Автоматика и телемеханика, № 12, 2023

© 2023 г. **И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru),**
И.А. ГАЛЯЕВ (ivan.galyaev@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТРУКТУРНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА[1]

Для линейных многосвязных непрерывных стационарных устойчивых систем с простым спектром, в том числе в канонической диагональной форме, а также приведенных к каноническим формам управляемости и наблюдаемости, разработан метод и получены аналитические формулы спектральных разложений грамианов в форме различных матриц Сяо. Разработан метод и алгоритм вычисления обобщенных матриц Сяо в виде произведения Адамара для многосвязных непрерывных линейных систем со многими входами и многими выходами. Это позволяет вычислять элементы соответствующих грамианов управляемости и наблюдаемости в виде произведений соответствующих элементов матриц мультипликаторов и матрицы, являющейся суммой всевозможных произведений матриц числителя матричной передаточной функции системы. Новые результаты получены в виде спектральных и сингулярных разложений обратных грамианов управляемости и наблюдаемости. Это позволяет получить инвариантные разложения энергетических функционалов и сформулировать новые критерии устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод.

Ключевые слова: спектральные разложения грамианов, сингулярные числа, обратная матрица грамиана, устойчивость с учетом взаимодействия мод, матрицы Сяо, уравнение Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231023120036, **EDN:** NFFFED

1. Введение

Мониторинг состояния объектов управления и управление демпфированием опасных колебаний являются важными направлениями исследований в различных областях промышленности (энергетика, машиностроение, авиация и космонавтика, робототехника). Новые технологии моделирования требуют развития инструментов аппроксимации математических моделей сложных систем различной природы [1–3]. Важную роль играют методы вычислений матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра и исследование структурных свойств решений этих уравнений [4–11]. Фундаментальными свойствами линейных динамических систем, связанных с решениями этих уравнений, являются управляемость, наблюдаемость и устойчивость. Важные результаты

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00673).

были получены в области вычисления грамианов для систем, модели которых представлены в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В [12] были впервые предложены методы вычисления грамианов, основанные на использовании матриц периодической структуры, для линейных систем, заданных уравнениями в формах управляемости и наблюдаемости. В [13, 14] новый подход был развит в направлении использования свойств импульсной переходной функции и матриц грамианов в виде клетчатой структуры из нулей и единиц (the zero-plaid structure of the controllability gramian). В [15] подход был развит для вычисления спектральных разложений более общего класса линейных стационарных (LTI) систем со многими входами и многими выходами (MIMO). В [16] с использованием данного подхода разработан метод оптимального выбора мест размещения датчиков и исполнительных устройств на графе распределенной системы управления. В работе показано, что для диагонализованной системы грамиан управляемости может быть представлен в виде произведения Адамара двух положительно полуопределенных матриц. В [17] решена задача оптимизации пропускной способности городской транспортной сети на основе минимизации следа матрицы грамиана управляемости с учетом ограничений. Различные задачи, связанные с применением грамианов управляемости, наблюдаемости и кросс-грамианов для вычисления системных инвариантов и энергетических индексов устойчивости, можно найти в [18, 19].

Целью настоящей работы являются развитие структурных методов решения матричных уравнений Ляпунова и получение спектральных и сингулярных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости, основанных на приведении уравнений состояния линейной стационарной системы к следующим каноническим формам: диагональной, управляемости и наблюдаемости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим устойчивую непрерывную MIMO LTI динамическую систему вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0, \quad y(t) = Cx(t), \tag{2.1}$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$. Будем рассматривать вещественные матрицы соответствующих размеров A, B, C. Примем, что система (2.1) полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрицы A различны. В этом случае реализация (2.1) минимальна и существует единственная передаточная функция $W(s)$ в виде

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} M_i s^i N^{-1}(s),$$

где $N(s)$ – характеристический полином матрицы A, M_i – матрица вида

$$M_i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i B.$$

Выше через A_i обозначена «i»-я матрица Фаддеева в разложении резольвенты матрицы A в ряд Фаддеева–Леверье [6, 7]. В соответствии с [20] запишем общую формулу вычисления грамиана управляемости по парному спектру системы (2.1)

$$P^c = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{1}{s_j+s_\rho}Res\left[(Is-A)^{-1},s_j\right]BB^*Res\left[(Is-A^*)^{-1},s_\rho\right]. \tag{2.2}$$

Рассмотрим непрерывную динамическую MISO (с многими входами и одним выходом) LTI систему вида

$$\begin{gathered}\dot{x}\left(t\right) = Ax\left(t\right) + b_\gamma u_\gamma\left(t\right), \quad x\left(0\right) = 0, \\ y\left(t\right) = cx\left(t\right),\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^1$, $u_\gamma\left(t\right)\in\mathbb{R}^m$, $\gamma = 1,\ldots m$, b_γ – столбец матрицы B.

Рассмотрим преобразование уравнения (2.1) системы общего вида к уравнениям состояний в канонических формах: диагональной, управляемости и наблюдаемости.

Если все собственные числа s_r матрицы A различны, то линейную систему можно привести к диагональному виду с помощью невырожденного преобразования координат

$$\begin{gathered}x_d = Tx, \quad \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d, \\ A_d = TAT^{-1}, \quad B_d = TB, \quad C_d = CT^{-1}, \quad Q_d = TBB^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}},\end{gathered}$$

или

$$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & s_n \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \nu_1^* \\ \nu_2^* \\ \vdots \\ \nu_n^* \end{array}\right] = T\Lambda T^{-1},$$

где матрица T составлена из правых собственных векторов u_i, а матрица T^{-1} – из левых собственных векторов ν_i^*, соответствующих собственному числу s_i. Грамиан диагонализованной линейной части является решением уравнения Ляпунова, которое определится из формулы [15]

$$P_d^c = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{1}{s_j+s_\rho}Res\left[(Is-A_d)^{-1},s_j\right]B_d B_d^* Res\left[(Is-A_d)^{-1},s_\rho\right].$$

Грамиан управляемости P_d^c связан с грамианом P^c соотношением вида

$$P^c = TP_d^c T^{\mathrm{T}}.$$

Из (2.2) следует следующее сепарабельное спектральное разложение грамиана управляемости системы, преобразованной в диагональную каноническую форму [21]

$$P_d^c = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{-b_{j\rho}}{s_j+s_\rho}\mathbb{1}_{j\rho}, \quad b_{j\rho} = [B_d B_d^*]_{j\rho},$$

где введено обозначение

$$\mathbb{1}_{j\rho} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{j\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим далее канал “γ“ MISO LTI системы в канонической форме управляемости [1, 21]

$$x(t) = \sum_{\gamma=1}^{m} R_{c\gamma}^F x_{c\gamma}(t).$$

$$\dot{x}_c\left(t\right) = A_c^F x_{c\gamma}\left(t\right) + b_\gamma^F u_\gamma\left(t\right), \quad x_c\left(0\right) = 0, \tag{2.4}$$

$$y_c^F\left(t\right) = c_\gamma^F x_c\left(t\right), \quad \gamma = 0, 1\ldots, m.$$

$$A_c^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_\gamma^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$a = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad c_\gamma^F = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \ldots & \xi_{n-2} & \xi_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Если использовать невырожденное преобразование переменных с матрицей R_c^F, можно рассматривать MISO LTI систему в канонической форме управляемости. Вектор B_γ для MISO системы имеет вид

$$B_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & b_\gamma & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Справедливы следующие соотношения [14]:

$$\left(R_{c\gamma}^F\right)^{-1} A R_{c\gamma}^F = A_c^F, \ \left(R_{c\gamma}^F\right)^{-1} B_\gamma = b_\gamma^F, \ C R_{c\gamma}^F = c_\gamma^F,$$

$$P^c = \sum_{\gamma=1}^{m} R_\gamma^{cF} P_\gamma^{cF} (R_\gamma^{cF})^T.$$

В отношении систем (2.1) и (2.3) будем предполагать выполненными различные структурные условия устойчивости, управляемости, наблюдаемости и свойств спектра матрицы динамики. В [15] было получено следующее спектральное разложение грамиана управляемости:

$$P_\gamma^{cF} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right)N\left(-s_k\right)}\mathbb{1}_{j+1\eta+1}.$$

Рассмотрим далее канал “γ” SIMO (с одним входом и многими выходами) LTI линейной системы в канонической форме наблюдаемости [15]. В этом случае справедливы формулы

$$x_o(t) = \sum_{\gamma=1}^{m} R_{o\gamma}^F x_{o\gamma}(t),$$

$$\dot{x}_{o\gamma}\left(t\right) = A_c^F x_{o\gamma}\left(t\right) + b_{o\gamma}^F u_\gamma\left(t\right), \quad x_o\left(0\right) = 0,$$

$$y_{o\gamma}^F\left(t\right) = c_{o\gamma}^F x_{o\gamma}\left(t\right), \quad \gamma = 0, 1 \dots m.$$

$$A_o^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{-1} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_{o\gamma}^F = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_{n-2} & \xi_{n-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$c_{o\gamma}^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с принципом дуальности получим выражения [14]

$$P_{o\gamma}^F = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} \mathbb{1}_{j+1\eta+1},$$

$$P^o = \sum_{\gamma=1}^{m} R_{o\gamma}^F P_\gamma^{oF} (R_{o\gamma}^F)^T.$$

Определение 1. Назовем матрицей Сяо (Zero plaid structure) матрицу вида [12, 13]

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_3 & 0 \\ -y_2 & 0 & y_3 & 0 & \dots \\ 0 & -y_3 & 0 & \dots & 0 \\ y_3 & 0 & \dots & 0 & y_n \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы вычисляются по формулам

$$y_{j\eta} = \begin{cases} 0, \quad \textit{если} \quad j+\eta = 2k+1, \quad k = 1, \dots, n; \\ y_n = \dfrac{1}{2Y_{n,1}}, \\ y_{n-l} = \dfrac{-\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i Y_{n-l,i+1} y_{n-l+i}}{Y_{n-l,1}}, \\ \qquad \textit{если} \quad j+\eta = 2k, \quad k = 1, \dots, n, \quad l = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

где $Y_{i,j}$ – элемент таблицы Рауса для системы, находящийся на пересечении i строки и j столбца.

3. Основные результаты

3.1. Тождества для одного класса устойчивых полиномов, корни которых различны над полем комплексных чисел

Рассмотрим спектральное разложение грамиана управляемости по простому и парному спектру (2.2).

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{\eta=0}^{n} \frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot N\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} \equiv \tag{3.1}$$
$$\equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{-1}{s_k+s_\rho}\frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot N\left(s_k\right)\dot N\left(s_\rho\right)}, \quad s_k+s_\rho\neq 0.$$

Введем обозначения

$$\omega\left(n,s_k,j,\eta\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot N\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)},$$
$$\omega\left(n,s_k,s_\rho,j,\eta\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{-1}{s_k+s_\rho}\;\frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot N\left(s_k\right)\dot N\left(s_\rho\right)}.$$

С учетом введенных обозначений тождество (3.1) примет вид

$$\omega\left(n,s_k,j,\eta\right)\equiv\omega\left(n,s_k,s_\rho,j,\eta\right) \text{ для } \forall s_k,s_\rho\in\mathbb{C}^-,\ s_k+s_\rho\neq 0.$$

Доказательство следует из разложения дробно-рациональной функции $\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot N(s_k)\dot N(-s_k)}$ по корням характеристического уравнения $N\left(-s_k\right)=0$.

Л е м м а 1. *Рассмотрим полином* $\boldsymbol{\gamma}\left(n,s_k,-s_k\right)$ *над полем комплексных чисел следующего вида:*

$$\gamma\left(n,s_k,-s_k\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}s_k^i(-s_k)^\mu,\ \forall k=1,\ldots,n,$$

где s_k *– корни характеристического уравнения системы* (2.1), *а* $-s_k$ *– корни характеристического уравнения ее антиустойчивой сопряженной системы. Предположим, что все собственные числа систем простые, не равные нулю комплексные числа. Тогда полином* $\gamma\left(n,s_k,-s_k\right)$ *содержит только все четные степени чисел* s_k *и не содержит их нечетных степеней.*

$$\gamma\left(n,s_k,-s_k\right)=\gamma\left(n,\ s_k^0,s_k^2,\ldots,s_k^{2m}\right),\quad n=2m,$$
$$\gamma\left(n,s_k,-s_k\right)=\gamma\left(n,\ s_k^1,s_k^3,\ldots,s_k^{2m-1}\right)\equiv 0,\quad n=2m-1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко убедиться, что результат леммы справедлив для $n=1,2,3$:

$$\gamma\left(1,s_k,-s_k\right)=1,$$
$$\gamma\left(2,s_k,-s_k\right)=1-s_k^2,$$
$$\gamma\left(3,s_k,-s_k\right)=s_k^4-s_k^2+1.$$

Применим метод математической индукции. Предположим, что результат леммы справедлив для полинома $\gamma\left(n, s_k, -s_k\right)$:

$$\gamma\left(n, s_k, -s_k\right) = \begin{cases} \gamma\left(2m, s_k^0, \ldots, s_k^{2m}\right) \text{ для четного } n = 2m, \\ \gamma\left(2m-1, s_k^0, \ldots, s_k^{2m}\right) \text{ для нечетного } n = 2m-1. \end{cases}$$

Покажем, что он справедлив и для полинома $\gamma\left(n+1, s_k, -s_k\right)$. При увеличении n на единицу полином $\gamma\left(n, s_k, -s_k\right)$ принимает вид

$$\gamma\left(n+1, s_k, -s_k\right) = \begin{cases} \gamma\left(2m+1, s_k, -s_k\right) \text{ для четного } n = 2m, \\ \gamma\left(2m, s_k, -s_k\right) \text{ для нечетного } n = 2m-1. \end{cases}$$

Рассмотрим вначале случай четного n.

$$\begin{gathered} \gamma\left(n+1, s_k, -s_k\right) = \gamma\left(2m, s_k^0, \ldots, s_k^{2m}\right) + \gamma\left(2m, s_k^0, \ldots, s_k^{2m}\right) s_k^{2m+1} - \\ - \gamma\left(2m, s_k^0, \ldots, s_k^{2m}\right) s_k^{2m+1} + s_k^{2m+1}(-s_k)^{2m+1} = \\ = \gamma\left(2m, s_k^0, \ldots, s_k^{2m}\right)^2 - s_k^{2(2m+1)}. \end{gathered}$$

Для случая нечетного n аналогичным образом получаем

$$\begin{gathered} \gamma\left(n+1, s_k, -s_k\right) = \gamma\left(2m-1, s_k^0, \ldots, s_k^{2m}\right) + \\ + \gamma\left(2m-1, s_k^0, \ldots, s_k^{2m+1}\right) s_k^{2(2m+1)} - \\ - \gamma\left(2m-1, s_k^0, \ldots, s_k^{2m+1}\right) s_k^{2(m+1)} + s_k^{2(2m+1)} = \\ = \gamma\left(2m-1, s_k^0, \ldots, s_k^{2m}\right) + s_k^{2(2m+1)}, \end{gathered}$$

где первые три слагаемых содержат четные степени s_k по предположению.

Следствие 1. Рассмотрим мультипликатор $\omega\left(n, s_k, j, \eta\right)$ в спектральном разложении грамиана управляемости по простому спектру (2.2). *Справедливы тождества*

$$\omega\left(n, s_k, j, \eta\right) \equiv 0, \text{ *если* } j + \eta = 2m - 1, \tag{3.2}$$

$$\omega\left(n, s_k, j, \eta\right) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)}, \text{ *если* } j + \eta = 2m. \tag{3.3}$$

Доказательство. Выразим мультипликатор через полином $\gamma(n, s_k, -s_k)$

$$\omega\left(n, s_k, j, \eta\ \right) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma\left(n, s_k, -s_k, j, \eta\right)}{\dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)}$$

и применим лемму.

Следствие 2. Рассмотрим мультипликатор $\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta)$ в спектральном разложении грамиана управляемости по парному спектру (2.2). *Справедливы тождества*

$$\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) \equiv 0, \ \text{если} \ \ j+\eta = 2m-1, \tag{3.4}$$

$$\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{-1}{s_k+s_\rho} \ \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot N(s_k)\,\dot N(s_\rho)}, \ \text{если} \ \ j+\eta = 2m. \tag{3.5}$$

Доказательство. Выразим мультипликатор через полином $\gamma(n, s_k, -s_k)$

$$\omega(n, s_k, j, \eta) \equiv \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) \ \text{для} \ \forall s_k, s_\rho \in \mathbb{C}^-, \ s_k+s_\rho \neq 0$$

и применим лемму.

Следствия 1, 2 доказывают, что для всех непрерывных устойчивых MIMO LTI систем с простым спектром, приведенных к каноническим формам управляемости и наблюдаемости, существуют спектральные разложения в форме матриц Сяо. Для систем, представленных в канонических формах управляемости и наблюдаемости, это позволяет вместо вычисления n^2 элементов матрицы вычислять только n диагональных элементов по формулам (3.2)–(3.5).

Замечание. Следует с осторожностью использовать мультипликатор $\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta)$ в спектральном разложении грамиана управляемости по парному спектру (2.2). Например, в случае MIMO LTI системы, приведенной к диагональной канонической форме, спектральное разложение грамиана управляемости имеет простой вид

$$P_d^c = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{-b_{j\rho}}{s_j+s_\rho}\mathbb{1}_{j\rho}\,, \qquad b_{j\rho} = [B_d B_d^*]_{j\rho}. \tag{3.6}$$

С другой стороны, имеем

$$P_d^c = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\rho=0}^{n-1} \omega(n, s_j, j, \rho) A_j B_d B_d^* A_\rho^*, \omega(n, s_k, j, \rho) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j(-s_k)^\rho}{\dot N(s_k)\,N(-s_k)}. \tag{3.7}$$

Заметим, что обе формулы (3.6), (3.7) дают одинаковый численный результат, который соответствует *различным* спектральным разложениям. Приведем пример.

Иллюстративный пример 1

Рассмотрим задачу управления двухзонной печью. Модель объекта управления – нагревательной печи можно описать уравнениями состояния вида

$$\Sigma_1\colon \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)\,, \quad x(0) = 0, \\ y(t) = Cx(t)\,. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В данном случае можно вычислить выражения

$$N(s) = s^2 + 1{,}5s + 0{,}5, \quad \dot{N}(s) = 2s + 1{,}5,$$
$$(Is - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+0{,}5 \end{bmatrix} (s^2 + 1{,}5s + 0{,}5)^{-1},$$
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad BB^T = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 4{,}25 \end{bmatrix}.$$

Грамиан управляемости, вычисленный по формуле (3.6), равен

$$P^c = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2{,}125 \end{bmatrix}.$$

Выражение разложения грамиана управляемости имеет вид

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2} \frac{s_k^j (-s_k)^\rho}{\dot{N}(s_k)\, N(-s_k)} A_j BB^{\mathrm{T}} A_\rho^{\mathrm{T}},$$
$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2} \frac{s_k^j (-s_k)^\rho}{\dot{N}(s_k)\, N(-s_k)} \frac{-b_{j\rho}}{s_j + s_\rho} \mathbb{1}_{j\rho},$$

где A_j – матрица Фаддеева, построенная для матрицы A с помощью алгоритма Фаддеева–Леверье [6, 7]. Вычислим матрицы $A_j BB^{\mathrm{T}} A_\rho^{\mathrm{T}}$:

$$A_0 BB^T A_0^T = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 1{,}0625 \end{bmatrix}, \quad A_0 BB^{\mathrm{T}} A_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 0{,}75 \\ 1{,}5 & 2{,}125 \end{bmatrix},$$
$$A_1 BB^{\mathrm{T}} A_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 1{,}5 \\ 0{,}75 & 2{,}125 \end{bmatrix}, \quad A_1 BB^{\mathrm{T}} A_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 1{,}5 \\ 1{,}25 & 4{,}25 \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в (3.7), получим спектральное разложение:

$$P^c = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 1{,}0625 \end{bmatrix} \frac{2}{3} + \begin{bmatrix} 1{,}25 & 1{,}5 \\ 1{,}25 & 4{,}25 \end{bmatrix} \frac{1}{3} = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 1 \\ 1 & 2{,}125 \end{bmatrix}.$$

Матрицы бесконечных субграмианов являются симметричными и положительно определенными, и таковой является их сумма. Путем прямой подстановки проверяем, что вычисленный грамиан управляемости является решением уравнения Ляпунова. Сепарабельное спектральное разложение грамиана управляемости, вычисленное по формуле (3.6), имеет вид

$$P^c = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2{,}125 \end{bmatrix}.$$

Матрицы бесконечных субграмианов в этом разложении не являются симметричными и положительно определенными, хотя таковой является их сумма. Пример показывает, что один и тот же грамиан может иметь несколько разных спектральных разложений.

3.2. Разложение грамианов в форме произведений Адамара [3]

Введем матрицы мультипликатора грамиана управляемости непрерывной MIMO LTI системы в виде

$$\Omega_{\mathrm{c}} = [\omega_{\mathrm{c},j\eta}]_{n\times n}$$

и ее грамиана наблюдаемости в виде

$$\Omega_o = [\omega_{o,j\eta}]_{n\times n},$$

где j – индекс строки, а η – индекс столбца матриц мультипликаторов.

Введем матрицы Ψ_{c} и Ψ_o в виде

$$\Psi_{\mathrm{c}} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1} A_i BB^{\mathrm{T}} A_\mu^{\mathrm{T}},$$

$$\Psi_o = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1} A_i^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} C A_\mu.$$

Введем поэлементное представление этих матриц в виде

$$\psi_{\mathrm{c},j\eta} = e_j^{\mathrm{T}} \Psi_{\mathrm{c}}\ e_\eta,$$

$$\psi_{o,j\eta} = e_j^{\mathrm{T}} \Psi_o\ e_\eta.$$

Теорема 1 [15]. *Рассмотрим устойчивую непрерывную динамическую MIMO LTI систему с простым спектром*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu\,(t)\,, \quad x\,(0) = 0,$$

$$y\,(t) = Cx\,(t)\,,$$

где $x\,(t) \in R^n,\ u\,(t) \in R^m,\ y(t) \in R^m.$

Тогда субрамиан управляемости P^c *является матрицей вида* (2.2)*, и в соответствии с* [7] *формулами* (2.1), (2.2) *определяется как*

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} P_{j,\eta}^c, \quad P_{j,\eta}^c = \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) A_j BB^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}}, \tag{3.8}$$

где

$$\omega\,(n, s_k, s_\rho, j, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{если индекс } j+\eta \text{ нечетен}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{-1}{s_\rho + s_k} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}\,(s_k)\,\dot{N}\,(s_\rho)}, & \text{если индекс } j+\eta \text{ четен}. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1. Как известно, спектральное разложение грамиана управляемости в условиях теоремы 1 имеет вид [7, 20]

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{-1}{s_\rho + s_k} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}\,(s_k)\,\dot{N}\,(s_\rho)} A_j BB^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}}.$$

Подставим вновь введенную скалярную функцию $\omega\left(n, s_k, s_\rho, j, \eta\right)$ в эту формулу и получим формулу (3.8).

Теорема 2 [13]. *Рассмотрим непрерывную MIMO LTI систему вида* (2.1)*. Предположим, что система устойчива и все корни ее характеристического уравнения различны. Тогда ее грамианы управляемости и наблюдаемости имеют вид обобщенных матриц Сяо следующего вида:*

$$P^c = \Omega_c \circ \Psi_c = \left[p^c_{j\eta}\right]_{n\times n}, \qquad j, \eta = 1, \ldots, n. \tag{3.9}$$

$$\Psi_c = \left[\psi_{c,j\eta}\right]_{n\times n},\ j, \eta = 1, \ldots, n. \qquad \Psi_c = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1} \Psi_{c,i\mu},\ \Psi_{c,i\mu} = M_i M^*_\mu,$$

$$M_i = A_i B, \qquad \Omega_c = \left[\omega_c(n, j, \eta)\right]_{n\times n}, \qquad j, \eta = 1, \ldots, n.$$

$$p^c_{j\eta} = \omega_c(n, j, \eta) \times \psi_{c,j\eta}.$$

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся спектральным разложением грамиана управляемости (2.2). Введем представление грамианов в форме *произведений Адамара*

$$P^c = \Omega_c \circ \Psi_c, \tag{3.10}$$

$$P^o = \Omega_o \circ \Psi_o. \tag{3.11}$$

Это представление позволяет выписать простые формулы для вычисления элементов грамианов управляемости и наблюдаемости MIMO LTI систем P^c и P^o в виде [13]

$$p^c_{j\eta} = \omega_c(n, j, \eta) \times \psi_{c,j\eta}, \tag{3.12}$$

$$p^o_{j\eta} = \omega_c(n, j, \eta) \times \psi_{o,j\eta}. \tag{3.13}$$

Далее используем тождества для одного класса устойчивых полиномов, корни которых различные над полем комплексных чисел (Лемма). Формулы (3.10)–(3.13) выражают алгоритмы вычисления элементов обобщенных матриц Сяо в форме произведений элементов матриц мультипликатора и элементов сумм всевозможных произведений матриц $A_j B B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}_\eta$, записанных в форме произведений матриц Адамара

$$\Omega_c \circ \Psi_c.$$

Следствие 3. *Рассмотрим важный частный случай непрерывных линейных SISO (с одним входом и одним выходом) систем, представленных уравнениями состояния в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В этом случае грамианы управляемости и наблюдаемости определяются формулами* [15]

$$P^{cF} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot N\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} \mathbb{1}_{j+1\eta+1}, \tag{3.14}$$

$$P^{oF} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot N\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} \mathbb{1}_{j+1\eta+1}.$$

Представление грамианов в форме Адамара согласно (3.10)–(3.11) *принимает вид*

$$P^{cF} = \Omega_{cF} \circ \Psi_c, \quad \Psi_c = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{j+1\eta+1},$$
$$P^{oF} = \Omega_{oF} \circ \Psi_o, \quad \Psi_o = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{j+1\eta+1.}$$

Отсюда вытекают тождества

$$P^{cF} \equiv \Omega_{cF}, \tag{3.15}$$
$$P^{oF} \equiv \Omega_{oF}. \tag{3.16}$$

Это означает, что грамиан управляемости в канонической форме управляемости совпадает с матрицей мультипликатора для этого грамиана, что позволяет применить формулы (3.15), (3.16) *для расчета всех элементов грамиана и устанавливает принадлежность грамиана к классу матриц Сяо. Аналогичный результат справедлив для грамиана наблюдаемости в канонической форме наблюдаемости.*

Матрицы мультипликаторов в разных канонических формах имеют вид

$$\Omega_{cF} \equiv \Omega_{oF} = \left[\omega\left(n, s_k, s_\rho, j, \eta\right)\right]_{n\times n} = \left[\omega\left(n, s_k, j, \eta\right)\right]_{n\times n}.$$

3.3. Спектральные и сингулярные разложения обратных матриц грамианов

Общие формулы вычисления обратных матриц грамианов (далее обратных грамианов) для непрерывных MIMO LTI систем имеют вид [1]

$$(P^c)^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0}\left[(P^c)^{n-1} + \gamma_{n-1}(P^c)^{n-2} + \cdots + \gamma_2 P^c + \gamma_1 I\right];$$
$$(P^o)^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0}\left[(P^o)^{n-1} + \gamma_{n-1}(P^o)^{n-2} + \cdots + \gamma_2 P^o + \gamma_1 I\right].$$

В случае непрерывных SISO LTI систем эти формулы в соответствии с (3.15), (3.16) приобретают форму

$$\left[P^{cF}(\omega(n, s_k, j, \eta))\right]^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0}\left[(\Omega_{\mathrm{c}F})^{n-1} + \gamma_{n-1}(\Omega_{\mathrm{c}F})^{n-2} + \cdots + \gamma_2\Omega_{\mathrm{c}F} + \gamma_1 I\right];$$
$$\left[P^{oF}(\omega(n, s_k, j, \eta))\right]^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0}\left[(\Omega_{oF})^{n-1} + \gamma_{n-1}(\Omega_{oF})^{n-2} + \cdots + \gamma_2\Omega_{oF} + \gamma_1 I\right].$$

Наличие степеней матриц мультипликатора в правой части формул приводит к появлению сложных дробно-рациональных функций собственных чисел s_k, что ограничивает область применения формул спектральных разложений обратных грамианов системами малой и средней размерности. Вернемся к устойчивым непрерывным MIMO LTI системам с простым спектром и заметим, что грамианы управляемости и наблюдаемости представляют собой симметричные комплекснозначные матрицы. В этом случае существуют их сингулярные разложения вида [1]

$$
\begin{aligned}
P^c &= P^{c*} = V_c \Lambda V_c^*, \\
P^o &= P^{o*} = V_o \Lambda V_o^*,
\end{aligned}
$$

где матрица V_c образована правыми сингулярными векторами матрицы P^c, матрица V_c^* образована левыми сингулярными векторами матрицы P^c, а матрица Λ является диагональной матрицей вида

$$
\Lambda = diag\left\{ |\lambda_1|\, |\lambda_2| \ldots |\lambda_n| \right\}.
$$

Определим матрицы S и U в виде

$$
S = \; diag\left\{ sgn\lambda_1 \; sgn\lambda_2 \ldots sgn\lambda_n \; \right\}, \; U_c = V_c S,
$$
$$
sgn\lambda = \begin{cases} +1, & \text{если } \lambda \geqslant 0, \\ -1, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
P^c &= U_c \Lambda V_c^*, \\
P^o &= U_o \Lambda V_o^*,
\end{aligned}
$$

где матрица U_c образована левыми сингулярными векторами матрицы P^c. Поскольку Λ, U_c, V_c являются несингулярными матрицами, то

$$
(P^c)^{-1} = (U_c)^{-1} \Lambda^{-1} (V_c^*)^{-1} = V_c^* \Lambda^{-1} U_c. \tag{3.17}
$$

Аналогичным образом получаем

$$
(P^o)^{-1} = (U_o)^{-1} \Lambda^{-1} (V_o^*)^{-1} = V_o^* \Lambda^{-1} U_o. \tag{3.18}
$$

Поскольку матрица Λ диагональна, ее обратную матрицу можно представить в виде

$$
\Lambda^{-1} = \left[|\lambda_1|^{-1} \mathbb{1}_{11} + |\lambda_2|^{-1} \mathbb{1}_{22} + \cdots + |\lambda_n|^{-1} \mathbb{1}_{nn} \right]. \tag{3.19}
$$

Подставив (3.19) в (3.17), (3.18), получим следующие сингулярные разложения обратных грамианов управляемости и наблюдаемости по их сингулярному спектру:

$$
\begin{aligned}
(P^c)^{-1} &= V_c^* \left[|\lambda_1|^{-1} \mathbb{1}_{11} + |\lambda_2|^{-1} \mathbb{1}_{22} + \cdots + |\lambda_n|^{-1} \mathbb{1}_{nn} \right] U_c; \\
(P^o)^{-1} &= V_o^* \left[|\lambda_1|^{-1} \mathbb{1}_{11} + |\lambda_2|^{-1} \mathbb{1}_{22} + \cdots + |\lambda_n|^{-1} \mathbb{1}_{nn} \right] U_o.
\end{aligned}
$$

Т е о р е м а 3. Рассмотрим непрерывную устойчивую и полностью управляемую динамическую MIMO LTI систему вида (2.1).

Сингулярные разложения ее обратного грамиана управляемости по собственным числам матрицы грамиана имеют следующий вид.

Для простого спектра матрицы грамиана

$$(P^c)^{-1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma_\lambda^j}{\dot{N}_c(\sigma_\lambda)} \frac{1}{\sigma_\lambda}, \tag{3.20}$$

где P^c – матрица грамиана управляемости, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты грамиана, σ_λ – собственное число матрицы грамиана P^c.

Для кратного спектра матрицы грамиана

$$(P^c)^{-1} = -\sum_{\delta=1}^{q} \sum_{\rho=1}^{m_\delta} \frac{K_{\delta\rho}}{(-\sigma_\delta)^{m_\delta - j+1}}, \tag{3.21}$$

$$K_{\delta\rho} = \frac{1}{(\rho-1)!} \left\{ \frac{d^{\rho-1}}{d\sigma^{\rho-1}} \left[\frac{(\sigma-\sigma_\delta)^{m_\delta} \sum_{j=0}^{n-1} \sigma^j P_j^c}{\prod_{\delta=1}^{n} (\sigma-\sigma_\delta)^{m_\delta}} \right] \right\} \Bigg|_{s=s_\delta}, \tag{3.22}$$

где P^c – матрица грамиана управляемости, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты грамиана, σ_δ – собственное число матрицы грамиана P^c кратности m_δ, ρ – индекс кратности собственного числа σ_δ.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Рассмотрим разложение резольвенты матрицы грамиана управляемости в виде отрезка ряда Фаддеева [6]

$$(I\sigma - P^c)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma^j}{N_c(\sigma)} \ . \tag{3.23}$$

Обозначим: $N_c(\sigma) = s^n + a_{c,n-1}\sigma^{n-1} + \ldots a_{c,1}\sigma + a_{c,0}$, $j = 1, \ldots, n$; $N_c(\sigma)$ – характеристический полином резольвенты матрицы грамиана, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты в ряд Фаддеева, $j = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим вначале случай, когда все сингулярные числа σ_λ грамиана различны. В этом случае разложение (3.23) преобразуется к виду

$$(I\sigma - P^c)^{-1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma_\lambda^j}{\dot{N}_c(\sigma_\lambda)} \frac{1}{\sigma-\sigma_\lambda}. \tag{3.24}$$

Итеративный алгоритм вычисления матриц Фаддеева и коэффициентов характеристического уравнения:

Первый шаг: $a_{c,n-1} = 1,\ R_n = I$,

Шаг «k»: $a_{c,n-k} = -\frac{1}{k} tr\left(P^c R_{n-k+1}\right), \quad R_{n-k} = a_{c,n-k} I + P^c R_{n-k+1}, \quad k = 1, \ldots, n$;

В соответствии с алгоритмом Фаддеева–Леверье справедливы также следующие матричные равенства:

$$\begin{gathered}
P_0^c = a_{c,1}I + a_{c,2}P^c + \cdots + a_{c,n}(P^c)^{n-1}, \\
P_1^c = a_{c,2}I + a_{c,3}P^c + \cdots + a_{c,n}(P^c)^{n-2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_{n-2}^c = a_{c,n-1}I + a_{c,n}P^c, \\
P_{n-1}^c = a_{c,n}I.
\end{gathered}$$

Выше представленную систему можно записать в виде

$$P_j^c = \sum_{j=0}^{n-1} a_{c,j+1}(P^c)^j, \quad \forall j : j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Положим в (3.24) $\sigma = 0$ и получим формулу (3.20):

$$(P^c)^{-1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma_\lambda^j}{\dot{N}_c(\sigma_\lambda)}\frac{1}{\sigma_\lambda}. \tag{3.25}$$

Таким образом, (3.20)–(3.25) в случае простого спектра матрицы грамиана определяют сингулярное разложение обратного грамиана управляемости. Аналогичный подход можно применить для случая кратного спектра матрицы грамиана. Предположим, что характеристическое уравнение матрицы грамиана можно представить в виде

$$N_c\left(\sigma\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\sigma - \sigma_i\right)^{m_i}, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i = q, \quad \sigma_i \in C^+.$$

Для любой квадратной матрицы грамиана его резольвента имеет вид матричной функции (3.24). В соответствии с [22, 23] ее разложение на простые дроби имеет вид

$$(I\sigma - P^c)^{-1} = \sum_{\delta=1}^{q}\sum_{\rho=1}^{m_\delta}\frac{K_{\delta\rho}}{(\sigma - \sigma_\delta)^{m_\delta - j + 1}}, \tag{3.26}$$

$$K_{\delta\rho} = \frac{1}{(\rho-1)!}\left\{\frac{d^{\rho-1}}{d\sigma^{\rho-1}}\left[\frac{(\sigma-\sigma_\delta)^{m_\delta}\sum_{j=0}^{n-1}\sigma^j P_j^c}{\prod_{\delta=1}^{n}(\sigma-\sigma_\delta)^{m_\delta}}\right]\right\}\Bigg|_{\sigma=\sigma_\delta}.$$

Положим в (3.26) $\sigma = 0$ и получим формулы (3.21)–(3.22) сингулярного разложения обратного грамиана управляемости для случая кратного спектра матрицы грамиана.

Иллюстративный пример 2

Рассмотрим задачу управления асинхронного двигателя. Модель объекта управления можно описать уравнениями состояния вида

$$\Sigma_1\colon \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax\left(t\right) + Bu\left(t\right), \quad x\left(0\right) = 0, \\ y\left(t\right) = Cx\left(t\right). \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4{,}67 & 3 & -1{,}33 & 2{,}33 \\ -2{,}17 & 2{,}33 & -3{,}83 & 5{,}17 \\ 1{,}5 & -0{,}33 & -1{,}5 & 0{,}17 \\ 2{,}17 & -3{,}33 & 3{,}83 & -6{,}17 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приведем собственные значения матрицы динамики системы

$$\lambda_i = -4;\ -3;\ -2;\ -1.$$

Для построения сингулярного разложения обратного грамиана управляемости системы по сингулярным числам матрицы грамиана вычислим грамиан управляемости по формуле (3.6)

$$P^c = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 3 & 2{,}5 & 0{,}56 \\ 3 & 11{,}2 & 13{,}2 & 5{,}1 \\ 2{,}5 & 13{,}2 & 16{,}6 & 6{,}9 \\ 0{,}56 & 5{,}1 & 6{,}9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что формула (3.6) справедлива не только для устойчивых линейных систем, но и для неустойчивых систем, в которых не нарушается условие $s_k + s_p \neq 0$. Оно нарушается в случае $s_k = 0$ или $s_k = +j\omega$, $s_{k+1} = -j\omega$ [21].

Тогда сингулярные числа этого грамиана примут вид

$$\sigma_i = 30{,}7;\ 2{,}5;\ 0{,}17;\ 0{,}0002.$$

Грамиан управляемости системы представлен симметричной матрицей, поэтому существует его SVD-разложение [1]

$$P^c = \begin{bmatrix} -0{,}13 & 0{,}86 & -0{,}48 & -0{,}009 \\ -0{,}6 & 0{,}28 & 0{,}67 & 0{,}35 \\ -0{,}73 & -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}58 \\ -0{,}3 & -0{,}32 & -0{,}51 & 0{,}74 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0002 \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} -0{,}13 & 0{,}86 & -0{,}48 & -0{,}009 \\ -0{,}6 & 0{,}28 & 0{,}67 & 0{,}35 \\ -0{,}73 & -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}58 \\ -0{,}3 & -0{,}32 & -0{,}51 & 0{,}74 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с алгоритмом Фаддеева–Леверье вычислим матрицы Фаддеева и коэффициенты характеристического уравнения для обратного грамиана

$$P_0^c = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0{,}05 & -0{,}07 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & -1{,}62 & 2{,}69 & -3{,}4 \\ -0{,}07 & 2{,}69 & -4{,}5 & 5{,}6 \\ 0{,}08 & -3{,}4 & 5{,}6 & -7{,}2 \end{bmatrix},\ P_1^c = \begin{bmatrix} 21{,}8 & -23{,}5 & 8{,}4 & 17 \\ -23{,}5 & 44{,}6 & -29{,}5 & -5{,}5 \\ 8{,}4 & -29{,}5 & 33 & -25 \\ 17 & -5{,}5 & -25 & 65{,}7 \end{bmatrix},$$
$$P_2^c = \begin{bmatrix} -31 & 3 & 2{,}5 & 0{,}56 \\ 3 & -22{,}1 & 13{,}2 & 5{,}1 \\ 2{,}5 & 13{,}2 & -16{,}7 & 6{,}9 \\ 0{,}56 & 5{,}1 & 6{,}9 & -30{,}3 \end{bmatrix},\ P_3^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$a_{c,0} = 0{,}0031,\ a_{c,1} = -13{,}3,\ a_{c,2} = 82{,}6, a_{c,3} = -33{,}3, a_{c,4} = 1.$$

Тогда обратный грамиан можно будет вычислить по формуле (3.20)

$$(P^c)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}97 & -14{,}8 & 22{,}3 & -26{,}2 \\ -14{,}8 & -517 & -856 & 1083 \\ 22{,}3 & -856 & 1422 & -1803 \\ -26{,}2 & 1083 & -1803 & 2290 \end{bmatrix}.$$

3.4. Спектральные разложения энергетических функционалов и новые критерии устойчивости

Рассмотрим в рамках сделанных выше предположений SISO LTI систему вида (2.4), уравнения состояния которой приведены к канонической форме управляемости, и вычислим энергетический функционал J, который представляет собой значение квадрата H_2-нормы передаточной функции системы и дает оценку риска потери устойчивости [1, 19, 22]. Для этого используем (3.12) и (3.14) и для определенности выберем спектральное разложение грамиана управляемости по простому спектру

$$J = trC^F \Omega_c {(C^F)}^T = \tag{3.27}$$

$$= \left(\frac{{\xi_0}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} - \frac{{\xi_1}^2 \sum\limits_{k=1}^{n} s_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} {\xi_{n-1}}^2 \sum\limits_{k=1}^{n} s_k^{2n}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} \right).$$

Получили инвариантное спектральное разложение энергетического функционала по простому спектру матрицы динамики. Эта простая формула показывает преимущество применения спектральных разложений в канонической форме перед разложением общего вида (3.23). Разложение не зависит от выбора невырожденной матрицы линейных преобразований координат системы. Два основных фактора влияют на значение риска потери устойчивости J:

1) значения диагональных членов матрицы Сяо Ω_c,

2) квадраты элементов приведенного вектора выхода.

Выражение (3.27) можно упростить за счет упрощения SISO LTI системы. В [14] показано, что матрица Сяо является грамианом управляемости для SISO LTI системы с передаточной функцией

$$W\left(s\right) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}. \tag{3.28}$$

Асимптотическая устойчивость SISO LTI систем вида (2.4) равносильна асимптотической устойчивости этой системы. Более того, покажем, что асимптотическая устойчивость MIMO LTI систем вида (2.1) равносильна ее асимптотической устойчивости. Энергетический функционал J для системы

(3.28) согласно (3.27) равен

$$J = \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \dot{N}(s_k) N(-s_k)} - \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k^2}{\sum_{k=1}^{n} \dot{N}(s_k) N(-s_k)} + \ldots \right. \\ \left. \ldots + \frac{(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^{n} \dot{N}(s_k) N(-s_k)} \right). \tag{3.29}$$

Теорема 4. Рассмотрим непрерывную полностью управляемую динамическую MIMO LTI систему с простым спектром вида (2.1)*, а также непрерывную динамическую SISO LTI систему с тем же спектром, уравнения состояния которой приведены к канонической форме управляемости вида* (2.4)*.*

Тогда достаточным условием асимптотической устойчивости системы (2.1) *по Ляпунову является ограниченность энергетического функционала* (3.29) *для SISO LTI системы с тем же спектром и передаточной функцией* (3.28)

$$J < +\infty, \tag{3.30}$$

$$\text{для любого } s_k \text{ принадлежащего } C^-, \;\; k = 1, \ldots, n. \tag{3.31}$$

Доказательство теоремы 4. Напомним, что MIMO LTI система (2.1) полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрицы A различны, реализация системы (2.1) минимальна и существует единственная передаточная функция системы. При выполнении указанных условий ограниченность функционала $\sqrt{J}$ является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы (2.1) по Ляпунову [1, Теорема 5.14]. Таким образом, ограниченность функционала J является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (3.27)

$$J < \infty.$$

Но функционал J есть след матрицы Сяо SISO LTI системы (2.4), уравнения состояния которой приведены к канонической форме управляемости. Отсюда вытекает вывод о том, что ограниченность энергетического функционала простой SISO LTI системы (3.28) в форме неравенства (3.30) гарантирует асимптотическую устойчивость сложной MIMO LTI системы вида (2.1). Проверка условия (3.31) требует использования асимптотических моделей грамианов [22].

Таким образом, получен новый критерий устойчивости сложной стационарной линейной динамической MIMO LTI системы в виде критерия ограниченности следа матрицы Сяо Ω_c для простой SISO LTI системы (3.21), уравнения которой приведены в каноническую форму управляемости. Новый критерий не противоречит известному критерию принадлежности собственных чисел матрицы динамики линейной системы левой полуплоскости плоскости собственных чисел, но уточняет его с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод (кратные собственные числа, близкие апериодические и колебательные моды) [22].

4. Заключение

В данной статье, посвященной развитию спектральных методов решения уравнения Ляпунова, основные результаты получены с использованием структурных методов в разрабатываемых новых методах и инструментах, тесно связанных с фундаментальными свойствами линейных динамических систем: управляемостью, наблюдаемостью и устойчивостью. Среди инструментов прежде всего следует назвать два: определение структуры матрицы решения в виде матрицы Сяо и спектральные разложения решения в форме произведений Адамара. Разработан метод и алгоритм вычисления матриц в виде произведения Адамара для многосвязных непрерывных линейных систем со многими входами и многими выходами. Это позволяет вычислять элементы соответствующих грамианов управляемости и наблюдаемости в виде произведений соответствующих элементов матриц мультипликаторов и матрицы, являющейся суммой всевозможных произведений матриц числителя матричной передаточной функции системы. При использовании канонических форм управляемости или наблюдаемости разложение Адамара соответствующих грамианов сводится к матрице мультипликатора, след которого равен энергетическому функционалу SISO LTI системы. Новые результаты получены в виде спектральных и сингулярных разложений обратных грамианов управляемости и наблюдаемости. Это позволяет получить инвариантные разложения энергетических функционалов и сформулировать новые критерии устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM. Philadephia, 2005.
2. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Теория автоматического управления. Учеб. пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
3. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
5. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192 с.
6. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Учебник-М: Изд-во Лань, 2009. 726 с.
7. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
8. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами М.: Наука, 1976. 424 с.
9. *Годунов С.К.* Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002. 216 с.
10. *Проскурников А.В., Фрадков А.Л.* Задачи и методы сетевого управления // АиТ. 2016. № 10. С. 3–39.

Proskurnikov A.V., Fradkov A.L. Problems and methods of network control // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1711–1740. https://doi.org/10.1134/S0005117916100015

11. *Жабко А.П., Харитонов В.Л.* Методы линейной алгебры в задачах управления: учебное пособие / СПбГУ СПб.: Изд-во СПб. универ-та, 1993. 318 с.
12. *Sreeram V., Agathoklis P.* Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form // IEE Proc. D. Control. Theory Appl. 1991. V. 138. No. 6. P. 529–534. https://doi.org/10.1049/ip-d.1991.0074
13. *Xiao C., Feng Z., Shan X.* On the Solution of the Continuous-Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms // IEE Proc. 1992. V. 139. No. 3. P. 286–290. https://doi.org/10.1049/ip-d.1992.0038
14. *Hauksdottir A., Sigurdsson S.* The continuous closed form controllability Gramian and its inverse // 2009 American Control Conference Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA June 10–12, 2009. P. 5345–5351. https://doi.org/978-1-4244-4524-0/09
15. *Yadykin I.B.* Spectral Decompositions of Gramians of Continuous Stationary Systems Given by Equations of State in Canonical Forms // Mathematics. 2022. V. 10. No. 13. P. 2339. https://doi.org/10.3390/math10132339
16. *Dilip A.S.A.* The controllability Gramian, the Hadamard product and the optimal actuator // Leader Sensor Select. Problem Nature Phys. 2015. V. 11. P. 779–786. https://doi.org/10.1109/LCSYS.2019.2919278
17. *Bianchin G., Pasqualetti F.* Gramian-Based Optimization for the Analysis and Control of Traffic Networks // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2022. V. 21. No. 7. P. 3013–3024. https://doi.org/10.1109/TITS.2019.2922900
18. *Himpe C.* The Empirical Gramian Framework // Algorithms. 2018. V. 11. No. 91. https://doi.org/10.3390/a11070091
19. *Benner P., Goyal P., Duff I.P.* Gramians, Energy Functionals, and Balanced Truncation for Linear Dynamical Systems With Quadratic Outputs // IEEE Transact. Autom. Control. 2022. V. 67. No. 2. P. 886–893. https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3086319
20. *Ядыкин И.Б.* О свойствах грамианов непрерывных систем управления // АиТ. 2010. № 6. С. 39–50. https://doi.org/10.1134/S0005117910060032
21. *Yadykin I.B., Galyaev A.A.* On the methods for calculation of grammians and their use in analysis of linear dynamic systems Automation and Remote Control // Pleiades Publishing Ltd. V. 74. No. 2. P. 207–224.
22. *Ядыкин И.Б., Искаков А.Б.* Энергетический подход к анализу устойчивости линейных стационарных динамических систем // АиТ. 2016. № 12. С. 37–58.
23. *Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж. Л.* Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными параметрами. М.: Физматлит, 1961.
    Gardner M.F., Barns J.L. Transients in linear systems studied by the Laplace transformation / V. 1. Lumped-constant systems. New York, London. Wiley, Chapman and Hall. 1942.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 31.05.2023
После доработки 10.09.2023
Принята к публикации 30.09.2023