Автоматика и телемеханика, № 2, 2023

Нелинейные системы

© 2023 г. **В.А. КАМЕНЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (vlakam@ipu.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ: НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ О СВЕРТЫВАНИИ[1]

С использованием теоремы Пятницкого о свертывании круговой критерий абсолютной устойчивости для систем Лурье с несколькими нелинейностями получен без S-процедуры. Для связных систем с переключениями между тремя линейными подсистемами получен новый критерий существования квадратичной функции Ляпунова. На основе теоремы о свертывании доказано две теоремы, позволяющие существенно уменьшать размерность связных систем линейных матричных неравенств. Рассмотрены вопросы улучшения кругового критерия для систем Лурье с двумя нелинейностями.

Ключевые слова: системы с переключениями, системы Лурье, устойчивость, функции Ляпунова, матричные неравенства, круговой критерий.

DOI: 10.31857/S000523102302006X, **EDN:** ONHTGO

1. Введение

Теория устойчивости систем с переключениями [1] и теория абсолютной устойчивости [2] являются основными инструментами для изучения устойчивости систем с неопределенностью [3]. Важным результатом в этой области является круговой критерий — достаточное условие существования квадратичной функции Ляпунова (КФЛ) в случае системы Лурье с несколькими нелинейностями [2, 4, 5][2]. К достаточности приводит использование специального приема — S-процедуры [6], который в этом случае приводит только к достаточным условиям. Первоначально полученная Пятницким теорема появилась (с указанием авторства) в [7], а затем и в [8] как средство, позволяющее устранить этот недостаток S-процедуры. Существование КФЛ в случае нескольких нелинейностей определяется разрешимостью системы линейных

[1] Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 “ Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники”.

[2] В [4] термин “круговой критерий” не используется, в [5] круговой критерий приводится как для задачи устойчивости, так и для задачи неустойчивости.

матричных неравенств [8]. В теореме Пятницкого показывается, как получить одно матричное неравенство (МН), эквивалентное системе из двух МН. Основанная на этой теореме операция перехода от системы из двух МН к одному ей эквивалентному в [8] названа свертыванием. С помощью операции свертывания необходимые и достаточные условия существования КФЛ получены в случае двух [7] и нескольких [8] нелинейностей. Теорему Пятницкого не следует рассматривать как альтернативу S-процедуры, но области применения этих приемов тесно коррелируют. Здесь в разделе 2 показано, как круговой критерий в случае нескольких нелинейностей можно получить с помощью операции свертывания и без использования S-процедуры.

В разделе 3 для линейных систем с переключениями между тремя подсистемами получен новый частотный критерий существования КФЛ, более простой по сравнению с аналогичным критерием из [9].

В разделе 4 показывается, как с помощью теоремы Пятницкого можно существенно уменьшать количество МН в связных [8, 9] системах линейных МН (ЛМН), которые определяют существование КФЛ для линейных систем с переключениями с произвольным количеством подсистем.

Вопросы улучшения кругового критерия для систем Лурье с двумя нелинейностями рассматриваются в разделе 5. Там же приводится численный пример такого улучшения для системы шестого порядка.

Целью работы является как демонстрация возможностей теоремы Пятницкого при получении нового доказательства классического результата, так и получение на ее основе новых более эффективных условий существования КФЛ для широкого класса систем Лурье и систем с переключениями.

2. Теорема о свертывании и круговой критерий для систем с несколькими нелинейностями

Здесь теорему Пятницкого, на которой основана операция свертывания, будем называть теоремой о свертывании и использовать в следующей формулировке [8, 9].

Теорема 1. *Для выполнения системы двух матричных неравенств*

$$I_1 < 0, \quad I_2 < 0, \quad (I_2 - I_1 = Q = pq^\top + qp^\top, \quad p, q \in \mathbb{R}^n), \tag{2.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\widetilde{\varepsilon} > 0$, при котором выполнено одно неравенство

$$I_1 + Q^+(\widetilde{\varepsilon}) = I_2 + Q^-(\widetilde{\varepsilon}) < 0, \;\; Q^\pm(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} u^\pm (u^\pm)^\top, \;\; u^\pm(\varepsilon) = p \pm \frac{1}{\varepsilon^2} q. \tag{2.2}$$

Очевидно, из выполнения неравенства (2.2) при некотором произвольном $\varepsilon > 0$ следует выполнение системы (2.1).

Операция свертывания, основанная на теореме 1, в [8] названа свертыванием ранга два, или r_2-свертыванием. В оригинале [7] теорема Пятницкого приводится в более общей формулировке для произвольной матрицы Q.

Система Лурье с несколькими нелинейностями имеет вид

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^{m} b_j \varphi_j(t, \sigma_j), \;\; \sigma_j = \langle c_j, x\rangle, \;\; A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \; b_j, c_j \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

где нелинейности $\varphi_j(t, \sigma_j)$ удовлетворяют условиям существования абсолютно непрерывного решения $x(t)$, $j = \overline{1, m}$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$). Абсолютная устойчивость системы (2.3) в классе N_φ нелинейностей $\varphi = \|\varphi_j\|_{j=1}^m$, удовлетворяющих секторным ограничениям

$$0 \leqslant \varphi_j \sigma_j \leqslant \sigma_j^2, \;\; j = \overline{1, m}, \tag{2.4}$$

означает, что эта система асимптотически устойчива в целом при любых таких нелинейностях.

Коротко, в удобной для настоящего изложения форме напомним рассуждения, основанные на S-процедуре и приводящие к круговому критерию в случае системы (2.3) с произвольным конечным m [4, 5]. S-процедура — это специальный прием, позволяющий перейти от неравенства на квадратичную форму, которое должно выполняться не во всем пространстве, а только в некоторой области, выделяемой квадратичными ограничениями, к неравенству на квадратичную форму, которое должно выполняться во всем пространстве, т.е. к МН. S-процедура имеет различные формулировки. В формулировке, которая здесь используется, S-процедура устанавливает соотношение между следующими условиями:

$$x^\top G_0 x < 0 \;\text{ при }\; x^\top G_1 x \geqslant 0, \dots, x^\top G_m x \geqslant 0, \quad x \neq 0, \tag{2.5}$$

$$\text{существуют } \tau_j > 0 \; (j = \overline{1, m})\colon x^\top G_0 x + \sum_{j=1}^{m} \tau_j \, x^\top G_j x < 0, \; x \in \mathbb{R}^n, \; x \neq 0, \tag{2.6}$$

где $G_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G_j^\top = G_j$, $j = \overline{0, m}$. Очевидно, из выполнения (2.6) следует выполнение (2.5). В случае $m = 1$ доказывается [10, с. 135] неущербность S-процедуры, что означает, что в этом случае условие (2.6) является не только достаточным, но и необходимым для выполнения условия (2.5).

Различные формулировки S-процедуры, историю появления этого приема и самого термина, разъяснение терминов "ущербна" и "неущербна" и другие подробности можно найти в [2, 3, 6, 10].

Секторные ограничения (2.4) эквивалентны квадратичным ограничениям:

$$F_j(x, \varphi_j) = \varphi_j(\langle c_j, x\rangle - \varphi_j) \geqslant 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.7}$$

На производную $\dot{v}(x)$ функции Ляпунова $v(x) = x^\top L x$ ($L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L^\top = L$) в силу системы (2.3) имеем неравенство

$$x^\top(A^\top L + LA)x + 2\sum_{j=1}^{m} \varphi_j \langle L b_j, x\rangle < 0, \quad (x, \varphi) \neq 0, \tag{2.8}$$

которое должно выполняться при всех (x, φ), удовлетворяющих (2.7). В соответствии с приемом S-процедуры составим квадратичную форму

$$x^\top (A^\top L + LA)x + 2\sum_{j=1}^{m} \varphi_j \langle Lb_j, x\rangle + \sum_{j=1}^{m} \tau_j \varphi_j \left(\langle c_j, x\rangle - \varphi_j\right) < 0, \tag{2.9}$$

где $\tau_j > 0$ — неопределенные параметры, $j = \overline{1, m}$.

Неравенство (2.8) в матричной форме имеет вид

$$(Ax + B\varphi)^\top Lx + x^\top L(Ax + B\varphi) < 0, \;\; (x, \varphi) \neq 0,$$

где $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix}$, а функция ограничений $F(x, \varphi, \mathcal{T})$ представима в виде

$$F(x, \varphi, \mathcal{T}) = \sum_{j=1}^{m} \tau_j \varphi_j \left(\langle c_j, x\rangle - \varphi_j\right) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & C\mathcal{T}/2 \\ \mathcal{T} C^\top/2 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix},$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{pmatrix}, \; \Gamma = \mathcal{T} = \operatorname{diag}\Big\{\tau_1, \dots, \tau_m\Big\}.$$

Во вновь принятых обозначениях отрицательная определенность формы (2.9) эквивалентна матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A^\top L + AL & LB + C\mathcal{T}/2 \\ B^\top L + \mathcal{T} C^\top/2 & -\Gamma \end{pmatrix} < 0. \tag{2.10}$$

Условия разрешимости МН (2.10) следуют из частотной теоремы (KYP лемма) [6, 10]. Наиболее удобная для настоящего изложения версия частотной теоремы приведена в следствии 1 на с. 54 в [10]. Там утверждается, что при гурвицевой A и $\Gamma > 0$ разрешимость неравенства (2.10) эквивалентна выполнению частотного неравенства

$$\Gamma + \operatorname{Re} W(i\omega) > 0, \;\; W(i\omega) = \mathcal{T} C^\top (A - i\omega E_n)^{-1} B, \;\; \omega \in [-\infty, \infty], \tag{2.11}$$

где $\operatorname{Re} W = (W + W^*)/2$, $W^* = \overline{W}^\top$ — эрмитово сопряженная к W, E_n — единичная $(n \times n)$-матрица. Таким образом, круговой критерий для системы (2.3) с несколькими нелинейностями состоит в проверке частотного условия (2.11), которое является достаточным условием существования КФЛ для таких систем.

В [9] показывается, как с помощью теоремы 1 получить достаточные условия существования КФЛ для системы (2.3), так чтобы эти условия совпадали с круговым критерием абсолютной устойчивости систем управления с двумя нелинейностями. Здесь получим аналогичный результат для систем управления с произвольным конечным числом нелинейностей.

Хорошо известно и специально отмечено в [11], что абсолютная устойчивость системы Лурье (2.3) в классе нелинейностей N_φ эквивалентна устойчивости системы с переключениями между линейными системами $\dot{x} = A_s x$ с матрицами A_s следующего вида [8]:

$$(2.12) \qquad A_s = A + \sum_{j=1}^{m} h_{sj} b_j c_j^\top, \quad h_s = \|h_{sj}\|_{j=1}^m, \quad s = \overline{1, N}, \quad (N = 2^m),$$

где h_{sj} независимо принимают одно из двух значений: 0 или 1. Будем считать, что $h_1 = (0, \ldots, 0)$, т.е. $A_1 = A$. Наличие КФЛ $v(x) = x^\top L x$ для системы Лурье (2.3) определяется [8] разрешимостью системы ЛМН:

$$(2.13) \qquad I_s = A_s^\top L + L A_s < 0, \quad s = \overline{1, N}.$$

Из представления (2.12) следует

$$I_s = A^\top L + LA + \sum_{j=1}^{m} h_{sj} \left(L b_j c_j^\top + c_j b_j^\top L \right) = A^\top L + LA + \sum_{j=1}^{m} h_{sj} Q_j,$$

где

$$(2.14) \qquad Q_j = p_j q_j^\top + q_j p_j^\top, \ \ p_j \triangleq L b_j, \ \ q_j \triangleq c_j, \ \ j = \overline{1, m}.$$

Для матриц Q_j используем представление в виде разности $Q_j = Q_j^+ - Q_j^-$, как это делается в теореме 1. Тогда МН

$$(2.15) \qquad Q_j \leqslant Q_j^+(\varepsilon_j) = \frac{\varepsilon_j^2}{2} u_j^+(\varepsilon_j) u_j^+(\varepsilon_j)^\top, \ \ u_j^+(\varepsilon_j) \triangleq p_j + \frac{1}{\varepsilon_j^2} q_j, \ \ j = \overline{1, m},$$

выполняются при любых $\varepsilon_j > 0$. Рассмотрим следующее МН:

$$(2.16) \qquad I_{\mathrm{cir}} \triangleq A^\top L + LA + \sum_{j=1}^{m} Q_j^+(\varepsilon_j) < 0.$$

Так как $h_{sj} = 0$ или $h_{sj} = 1$, то

$$(2.17) \qquad I_s \leqslant I_{\mathrm{cir}}, \ \ s = \overline{1, N}.$$

Из (2.17) следует, что выполнение МН (2.16) гарантирует выполнение системы (2.13). Подставляя в $Q_j^+(\varepsilon_j)$ выражения для p_j и q_j из (2.14) и переобозначая в (2.15) дополнительные переменные

$$(2.18) \qquad \tau_j \triangleq 2/\varepsilon_j^2,$$

из леммы Шура получим, что МН (2.16) эквивалентно МН (2.10). Таким образом, круговой критерий получен без использования S-процедуры.

Собственно, необходимость из теоремы 1 нужна только при $m = 1$, чтобы показать, что в этом случае система (2.13) и МН $I_{\mathrm{cir}} < 0$ эквивалентны.

МН (2.10) так же, как эквивалентное ему МН (2.16), далее будем называть МН кругового критерия (МНКК).

3. Устойчивость систем с переключениями между тремя линейными стационарными подсистемами

Выше было отмечено, что задача абсолютной устойчивости системы Лурье (2.3) является частным случаем задачи об устойчивости при произвольных переключениях линейной системы с переключениями

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in \overline{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}, \tag{3.1}$$

где $A_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $A(t) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \overline{A}$ — кусочно-постоянное отображение. В случае $m = 1$ системе (2.3) соответствует система (3.1) с переключениями между двумя подсистемами. Вопрос о существовании КФЛ для таких систем определяется разрешимостью системы из двух МН вида (2.13), эквивалентное такой системе результирующее МН (РМН) является ЛМН и частотное условие его разрешимости (круговой критерий) является в этом случае необходимым и достаточным условием существования КФЛ. Следующий естественный шаг — получить аналогичный результат для системы (3.1) при $N = 3$. В этом случае вопрос о существовании КФЛ определяется разрешимостью системы из трех МН вида (2.13). Таким образом, задача настоящего раздела состоит в получении РМН для системы из трех МН вида (2.13) в форме ЛМН и частотного критерия разрешимости этого РМН.

Отметим сразу, что возможность реализации подобной программы для системы (2.3) при $m = 2$ или системы (3.1) при $N = 4$ пока не просматривается.

В случае $N = 3$ матрицы $\{A_1, A_2, A_3\}$, задающие связную [9] систему (3.1), можно представить в виде

$$A_1 = A, \quad A_2 = A + b_1 c_1^\top, \quad A_3 = A + b_2 c_2^\top. \tag{3.2}$$

Соответствующая система неравенств (2.13) при $N = 3$ после переобозначений (2.14) при $m = 2$ примет вид

$$I_1 + p_1 q_1^\top + q_1 p_1^\top < 0, \quad I_1 < 0, \quad I_1 + p_2 q_2^\top + q_2 p_2^\top < 0. \tag{3.3}$$

Применяя теорему 1 сначала к двум первым, а затем к двум последним неравенствам из (3.3), получим, что система (3.3) разрешима тогда и только тогда, когда существуют $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ такие, что разрешима система из двух МН

$$\widetilde{I}_1 = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(\varepsilon_1) u_1^+(\varepsilon_1)^\top < 0, \;\; \widetilde{I}_2 = I_1 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(\varepsilon_2) u_2^+(\varepsilon_2)^\top < 0. \tag{3.4}$$

В [9] получено РМН, эквивалентное системе (3.4), и приведено частотное условие разрешимости этого МН. Однако РМН из [9] не является ЛМН относительно входящих в него дополнительных параметров и, как следствие, частотное условие его разрешимости весьма громоздко. Здесь предлагается новый прием, который позволяет получить РМН для системы (3.4) в виде ЛМН и существенно упростить частотное условие существования КФЛ для системы (3.1) при $N = 3$. Ключевая идея этого приема состоит в том, чтобы перейти от неравенств на $(n \times n)$-матрицы в (3.4) к эквивалентным им неравенствам на $((n+1) \times (n+1))$-матрицы, используя лемму Шура. В результате получается следующая система МН, эквивалентная (3.4):

$$
\widetilde{I}_1 < 0 \cong \widehat{\widetilde{I}}_1 = \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+ \\ (u_1^+)^\top & -2/\varepsilon_1^2 \end{pmatrix} < 0, \quad \widetilde{I}_2 < 0 \cong \widehat{\widetilde{I}}_2 = \begin{pmatrix} I_1 & u_2^+ \\ (u_2^+)^\top & -2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix} < 0. \tag{3.5}
$$

Матрица разности имеет вид

$$
\widehat{\widetilde{I}}_2 - \widehat{\widetilde{I}}_1 = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & u_2^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^\top & 2/\varepsilon_1^2 - 2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix},
$$

где во избежание путаницы используется обозначение $0_{n\times m}$ — это матрица размера $n \times m$, все элементы которой равны 0. Здесь и далее символы “$\bullet$” обозначают элементы под главной диагональю симметрической матрицы, которые совпадают с соответствующими элементами над главной диагональю. Введем обозначения $\widehat{p} \triangleq u_2^+ - u_1^+$ и $\gamma \triangleq 1/\varepsilon_1^2 - 1/\varepsilon_2^2$, тогда легко видеть, что

$$
\widehat{\widetilde{I}}_2 - \widehat{\widetilde{I}}_1 = \widetilde{p}\,\widetilde{q}^{\,\top} + \widetilde{q}\,\widetilde{p}^{\,\top}, \;\; \widetilde{p} = \begin{pmatrix} \widehat{p} \\ \gamma \end{pmatrix}, \;\; \widetilde{q} = \begin{pmatrix} 0_{n\times 1} \\ 1 \end{pmatrix},
$$

т.е. к системе (3.5) применима теорема 1, на основании которой получим, что разрешимость системы (3.5) эквивалентна существованию такого $\varepsilon_3 > 0$, что разрешимо одно МН

$$
\overset{\approx}{I} = \widehat{\widetilde{I}}_1 + \frac{\varepsilon_3^2}{2}\left(\widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_3^2}\widetilde{q}\right)\left(\widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_3^2}\widetilde{q}\right)^\top < 0. \tag{3.6}
$$

По лемме Шура МН (3.6) эквивалентно следующему МН в расширенном пространстве:

$$
\overset{\approx}{I} < 0 \cong \overset{\approx}{\widehat{I}} = \begin{pmatrix} \widehat{\widetilde{I}}_1 & \widetilde{p} + (1/\varepsilon_3^2)\widetilde{q} \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+(\varepsilon_1) & \widehat{p} \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_1^2 & \gamma + 1/\varepsilon_3^2 \\ (\bullet)^\top & \gamma + 1/\varepsilon_3^2 & -2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} < 0. \tag{3.7}
$$

Используя для τ_j $(s = \overline{1,3})$ обозначения (2.18), для элементов матрицы $\overset{\approx}{\widehat{I}}$ получим соотношения:

$$
u_1^+(\tau_1) = p_1 + \frac{\tau_1}{2}q_1, \;\; u_2^+(\tau_2) = p_2 + \frac{\tau_2}{2}q_2, \;\; \gamma = \frac{1}{2}\left(\tau_1 - \tau_2\right).
$$

Полученный результат об эквивалентности связной системы (3.3) из трех МН и МН (3.7) сформулируем в нейтральных терминах.

Теорема 2. Пусть в системе (3.3) *неравенства являются ЛМН относительно неизвестной переменной* ν, *т.е.* $I_s = I_s(\nu)$, $s = \overline{1,3}$, *и* $Q_j(\nu) = p_j(\nu)q_j^\top + q_j p_j^\top(\nu)$, *где* $p_j = p_j(\nu)$ *зависит от* ν *линейно, а* q_j *от* ν *не зависит*, $j = 1, 2$. *Тогда система* (3.3) *эквивалентна одному МН*

$$\overset{\approx}{I} = \begin{pmatrix} I_1(\nu) & p_1(\nu) + \dfrac{\tau_1}{2}q_1 & p_2(\nu) - p_1(\nu) + \dfrac{\tau_2}{2}q_2 - \dfrac{\tau_1}{2}q_1 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & (\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно $(\nu, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Выразим $\overset{\approx}{I}$ в исходных терминах, используя (2.14) для p_j и q_j:

$$\overset{\approx}{I} = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + (\tau_1/2)c_1 & L(b_2 - b_1) - (\tau_1/2)c_1 + (\tau_2/2)c_2 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & (\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} < 0. \tag{3.8}$$

Таким образом, МН (3.8) является ЛМН относительно неизвестных L и τ_j, $j = \overline{1,3}$, и численно решается стандартными программными средствами.

Более того, МН (3.8) может быть представлено в виде (2.10) при

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix},\ \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \tau_1 & -\tau_1 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix},\ \Gamma = \begin{pmatrix} \tau_1 & \dfrac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1 - \tau_3) \\ \bullet & \tau_3 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

В этом случае разрешимость МН (2.10) определяется из частотной теоремы [10, с. 54](KYP лемма), что приводит к следующему критерию существования КФЛ для системы с переключениями (3.1) при $N = 3$.

Теорема 3. Пусть при $N = 3$ *в системе* (3.1) *матрицы* A_s *определяются соотношениями* (3.2) *и матрица* A *гурвицева. Если существует какой-либо набор чисел* $\tau_j > 0$, $j = \overline{1,3}$, *такой что* $\Gamma > 0$ *и при любых* $\omega \in [-\infty, \infty]$ *выполняется частотное неравенство* (2.11), *в котором матрица* Γ *и элементы матрицы* $W(i\omega)$ *определены в* (3.9), *тогда у системы* (3.1) *существует КФЛ (система* (2.13) *разрешима, система* (3.1) *устойчива). Если у системы* (3.1) *существует КФЛ (система* (2.13) *разрешима), то такой набор чисел* $\tau_j > 0$, $j = \overline{1,3}$, *существует.*

Понятно, что критерий теоремы 3 существенно проще и лучше, чем критерий теоремы 2 из [9].

4. Альтернативный взгляд на круговой критерий. Уменьшение размерности систем ЛМН

Круговой критерий получается как условие разрешимости МНКК (2.10), которое является ЛМН относительно входящих в него неизвестных L и τ_j,

$j = \overline{1, m}$, и численно решается стандартными программными средствами. Таким образом, вместо системы (2.13), имеющей общую размерность $2^m n$, можно рассматривать одно МНКК (2.10) размерности $n + m$ с m дополнительными параметрами. При этом необходимо учитывать возможные потери в области существования КФЛ, связанные с ущербностью S-процедуры.

Критерий теоремы 2 позволяет без потерь в области существования КФЛ перейти от системы (2.13), которая в случае $N = 3$ имеет общую размерность $3n$, к одному МН (3.8) размерности $n + 2$, зависящему от трех дополнительных параметров.

Абсолютная устойчивость системы Лурье (2.3) в случае $m = 2$ эквивалентна [9] устойчивости при произвольных переключениях системы (3.1), в которой матрицы A_s определяются соотношениями

$$A_1 = A,\ A_2 = A + b_1 c_1^\top,\ A_3 = A + b_2 c_2^\top,\ A_4 = A + b_1 c_1^\top + b_2 c_2^\top,\ b_s, c_s \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Теорему 2 можно применить к соответствующей системе ЛМН (2.13) при $N = 4$. Для этого нужно теорему 2 применить сначала к трем неравенствам из системы и затем полученное неравенство объединить в систему с оставшимся МН. В результате получим систему из двух МН, которая эквивалентна исходной, имеет общую размерность $2n + 2$ и зависит от трех дополнительных параметров. Исходная система ЛМН (2.13) при $N = 4$ имеет размерность $4n$.

В следующей теореме, которая объединяет теорему 1 и лемму Шура, предлагается еще один прием уменьшения размерности связных систем ЛМН.

Т е о р е м а 4. *Пусть в системе* (2.1) *неравенства являются ЛМН относительно неизвестной переменной* ν, *т.е.* $I_1 = I_1(\nu)$ *и* $I_2 = I_2(\nu)$, *и* Q *допускает представление* $Q(\nu) = I_2(\nu) - I_1(\nu) = p(\nu)q^\top + qp^\top(\nu)$, *где* $p = p(\nu)$ *зависит от* ν *линейно, а* q *от* ν *не зависит. Тогда система* (2.1) *эквивалентна одному МН*

$$\begin{pmatrix} I_1(\nu) & p(\nu) + (\tau/2)q \\ (\bullet)^\top & -\tau \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно (ν, τ).

В результате использования теоремы 4 для системы ЛМН (2.13) при $N = 4$ получим систему из двух МН, которая эквивалентна исходной, имеет общую размерность $2n + 2$ и зависит от двух дополнительных параметров. По сравнению с использованием теоремы 2 выгода минимальна — на один дополнительный параметр меньше.

Сравним с прикладной точки зрения эффективность использования теоремы 2 и теоремы 4 для уменьшения размерности систем ЛМН еще в двух случаях системы (2.13): при $N = 6$ и при $N = 8$. В случае $N = 8$ пусть это будет система (2.13) для определения условий существования КФЛ для системы

Лурье (2.3) при $m = 3$, т.е. $N = 2^m$. Теорему 4 можно применить к четырем парам МН — в результате получим систему из четырех неравенств общей размерности $4n + 4$ с четырьмя дополнительными параметрами. С другой стороны, можно применить теорему 2 к двум тройкам МН и теорему 4 к оставшейся паре МН — в результате получим систему из трех неравенств общей размерности $3n + 5$ с семью дополнительными параметрами. Исходная система ЛМН (2.13) при $N = 8$ имеет размерность $8n$.

В случае $N = 6$ рассмотрим систему с переключениями с некоторым запасом связности, который позволит применить теорему 2 к двум тройкам из этой системы, а теорему 4 к трем двойкам. Например, это может быть система с переключениями типа призма, в которой матрицы A_s определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A, & A_2 &= A + b_3 c_3^\top, \\
A_3 &= A + b_1 c_1^\top, & A_4 &= A + b_1 c_1^\top + b_3 c_3^\top, \\
A_5 &= A + b_2 c_2^\top, & A_6 &= A + b_2 c_2^\top + b_3 c_3^\top, \quad b_s, c_s \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Тогда двукратное применение теоремы 2 приведет к системе из двух неравенств общей размерности $2n + 4$ с шестью дополнительными параметрами, а трехкратное применение теоремы 4 — к системе из трех неравенств общей размерности $3n + 3$ с тремя дополнительными параметрами. Исходная система ЛМН (2.13) при $N = 6$ имеет размерность $6n$.

В конце раздела покажем, как теорему 4 применить для уменьшения размерности системы (2.13) при решении вопроса о существовании КФЛ для системы Лурье (2.3) с произвольным конечным m. Каждое применение теоремы 4, с одной стороны, уменьшает количество МН в системе на единицу, с другой стороны, увеличивает на единицу количество неизвестных. От системы (2.13) относительно $n(n+1)/2$ неизвестных, имеющей в этом случае общую размерность $2^m n$, можно перейти к эквивалентной системе размерности $2^{m-1}(n+1)$ относительно $n(n+1)/2 + 2^{m-1}$ неизвестных.

Т е о р е м а 5. *При $N = 2^m$ система МН* (2.13) *эквивалентна системе МН*

$$
\begin{pmatrix} A_s^\top L + L A_s & L b_m + (\tau_s/2) c_m \\ (\bullet)^\top & -\tau_s \end{pmatrix} < 0, \quad s = \overline{1, 2^{m-1}}, \tag{4.2}
$$

с 2^{m-1} дополнительными параметрами $\tau_s > 0$.

Доказательство теоремы 5 приведено в Приложении.

5. Улучшение кругового критерия в случае двух нелинейностей

В разделе 4 было отмечено, что абсолютная устойчивость системы Лурье (2.3) в случае $m = 2$ эквивалентна [9] устойчивости системы с переключениями (3.1), в которой матрицы A_s определяются соотношениями (4.1).

В этом случае система МН (2.13) примет вид

$$I_s = A_s^\top L + LA_s < 0, \quad s = \overline{1,4}, \tag{5.1}$$

где матрицы A_s определены в (4.1).

В [12] при $m = 2$ рассматривается задача существования КФЛ для систем Лурье с дискретным временем. Там для улучшения критерия Цыпкина предлагаются критерий A и критерий B. В [12] показано, что на одних примерах критерий A дает более точный результат, чем критерий Цыпкина, на других — наоборот. Критерий B либо повторяет, либо улучшает оценку области устойчивости по сравнению с критерием Цыпкина. В непрерывном случае аналогом критерия Цыпкина является круговой критерий, поэтому интересно, к каким результатам в непрерывном случае приведут подходы, использованные при получении критерия A и критерия B.

Чтобы перейти к предметному обсуждению, кратко повторим схему из [12] получения РМН [8], эквивалентного исходной системе (5.1):

$$
\begin{array}{ccccccc}
I_2 & \longleftrightarrow & I_1 & \longleftrightarrow & I_3 & \longleftrightarrow & I_4 \\
 & \downarrow_{\varepsilon_1} & & \downarrow_{\varepsilon_3} & & \downarrow_{\varepsilon_2} & \\
 & \widetilde{I}_1 & \longleftrightarrow & \widetilde{I}_3 & \longleftrightarrow & \widetilde{I}_2 & \\
 & & \downarrow_{\varepsilon_4} & & \downarrow_{\varepsilon_5} & & \\
 & & \overset{\approx}{I}_1 & \longleftrightarrow & \overset{\approx}{I}_2 & & \\
 & & & \downarrow_{\varepsilon_6} & & & \\
 & & & \overset{\approx}{\widetilde{I}}\,. & & &
\end{array}
$$

В этой схеме горизонтальные стрелки указывают на пары неравенств, к которым применима теорема 1. Вертикальные стрелки указывают на МН, полученные в результате применения этой теоремы, а ε_s — появляющиеся при этом новые параметры. Чтобы на схеме выражения для МН через $u_s^\pm$ были одинаковы для непрерывного и дискретного случая, сохраним выражения из (2.14) для p_j и q_j через Lb_j и c_j, но изменим выражения из (2.15) для $u_s^\pm$ через p_j и q_j, т.е. теперь векторам $u_s^\pm$ будут соответствовать другие величины, отличные от определенных в (2.15) и используемых в разделах 2 и 3. Приведем выражения для МН из схемы через p_s и q_s из (2.14) при $m = 2$. Далее используем обозначение $\varepsilon_s^\pm = 1 \pm 1/\varepsilon_s^2$.

Неравенства первого уровня:

$$\widetilde{I}_1 = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+ (u_1^+)^\top = I_2 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^- (u_1^-)^\top < 0, \;\; u_1^\pm = p_1 \pm \frac{1}{\varepsilon_1^2} q_1, \tag{5.2}$$

$$\widetilde{I}_2 = I_3 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+ (u_2^+)^\top = I_4 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^- (u_2^-)^\top < 0, \;\; u_2^\pm = p_1 \pm \frac{1}{\varepsilon_2^2} q_1, \tag{5.3}$$

$$\widetilde{I}_3 = I_1 + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+ (u_3^+)^\top = I_3 + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^- (u_3^-)^\top < 0, \;\; u_3^\pm = p_2 \pm \frac{1}{\varepsilon_3^2} q_2, \tag{5.4}$$

где $\widetilde{I}_1 < 0 \cong I_1 < 0,\ I_2 < 0,\ \widetilde{I}_2 < 0 \cong I_3 < 0,\ I_4 < 0,\ \widetilde{I}_3 < 0 \cong I_1 < 0,\ I_3 < 0$.

Неравенства второго уровня:

$$\widetilde{\widetilde{I}}_1 = \widetilde{I}_1 + \frac{\varepsilon_4^2}{2} u_4^+ (u_4^+)^\top = \widetilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_4^2}{2} u_4^- (u_4^-)^\top < 0,\ u_4^{\pm} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_4^{\mp}}{2} u_1^+ + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4^{\pm}}{2} u_3^+, \tag{5.5}$$

$$\widetilde{\widetilde{I}}_2 = \widetilde{I}_2 + \frac{\varepsilon_5^2}{2} u_5^+ (u_5^+)^\top = \widetilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_5^2}{2} u_5^- (u_5^-)^\top < 0,\ u_5^{\pm} = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_5^{\mp}}{2} u_2^+ + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_5^{\pm}}{2} u_3^-, \tag{5.6}$$

где $\widetilde{\widetilde{I}}_1 < 0 \cong \widetilde{I}_1 < 0,\ \widetilde{I}_3 < 0,\ \widetilde{\widetilde{I}}_2 < 0 \cong \widetilde{I}_2 < 0,\ \widetilde{I}_3 < 0$.

Результирующее матричное неравенство:

$$\widetilde{\widetilde{I}} = \widetilde{\widetilde{I}}_1 + \frac{\varepsilon_6^2}{2} u_6^+ (u_6^+)^\top = \widetilde{\widetilde{I}}_2 + \frac{\varepsilon_6^2}{2} u_6^- (u_6^-)^\top < 0, \quad u_6^{\pm} = \frac{\varepsilon_4 \varepsilon_6^{\mp}}{2} u_4^- + \frac{\varepsilon_5 \varepsilon_6^{\pm}}{2} u_5^-, \tag{5.7}$$

где $\widetilde{\widetilde{I}} < 0 \cong \widetilde{\widetilde{I}}_1 < 0,\ \widetilde{\widetilde{I}}_2 < 0$.

При получении критерия A в [12] используется подход (подход A), который, если перенести его на непрерывный случай, состоит в следующем: в РМН (5.7) два из шести дополнительных параметров полагаются равными 1, а именно $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$. Из-за этого предположения неравенство $\widetilde{\widetilde{I}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 1, 1, \varepsilon_6) \triangleq \widetilde{\widetilde{I}}_{(1)} < 0$ является лишь достаточным условием для выполнения всей системы (5.1). Далее сравниваются условия выполнимости этого МН $\widetilde{\widetilde{I}}_{(1)} < 0$ и условия кругового критерия. Покажем, как работает подход A в непрерывном случае. Выражения для МН второго уровня через $u_s^{\pm}$ одинаковы для непрерывного и дискретного случая, поэтому кратко повторим выкладки из [12]. Если в (5.5) и (5.6) положить $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$ (в этом случае $\varepsilon_4^+ = \varepsilon_5^+ = 2$, $\varepsilon_4^- = \varepsilon_5^- = 0$), то

$$u_4^+ = \varepsilon_3 u_3^+, \quad u_4^- = \varepsilon_1 u_1^+, \quad u_5^+ = \varepsilon_3 u_3^-, \quad u_5^- = \varepsilon_2 u_2^+,$$

и для соответствующих МН второго уровня справедливы выражения

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{I}}_{1(1)} &= \widetilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+ (u_1^+)^\top = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+ (u_1^+)^\top + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+ (u_3^+)^\top < 0, \\ \widetilde{\widetilde{I}}_{2(1)} &= \widetilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+ (u_2^+)^\top = I_1 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+ (u_2^+)^\top + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+ (u_3^+)^\top < 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Учитывая выражения из (5.2)–(5.4) для $u_s^{\pm}$ через p_j и q_j, получим, что МНКК (2.16) при $m = 2$ имеет вид (для экономии места считаем, что $u_s^+(u_s^+)^\top(\varepsilon)$ и $u_s^+(\varepsilon) u_s^+(\varepsilon)^\top$ одно и то же)

$$I_{\mathrm{cir}} = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+ (u_1^+)^\top (\varepsilon_1) + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+ (u_3^+)^\top (\varepsilon_3) < 0. \tag{5.9}$$

Очевидно, из разрешимости любого из двух МН (5.8) следует разрешимость МНКК (5.9).

С другой стороны, пусть (здесь и далее) МНКК (5.9) разрешимо при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1cir}$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_{2cir}$. Тогда первое из МН (5.8) разрешимо при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1cir}$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_{2cir}$, а второе — при $\varepsilon_2 = \varepsilon_{1cir}$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_{2cir}$. Следовательно, разрешимо МН $\overset{\approx}{I}(\varepsilon_{1cir}, \varepsilon_{1cir}, \varepsilon_{2cir}, 1, 1, \varepsilon_6) < 0$ с некоторым ε_6, которое определяется при использовании теоремы 1 для системы (5.8) из двух МН. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 6. Разрешимость МНКК (2.16) *при* $m = 2$ *эквивалентна разрешимости РМН* (5.7) *при* $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$.

Таким образом, в непрерывном случае использование подхода A приводит к тем же условиям существования КФЛ, что и условия кругового критерия.

При получении критерия B в [12] используется подход (подход B), который, если перенести его на непрерывный случай, состоит в следующем: в РМН (5.7) положить $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$, т.е. оставить пять дополнительных параметров вместо шести. Далее сравнить аналитически условия выполнимости МН $\overset{\approx}{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon_6) \triangleq \overset{\approx}{I}_{(\varepsilon)} < 0$ и МНКК (5.9).

Такое сравнение было проведено (детали опустим). В результате в рамках сделанных огрубляющих предположений, которые делают возможным такое сравнение, не удалось аналитически показать улучшения кругового критерия при подходе B. Тем не менее возможность такого улучшения остается. Чтобы это проверить, нужно сравнить области квадратичной устойчивости (ОКУ), получаемые из разрешимости РМН (5.7) при $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$ и МНКК (5.9) на численных примерах.

Заметим, что МН (5.5) и (5.6), и тем более РМН (5.7), не являются ЛМН относительно входящих в них переменных. Поэтому перейдем от неравенств второго уровня (5.5) и (5.6) к эквивалентным им неравенствам, которые являются ЛМН. По теореме 2, система из трех МН $I_s < 0$, $s = \overline{1,3}$, из системы (5.1) эквивалентна одному МН

$$(5.10)\qquad \overset{\cong}{I}_1 = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + (\tau_1/2)c_1 & L(b_2 - b_1) - \dfrac{\tau_1}{2}c_1 + \dfrac{\tau_3}{2}c_2 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & (\tau_1 - \tau_3 + \tau_4)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_4 \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно неизвестных L и τ_j, $j = 1, 3, 4$, и эквивалентно МН (5.5). Аналогично, система из трех МН $I_s < 0$, $s = \overline{2,4}$, из (5.1) эквивалентна одному МН

$$(5.11)\qquad \overset{\cong}{I}_2 = \begin{pmatrix} A_3^\top L + LA_3 & Lb_1 + \dfrac{\tau_2}{2}c_1 & L(b_2 - b_1) - \dfrac{\tau_2}{2}c_1 - \dfrac{\tau_3}{2}c_2 \\ (\bullet)^\top & -\tau_2 & (\tau_2 - \tau_3 + \tau_5)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_5 \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно неизвестных L и τ_j, $j = 2, 3, 5$, и эквивалентно МН (5.6). Если объединить эти два МН в систему

$$\overset{\cong}{I}_1 < 0, \quad \overset{\cong}{I}_2 < 0, \tag{5.12}$$

то разрешимость системы (5.12) эквивалентна разрешимости РМН (5.7).

Возникает естественный вопрос о соотношении параметров ε_j, от которых зависит РМН (5.7), и τ_j, от которых зависит система (5.12). Параметры ε_j появляются в РМН (5.7) в соответствии со схемой и формулами (5.2)–(5.7). Параметры τ_j появляются в системе (5.12) в соответствии с теоремой 2. При выводе теоремы 2 параметр ε_3 из (3.6) появляется в результате применения теоремы о свертывании к МН размерности $n+1$ (аналога ε_3 в схеме и в РМН (5.7) нет). Поэтому хотя между параметрами ε_j, $j = \overline{1,3}$, из схемы и РМН (5.7) и параметрами τ_j, $j = \overline{1,3}$, из (5.12) выполняется соответствие (2.18), но между параметрами τ_4 и τ_5 из (5.12) и параметрами ε_4 и ε_5 из РМН (5.7) такого соответствия нет. Таким образом, из $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$ не следует $\tau_4 = \tau_5 = \tau$ и наоборот. Поэтому разрешимость РМН (5.7) при $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$ не эквивалентна разрешимости системы (5.12) при $\tau_4 = \tau_5 = \tau$, хотя разрешимость РМН (5.7) эквивалентна разрешимости системы (5.12).

Возникает новая версия подхода B. В непрерывном случае будем считать аналогом критерия B из [12] условие разрешимости системы (5.12) при $\tau_4 = \tau_5 = \tau$ — назовем его критерием C. Сравним теперь условия критерия C и условия кругового критерия. Для этого выясним, при каких τ_4 и τ_5 выполнены МН системы (5.12) при условии выполнения МНКК.

Теорема 7. Пусть МНКК (5.9) *разрешимо при* $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1cir}$ *и* $\varepsilon_3 = \varepsilon_{2cir}$. *Тогда система* (5.12) *выполняется при*

$$\tau_1 = \tau_2 = 2/\varepsilon_{1cir}^2, \quad \tau_3 = 2/\varepsilon_{2cir}^2, \quad \tau_4 = \tau_5 = 2/\varepsilon_{1cir}^2 + 2/\varepsilon_{2cir}^2.$$

Доказательство теоремы 7 приведено в Приложении.

Из теоремы 7 следует, что ОКУ по критерию C не хуже, чем по круговому критерию. При этом использование критерия C не гарантирует улучшения кругового критерия. Тем не менее такое улучшение удается показать на численных примерах. Для полноты картины приведем один такой пример, в котором ОКУ по критерию C шире, чем по круговому критерию.

Пример 1. Рассматривается система Лурье вида (2.3) при $n = 6$, в которой матрица A имеет форму Фробениуса и поэтому здесь задается только последней строкой

$$A \sim [-10{,}0 \;\; -34{,}0 \;\; -49{,}0 \;\; -40{,}0 \;\; -20{,}0 \;\; -6{,}0\,],$$
$$\mathrm{spectr}(A) = [-1{,}0 \;\; -1{,}0 \;\; -1{,}0-i \;\; -1{,}0+i \;\; -1{,}0-2i \;\; -1{,}0+2i\,],$$
$$b_1^\top = (0\;\;0\;\;0\;\;k_1\;\;0\;\;0), \;\; b_2^\top = (0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;k_2\;\;0),$$
$$c_1^\top = (0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;1\;\;1), \;\; c_2^\top = (0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;1\;\;1).$$

Таблица

Прогр. $\diagdown$ Лучи	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(3,1)$
NS	0,45684	0,32608	0,25301	0,28482	0,20674
CC	0,44831	0,31943	0,24813	0,28088	0,20453
C	0,45684	0,32608	0,25301	0,28482	0,20674

Для рассматриваемого примера находятся оценки ОКУ, вычисляемые с помощью трех тестируемых алгоритмов. Алгоритм NS (обозначения алгоритмов далее будут использоваться в таблице) состоит в нахождении ОКУ в соответствии с необходимыми и достаточными условиями существования КФЛ путем проверки системы (5.1). Алгоритм CC состоит в нахождении оценки ОКУ с помощью кругового критерия, т.е. путем проверки МНКК (2.10). Алгоритм C состоит в нахождении оценки ОКУ с помощью критерия C, т.е. путем проверки системы (5.12) при $\tau_4 = \tau_5 = \tau$.

Для нахождения ОКУ рассматривается луч, выходящий из точки 0. Далее выбирается и фиксируется произвольный вектор $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ (естественно, $\alpha_s \geqslant 0$), направленный вдоль этого луча, и решается задача определения наибольшего числа k, такого что при $(k_1, k_2) = k\overline{\alpha}$ выполняется условие соответствующего критерия. Сравнение алгоритмов из указанного набора проводилось по пяти различным направлениям $\overline{\alpha}_i$, $i = \overline{1,5}$.

В приведенной таблице в верхней строке указываются лучи $\overline{\alpha}_i$, $i = \overline{1,5}$, вдоль которых оценивается ОКУ, а в левом столбце приведены обозначения используемых для этого алгоритмов.

В соответствии с проведенными вычислениями приходим к выводу, что для рассматриваемого примера ОКУ по критерию C не только превосходит ОКУ по круговому критерию, но и совпадает (с точностью до погрешности вычислений) с точной ОКУ для всех рассмотренных направлений $\overline{\alpha}_i$.

Система (5.12) имеет общий порядок $2n+4$ и в случае $\tau_4 = \tau_5 = \tau$ зависит от пяти дополнительных параметров. В то же время система $\overset{\cong}{I}_1 < 0$, $I_4 < 0$, или система $I_1 < 0$, $\overset{\cong}{I}_2 < 0$, имеют (каждая) общий порядок $2n+2$ и зависят от трех дополнительных параметров. При этом каждая из этих систем эквивалентна исходной (5.1) без потерь в области разрешимости. Кроме этого, применяя к системе (5.1) теорему 5, получим систему из двух ЛМН, эквивалентную исходной, имеющую общий порядок $2n+2$ и зависящую от двух дополнительных параметров. Таким образом, проверка условия критерия C вызывает исключительно теоретический интерес. С прикладной точки зрения, чтобы численно проверить разрешимость системы (5.1), лучше всего решать систему из двух ЛМН, полученную из теоремы 5.

Замечание 1. Во всех приведенных в статье условиях существования КФЛ, которые состоят в проверке ЛМН, зависящих от дополнительных параметров, в силу линейности можно без потерь в области разрешимости положить один дополнительный параметр равным 1, уменьшая тем самым на единицу количество дополнительных параметров. К этим условиям относятся МНКК (2.10), ЛМН (3.8), системы ЛМН (4.2) и (5.12).

6. Заключение

Во-первых, круговой критерий для системы Лурье с несколькими нелинейностями получен без S-процедуры. Во-вторых, для связной системы с переключениями между тремя линейными подсистемами получен критерий существования КФЛ как в форме условий разрешимости одного ЛМН, так и в форме частотного условия. В-третьих, доказаны две теоремы, позволяющие существенно уменьшить размерность связной системы ЛМН. Использование этих теорем демонстрируется для случая системы Лурье при $m = 2$, $m = 3$ и произвольном конечном m, а также для систем с переключениями при $N = 6$. В-четвертых, проведено сравнение различных подходов для улучшения кругового критерия для системы Лурье при $m = 2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 5. Пусть при $N = 2^m$ в системе (2.13) МН занумерованы таким образом, что первые 2^{m-1} МН $I_s < 0$, $s = \overline{1, 2^{m-1}}$, совпадают с неравенствами системы (2.13) при $N = 2^{m-1}$, а следующие 2^{m-1} МН $I_s < 0$, $s = \overline{2^{m-1}+1, 2^m}$, занумерованы следующим образом:

$$I_{s+2^{m-1}} = I_s + \left(Lb_m c_m^\top + c_m b_m^\top L\right) < 0, \quad s = \overline{1, 2^{m-1}}.$$

Тогда к парам МН

$$I_s < 0, \quad I_{s+2^{m-1}} < 0, \quad s = \overline{1, 2^{m-1}}, \tag{П.1}$$

применима теорема 1. В результате получим, что система МН (2.13) эквивалентна системе МН

$$I_s + \frac{\varepsilon_s^2}{2}\left(Lb_m + \frac{1}{\varepsilon_s^2}c_m\right)\left(Lb_m + \frac{1}{\varepsilon_s^2}c_m\right)^\top < 0, \quad s = \overline{1, 2^{m-1}}, \tag{П.2}$$

с 2^{m-1} дополнительным параметрами $\varepsilon_s > 0$. Если в (П.2) взять $\varepsilon_s = \varepsilon_m > 0$, $s = \overline{1, 2^{m-1}}$, то получим еще одно доказательство, теперь по индукции, перехода от системы (2.13) к МНКК (2.16). Если к каждой паре (П.1) применить теорему 4, то получим, что система МН (2.13) эквивалентна системе МН (4.2) с 2^{m-1} дополнительным параметрами $\tau_s \triangleq 2/\varepsilon_s^2$.

Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 7. Покажем, что из выполнения МНКК (5.9) следует существование τ_4, при котором выполнено МН (5.10). Как и в [12], чтобы определить условия, при которых из отрицательной определенности одной матрицы $I_a(\nu) < 0$, зависящей от условного параметра ν, следует отрицательная определенность другой матрицы $I_b(\nu) < 0$, будем исходить из очевидного достаточного требования: если $I_a(\nu) < 0$ и $I_b(\nu) \leqslant I_a(\nu)$, то $I_b(\nu) < 0$.

Для удобства вернемся к обозначениям, используемым при получении теоремы 2, и преобразуем МН (5.10)(лемма А4 [13, с. 253])

$$\overset{\cong}{I}_1 = \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+ & u_3^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & \delta_1 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_4 \end{pmatrix} < 0 \cong \widehat{I}_1 = \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^\top & -\tau_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ \delta_1 \end{pmatrix}^\top =$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^\top & -\tau_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} u_1^+ (u_1^+)^\top & \delta_1 u_1^+ \\ (\bullet)^\top & \delta_1^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 + \dfrac{1}{\tau_1} u_1^+ (u_1^+)^\top & \dfrac{\delta_1 - \tau_1}{\tau_1} u_1^+ + u_3^+ \\ (\bullet)^\top & \dfrac{\delta_1^2}{\tau_1} - \tau_4 \end{pmatrix} < 0,$$

где для краткости введено обозначение $\delta_1 \triangleq (\tau_1 - \tau_3 + \tau_4)/2$ и опущены аргументы у векторов $u_j^\pm = u_j^\pm(\tau_j)$. Введем еще упрощающие обозначения $\alpha_1 \triangleq \dfrac{\delta_1 - \tau_1}{\tau_1}$ и $\beta_1 \triangleq \dfrac{\tau_1}{\tau_1 \tau_4 - \delta_1^2}$, тогда по лемме Шура получим

$$\text{(П.3)} \qquad \widehat{I}_1 < 0 \cong \widehat{\widehat{I}}_1 = I_1 + \frac{1}{\tau_1} u_1^+ (u_1^+)^\top + \beta_1 \left(\alpha_1 u_1^+ + u_3^+\right) \left(\alpha_1 u_1^+ + u_3^+\right)^\top < 0.$$

При $\tau_1 = 2/\varepsilon_{1cir}^2$ и $\tau_3 = 2/\varepsilon_{2cir}^2$ разность между квадратичными формами, соответствующими матрицам I_{cir} из (5.9) и $\widehat{\widehat{I}}_1$ из (П.3), представляет собой разность квадратов

$$\widehat{\widehat{I}}_1 - I_{cir} \triangleq \Delta_1 = \beta_1 \left(\alpha_1 u_1^+ + u_3^+\right) \left(\alpha_1 u_1^+ + u_3^+\right)^\top - \frac{1}{\tau_3} u_3^+ (u_3^+)^\top.$$

Неравенство $\Delta_1 \leqslant 0$ для разности квадратов будет выполняться, если стоящие под этими квадратами линейные формы будут пропорциональны, т.е.

$$\alpha_1 u_1^+ + u_3^+ = \lambda_1 u_3^+,$$

что возможно только если $\alpha_1 = 0$ или $\tau_4 = \tau_1 + \tau_3$. В этом случае $\Delta_1 = 0$.

Далее выясним, при каких τ_5 из выполнения МНКК (5.9) следует выполнение МН (5.11). Для этого повторим с МН (5.11) манипуляции, проделанные выше с МН (5.10). В результате получим

$$\text{(П.4)} \qquad \overset{\cong}{I}_2 < 0 \cong \widehat{\widehat{I}}_2 = I_3 + \frac{1}{\tau_2} u_2^+ (u_2^+)^\top + \beta_2 \left(\alpha_2 u_2^+ + u_3^-\right) \left(\alpha_2 u_2^+ + u_3^-\right)^\top < 0,$$

где $\delta_2 \triangleq (\tau_2 - \tau_3 + \tau_5)/2$, $\alpha_2 \triangleq \dfrac{\delta_2 - \tau_2}{\tau_2}$ и $\beta_2 \triangleq \dfrac{\tau_2}{\tau_2\tau_5 - \delta_2^2}$. Примем во внимание $u_2^+(\tau) = u_1^+(\tau)$ и воспользуемся соотношением $I_1 + \dfrac{1}{\tau_3}u_3^+(u_3^+)^\top(\tau_3) = I_3 + \dfrac{1}{\tau_3}u_3^-(u_3^-)^\top(\tau_3)$. Тогда при $\tau_2 = 2/\varepsilon_{1cir}^2$ и $\tau_3 = 2/\varepsilon_{2cir}^2$ разность между квадратичными формами, соответствующими матрицам I_{cir} из (5.9) и $\widehat{\widehat{I}}_2$ из (П.4), представляет собой разность квадратов

$$\widehat{\widehat{I}}_2 - I_{cir} \triangleq \Delta_2 = \beta_2\left(\alpha_2 u_2^+ + u_3^-\right)\left(\alpha_2 u_2^+ + u_3^-\right)^\top - \frac{1}{\tau_3}u_3^-(u_3^-)^\top.$$

Неравенство $\Delta_2 \leqslant 0$ для разности квадратов будет выполняться, если стоящие под этими квадратами линейные формы будут пропорциональны, т.е.

$$\alpha_2 u_2^+ + u_3^- = \lambda_2 u_3^-,$$

что возможно только если $\alpha_2 = 0$ или $\tau_5 = \tau_2 + \tau_3$. В этом случае $\Delta_2 = 0$.

Теорема 7 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston: Birkhäuser, 2003.
2. *Fradkov A.* Early Ideas of the Absolute Stability Theory / 2020 European Control Conference (ECC). May 12–15. 2020. Saint Petersburg. Russia. P. 762–768. https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143937
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Линейные матричные неравенствав системах управления с неопределенностью // АиТ. 2021. № 1. С. 3–54.

   Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
4. *Якубович В.А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // АиТ. 1967. № 6. С. 5–30.

   Yakubovich V.A. Frequency conditions for the absolute stability of control systems with several nonlinear or linear nonstationary blocks // Autom. Remote Control. 1967. V. 28. No. 6. P. 1. P. 857–880.
5. *Якубович В.А.* Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. II. Системы с нестационарными нелинейностями. Круговой критерий // АиТ. 1971. № 6. С. 25–34.

   Yakubovich V.A. Absolute Instability of Nonlinear Control Systems. II // Autom. Remote Control. 1971. V. 32. No. 6. P. 1. P. 876–884.
6. *Гусев С.В., Лихтарников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // АиТ. 2006. № 10. С. 77–121.

   Gusev S.V., Likhtarnikov A.L. Kalman–Popov–Yakubovich Lemma and the S-Procedure: A Historical Essay // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 11. P. 1768–1810.

7. *Скородинский В.И.* Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с двумя нелинейными нестационарными элементами. I // АиТ. 1981. № 9. С. 21–29.

   Skorodinskii V.I. Absolute Stability and Absolute Instability of Control Systems with Two Nonlinear Nonstationary Elements. I // Autom. Remote Control. 1981. V. 42. No. 9. P. 1. P. 1149–1157.

8. *Каменецкий В.А.* Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с несколькими нелинейными нестационарными элементами // АиТ. 1983. № 12. С. 20–30.

   Kamenetskii V.A. Absolute Stability and Absolute Instability of Control Systems with Several Nonlinear Nonstationary Elements // Autom. Remote Control. 1983. V. 44. No. 12. P. 1543–1552.

9. *Каменецкий В.А.* Частотные условия устойчивости гибридных систем // АиТ. 2017. № 12. С. 3–25.

   Kamenetskiy V.A. Frequency-Domain Stability Conditions for Hybrid Systems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 12. P. 2101–2119.

10. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

11. *Каменецкий В.А.* Системы с переключениями, системы Лурье, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана // АиТ. 2019. № 8. С. 9–28.

    Kamenetskiy V.A. Switched Systems, Lur'e Systems, Absolute Stability, Aizerman Problem // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 8. P. 1375–1389.

12. *Каменецкий В.А.* Дискретные попарно связные системы с переключениями и системы Лурье, критерий Цыпкина для систем с двумя нелинейностями // АиТ. 2022. № 9. С. 55–80.

    Kamenetskiy V.A. Discrete-Time Pairwise Connected Switched Systems and Lur'e Systems. Tsypkin's Criterion for Systems with Two Nonlinearities // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 9. P. 1371–1392.

13. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 14.07.2022

После доработки 07.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022