целевой орбите. Вычисление этих величин в момент прохождения апогея целевой орбиты  $\tau_4$  оказалось технически удобнее. Итак,  $\Delta v_{\text{дов}}(\cdot)$  с использованием (2.9)–(2.13) представлено в виде зависимости

$$\Delta v_{\text{дов}}(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})),$$

что позволяет формализовать краевые условия:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \Delta v_{\text{дов}}(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})) &= \Delta v^*, \\ x(\tau_{4-})v_x(\tau_{4-}) + y(\tau_{4-})v_y(\tau_{4-}) + z(\tau_{4-})v_z(\tau_{4-}) &= 0, \\ \lambda_3(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})) &= \\ &= v_x(\tau_{4-})(z(\tau_{4-})v_x(\tau_{4-}) - x(\tau_{4-})v_z(\tau_{4-})) - \\ &- v_y(\tau_{4-})(y(\tau_{4-})v_z(\tau_{4-}) - z(\tau_{4-})v_y(\tau_{4-})) - \frac{\mu z(\tau_{4-})}{r(\tau_{4-})} = 0, \end{aligned}$$

где  $\lambda_3(\cdot)$  — z-компонента вектора Лапласа. Последнее соотношение в апогее может быть записано в виде  $z(\tau_{4-}) = 0$ , однако при расчетах использовалось основное соотношение на z-компоненту вектора Лапласа для удобства перехода к общему случаю — задаче с ограниченной тягой. Первое соотношение в (2.14) представляет собой ограничение на характеристическую скорость довыведения КА с целевой на геостационарную орбиту. Проведенное ранее исследование показало, что это ограничение активно, и поэтому в работе оно представлено в виде равенства. Также можно считать, что для случая нестрогого неравенства рассмотрен только один главный случай (в условиях дополняющей нежесткости соответствующий множитель Лагранжа больше нуля). Второе соотношение ортогональности радиус-вектора и вектора скорости выполняется на эллиптической орбите в двух точках — перигее и апогее. Различить их можно, например, следующим образом: до момента прохождения апогея радиальная составляющая вектора скорости положительна, после прохождения апогея отрицательна. Такие строгие неравенства на дальнейшее решение задачи на основе принципа Лагранжа влияние не окажут (будут пассивными) и потому в работе не приводятся. Третье соотношение показывает, что апогей находится в плоскости экватора. С одной стороны, это условие не является ограничительным, устраняя симметрию вращения задачи относительно вектора кинетического момента КА ( $C_{0x}$ ,  $C_{0y}$ ,  $C_{0z}$ ) опорной орбиты. С другой стороны, условие нахождения линии апсид в плоскости экватора позволяет избежать лишних расходов на довыведение КА. С третьей стороны, оно позволяет серьезно упростить формулы довыведения, использовать их апсидальный вариант.

Функционалом задачи является полезная масса спутника на целевой орбите.

Обезразмеренная масса КА в начальный момент времени равна 1 ( $m(0) = 1$ ). Масса КА изменяется в каждый момент импульсного воздействия по формуле Циолковского:

$$m(\tau_+) = m(\tau_-) \exp\left(-\frac{\Delta v(\tau)}{c}\right),$$

где  $c = P_{\text{уд}} g_3$  — скорость истечения реактивной струи;  $P_{\text{уд}}$  — удельная тяга;  $g_3$  — гравитационное ускорение у поверхности Земли.

Пусть  $u_1$  и  $u_2$  — части характеристической скорости маневра выведения КА на целевую орбиту, реализованные за счет топлива из ДТБ и основного бака разгонного блока соответственно. Учитывая, что сухая масса бака пропорциональна массе вмещающегося в него топлива с коэффициентом  $\alpha$  [40, с. 93], получаем, что масса КА после выполнения первой серии маневров и сброса ДТБ равна

$$m_1 = (1 + \alpha) \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right) - \alpha.$$

Полезная масса, оставшаяся на целевой орбите, с учетом подачи импульса перевода РБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, в апогее

целевой орбиты [36] равна

$$m_{\text{н}}(\cdot) = \left[ (1 + \alpha) \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right) - \alpha \right] \left[ \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right) - \frac{\alpha \left(1 - \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right)\right)}{(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{\Delta v_4}{c}\right) - \alpha} \right].$$

В рассматриваемом случае перелета

$$u_1 = \Delta v(0) + \Delta v(\tau_1), \quad u_2 = \Delta v(\tau_2) + \Delta v(\tau_3).$$

Следовательно, полезная масса является сложной функцией от координат и скоростей КА после импульсного воздействия в начальный момент времени, скоростей КА до и после импульсного воздействия в моменты времени  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ , координат и скоростей КА в момент времени  $\tau_4$ .

Таким образом, рассматриваемая задача формализована. Ее решение сводится на основе принципа Лагранжа к решению краевой задачи [38].

### 3. Принцип Лагранжа

Функция Лагранжа имеет вид

$$\Lambda = \sum_{i=0}^4 \left( \int_{\tau_{i+}}^{\tau_{(i+1)-}} L dt \right) + l, \quad (\tau_{0+} = 0_+),$$

лагранжиан

$$L = p_x (\dot{x} - v_x) + p_y (\dot{y} - v_y) + p_z (\dot{z} - v_z) + p_{vx} \left( \dot{v}_x + \frac{\mu x}{r^3} \right) + p_{vy} \left( \dot{v}_y + \frac{\mu y}{r^3} \right) + p_{vz} \left( \dot{v}_z + \frac{\mu z}{r^3} \right),$$

гамильтониан

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z + p_{vx} \left( -\frac{\mu x}{r^3} \right) + p_{vy} \left( -\frac{\mu y}{r^3} \right) + p_{vz} \left( -\frac{\mu z}{r^3} \right),$$

терминант

$$l = \sum_{i=1}^3 \lambda_{xi} (x(\tau_{i+}) - x(\tau_{i-})) + \sum_{i=1}^3 \lambda_{yi} (y(\tau_{i+}) - y(\tau_{i-})) + \sum_{i=1}^3 \lambda_{zi} (z(\tau_{i+}) - z(\tau_{i-})) + \sum_{i=1}^3 \lambda_{\tau i} (\tau_{i+} - \tau_{i-}) + \lambda_{\tau 12} (\tau_{2-} - \tau_{1+} - 120) + \lambda_{R0} (x(0_+)^2 + y(0_+)^2 + z(0_+)^2 - R_0^2) + \lambda_{C0} (x(0_+)C_{0x} + y(0_+)C_{0y} + z(0_+)C_{0z}) + \lambda_{R\text{н}1} (R_{\text{н}}(x(\tau_{1+}), y(\tau_{1+}), z(\tau_{1+}), v_x(\tau_{1+}), v_y(\tau_{1+}), v_z(\tau_{1+})) - R_3 - 100) +$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_{R\Pi 2}(R_{\Pi}(x(\tau_{2+}), y(\tau_{2+}), z(\tau_{2+}), v_x(\tau_{2+}), v_y(\tau_{2+}), v_z(\tau_{2+})) - R_3 - 200) + \\
& \quad + \lambda_{rv4}(x(\tau_{4-})v_x(\tau_{4-}) + y(\tau_{4-})v_y(\tau_{4-}) + z(\tau_{4-})v_z(\tau_{4-})) + \\
& \quad + \lambda_{zL}\lambda_3(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})) + \\
& + \lambda_{\text{дов}}(\Delta v_{\text{дов}}(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})) - \Delta v^*) - \lambda_0 m_{\Pi}.
\end{aligned}$$

$\lambda_{xi}, \lambda_{yi}, \lambda_{zi}, \lambda_{\tau i}, \lambda_{\tau 12}, \lambda_{R0}, \lambda_{C0}, \lambda_{R\Pi k}, \lambda_{rv4}, \lambda_{zL}, \lambda_{\text{дов}}, \lambda_0$  ( $i = 1, 2, 3, k = 1, 2$ ) — числовые множители Лагранжа,  $p_x(\cdot), p_y(\cdot), p_z(\cdot), p_{v_x}(\cdot), p_{v_y}(\cdot), p_{v_z}(\cdot)$  — сопряженные переменные (функциональные множители Лагранжа) на каждом из четырех участков. Дополнительная нумерация функций, связанная с номером участка, формально необходимая согласно теореме [38] для упрощения системы обозначений, в работе не используется.

Условия стационарности по фазовым переменным (сопряженная система уравнений, уравнения Эйлера–Лагранжа) имеют вид

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad \dot{p}_x &= \frac{\mu}{r^3} \left[ p_{vx} - \frac{3x}{r^2} (xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}) \right], \\
\dot{p}_y &= \frac{\mu}{r^3} \left[ p_{vy} - \frac{3y}{r^2} (xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}) \right], \\
\dot{p}_z &= \frac{\mu}{r^3} \left[ p_{vz} - \frac{3z}{r^2} (xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}) \right], \\
\dot{p}_{vx} &= -p_x, \quad \dot{p}_{vy} = -p_y, \quad \dot{p}_{vz} = -p_z.
\end{aligned}$$

Условия трансверсальности в виду громоздкости приводятся в формальном виде:

$$\begin{aligned}
(3.2) \quad p_{\xi}(\tau_{i+}) &= \frac{\partial l}{\partial \xi(\tau_{i+})}, \quad p_{\xi}(\tau_{i-}) = -\frac{\partial l}{\partial \xi(\tau_{i-})}, \\
p_{\xi}(0_+) &= \frac{\partial l}{\partial \xi(0_+)}, \quad p_{\xi}(\tau_{4-}) = -\frac{\partial l}{\partial \xi(\tau_{4-})}, \\
\xi &= x, y, z, v_x, v_y, v_z, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Производные функций  $R_{\Pi}(\cdot), \Delta v_{\text{дов}}(\cdot), m_{\Pi}(\cdot)$ , входящие в условия трансверсальности, вычисляются при помощи специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирования.

Условия стационарности:

$$\begin{aligned}
(3.3) \quad H(\tau_{1-}) &= -\lambda_{\tau 1}, \quad H(\tau_{1+}) = -\lambda_{\tau 1} + \lambda_{\tau 12}, \quad H(\tau_{2-}) = -\lambda_{\tau 2} + \lambda_{\tau 12}, \\
H(\tau_{2+}) &= -\lambda_{\tau 2}, \quad H(\tau_{3-}) = -\lambda_{\tau 3}, \quad H(\tau_{3+}) = -\lambda_{\tau 3}, \quad H(\tau_{4-}) = 0.
\end{aligned}$$

В начальный момент времени условие стационарности отсутствует. Следствием условий стационарности в момент времени  $\tau_3$  является непрерывность

гамильтониана:  $H(\tau_{3+}) = H(\tau_{3-})$ . Из условий стационарности в моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  следует, что  $H(\tau_{2+}) = H(\tau_{1-})$ .

В самом деле, поскольку правая часть системы дифференциальных уравнений не зависит явно от времени, то функция  $H(t)$  постоянна на решении этой системы, т.е.  $H(\tau_{2-}) = H(\tau_{1+})$ . Из условий стационарности получаем, что  $H(\tau_{1+}) = H(\tau_{1-}) + \lambda_{\tau_{12}}$ ,  $H(\tau_{2-}) = H(\tau_{2+}) + \lambda_{\tau_{12}}$ . Вычитая из одного равенства другое, получим, что  $H(\tau_{1+}) - H(\tau_{2-}) = H(\tau_{1-}) - H(\tau_{2+})$ . Откуда получаем, что  $H(\tau_{1-}) - H(\tau_{2+}) = 0$ , т.е.  $H(\tau_{2+}) = H(\tau_{1-})$ , что и требовалось.

В качестве условия нормировки выбирается  $\lambda_0 = 1$ .

В связи со сложной структурой траектории доказательство невозможности аномального случая  $\lambda_0 = 0$  представляет собой отдельное исследование и при написании данной работы не рассматривалось.

Неизвестными краевой задачи являются: 48 произвольных постоянных интегрирования системы дифференциальных уравнений (2.1), (3.1) (по 12 неизвестных на каждом из четырех участков); моменты времени  $\tau_{1\pm}$ ,  $\tau_{2\pm}$ ,  $\tau_{3\pm}$ ,  $\tau_{4-}$ ; 20 числовых множителей Лагранжа. Всего 75 неизвестных. Для их определения имеется 19 условий на координаты КА и время (2.2), (2.4), (2.6), (2.7), (2.14), 48 условий трансверсальности (3.2), 7 условий стационарности (3.3). Всего 75 условий, т.е. число неизвестных в краевой задаче совпадает с числом условий для их определения.

#### 4. Численное решение

Краевая задача принципа Лагранжа сводится на основе метода стрельбы к системе нелинейных уравнений, которая решается численно модифицированным методом Ньютона–Исаева–Сонина–Федоренко [41, 42, гл. 1].

Выбор вычислительной схемы метода стрельбы оказывает очень большое влияние на скорость сходимости метода Ньютона, и более эффективным является задание параметров пристрелки, определяющих импульсное воздействие в специально выбранном базисе — модифицированном орбитальном базисе (при этом начало новой системы координат и исходной совпадают).

Базисные векторы  $\vec{e}_r(\tau)$ ,  $\vec{e}_{v_{\text{тр}}}(\tau)$ ,  $\vec{e}_c(\tau)$  локальной системы координат в момент каждого из импульсных воздействий определяются следующим образом. Вектор  $\vec{e}_r(\tau)$  направлен по радиусу-вектору КА в момент подачи импульсного воздействия, направление  $\vec{e}_{v_{\text{тр}}}(\tau)$  совпадает с направлением трансверсальной компоненты скорости,  $\vec{e}_c(\tau)$  дополняет систему до правой тройки. Тогда

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \vec{e}_r(\tau) &= \frac{\vec{r}(\tau)}{|\vec{r}(\tau)|}, & \vec{e}_{v_{\text{тр}}}(\tau) &= \frac{\vec{v}_{\text{тр}}(\tau)}{|\vec{v}_{\text{тр}}(\tau)|}, \\ \vec{e}_c(\tau) &= \frac{\vec{C}(\tau)}{|\vec{C}(\tau)|}, & \vec{e}_v(\tau) &= \frac{\vec{v}(\tau)}{|\vec{v}(\tau)|}, \\ \vec{C}(\tau) &= [\vec{e}_r(\tau), \vec{e}_v(\tau)], & \vec{v}_{\text{тр}}(\tau) &= [\vec{e}_c(\tau), \vec{e}_r(\tau)]. \end{aligned}$$

Скорости КА и, следовательно, компоненты вектора импульса  $\Delta v_r(\tau)$ ,  $\Delta v_{\text{TP}}(\tau)$ ,  $\Delta v_c(\tau)$  в каждый момент  $\tau$  подачи импульсного воздействия задаются в системе координат, связанной с КА:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \Delta v_r(\tau) &= \Delta v(\tau) \cos \psi(\tau) \cos \theta(\tau), & \Delta v_{\text{TP}}(\tau) &= \Delta v(\tau) \sin \psi(\tau) \cos \theta(\tau), \\ \Delta v_c(\tau) &= \Delta v(\tau) \sin \theta(\tau), \end{aligned}$$

где  $\theta(\tau)$  — угол тангажа (угол между вектором импульса и плоскостью орбиты) в момент времени  $\tau$ ,  $\psi(\tau)$  — угол рыскания (отсчитывается в плоскости орбиты от радиуса-вектора в направлении вектора скорости) в момент времени  $\tau$ ,  $\Delta v(\tau)$  — величина импульса (значение в основной системе координат совпадает со значением в локальной).

Компоненты вектора импульса в исходной системе координат  $\Delta v_x(\tau)$ ,  $\Delta v_y(\tau)$ ,  $\Delta v_z(\tau)$  получаются по следующим формулам перехода от одного базиса к другому, записанных в матричном виде:

$$(4.3) \quad \begin{pmatrix} \Delta v_x(\tau) \\ \Delta v_y(\tau) \\ \Delta v_z(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{rx}(\tau) & e_{vx\text{TP}}(\tau) & e_{cx}(\tau) \\ e_{ry}(\tau) & e_{vy\text{TP}}(\tau) & e_{cy}(\tau) \\ e_{rz}(\tau) & e_{vz\text{TP}}(\tau) & e_{cz}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta v_r(\tau) \\ \Delta v_{\text{TP}}(\tau) \\ \Delta v_c(\tau) \end{pmatrix},$$

где  $e_{rx}(\tau)$ ,  $e_{ry}(\tau)$ ,  $e_{rz}(\tau)$  — координаты вектора  $\vec{e}_r(\tau)$ ;  $e_{vx\text{TP}}(\tau)$ ,  $e_{vy\text{TP}}(\tau)$ ,  $e_{vz\text{TP}}(\tau)$  — координаты вектора  $\vec{e}_{\text{TP}}(\tau)$ ;  $e_{cx}(\tau)$ ,  $e_{cy}(\tau)$ ,  $e_{cz}(\tau)$  — координаты вектора  $\vec{e}_c(\tau)$  в основной системе координат в момент времени  $\tau$ .

Компоненты вектора скорости КА до импульсного воздействия  $v_x(\tau_-)$ ,  $v_y(\tau_-)$ ,  $v_z(\tau_-)$  в исходной системе координат в момент времени  $\tau$  определяются в результате решения задачи Коши (а в начальный момент времени на опорной круговой орбите по формулам из справочника [39]). Компоненты вектора скорости КА после подачи импульсного воздействия  $v_x(\tau_+)$ ,  $v_y(\tau_+)$ ,  $v_z(\tau_+)$  в основной системе координат в момент времени  $\tau$  вычисляются по формулам:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} v_x(\tau_+) &= \Delta v_x(\tau) + v_x(\tau_-), \\ v_y(\tau_+) &= \Delta v_y(\tau) + v_y(\tau_-), \\ v_z(\tau_+) &= \Delta v_z(\tau) + v_z(\tau_-). \end{aligned}$$

В вектор параметров пристрелки в начальный момент входят:  $\varphi_0$  — угловое положение КА на опорной круговой орбите, величина импульса  $\Delta v_0$ , два угла, задающих направление первого импульсного воздействия  $\psi_0$ ,  $\theta_0$ , и шесть значений сопряженных переменных  $p_x(0_+)$ ,  $p_y(0_+)$ ,  $p_z(0_+)$ ,  $p_{vx}(0_+)$ ,  $p_{vy}(0_+)$ ,  $p_{vz}(0_+)$ . Угловое положение КА  $\varphi_0$  позволяет определить координаты КА, а также его скорости на опорной орбите до импульсного воздействия по формулам из справочника [39]. В моменты времени  $\tau_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) импульсных воздействий, переводящих КА соответственно на «орбиту сброса ДТБ», «безопасную» и целевую орбиты, в векторы параметров пристрелки входят величины импульсных воздействий  $\Delta v_k$ , два угла, задающих направление импульсных воздействий  $\psi_k$ ,  $\theta_k$ , и шесть значений сопряженных переменных после импульсных воздействий  $p_x(\tau_{k+})$ ,  $p_y(\tau_{k+})$ ,  $p_z(\tau_{k+})$ ,  $p_{vx}(\tau_{k+})$ ,  $p_{vy}(\tau_{k+})$ ,

$p_{vz}(\tau_{k+})$ . Скорости КА после импульсного воздействия вычисляются по формулам (4.1)–(4.4). В вектор параметров пристрелки также входят продолжительности пассивных участков  $\Delta\tau_1$ ,  $\Delta\tau_3$  и  $\Delta\tau_4$  ( $\Delta\tau_2=120$  с — параметр задачи) и числовые множители Лагранжа  $\lambda_{R0}$ ,  $\lambda_{C0}$ ,  $\lambda_{Rp1}$ ,  $\lambda_{Rp2}$ ,  $\lambda_{rv4}$ ,  $\lambda_{дов}$ ,  $\lambda_{zL}$ . Координаты КА на каждом следующем участке интегрирования исходя из условий непрерывности берутся равными соответствующим координатам на предыдущем участке и не входят в вектор параметров пристрелки, а также соответствующие условия непрерывности не входят в вектор-функцию невязок.

В вектор-функцию невязок входят: условия на радиусы перигея КА в момент выхода на «орбиту сброса ДТВ» и «безопасную» орбиту в моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  соответственно; ограничение на импульс довыведения в момент окончания перелета; условия нахождения КА в апогее целевой орбиты в момент  $\tau_4$  подачи последнего импульсного воздействия для перехода РБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы; равенство нулю  $z$ -компоненты вектора Лапласа в момент времени  $\tau_4$ ; 12 условий трансверсальности в начальный момент и конечный моменты времени; 9 следствий из условий трансверсальности на координаты КА — скачки сопряженных переменных, обусловленные наличием ограничения на радиус перигея в моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , и условия непрерывности сопряженных переменных в момент времени  $\tau_3$ ; 18 условий трансверсальности на скорости КА до и после импульсного воздействия в моменты времени  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$ ; следствие из условий стационарности в моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$ ; непрерывность гамильтониана в момент времени  $\tau_3$ ; равенство нулю гамильтониана в момент времени  $\tau_4$ .

## 5. Результаты

Представлена экстремаль при следующих параметрах задачи:

$$\begin{aligned} \mu &= 398\,601,19 \text{ км}^3/\text{с}^2, \quad R_3 = 6378,25 \text{ км}, \quad h_0 = 200 \text{ км}, \\ R_{\max} &= 280\,000 \text{ км}, \quad R_{\text{ГСО}} = 42\,164 \text{ км}, \quad P_{\text{уд}} = 350 \text{ с}, \quad g_3 = 9,80665 \text{ м}/\text{с}^2, \\ i_0 &= 0,9 \text{ рад}, \quad \alpha = 0,08, \quad \Delta v^* = 1,5 \text{ км}/\text{с}^2, \quad \Delta\tau_2 = 120 \text{ с}. \end{aligned}$$

Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 час. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам. Для численного интегрирования авторами использовался метод Дормана–Принса 8(7). Значения параметров пристрелки, числовых множителей Лагранжа, фазовых и сопряженных переменных в началах и концах пассивных участков приведены с необходимой для повторения расчетов точностью. Их уточнение может потребовать одну-две итерации метода Ньютона. Соответствие фазовых и сопряженных переменных в началах и концах пассивных участков можно проверить с помощью численного интегрирования. Выполнение условий трансверсальности и стационарности можно проверить с использованием технологии численно-аналитического дифференцирования.



В начальный момент времени на опорной орбите в точке, соответствующей угловому положению КА  $\varphi_0 = 0,000307492$  рад, подается импульс величины  $\Delta v_0 = 1,790280$  км/с, направление импульса задается двумя углами  $\psi_0 = 1,570796511$  рад,  $\theta_0 = -0,031065593$  рад. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные после первого импульсного воздействия:

$$\begin{aligned}x(0_+) &= 6578,250 \text{ км}, & y(0_+) &= 1,257 \text{ км}, & z(0_+) &= 1,584 \text{ км}, \\v_x(0_+) &= -0,002944 \text{ км/с}, & v_y(0_+) &= 5,994615 \text{ км/с}, & v_z(0_+) &= 7,464706 \text{ км/с}, \\p_x(0_+) &= 0,089295766, & p_y(0_+) &= 1,813741405 \cdot 10^{-5}, \\p_z(0_+) &= 2,062570174 \cdot 10^{-5}, & p_{vx}(0_+) &= -1,047893452 \cdot 10^{-5}, \\p_{vy}(0_+) &= 0,022000079, & p_{vz}(0_+) &= 0,026020930.\end{aligned}$$

Продолжительность первого пассивного участка  $\Delta\tau_1 = 7778,265$  с. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные до импульсного воздействия, переводящего КА на «орбиту сброса ДТБ»:

$$\begin{aligned}x(\tau_{1-}) &= -20\,417,506 \text{ км}, & y(\tau_{1-}) &= 44,699 \text{ км}, & z(\tau_{1-}) &= 55,603 \text{ км}, \\v_x(\tau_{1-}) &= -0,023113 \text{ км/с}, & v_y(\tau_{1-}) &= -1,931335 \text{ км/с}, \\v_z(\tau_{1-}) &= -2,404967 \text{ км/с}, & p_x(\tau_{1-}) &= 0,009217659, \\p_y(\tau_{1-}) &= -7,999319341 \cdot 10^{-5}, & p_z(\tau_{1-}) &= -0,000116968, \\p_{vx}(\tau_{1-}) &= 5,397932380 \cdot 10^{-5}, & p_{vy}(\tau_{1-}) &= 0,019187690, \\p_{vz}(\tau_{1-}) &= 0,028158871.\end{aligned}$$

В момент времени  $\tau_1$  в окрестности апогея первой переходной орбиты подается импульс величины  $\Delta v_1 = 0,017905$  км/с, направление импульса задается двумя углами  $\psi_1 = -1,568891340$  рад,  $\theta_1 = 0,078465462$  рад. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные после импульсного воздействия, переводящего КА «орбиту сброса ДТБ»:

$$\begin{aligned}x(\tau_{1+}) &= -20\,417,506 \text{ км}, & y(\tau_{1+}) &= 44,699 \text{ км}, & z(\tau_{1+}) &= 55,603 \text{ км}, \\v_x(\tau_{1+}) &= -0,023085 \text{ км/с}, & v_y(\tau_{1+}) &= -1,921253 \text{ км/с}, \\v_z(\tau_{1+}) &= -2,390170 \text{ км/с}, & p_x(\tau_{1+}) &= -0,022777483, \\p_y(\tau_{1+}) &= 9,226665723 \cdot 10^{-5}, & p_z(\tau_{1+}) &= 9,732570693 \cdot 10^{-5}, \\p_{vx}(\tau_{1+}) &= -0,000150718, & p_{vy}(\tau_{1+}) &= -0,022960891, \\p_{vz}(\tau_{1+}) &= -0,024276861.\end{aligned}$$

Продолжительность второго пассивного участка — параметр задачи  $\Delta\tau_2 = 120$  с. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные до импульсного воздействия, переводящего КА на «безопасную» орбиту:

$$\begin{aligned}x(\tau_{2-}) &= -20\,413,392 \text{ км}, & y(\tau_{2-}) &= -185,840 \text{ км}, & z(\tau_{2-}) &= -231,204 \text{ км}, \\v_x(\tau_{2-}) &= 0,091656 \text{ км/с}, & v_y(\tau_{2-}) &= -1,920856 \text{ км/с}, \\v_z(\tau_{2-}) &= -2,389677 \text{ км/с},\end{aligned}$$

$$p_x(\tau_{2-}) = -0,022775591, \quad p_y(\tau_{2-}) = -0,000372271, \quad p_z(\tau_{2-}) = -0,000393840, \\ p_{vx}(\tau_{2-}) = 0,000608516, \quad p_{vy}(\tau_{2-}) = -0,022956224, \quad p_{vz}(\tau_{2-}) = -0,024271920.$$

В момент времени  $\tau_2$  подается импульс величины  $\Delta v_2 = 0,017910$  км/с, направление импульса задается двумя углами  $\psi_2 = 1,574537652$  рад,  $\theta_2 = 0,080471408$  рад. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные после импульсного воздействия, переводящего КА на «безопасную» орбиту:

$$x(\tau_{2+}) = -20\,413,392 \text{ км}, \quad y(\tau_{2+}) = -185,840 \text{ км}, \quad z(\tau_{2+}) = -231,204 \text{ км}, \\ v_x(\tau_{2+}) = 0,091982 \text{ км/с}, \quad v_y(\tau_{2+}) = -1,933160 \text{ км/с}, \\ v_z(\tau_{2+}) = -2,402686 \text{ км/с}, \quad p_x(\tau_{2+}) = -0,001946427, \\ p_y(\tau_{2+}) = 7,114712350 \cdot 10^{-5}, \quad p_z(\tau_{2+}) = 0,000157508, \\ p_{vx}(\tau_{2+}) = 5,197160474 \cdot 10^{-5}, \quad p_{vy}(\tau_{2+}) = 0,004386100, \\ p_{vz}(\tau_{2+}) = 0,009711318.$$

Продолжительность третьего пассивного участка  $\Delta\tau_3 = 7707,227$  с. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные до импульсного воздействия, переводящего КА на целевую орбиту:

$$x(\tau_{3-}) = 6578,250 \text{ км}, \quad y(\tau_{3-}) = -0,053 \text{ км}, \quad z(\tau_{3-}) = 0,007 \text{ км}, \\ v_x(\tau_{3-}) = 4,743611 \cdot 10^{-5} \text{ км/с}, \quad v_y(\tau_{3-}) = 6,001513 \text{ км/с}, \\ v_z(\tau_{3-}) = 7,459164 \text{ км/с}, \quad p_x(\tau_{3-}) = 0,102240000, \\ p_y(\tau_{3-}) = -8,659081488 \cdot 10^{-7}, \quad p_z(\tau_{3-}) = 9,583528338 \cdot 10^{-8}, \\ p_{vx}(\tau_{3-}) = 1,591310975 \cdot 10^{-7}, \quad p_{vy}(\tau_{3-}) = 0,021609646, \\ p_{vz}(\tau_{3-}) = 0,025485443.$$

В момент времени  $\tau_3$  в окрестности перигея «безопасной» орбиты подается импульс величины  $\Delta v_3 = 1,278611$  км/с, направление импульса задается двумя углами  $\psi_3 = 1,570795995$  рад,  $\theta_3 = -0,025757010$  рад. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные после импульсного воздействия, переводящего КА на целевую орбиту:

$$x(\tau_{3+}) = 6578,250 \text{ км}, \quad y(\tau_{3+}) = -0,053 \text{ км}, \quad z(\tau_{3+}) = 0,007 \text{ км}, \\ v_x(\tau_{3+}) = 5,352540 \cdot 10^{-5} \text{ км/с}, \quad v_y(\tau_{3+}) = 6,828426 \text{ км/с}, \\ v_z(\tau_{3+}) = 8,434388 \text{ км/с}, \quad p_x(\tau_{3+}) = 0,102240000, \\ p_y(\tau_{3+}) = -8,659081482 \cdot 10^{-7}, \quad p_z(\tau_{3+}) = 9,583528330 \cdot 10^{-8}, \\ p_{vx}(\tau_{3+}) = 1,591310971 \cdot 10^{-7}, \quad p_{vy}(\tau_{3+}) = 0,021609646, \\ p_{vz}(\tau_{3+}) = 0,025485443.$$

Продолжительность четвертого пассивного участка  $\Delta\tau_4 = 197\,878,402$  с. На целевой орбите происходит отстыковка спутника от РБ. Последний тормозной импульс подается в точке, соответствующей апогею целевой орбиты. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные до импульсного

воздействия, переводящего РБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы:

$$\begin{aligned}
 x(\tau_{4-}) &= -226\,432,098 \text{ км}, & y(\tau_{4-}) &= 2,026 \text{ км}, & z(\tau_{4-}) &= -6,115 \cdot 10^{-10} \text{ км}, \\
 v_x(\tau_{4-}) &= -1,775160 \cdot 10^{-6} \text{ км/с}, & v_y(\tau_{4-}) &= -0,198378 \text{ км/с}, \\
 v_z(\tau_{4-}) &= -0,245034 \text{ км/с}, & p_x(\tau_{4-}) &= -9,581390462 \cdot 10^{-5}, \\
 p_y(\tau_{4-}) &= 8,230843826 \cdot 10^{-10}, & p_z(\tau_{4-}) &= -1,214480715 \cdot 10^{-9}, \\
 p_{vx}(\tau_{4-}) &= -2,090933500 \cdot 10^{-7}, & p_{vy}(\tau_{4-}) &= -0,022151189, \\
 p_{vz}(\tau_{4-}) &= 0,014169354.
 \end{aligned}$$

Далее приведены числовые множители Лагранжа, входящие непосредственно в вычислительную схему метода стрельбы:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{R0} &= 0,017815018, & \lambda_{C0} &= -7,520663278 \cdot 10^{-9}, & \lambda_{R\Pi1} &= 0,043517462, \\
 \lambda_{R\Pi2} &= -0,027848883, & \lambda_{rv4} &= 1,997985665 \cdot 10^{-15}, & \lambda_{\text{дов}} &= 0,033387259, \\
 \lambda_{zL} &= -5,445119694 \cdot 10^{-11}, & \lambda_{x1} &= 0,009217659, & \lambda_{y1} &= -7,999319341 \cdot 10^{-5}, \\
 \lambda_{z1} &= -0,000116968, & \lambda_{x2} &= -0,022775591, & \lambda_{y2} &= -0,000372271, \\
 \lambda_{z2} &= -0,000393840, & \lambda_{x3} &= 0,102240000, & \lambda_{y3} &= -8,659081488 \cdot 10^{-7}, \\
 \lambda_{z3} &= 9,583528338 \cdot 10^{-8}, & \lambda_{\tau1} &= 0, & \lambda_{\tau2} &= 0, & \lambda_{\tau3} &= 0, & \lambda_{\tau12} &= 0.
 \end{aligned}$$

## 6. Заключение

Использованная в работе методика одновременного выбора вычислительной схемы метода стрельбы и хорошего начального приближения соответствующих параметров пристрелки на основе решенной ранее задачи в более простой постановке оказалась эффективной — задачу построения экстремалей удалось решить. Представленная в работе задача и ее решение, являясь еще одним шагом методики «лестница задач», в последующем послужили основой решения задачи оптимизации перелета КА с большой ограниченной тягой (не в импульсной постановке). Также на основе данной методики планируется построить экстремаль в аналогичной задаче с учетом возмущений, обусловленных нецентральностью гравитационного поля Земли, сопротивлением атмосферы, а также притяжением других небесных тел.

Таким образом, найдена экстремаль, ее оптимальность на основе условий высших порядков или теоремы глобальной оптимальности не проверена и требует дополнительных исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шустов Б.М., Рыжлова Л.В., Кулешов Ю.П. и др.* Концепция системы противодействия космическим угрозам: астрономические аспекты // *Астрономический вестник.* 2013. Т. 47. № 4. С. 327–340.

2. *Kessler D., Cour-Palais B.* Collision Frequency of Artificial Satellites: The Creation of a Debris Belt // *J. Geophys. Res.* 1978. V. 83. P. 2637–2646.
3. *Лаврентьев В.Г., Олейников И.И., Червонов А.М.* Основные аспекты мониторинга техногенного состояния околоземного космического пространства для обеспечения безопасности космической деятельности // *Механика, управление и информатика.* 2015. Т. 7. № 1(54). С. 216–228.
4. *Логинов С.С., Назаров Ю.П., Юраш В.С., Яковлев М.В.* Проектирование системы информационного мониторинга в целях предотвращения техногенного засорения околоземного космического пространства // *Космонавтика и ракетостроение.* 2014. № 4(77). С. 145–150.
5. *Бордовицына Т.В., Александрова А.Г., Чувашов И.Н.* Численное моделирование динамики околоземных космических объектов искусственного происхождения с использованием параллельных вычислений // *Вестн. Томск. гос. ун-та.* 2011. № 4(16). С. 34–48.
6. *Трушкова Е.А., Матвеев Г.А.* Оптимизация процесса обнаружения орбит новых космических объектов с помощью параллельного расчета возможных орбит // *Программные продукты и системы.* 2015. № 3. С. 80–87.
7. *Молотов И.Е., Воронаев В.А., Юдин А.Н. и др.* Комплексы электронно-оптических средств для мониторинга околоземного космического пространства // *Экологический вестн. науч. центров черномор. эконом. сотрудничества.* 2017. № 4-2. С. 110–116.
8. *Космический мусор. Кн. 2. Предупреждение образования космического мусора / Под науч. ред. Райзунова Г.Г.* М.: Физматлит, 2014.
9. *Juergen S., Bischof B., Foth W.-O., Gunter J.-J.* ROGER a potential orbital space debris removal system [Electronic resource]. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010cosp...38.3935S> (accessed 28.05.2022)
10. *Guang Zhai, Yue Qiu, Bin Liang, Cheng Li.* On-orbit capture with flexible tether-net system // *Acta Astronautica.* 2009. No. 69, P. 613–623.
11. *Юдинцев В.В.* Динамика захвата сетью вращающегося объекта — космического мусора // *Вестн. моск. авиац. ин-та.* 2018. Т. 25. № 4. С. 37–48.
12. *Савельев Б.И.* Многоразовый космический аппарат-буксир для уборки космического мусора // *Патент № 2510359.* Российская Федерация. 2014. Бюллетень № 9.
13. *Dudziak R., Tuttle S., Barraclough S.* Harpoon technology development for the active removal of space debris // *Advances in Space Research.* 2015. V. 56(3). P. 509–527.
14. *Асланов В.С., Алексеев А.В., Ледков А.С.* Определение параметров оснащенной гарпунном тросовой системы для буксировки космического мусора // *Тр. МАИ.* 2016. № 90. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=74644>
15. *Ледков А.С.* Управление силой тяги при буксировке космического мусора на упругом тросе // *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана.* 2014. № 10. С. 383–397.
16. *Авдеев А.В., Башкин А.С., Каторгин Б.И., Парфеньев М.В.* Анализ возможности очистки околоземного пространства от опасных фрагментов космического мусора с помощью космической лазерной установки на основе автономного непрерывного химического HF-лазера // *Квантовая электроника.* 2011. Т. 41. № 7. С. 669–674.

17. *Авдеев А.В.* К вопросу борьбы с космическим мусором с помощью лазерной космической установки на основе HF-НХЛ // Тр. МАИ. 2012. № 61. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=35496>
18. *Аполлонов В.В.* Уничтожение космического мусора и объектов естественного происхождения лазерным излучением // Квантовая электроника. 2013. Т. 43. № 9. С. 890–894.
19. *Phipps C., Baker K., Libby S., et al.* Removing orbital debris with lasers // *Advances in Space Research*. 2012. V. 49(9). P. 1283–1300.
20. *Кузнецов И.И., Мухин И.Б., Снетков И.Л., Палашов О.В.* Схемы орбитальных лазеров для удаления космического мусора // *Космический мусор: фундаментальные и практические аспекты угрозы*. Сер. «Механика, управление и информатика». Под редакцией Л.М. Зеленого, Б.М. Шустова. 2019. С. 199–206.
21. *Baranov A.A., Grishko D.A., Razoumny Y.N., Li Jun.* Flyby of large-size space debris objects and their transition to the disposal orbits in LEO // *Advances in Space Research*. 2017. V. 59(12). P. 3011–3022.
22. *Баранов А.А., Гришко Д.А.* Баллистические аспекты облета крупногабаритного космического мусора на низких околокруговых орбитах // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2015. № 4. С. 143.
23. Space debris mitigation guidelines. Inter-Agency Space Debris Coordination Committee. Revision 2. 2020.
24. ГОСТ Р 52925–2018. Изделия космической техники. Общие требования к космическим средствам по ограничению техногенного засорения околоземного космического пространства. Введен 2019-01-01. М.: Федеральное агентство по техническому регулированию и метрологии, 2018.
25. *Голиков А.Р., Баранов А.Р., Будянский А.А., Чернов Н.В.* Выбор низковысотных орбит захоронения и перевод на них выработавших свой ресурс космических аппаратов // *Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2015. № 4. С. 4–19.
26. *Бульмин Ю.Л., Созонова И.Л.* Анализ выполнения требований межагентского координационного комитета по предупреждению образования космического мусора // *Вестн. Сиб. гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева*. 2013. № 6. С. 100–106.
27. *Коловский И.К., Подолякин В.Н., Шмаков Д.Н.* Оценка возможности проведения маневра увода с рабочей орбиты космических аппаратов «Гонец-М» // *Космонавтика и ракетостроение*. 2018. № 2(101). С. 107–113.
28. *Вениаминов С.С., Червонов А.М.* Космический мусор — угроза человечеству. М.: Изд-во ИКИ РАН, 2012.
29. *Зеленцов В.В.* Очистка околоземного космического пространства от космического мусора // *Аэрокосм. науч. журн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн*. 2016. № 6. С. 1–14.
30. *Адушкин В.В., Вениаминов С.С., Козлов С.И.* Как не допустить дальнейшего засорения околоземного космического пространства // *Воздушно-космическая сфера*. 2017. № 1(91). С. 96–103.
31. *Кириллов В.А., Багатеев И.Р., Тарлецкий И.С., Баландина Т.Н., Баландин Е.А.* Анализ концепций очистки околоземного космического пространства // *Сиб. журн. науки и технологий*. 2017. Т. 18. № 2. С. 343–351.

32. *Клюшников В.Ю.* Возможные направления реализации функций распределенного космического аппарата // Космонавтика и ракетостроение. 2014. № 2(75). С. 66–74.
33. *Шатров Я.Т., Баранов Д.А., Трушляков В.И., Куденцов В.Ю.* Определение направлений разработки методов, технических решений и средств снижения техногенного воздействия на окружающую среду для реализации на борту космических средств выведения. // Вестн. Самар. гос. аэрокосм. ун-та. 2011. № 1(25). С. 38–47.
34. *Афанасьева Т.И., Гридчина Т.А., Колоко Ю.Ф.* Оценка возможных орбит увода для очищения области космического пространства на высотах 900–1500 км // Космонавтика и ракетостроение. 2014. № 1. С. 94–105.
35. *Григорьев И.С., Проскураков А.И.* Оптимизация целевой орбиты и траектории апсидального импульсного выведения космического аппарата на нее с учетом сброса отработавших ступеней в атмосферу // Инженер. журн.: наука и инновации. 2019. № 4(88). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-4-1869>
36. *Григорьев И.С., Проскураков А.И.* Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть I) // Инженер. журн.: наука и инновации. 2019. № 9(93). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1917>
37. *Григорьев И.С., Проскураков А.И.* Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть II) // Инженер. журн.: наука и инновации. 2019. № 10(94). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1925>
38. *Григорьев И.С., Григорьев К.Г.* К проблеме решения в импульсной постановке задач оптимизации траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем большой тяги в произвольном гравитационном поле в вакууме // Космические исследования. 2002. № 40(1). С. 88–111.
39. *Дубошин Г.Н.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.
40. *Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
41. *Исаев В.К., Сонин В.В.* Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1963. № 6(3). С. 1114–1116.
42. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.*

Поступила в редакцию 21.11.2021

После доработки 18.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022