Автоматика и телемеханика, № 2, 2023

Нелинейные системы

© 2023 г. С.Т. АЛИЕВА, канд. физ.-мат. наук (saadata@mail.ru)
(Бакинский государственный университет;
Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ НЕЛИНЕЙНЫМИ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рассматривается задача оптимального управления объектом, описываемая системой нелинейных разностных уравнений дробного порядка. Такие задачи представляют собой дискретный аналог задач оптимального управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями дробного порядка. При предположении открытости области управления с помощью модифицированного варианта метода приращения вычислены первая и вторая вариации функционала качества. Установлены соответственно необходимое условие оптимальности первого порядка (аналог уравнения Эйлера) и общее необходимое условие оптимальности второго порядка. С использованием представлений решения линеаризованных разностных уравнений дробного порядка из общего условия оптимальности второго порядка получены необходимые условия оптимальности, выраженные через параметры исходной задачи. С помощью выбора допустимой вариации управления специальным образом сформулировано поточечное необходимое условие оптимальности классических экстремалей.

Ключевые слова: допустимое управление, оптимальное управление, открытое множество, разностное уравнение дробного порядка, дробный оператор, дробная сумма, аналог уравнения Эйлера.

DOI: 10.31857/S0005231023020034, **EDN:** OMMDXO

1. Введение

Дробное исчисление играет важную роль во многих областях науки и техники. Известно, что (см., например, [1]) дробное интегро-дифференциальное исчисление берет свое начало с обсуждения в переписке между Г. Лопиталем и Г. Лейбницем о смысле производной порядка $\frac{1}{2}$. Но идея использования дробной разности появилась относительно недавно (см., например, [2–5]).

Дробное исчисление также находит применение в задачах оптимального управления, описываемых разностными уравнениями дробного порядка [6–8].

Исходя из теоретических и практических приложений разработка качественной теории задач оптимального управления, описываемых различными разностными уравнениями дробного порядка, также является актуальной. Отметим, что теория необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления, описываемых разными разностными уравнениями дробного порядка, очень мало разработана.

С учетом вышесказанного в предлагаемой работе изучается одна задача оптимального управления, описываемая системой разностных уравнений дробного порядка [2, 3]. При предположении открытости области управления установлен аналог уравнения Эйлера [9, 10] и выведены необходимые условия оптимальности второго порядка.

2. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

Приведем некоторые понятия и определения, которые в дальнейшем будут использованы.

Следующие определения, являясь стандартными [3–6], служат основой для определения разностей дробного порядка.

Пусть N множество натуральных чисел вместе с нулем. Для $a \in Z$ введем следующие обозначения: $N_a^+ = \{a, a+1, a+2, \ldots, \}$, $\sigma(t) = t+1$, $\rho(t) = t-1$.

О п р е д е л е н и е 1. *Дробная сумма порядка α определяется следующим образом:*

$$\Delta^{-\alpha} u(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j+\alpha-1}{j} u(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-j+\alpha-1}{n-j} u(j),$$

а дробный оператор порядка α определяется следующим образом:

$$\Delta^{\alpha} u(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j+\alpha-1}{j} \Delta u(n-j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \binom{n-j-\alpha-1}{n-j} u(j) - \binom{n-\alpha-1}{n-1} u(0).$$

Здесь биномиальный коэффициент $\binom{a}{n}$ определяется по формуле

$$\binom{a}{n} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)\,\Gamma(n+1)}, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Пусть для любого $x, y \in R$, $x^{(y)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-y)}$, где Γ — гамма-функция, для которой выполняется тождество

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Заметим, что дробную сумму и дробный оператор порядка α можно определить еще и следующим образом.

Пусть a произвольное действительное число и $b = k + a$, здесь $k \in N$, $k \geq 2$; $T = \{a, a+1, \ldots, b\}$, $T^k = \{a, a+1, \ldots, b-1\}$, а T — множество функций, определенных на T.

Определение 2. Пусть для $f \in \mathrm{T}$ — левая и правая дробные суммы порядка $\alpha > 0$ определяются соответственно следующим образом:

$$
{}_a\Delta_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t - \sigma(s))^{(\alpha-1)} f(s),
$$

$$
{}_t\Delta_b^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=t+\alpha}^{b} (s - \sigma(t))^{(\alpha-1)} f(s).
$$

Определение 3. Пусть $0 < \alpha \leq 1$ и $\mu = 1 - \alpha$, тогда для функции $f \in \mathrm{T}$ левые и правые дробные операторы порядка α определяются следующим образом:

$$
{}_a\Delta_t^{\alpha} f(t) = \Delta \left({}_a\Delta_t^{-\mu} f(t) \right),
$$

$$
{}_t\Delta_b^{\alpha} f(t) = -\Delta \left({}_t\Delta_b^{-\mu} f(t) \right).
$$

Приведем некоторые известные свойства дробной суммы и дробной разности:

1. $\Delta^{\alpha} \Delta^{\beta} f(t) = \Delta^{\alpha+\beta} f(t)$;
2. $\Delta^{-\alpha} \Delta^{\alpha} f(t) = f(t) - f(0)$;
3. $\Delta^{\alpha} \Delta^{-\alpha} f(t) = f(t)$;
4. $\Delta^{\alpha} f(0) = 0$ и $\Delta^{\alpha} f(1) - f(0) = \Delta f(1)$.

Имеет место (см., например, [6])

Теорема 1 (о дробном суммировании по частям). *Пусть f и g — неотрицательные функции с действительными значениями, определенными на T^k и T соответственно. Если $0 < \alpha \leq 1$ и $\mu = 1 - \alpha$, то*

$$
\sum_{t=a}^{b-1} f(t)\, {}_a\Delta_t^{\alpha} g(t) = f(b-1)g(b) - f(a)g(a) + \sum_{t=a}^{b-2} {}_t\Delta_b^{\alpha} f(t) g^{\sigma}(t) +
$$

$$
+ \frac{\mu}{\Gamma(\mu+1)} g(a) \left(\sum_{t=a}^{b-1} (t + \mu - \alpha)^{(\mu-1)} f(t) - \sum_{t=\sigma(a)}^{b-1} (t + \mu - \sigma(\alpha))^{(\mu-1)} f(t) \right).
$$

Рассмотрим систему линейных неоднородных разностных уравнений дробного порядка

$$
(1) \qquad \Delta^{\alpha} y(t+1) = A(t) y(t) + g(t)
$$

с начальными условиями

$$y(t) = y_0. \tag{2}$$

Здесь $y = (y_1, \dots, y_n)'$ — n-мерный вектор-столбец, $g = (g_1, \dots, g_n)'$ — заданный n-мерный вектор, $y_0 = (y_{1_0}, \dots, y_{n_0})'$ — заданный постоянный вектор столбец, t_0, t_1 — заданные числа, $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$ — заданная $n \times n$-дискретная матричная функция.

Задача (1)–(2) является дискретным аналогом задачи Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Имеет место

Теорема 2 [2]. *Решение $y(t)$ системы линейных неоднородных разностных уравнений дробного порядка* (1)–(2) *допускает представление*

$$y(t) = y_0 \prod_{j=t_0}^{t-1} \left[1 + R_\alpha (t-1, j)\, A(j)\right] + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha (t-1, j)\, f(j) \times$$
$$\times \prod_{k=j+1}^{t-1} \left[1 + R_\alpha (t-1, k)\, A(k)\right].$$

Здесь

$$R_\alpha (t, j) = \begin{pmatrix} t - j + \alpha - 1 \\ t - j \end{pmatrix}.$$

3. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала

$$S(u) = \varphi\left(x\left(t_1\right)\right) \tag{3}$$

при следующих ограничениях

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \tag{4}$$

$$\Delta^\alpha x\,(t+1) = f\left(t, x(t), u(t)\right), \quad t \in T, \tag{5}$$

$$x\left(t_0\right) = x_0. \tag{6}$$

Здесь $x(t)$ — n-мерный вектор фазовых переменных, $u(t)$ — r-мерный дискретный вектор управляющих воздействий, U — заданное непустое ограниченное и открытое множество, числа t_0, t_1 и постоянный вектор x_0 заданы,

$f(t,x,u)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x,u) до второго порядка включительно, $\varphi(x)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а $\Delta^{\alpha}x(t)$, $0<\alpha\le 1$ — дробный оператор порядка α [11, 12].

Управляющую функцию назовем допустимым управлением, если она удовлетворяет ограничению (4).

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении дискретный аналог задачи Коши, т.е. задача (5)–(6), имеет единственное решение.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (3) при ограничениях (4)–(6), называется оптимальным управлением, а пара $(u(t),x(t))$ — оптимальным процессом.

4. Формула приращения критерия качества

Пусть $(u(t),x(t))$ — фиксированный, а $(\overline{u}(t)=u(t)+\Delta u(t), \overline{x}(t)=x(t)+\Delta x(t))$ — произвольные допустимые процессы.

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&H(t,x,u,\psi)=\psi'(t)f(t,x,u),\\
&H_x[t]\equiv H_x(t,x(t),u(t),\psi(t)),\\
&H_{xx}[t]\equiv H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t)),\\
&H_u[t]\equiv H_u(t,x(t),u(t),\psi(t)),\\
&f_x[t]\equiv f_x(t,x(t),u(t)),\\
&f_u[t]\equiv f_u(t,x(t),u(t)).
\end{aligned}
$$

Здесь $\psi(t)$ — пока неизвестный n-мерный вектор-столбец, а $H(t,x,u,\psi)$ — функция Гамильтона–Понтрягина для рассматриваемой задачи оптимального управления (3)–(6).

Тогда по схеме, аналогичной схеме из [11, 12], получаем

$$
\begin{gathered}
\Delta S(u)=\varphi(x(t_1)+\Delta x(t_1))-\varphi(x(t_1))+\\
+\psi'(t_1-1)\,\Delta x(t_1)+\sum_{t=t_0}^{t_1-2}{}_{t}\Delta^{\alpha}{}_{\rho(t_1)}\psi(t-1)\,\Delta x(t)-\\
-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big[H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),\psi(t))-H(t,x(t),u(t),\psi(t))\Big].
\end{gathered}
\tag{7}
$$

С помощью полученного разложения (7) будет доказано необходимое условие оптимальности первого порядка.

При сделанных предположениях, используя формулу Тейлора, формулу приращения (7) функционала $S(u)$, соответствующую допустимым управлениям $\overline{u}(t)$ и $u(t)$, можно представить в виде

$$\Delta S(u) = \varphi_x\left(x\left(t_1\right)\right)\Delta x\left(t_1\right) + \frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\varphi_{xx}\left(x\left(t_1\right)\right)\Delta x\left(t_1\right) +$$

$$+\psi'(t_1-1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta x(t) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-2}{}_t\Delta^{\alpha}{}_{\rho(t_1)}\psi'(t-1)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H_x'\left[t\right]\Delta x(t) + H_u'\left[t\right]\Delta u(t)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\Delta x'(t)H_{xx}\left[t\right]\Delta x(t) + \Delta x'(t)H_{xu}\left[t\right]\Delta u(t) +\right.$$

$$\left. + 2\Delta u'(t)H_{ux}\left[t\right]\Delta x(t) + \Delta u'(t)H_{uu}\left[t\right]\Delta u(t)\right] +$$

$$+ o_1\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|^2\right) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2. \tag{8}$$

Здесь $\|\alpha\|$ — норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$, а $o\left(\alpha\right)$ — величина более высокого порядка α, т.е. $o\left(\alpha\right) \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Теперь предположим, что $\psi(t)$ является решением следующей системы линейных разностных уравнений дробного порядка:

$$\begin{cases} {}_t\Delta^{\alpha}{}_{\rho(t_1)}\psi'(t-1) = H_x\left[t\right], \quad t = t_1-1, t_1-2, \ldots, t_0, \\ \psi(t_1-1) = -\varphi_x(x(t_1)). \end{cases} \tag{9}$$

Систему (9) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче (3)–(6). При выполнении соотношений (9) формула приращения (8) примет следующий вид:

$$\Delta S(u) = \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'\left[t\right]\Delta u(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\Delta x'(t)H_{xx}\left[t\right]\Delta x(t) + \Delta x'(t)H_{xu}\left[t\right]\Delta u(t) +\right.$$

$$\left. + 2\Delta u'(t)H_{ux}\left[t\right]\Delta x(t) + \Delta u'(t)H_{uu}\left[t\right]\Delta u(t)\right] +$$

$$+ o_1\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|^2\right) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2. \tag{10}$$

Поскольку по предложению множество U открытое, то специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_{\varepsilon}(t) = \varepsilon\delta u(t). \tag{11}$$

Здесь ε — достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t)$ — произвольная r-мерная вектор-функция со значениями из R^r.

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение допустимой траектории $x(t)$, отвечающее специальному приращению управления $u(t)$, определяемое формулой (11).

В [12] доказана следующая оценка:

$$\|\Delta x(t)\| \le L_1 \prod_{j=t_0}^{t-1} (1 + A_\alpha(t,j)\,\|\Delta u(j)\|), \quad t \in T \cup t_1, \quad L_1 = \text{const} > 0.$$

Из этой оценки следует, что

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \le L_2\varepsilon, \quad t \in T \cup t_1, \quad L_2 = \text{const} > 0. \tag{12}$$

С учетом формул (11) и (12) доказывается, что по схеме, например, из [9, 13] для специального приращения $\Delta x_\varepsilon(t)$ траектории $x(t)$ имеет место разложение

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon; t), \tag{13}$$

где $\delta x(t)$ — n-мерная вектор-функция, являющаяся решением уравнения (уравнение в вариациях)

$$\Delta^\alpha \delta x\,(t+1) = f_x\,[t]\,\delta x(t) + f_u\,[t]\,\delta u(t) \tag{14}$$

с начальным условием

$$\delta x\,(t_0) = 0. \tag{15}$$

Принимая во внимания соотношения (11)–(15) из формулы приращения (10), получим

$$\Delta S_\varepsilon(u) = S(u+\varepsilon\delta u) - S(u) =$$

$$= -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'\,[t]\,\varepsilon\delta u(t) + \frac{1}{2}(\varepsilon\delta x(t_1) + o(\varepsilon;t_1))'\varphi_{xx}(x(t_1))(\varepsilon\delta x(t_1) + o(\varepsilon;t_1)) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big[(\varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon;t))' H_{xx}\,[t]\,(\varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon;t)) +$$

$$+ 2\varepsilon\delta u(t)' H_{ux}\,[t]\,(\varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon;t)) + \varepsilon^2\delta u(t)'(t) H_{uu}\,[t]\,\delta u(t)\Big] + o(\varepsilon^2) =$$

$$= -\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'\,[t]\,\delta u(t) + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\delta x(t_1) -$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big[\delta x'(t) H_{xx}\,[t]\,\delta x(t) + 2\varepsilon\delta u'(t) H_{ux}\,[t]\,\delta x(t) +$$

$$+ \delta u'(t) H_{uu}\,[t]\,\delta u(t)\Big] + o(\varepsilon^2). \tag{16}$$

5. Необходимые условия оптимальности

Доказанное специальное разложение второго порядка (16) критерия качества позволяет получить необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Из классического вариационного исчисления известно (см., например, [9, 10]), что если имеет место разложение

$$S(u+\varepsilon\delta u)-S(u)=\varepsilon A_1+\frac{\varepsilon^2}{2}A_2+o\left(\varepsilon^2\right), \tag{17}$$

где A_1 и A_2 — независимые от ε числа, то A_1 и A_2 называются соответственно первой и второй вариациями функционала $S\,(u)$ в точке u и обозначаются следующим образом:

$$A_1=\delta^1 S(u,\delta u),$$
$$A_2=\delta^2 S(u,\delta u).$$

По этому определению из разложения (17) вытекает, что первая и вторая вариации функционала $S\,(u)$ имеют соответственно следующий вид:

$$\delta^1 S(u,\delta u)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H'_u\,[t]\,\delta u(t), \tag{18}$$

$$\delta^2 S(u,\delta u)=\delta x'(t_1)\varphi_{xx}\left(x\left(t_1\right)\right)\delta x\left(t_1\right)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big[\delta x'(t)H_{xx}\,[t]\,\delta x(t)+2\varepsilon\delta u'(t)H_{ux}\,[t]\,\delta x(t)+\delta u'(t)H_{uu}\,[t]\,\delta u(t)\Big]. \tag{19}$$

Из классического вариационного исчисления также известно, что если функционал $S(u)$ в точке $u=u(t)$ получает свое минимальное значение, то для любого $\delta u(t)$ его первая вариация равна нулю:

$$\delta^1 S(u,\delta u)=0, \tag{20}$$

а вторая вариация неотрицательна:

$$\delta^2 S(u,\delta u)\geq 0. \tag{21}$$

Отсюда следует, что (в силу (20), (21)) вдоль оптимального процесса $(u(t),x(t))$ для любого $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H'_u\,[t]\,\delta u(t)=0, \tag{22}$$

$$\delta x'(t_1)\varphi_{xx}\left(x\left(t_1\right)\right)\delta x(t_1) -$$

$$(23)\quad -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big[\delta x'(t)H_{xx}\left[t\right]\delta x(t) + 2\delta u(t)'H_{ux}\left[t\right]\delta x'(t) + \delta u'(t)H_{uu}\left[t\right]\delta u(t)\Big] \geq 0.$$

Как видно, тождество (22) и неравенство (23) есть неявные необходимые условия оптимальности первого и второго порядков соответственно.

Но они позволяют получить конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности первого и второго порядков. С этой целью, используя произвольность $\delta u(t)$, определим его следующим образом:

$$(24)\qquad \delta u(t) = \begin{cases} v, & t = \theta \in T, \\ 0, & t \neq \theta \in T, \end{cases}$$

где $\theta \in T$, а $v \in R^r$ — произвольный вектор.

С учетом (24) из (22) получим

$$H_u'\left[\theta\right]v = 0$$

для всех $v \in R^r$, $t = \theta \in T$.

Из последнего соотношения в силу произвольности вектора v следует тождество

$$(25)\qquad H_u\left[\theta\right] = 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Для оптимальности допустимого управления* $u(t)$ *в рассматриваемой задаче* (3)–(6) *необходимо, чтобы соотношение* (25) *выполнялось для любого* $\theta \in T$.

Соотношение (25) является аналогом уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи оптимального управления. Как видно, уравнение Эйлера является конструктивно проверяемым необходимым условием оптимальности. А неравенство (23) есть неявное необходимое условие оптимальности второго порядка.

Допустимое управление $u(t)$, являющееся решением уравнения Эйлера, назовем классической экстремалью.

Как известно, $\delta x(t)$ (вариация траектории) является решением задачи (14)–(15). Следовательно, по теореме 2 $\delta x(t)$ можно представить в следующем виде:

$$(26)\qquad \delta x(t) = \sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha\left(t-1, j\right) f_u\left[j\right]\delta u\left(j\right)\prod_{k=j+1}^{t-1}\left[1 + R_\alpha\left(t-1, k\right) f_x\left[k\right]\right].$$

Используя формулу (26), займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенстве (23).

Ясно, что

$$\delta x'(t_1)\,\varphi_{xx}(x(t_1))\,\delta x(t_1)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}R_\alpha(t-1,\tau)\,f_u[\tau]\,\delta u(\tau)\times$$

$$\times\prod_{k=\tau+1}^{t_1-1}\Big[1+R_\alpha(t-1,k)\,f_x[k]\Big]\varphi_{xx}(x(t_1))\times$$

$$\times R_\alpha(t-1,s)\,f_u[s]\,\delta u(s)\prod_{k=s+1}^{t_1-1}\Big[1+R_\alpha(t-1,k)\,f_x[k]\Big], \tag{27}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta x'(t)H_{xx}[t]\,\delta x(t)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}R_\alpha(t-1,\tau)f_u[\tau]\delta u(\tau)\prod_{k=\max(\tau+1,s+1)}^{t_1-1}\Big[1+R_\alpha(t-1,\tau)f_x[\tau]\Big]\times\right.$$

$$\left.\times H_{xx}[t]\Big[1+R_\alpha(t-1,s)\,f_x[s]\Big]R_\alpha(t-1,s)\,f_u[s]\,\delta u(s)\right], \tag{28}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta u(t)'H_{ux}[t]\,\delta x'(t)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta u'(t)H_{ux}[t]\left[\sum_{\tau=t_0}^{t-1}R_\alpha(t-1,\tau)\prod_{k=\tau+1}^{t-1}[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]]f_u[\tau]\delta u(\tau)\right]. \tag{29}$$

Учитывая тождества (27)–(29) в неравенстве (23), получим

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}R_\alpha(t-1,\tau)\,f_u[\tau]\,\delta u(\tau)\prod_{k=\tau+1}^{t_1-1}\Big[1+R_\alpha(t-1,k)\,f_x[k]\Big]\varphi_{xx}(x(t_1))\times$$

$$\times R_\alpha(t-1,s)\,f_u[s]\,\delta u(s)\prod_{k=s+1}^{t_1-1}\Big[1+R_\alpha(t-1,k)\,f_x[k]\Big]-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}R_\alpha(t-1,\tau)\,f_u[\tau]\,\delta u(\tau)\times\right.$$

$$\times\prod_{k=\max(\tau+1,s+1)}^{t_1-1}\Big[1+R_\alpha(t-1,\tau)\,f_x[\tau]\Big]H_{xx}[t]\times$$

$$\left.\times\Big[1+R_\alpha(t-1,s)\,f_x[s]\Big]R_\alpha(t-1,s)\,f_u[s]\,\delta u(s)\right]+$$

$$+2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta u'(t)H_{ux}[t]\left[\sum_{\tau=t_0}^{t-1}R_\alpha(t-1,\tau)\prod_{k=\tau+1}^{t-1}\big[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]\big]f_u[\tau]\delta u(\tau)\right]+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta u'(t)H_{uu}\,[t]\,\delta u(t)\geq 0. \tag{30}$$

Пусть $M\,(\tau,s)$ — $(n\times n)$ матричная функция, определяемая формулой

$$M\,(\tau,s)=-R_\alpha\,(t-1,\tau)\prod_{k=\tau+1}^{t_1-1}\big[1+R_\alpha\,(t-1,k)\,f_x\,[k]\,\big]\varphi_{xx}\,(x\,(t_1))\times$$

$$\times R_\alpha\,(t-1,\tau)\prod_{k=s+1}^{t_1-1}\big[1+R_\alpha\,(t-1,k)\,f_x\,[k]\,\big]- \tag{31}$$

$$-R_\alpha(t-1,\tau)\prod_{k=\max(\tau+1,s+1)}^{t_1-1}\big[1+R_\alpha(t-1,\tau)f_x[\tau]\big]H_{xx}[t]\big[1+R_\alpha(t-1,s)f_x[s]\big].$$

С учетом формулы (31), неравенство (30) записывается в виде

$$2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta u'(t)H_{ux}[t]\sum_{\tau=t_0}^{t-1}R_\alpha(t-1,\tau)\prod_{k=\tau+1}^{t-1}\big[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]\big]f_u[\tau]\delta u(\tau)+$$

$$+\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\delta u(\tau)f_u'[\tau]M(\tau,s)f_u[s]\delta u(s)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta u(t)'H_{uu}[t]\delta u(t)\leq 0. \tag{32}$$

Т е о р е м а 4 (необходимое условие оптимальности второго порядка). *Для оптимальности классической экстремали в задаче* (3)–(6) *необходимо, чтобы неравенство* (32) *выполнялось для всех* $\delta u(t)\in U$, $t\in T$, *где* $M(\tau,s)$ *определяется по формуле* (31).

Доказанное необходимое условие оптимальности является довольно общим. Из него, используя произвольность вариаций $\delta u(t)$ управляющих функций $u(t)$, можно получить ряд более легко проверяемых условий оптимальности.

Непосредственным следствием теоремы 4 является

С л е д с т в и е. Для оптимальности классической экстремали в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство

$$v'\left[f_u'\,[\theta]\,M\,(\theta,\theta)\,f_u\,[\theta]+H_{uu}\,[\theta]\right]v\leq 0$$

выполнялось для всех $v\in R^r,\ \theta\in T.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка, и некоторые их приложения. Минск: “Наука и техника”, 1987.
2. *Jagan Mohan J., Deekshitulu G.V.S.R.* Fractional Order Difference Equations // Hindawi Publish. Corporat. Int. J. Different. Equat. 2012. Article ID 780619, 11 p. https://doi.org/10.1155/2012/780619
3. *Christopher G., Piterson A.C.* Discrete fractional calculus. Department of Mathematic University of Nebraska–Lincoln Lincoln, NE, USA. 2015.
4. *Feckan M., Wang J., Pospisil M.* Fractional-order equations and inclusions. Germany. Berlin. Deutsche Nationalbibliothek. V. 3. 2010. 384 p.
5. *Chen F., Luo X., Zhou Y.* Existence results for nonlinear fractional order difference equation // Advanc. Differen. Equat. 2011. Article ID 713201. 12 p.
6. *Nuno R.O. Bastos, Rui A.C. Ferreira, Delfim F.M. Torres.* Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations// Discret. Contin. Dynam. Syst. 2011. V. 29. No. 2. P. 417–437.
7. *Bahaa G.M.* Fractional optimal control problem for differential system with delay argument // Advanc. Differen. Equat. 2017. No. 1. P. 1–19.
8. *Bahaa G.M.* Fractional optimal control problem for differential system with control constraints // Filomat. 2016. V. 30. No. 8. P. 2177–2189.
9. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2011.
10. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
11. *Алиева С.Т.* Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка // Вест. Том. ун-та. Управление, вычислительная техника. 2021. № 54. С. 4–11.
12. *Алиева С.Т., Мансимов К.Б.* Аналог линеаризованного принципа максимума для задачи оптимального управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка // Вест. Перм. ун-та, Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 1(52). С. 9–15.
13. *Мансимов К.Б.* Дискретные системы. Баку: Изд-во БГУ, 2013.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 14.02.2022

После доработки 11.10.2022

Принята к публикации 26.10.2022