Автоматика и телемеханика, № 12, 2023

**© 2023 г. В.Н. БУРКОВ, д-р техн. наук (vlab17@bk.ru),
И.В. БУРКОВА, д-р техн. наук (irbur27@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
А.Р. КАШЕНКОВ, канд. техн. наук (alex27k@mail.ru)
(Вологодский государственный технический университет)**

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ ГРУППОВОГО СТИМУЛИРОВАНИЯ

Рассматривается задача стимулирования сокращения продолжительности проекта. Заданы величины сокращения продолжительностей работ проекта и соответствующие затраты. Для компенсации затрат применяется система группового стимулирования. В этой системе все работы разбиваются на группы и для каждой группы применяется унифицированная система стимулирования. Рассмотрены два типа унифицированных систем для групп — линейная и скачкообразная. Задача заключается в разбиении работ на группы и в выборе системы стимулирования для каждой группы так, чтобы суммарный фонд стимулирования был минимален. Предложены алгоритмы решения, в основе которых лежит определение кратчайшего пути в сети. Рассмотрен также ряд частных случаев (разбиение с минимальным числом групп и разбиение с максимальным числом групп).

Ключевые слова: система группового стимулирования, унифицированная система линейного стимулирования, унифицированная система скачкообразного стимулирования, кратчайший путь в сети.

DOI: 10.31857/S0005231023120085, **EDN:** NETGTR

1. Введение

Рассматривается проект из n работ. Для каждой работы заданы величина сокращения ее продолжительности и затраты на это сокращение. Для компенсации затрат определяется система стимулирования.

Задачи построения оптимальных систем стимулирования рассматривались во многих работах ([1–3] и др.). В основном рассматриваются системы двух типов — системы индивидуального стимулирования и системы унифицированного стимулирования. В системах индивидуального стимулирования для каждой группы определяется своя система, выбранная из заданного класса систем (линейные, скачкообразные, ранговые и др. [1]). В системах унифицированного стимулирования определяется единая система для всех агентов. Достоинством систем индивидуального стимулирования является существенно меньший в ряде случаев фонд стимулирования по сравнению с системами унифицированного стимулирования, а недостатками — незаинтересованность в снижении издержек и достаточно большие возможности для манипулирования. Достоинством систем унифицированного стимулирования являются меньшие возможности для манипулирования, существенно большая заинтересованность в снижении издержек, а недостатком — существенно большая во многих случаях величина фонда стимулирования. Системы группового стимулирования занимают промежуточное положение. В таких системах множество всех агентов разбивается на группы и для каждой группы применяется система унифицированного стимулирования. Системы группового стимулирования сохраняют в определенной степени достоинства систем унифицированного и индивидуального стимулирования и в то же время снижают их недостатки.

В статье дается постановка задач синтеза оптимальных систем группового стимулирования и рассматриваются методы их решения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим проект, состоящий из n работ. Определен план сокращения продолжительности проекта, согласно которому продолжительность работы i сокращается на величину y_i. Определены также затраты исполнителей на сокращение продолжительности z_i, $i = \overline{1,n}$.

Для компенсации затрат требуется определить систему группового стимулирования (ГС). Рассмотрим систему ГС, в которой все работы разбиваются на $1 < m < n$ групп и для каждой группы определяется некоторая система унифицированного стимулирования (УС). Будем рассматривать два класса систем УС — системы линейного стимулирования (ЛС) и системы скачкообразного стимулирования (СС). Обозначим через R_j множество работ, входящих в группу j.

$$\bigcup_j R_j = R, \quad R_i \cap R_j = \varnothing \tag{1}$$

для всех i, j (R — множество всех работ). Если для группы j выбрана система ЛС, то очевидно, что для компенсации затрат всех исполнителей работ этой группы минимальный фонд стимулирования составит

$$S_j = a_j T_j, \tag{2}$$

где

$$a_j = \max_{i \in R_j} k_i, \quad T_j = \sum_{i \in R_j} y_i, \quad k_i = \frac{z_i}{y_i}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Если для группы j выбрана система СС, то до минимальной фонд стимулирования на компенсацию затрат исполнителей составит

$$S_j = n_j \max_{i \in R_j} z_i, \tag{3}$$

где n_j – число работ в группе j.

Задача 1. Определить разбиение R_j, $j = \overline{1,m}$, и выбрать систему стимулирования для каждой группы так, чтобы фонд стимулирования был минимальным. Эту задачу будем рассматривать в трех вариантах: в первом — для всех групп используются только системы класса ЛС, во втором — только системы класса СС, а в третьем могут использоваться системы обоих классов.

Дадим формальную постановку задачи. Обозначим $x_{ij} = 1$, если работа i входит в группу j, $x_{ij} = 0$ — в противном случае. В случае системы ЛС фонд стимулирования j-й группы составит

$$S_{1j} = \left(\sum_i x_{ij} y_i \right) \max_i k_i x_{ij}. \tag{4}$$

В случае системы СС фонд стимулирования j-й группы составит

$$S_{2j} = \left(\sum_i x_{ij} \right) \max_i k_i y_i x_{ij}, \tag{5}$$

а в случае смешанной системы фонд стимулирования j-й группы составит

$$S_{3j} = \min \left(S_{1j}, S_{2j} \right). \tag{6}$$

Соответственно, общий фонд стимулирования равен

$$S_k = \sum_j S_{kj}, \quad k = \overline{1,3} \tag{7}$$

в зависимости от выбранной системы стимулирования k.

Ограничения задачи могут иметь различный вид. Так, если задано число n_j работ в каждой группе, то ограничения принимают вид

$$\sum_i x_{ij} = n_j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{8}$$

Если число работ в группе должно быть в определенных границах, что ограничения принимают вид

$$l_1 \leqslant \sum_i x_{ij} \leqslant l_2. \tag{9}$$

Возможны и другие ограничения.

Задача 2. Определить (x_{ij}), $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, минимизирующие (7) при заданных ограничениях (8), (9) или других.

Рассмотрим методы решения поставленных задач.

3. Системы ЛС при равных y_i

Рассмотрим случай, когда все $y_i = y$, $i = \overline{1, n}$. Пусть работы пронумерованы по возрастанию (неубыванию) k_i, т.е.

$$k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_n.$$

Назовем эту последовательность исходной.

Определение 1. *Куском исходной последовательности называется ее часть от некоторой работы i до работы $j > i$.*

Теорема 1. *Оптимальное разбиение работ на группы представляет собой совокупность кусков исходных последовательностей.*

Доказательство. Примем сначала, что все k_i различны. Пусть P — оптимальное разбиение. Рассмотрим группу с максимальным k_n. Если эта группа не является куском, то найдется максимальный номер s исходный последовательности такой, что соответствующая работа отсутствует в группе с k_n, а присутствует в другой группе, причем в этой группе она имеет максимальную величину k_s. Поменяем местами работу s с любой работой из группы с k_n, не входящей в кусок. Очевидно, что затраты на стимулирование в группе с максимальным k_n не изменятся, в то же время в группе с i_s затраты на стимулирование уменьшатся, так как максимальная k_i в группе с i_s меньше, чем k_s, что противоречит оптимальности разбиения P. Таким образом, группа с работой n является куском. Далее аналогично рассматриваем следующую группу с максимальным k_i и т.д.

Откажемся от предположения, что все k_i различны. В этом случае существует несколько исходных последовательностей, однако для любого оптимального разбиения найдется исходная последовательность такая, что разбиение будет совокупностью кусков этой последовательности. Теорема доказана.

Пусть работы пронумерованы по возрастанию (неубыванию) k_i, т.е.

$$k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_n.$$

Построим сеть допустимых разбиений (СДР) работ на группы. Сеть состоит из входа, выхода и $(m-1)$ слоя. Каждой вершине i p-го слоя соответствует суммарное число работ Q_{ip}, входящих в первые p групп. Заметим, что минимальное число работ равно 2, а максимальное — $n - 2(m-p)$, поскольку в каждую группу должно входить не менее двух работ. Поэтому число вершин p-го слоя равно

$$a = n - 2(m-p) - 2p + 1 = n - 2m + 1$$

и не зависит от p.

Вершину i p-го слоя соединяем дугой с вершиной j $(p+1)$-го слоя, если

$$Q_{jp+1} - Q_{ip} \geqslant 2.$$

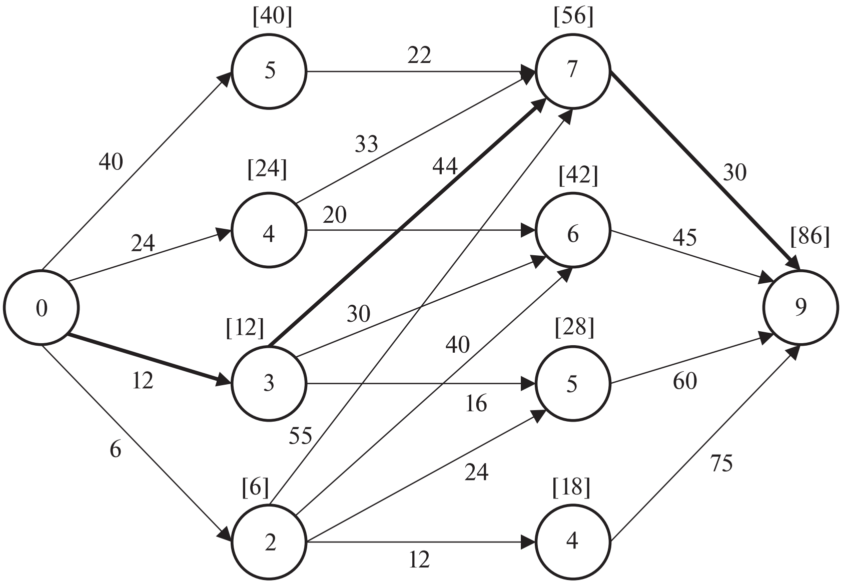

Рис. 1.

Вход сети 0 соединяем дугой с каждой вершиной 1-го слоя, а каждую вершину $(m-1)$ слоя соединяем дугой с выходом сети.

Т е о р е м а 2. Каждому допустимому варианту разбиения работ на группы соответствует единственный путь в сети ДР, и каждому пути в сети ДР соответствует единственный вариант разбиения работ на группы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждому допустимому варианту $(n_1, \ldots, n_m)$ соответствует последовательность чисел Q_{ip}, $p = \overline{1, m-1}$ таких, что разность чисел соседних слоев больше или равна 2. Согласно построению сети ДР в этом случае существует дуга, соединяющая соответствующие вершины. И наоборот, каждому пути в сети ДР соответствует последовательность $(n_1, \ldots, n_m)$, где n_k равно разности $(Q_{jk+1} - Q_{ik})$ соответствующих смежных вершин. Эта последовательность определяет единственное разбиение работ на группы. Теорема доказана.

П р и м е р 1. Рассмотрим проект из 9 работ. Пусть $m = 3$. Имеем

$$q = 9 - 6 + 1 = 4.$$

Соответствующая сеть приведена на рис. 1. В табл. 1 приведены данные о работах. Примем $y_i = 1$ для всех i, т.е. $z_i = k_i$. Длины дуг указаны на рис. 1. Кратчайший путь (0,3,7,9) имеет длину 86. Оптимальное разбиение на три группы: $R_1 = (1, 2, 3)$, $R_2 = (4, 5, 6, 7)$, $R_3 = (8, 9)$.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_i	1	3	4	6	8	10	11	12	15
z_i	1	15	12	12	8	40	33	24	15

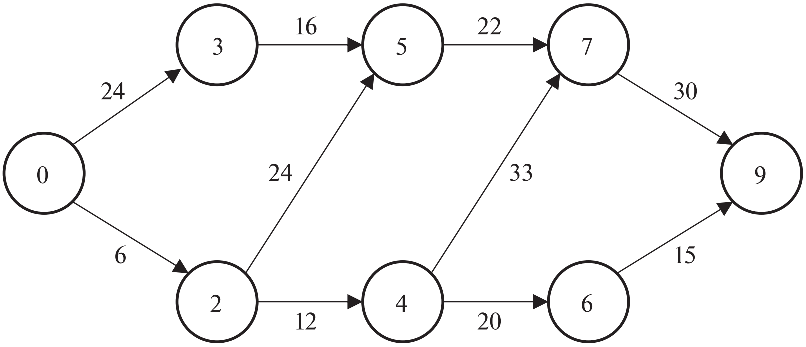

Рис. 2.

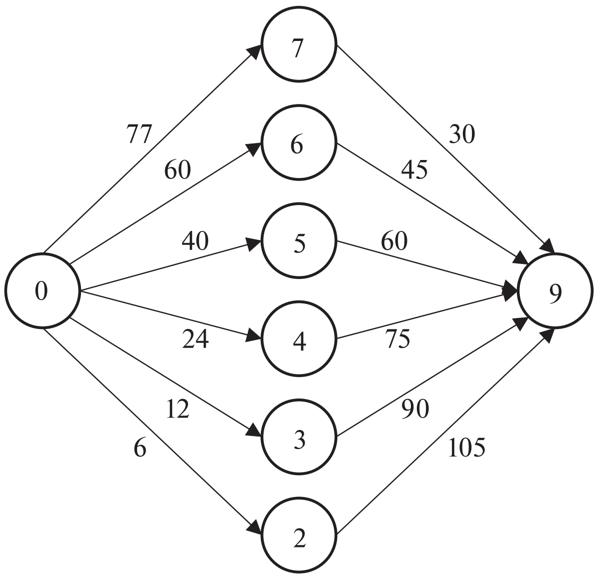

Рис. 3.

Решим задачу для максимального числа групп $m = [n/2] = 4$. Соответствующая сеть ДР приведена на рис. 2 ($q = 2$).

Вычисляем индексы вершин λ_{ip}:

$$\lambda_{\text{вх}} = 0, \quad \lambda_{11} = 6, \quad \lambda_{21} = 24,$$
$$\lambda_{12} = \lambda_{11} + 12 = 18,$$
$$\lambda_{22} = \min\left[\lambda_{11} + 24, \lambda_{21} + 16\right] = 30,$$
$$\lambda_{13} = \lambda_{12} + 20 = 38,$$
$$\lambda_{23} = \min\left[\lambda_{12} + 33, \lambda_{22} + 22\right] = 51,$$
$$\lambda_{\text{вых}} = \min\left[\lambda_{13} + 45, \lambda_{23} + 30\right] = 81.$$

Оптимальное разбиение — на четыре группы (1, 2), (3, 4), (5, 6, 7), (8, 9).

Решим задачу для минимального числа групп $m = 2$, $q = 6$. Соответствующая сеть приведена на рис. 3.

Вычисляем:

$$\lambda_{\text{вх}} = 0, \quad \lambda_{11} = 6, \quad \lambda_{21} = 12,$$
$$\lambda_{31} = 24, \quad \lambda_{41} = 40, \quad \lambda_{51} = 60, \quad \lambda_{61} = 77,$$
$$\lambda_{\text{вых}} = \min[\lambda_{11} + 105, \lambda_{21} + 90, \lambda_{31} + 75, \lambda_{41} + 60, \lambda_{51} + 45, \lambda_{61} + 30] = 99.$$

Оптимальное разбиение — (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9).

Заметим, что с ростом числа групп затраты на стимулирование уменьшаются, что достаточно очевидно.

4. Эвристический алгоритм

Описываемый алгоритм можно применить для общего случая разных y_i как эвристический. Для его обоснования заметим, что если существует разбиение на группы такое, что для каждой группы коэффициенты k_i одинаковы, то очевидно, что это разбиение оптимально. Поэтому разумно предположить, что чем ближе коэффициенты k_i в группах, тем ближе разбиение к оптимальному.

Пример 2. Берем данные табл. 1. Рассмотрим задачу для трех групп. Соответствующая сеть, совпадающая с сетью на рис. 1, с длинами дуг, полученными согласно (5), приведена на рис. 4.

Вычисляем:

$$\lambda_{\text{вх}} = 0, \quad \lambda_{11} = 18, \quad \lambda_{21} = 36, \quad \lambda_{31} = 66, \quad \lambda_{41} = 96,$$
$$\lambda_{12} = 48, \quad \lambda_{22} = \min[18 + 48,\ 36 + 24] = 60, \quad \lambda_{32} = 106, \quad \lambda_{42} = 146,$$
$$\lambda_{\text{вых}} = \min[48 + 165,\ 60 + 150,\ 106 + 90,\ 146 + 45] = 191.$$

Оптимальное решение будет (1, 2, 3), (4, 5, 6, 7), (8, 9).

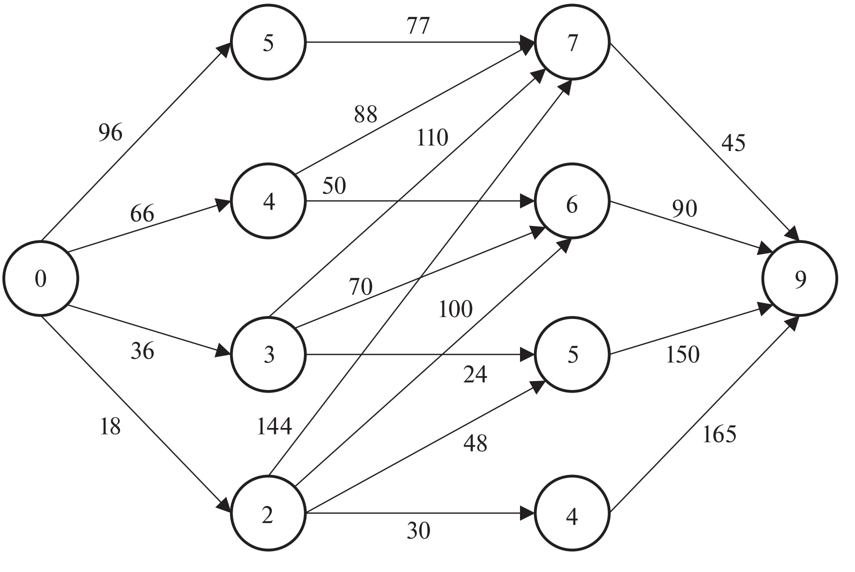

Рис. 4.

5. Система стимулирования скачкообразного типа

Рассмотрим системы С-типа. Для таких систем имеет место теорема, аналогичная теореме 1. Пусть все работы пронумерованы по возрастанию (неубыванию) z_i т.е.

$$z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ldots \leqslant z_n.$$

Эту последовательность также будем называть исходной. Определение куска последовательности также совпадает с определением для систем линейного типа (т.е. кусок — это часть исходной последовательности).

Теорема 3. Оптимальное разбиение представляет собой совокупность кустов исходной последовательности (одной из них, если исходных последовательностей несколько).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Рассматриваем оптимальное разбиение. Берем группу с максимальным z_n. Покажем, что это кусок. Пусть это не кусок. Определяем работу с максимальной величиной z_s, которая входит в кусок, но отсутствует в этой группе, а присутствует в другой группе. Меняем местами работу s с любой работой из группы с работой n, не принадлежащий куску. Нетрудно видеть, что затраты на стимулирование уменьшаются. Таким образом, группа с работой n является куском. Далее удаляем работы этого куска, рассматриваем следующую группу с максимальной величиной z и т.д.

Пример 3. Рассмотрим пример с данными табл. 1. Перенумеруем работы так, чтобы получить исходную последовательность.

Таблица 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K_i	1	8	4	6	15	3	12	11	10
y_i	1	1	3	2	1	5	2	3	4
z_i	1	8	12	12	15	15	24	33	40

Определим оптимальную систему ГС из трех групп. Заметим, что соответствующая сеть будет иметь вид рис. 1, но с другими длинами дуг. Она приведена на рис. 5.

Вычисляем:

$$\lambda_{\text{вх}} = 0, \quad \lambda_{11} = 16, \quad \lambda_{21} = 36, \quad \lambda_{31} = 48, \quad \lambda_{41} = 75,$$
$$\lambda_{12} = 40, \quad \lambda_{22} = \min\,[16 + 45,\ 36 + 30] = 61,$$
$$\lambda_{32} = \min\,[48 + 30,\ 36 + 45,\ 16 + 60] = 76,$$
$$\lambda_{42} = \min\,[75 + 48,\ 48 + 72,\ 36 + 96,\ 16 + 120] = 120,$$
$$\lambda_{\text{вых}} = \min\,[40 + 200,\ 61 + 160,\ 76 + 120,\ 120 + 80] = 196.$$

Оптимальное разбиение будет (1, 2), (3, 4, 5, 6), (7, 8, 9).

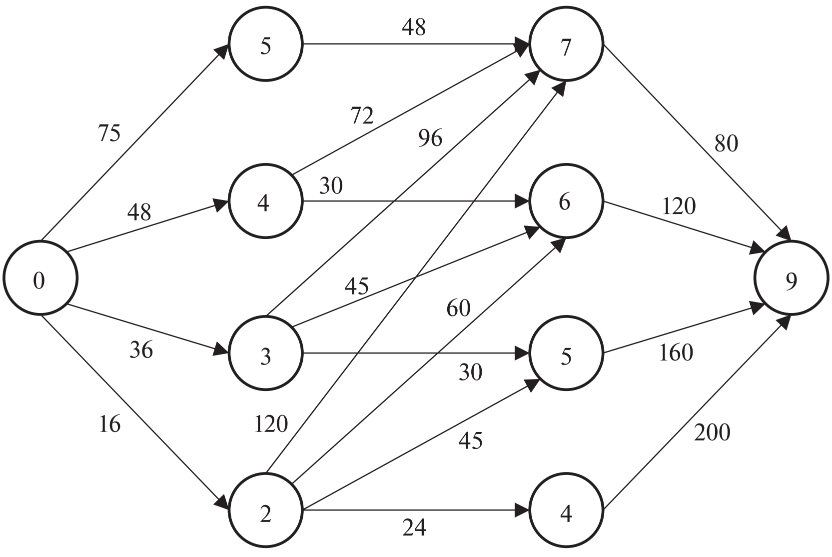

Рис. 5.

6. Разбиение на две группы для линейной системы стимулирования

Рассмотрим частный случай разбиения на две группы. Примем, что задан максимальный коэффициент k_j второй группы. В этом случае задача легко решается. Если $k_j < k_{n-1}$, то в первую группу входят все работы с $k_i > k_j$, а во вторую — все работы с $k_i \leqslant k_j$. Действительно, любой перенос работы с $k_i \leqslant k_j$ в первую группу увеличивает фонд стимулирования на $(k_{n-1} - k_j)y_i > 0$. Если $k_j = k_{n-1} < k_n$, то необходимо добавить в первую группу одну работу с тем, чтобы число работ было больше одной. Добавляем работу с минимальным y.

Пример 4. Берем данные табл. 1. Вычисляем:

1. $k_j = 12$. Добавляем в первую группу работу 1 с минимальной продолжительностью $y_1 = 1$. Фонд стимулирования равен:

$$\Phi_1 = 15 \cdot 2 + 12 \cdot 20 = 270.$$

2. $k_j = 11$. В первую группу входят работы 8 и 9.

$$\Phi_2 = 45 + 209 = 254.$$

3. $k_j = 10$. В первую группу входят работы 7, 8 и 9. Фонд стимулирования:

$$\Phi_3 = 90 + 160 = 250.$$

4. $k_j = 8$. В первую группу входят работы 6, 7, 8 и 9. Фонд стимулирования:

$$\Phi_4 = 150 + 96 = 246.$$

5. $k_j = 6$. В первую группу входят работы 5, 6, 7, 8 и 9. Фонд стимулирования:

$$\Phi_5 = 165 + 66 = 231.$$

6. $k_j = 4$. В первую группу входят работы с 4 по 9. Фонд стимулирования:

$$\Phi_6 = 195 + 36 = 231.$$

7. $k_j = 3$. В первую группу входят работы с 3 по 9. Фонд стимулирования:

$$\Phi_4 = 240 + 18 = 258.$$

Оптимальное разделение на группы: (1, 2, 3), (4, 5, 6, 7, 8, 9).

7. Заключение

В статье рассмотрены задачи синтеза систем группового стимулирования для линейных и скачкообразных систем стимулирования. Заметим, что решение задачи разбиения на две группы для систем линейного стимулирования показывает, что эвристический алгоритм во многих случаях дает оптимальное решение. Представляет интерес обосновать этот вывод более строго. Представляется также интересным рассмотрение других систем стимулирования (базовых и комбинированных). Что касается систем смешанного стимулирования, то заметим, что любую систему линейного или скачкообразного стимулирования можно превратить в систему смешанного стимулирования, пересчитав длины дуг соответствующей сети по формуле (6). Однако в общем случае полученное решение не будет оптимальным. Задача поиска оптимальной системы смешанного стимулирования пока не решена. Перечисленные задачи требуют дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новиков Д.А.* Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003.
2. *Новиков Д.А., Цветков А.В.* Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф. 2000.
3. *Бурков В.Н., Буркова И.В. и др.* Механизмы управления: Мультифункциональное учебное пособие / Бурков В.Н., Буркова И.В., Губко М.В. и др. / Под ред. Д.А. Новикова. Изд. 2-е переработанное и доп. М.: ЛЕНАНД, 2013.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 30.05.2023

После доработки 10.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023