Автоматика и телемеханика, № 11, 2023

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2023 г. **А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),**
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИЕЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. ЧАСТЬ III. ОБЪЕКТЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

Предлагается адаптивная система управления по вектору состояний классом линейных систем в канонической управляемой форме с переменными неизвестными параметрами, описываемыми известными нестационарными генераторами с неизвестными начальными условиями. Решение гарантирует глобальную экспоненциальную устойчивость замкнутой системы при конечном возбуждении регрессора, а также не требует априорной информации о знаке коэффициента усиления. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы в рамках математического моделирования.

Ключевые слова: адаптивное управление, переменные параметры, параметрическая ошибка, конечное возбуждение, идентификация, экспоненциальная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231023110089, **EDN:** OOHZIG

1. Введение

Классические алгоритмы адаптивного беспоискового управления при постоянных неизвестных параметрах объекта гарантируют асимптотическую устойчивость ошибки слежения (разницы между регулируемыми координатами и координатами эталонной модели) [1]. Однако в приложениях реальные физические системы часто описываются моделями с переменными параметрами. В этих условиях стандартные решения встречают сложности, связанные с необходимостью компенсации в производной функции Ляпунова слагаемого, пропорционального скорости изменения неизвестных параметров [1, с. 552].

Если неизвестные переменные параметры экспоненциально сходятся к постоянному значению, то асимптотическая устойчивость ошибки слежения со-

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД.1787.2022.4).

храняется [2, с. 339]. При произвольном изменении неизвестных параметров и выполнении ограничительного условия неисчезающего возбуждения регрессора базовые решения гарантируют ограниченность всех сигналов и сходимость ошибки слежения в ограниченную область. Если упомянутое условие не выполняется, то применение робастных модификаций базовых законов позволяет обеспечить аналогичные свойства замкнутой системы [1, 2].

Рассмотрим основные существующие подходы к улучшению свойств базовых решений.

В [3, 4] предлагается метод «заморозки переменных — *congelation of variables*», позволяющий заменить задачу оценки переменных неизвестных параметров задачей оценки их постоянного математического ожидания. Оценка сверху на величину дисперсии параметров считается известной, а управление строится с применением статического нелинейного демпфирования. В этой схеме закон адаптации компенсирует влияние математического ожидания неизвестных параметров, а нелинейный демпфер обеспечивает подавление влияния дисперсии. Решение обеспечивает асимптотическую устойчивость ошибки слежения и ограниченность всех сигналов замкнутой системы. Недостатком описанного метода является использование в управлении степенных функций от координат объекта (регрессора) [5, с. 222–223]. В качестве еще одного недостатка метода заморозки переменных выделяют [6] невозможность компенсации параметрической неопределенности вида $\theta(t)\varphi\left(x(t)\right)$ с $\varphi\left(0\right) \neq 0$.

В [7–9] предложен подход, основанный на использовании комбинированных законов адаптации, в которых настройка параметров осуществляется с использованием ошибки слежения и ошибки предсказания. По сравнению с базовыми решениями [1, 2] комбинированные законы при тех же допущениях (выполнение условия неисчезающего возбуждения регрессора или применение робастных модификаций) обеспечивают сходимость ошибки слежения в область меньшего размера. В отличие от метода заморозки переменных [3, 4] асимптотическая устойчивость не достигается. Подробный обзор некоторых комбинированных законов идентификации переменных параметров приведен во введении [10].

Также стоит отметить исследования [11–15]. В [11] предлагается простая схема настройки среднегеометрического корня замкнутой системы, гарантирующая асимптотическую устойчивость ошибки слежения. Недостатком решения является необходимость знания коэффициента усиления объекта. В [12] разработан закон адаптации с астатизмом первого порядка, расширяющий применимость базовых законов настройки на класс систем с линейным изменением неизвестных параметров. В [13–15] предлагается схема робастного управления нестационарными линейными системами в форме вход-выход. Ограничением подхода является необходимость знания знака высокочастотного коэффициента усиления объекта и оценок сверху на все неизвестные переменные параметры системы.

Рассмотренные подходы [3–15], не используют априорную информацию о функциональном характере изменения неизвестных параметров системы. Однако, как известно [16], учет такой информации может существенно улучшить свойства замкнутой системы. Недавно в [17, 18] был предложен основанный на параметрической идентификации наблюдатель состояний нестационарных систем. Параметры системы описываются известными нестационарными генераторами с неизвестными начальными условиями. Задача оценки состояний системы приводится к задаче идентификации начальных условий генераторов и объекта. При выполнении условия конечного возбуждения регрессора (наблюдаемости системы на конечном интервале) гарантируется экспоненциальная или финитная сходимость параметрической ошибки и ошибки наблюдения.

На основе результатов [17, 18] в этой работе предлагается свести задачу управления к задаче оценки начальных условий генераторов параметров системы.

Рассматривается класс линейных полностью управляемых систем с переменными параметрами, описываемыми известными нестационарными генераторами с неизвестными начальными условиями. Разница между идеальным и формируемым управлением представляется в виде линейного регрессионного уравнения с неизвестным регрессором относительно неизвестных начальных условий генераторов. Затем по измеряемым состояниям и управлению в соответствии с результатами [18] строится измеримое регрессионное уравнение со скалярным невырожденным регрессором относительно начальных условий генераторов. По полученной регрессии с использованием результатов первой части [19] вводится закон настройки, в отличие от [3–15] при конечном возбуждении регрессора гарантирующий экспоненциальную сходимость ошибки слежения к нулю.

Предложенное расширение результатов первой части [19] на класс систем с переменными параметрами, кроме конечного возбуждения регрессора, дополнительно требует:

— знания оценок снизу и сверху на модуль коэффициента усиления объекта;
— постоянства знака коэффициента усиления;
— использования проекционного оператора, предотвращающего деление на ноль в управлении.

По сравнению с [3–11, 13–15] предложенный подход требует знания матриц состояний и выхода нестационарных генераторов, а значит и физической природы процессов, вызывающих изменения параметров системы.

Основные определения

При доказательстве теорем и утверждений будут использованы определение конечного возбуждения регрессора и следствие из леммы Калмана–Якубовича–Попова [1, 2].

Определение 1. *Регрессор $\omega(t)$ возбуждается конечно $\omega(t) \in \mathrm{FE}$ на отрезке $[t_r^+; t_e]$, если существуют $t_r^+ \geqslant 0$, $t_e > t_r^+$ и α такие, что верно неравенство*

$$\int\limits_{t_r^+}^{t_e} \omega(\tau)\,\omega^{\mathrm{T}}(\tau)\,d\tau \geqslant \alpha I_{n\times n}, \tag{1.1}$$

где $\alpha > 0$ — степень возбуждения, $I_{n\times n}$ — единичная матрица.

Следствие 1. *Для любой матрицы $D > 0$ управляемой пары (A, B) с $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, гурвицевой матрицей $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ существуют матрицы $P = P^{\mathrm{T}} > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $K \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и число $\mu > 0$ такие, что*

$$\begin{gathered} A^{\mathrm{T}}P + PA = -QQ^{\mathrm{T}} - \mu P, \quad PB = QK, \\ K^{\mathrm{T}}K = D + D^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

2. Постановка задачи

Рассмотрим класс непрерывных линейных систем с переменными параметрами[2]:

$$\begin{gathered} \forall t \geqslant t_0^+ \ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x\left(t_0^+\right) = x_0, \\ A(t) = A_0 + e_1\vartheta^{\mathrm{T}}(t), \quad B(t) = e_1\beta(t), \\ A_0 = \begin{bmatrix} 0_{(n-1)\times 1} & I_{n-1} \\ \multicolumn{2}{c}{0_{1\times n}} \end{bmatrix}, \quad e_1 = \begin{bmatrix} 0_{(n-1)\times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — координаты состояния с неизвестными начальными условиями x_0, $u(t) \in \mathbb{R}$ — управляющее воздействие, $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — известная матрица состояний, $B(t) \in \mathbb{R}^n$, $\vartheta(t) \in \mathbb{R}^n$ — неизвестные векторы, t_0^+ — известный начальный момент времени. Пара $(A(t), B(t))$ полностью управляема для всех $t \geqslant t_0^+$ в смысле критерия [20].

Относительно неизвестных переменных параметров системы (2.1) принимаются следующие допущения.

Допущение 1. Векторы $\vartheta(t)$, $B(t)$ ограничены, непрерывны и формируются нестационарными генераторами[3]:

$$\begin{gathered} \begin{cases} \dot{x}_\vartheta(t) = \mathcal{A}_\vartheta(t)x_\vartheta(t), \quad x_\vartheta\left(t_0^+\right) = x_{\vartheta_0}, \\ \vartheta(t) = h_\vartheta x_\vartheta(t), \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x}_B(t) = \mathcal{A}_B(t)x_B(t), \quad x_B\left(t_0^+\right) = x_{B_0}, \\ B(t) = h_B x_B(t), \end{cases} \end{gathered} \tag{2.2}$$

[2] Результаты могут быть обобщены на MIMO системы в случае, если известна конкретная структура матриц $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

[3] Матрицы $\mathcal{A}_\vartheta(t)$, $\mathcal{A}_B(t)$ в общем случае могут нелинейно зависеть от состояний системы $x(t)$.

где $x_\vartheta(t) \in \mathbb{R}^{n_\vartheta}$, $x_B(t) \in \mathbb{R}^{n_B}$ — координаты генераторов с неизвестными начальными условиями $x_\vartheta\left(t_0^+\right)$, $x_B\left(t_0^+\right)$, $h_\vartheta \in \mathbb{R}^{n \times n_\vartheta}$, $h_B \in \mathbb{R}^{n \times n_B}$; $\mathcal{A}_\vartheta(t) \in \mathbb{R}^{n_\vartheta \times n_\vartheta}$, $\mathcal{A}_B(t) \in \mathbb{R}^{n_B \times n_B}$ — известные векторы и матрицы.

Допущение 2. Для $|\beta(t)|$ известны оценки снизу $\beta_{\min} > 0$ и сверху $\beta_{\max} > \beta_{\min}$.

Допущение 3. Коэффициент усиления $\beta(t)$ имеет постоянный, но неизвестный знак ($\operatorname{sgn}(\beta(t)) = \mathrm{const}$).

Требуемое качество управления в замкнутой управлением $u(t)$ системе (2.1) зададим эталонной моделью с постоянными параметрами:

$$\forall t \geqslant t_0^+ \ \dot{x}_{ref}(t) = A_{ref}x_{ref}(t) + B_{ref}r(t), \quad x_{ref}\left(t_0^+\right) = x_{0ref}, \tag{2.3}$$

где $x_{ref}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор координат состояния эталонной модели с известными начальными условиями x_{0ref}; $r(t) \in \mathbb{R}$ — сигнал задания; $A_{ref} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — гурвицева матрица состояний эталонной модели; $B_{ref} \in \mathbb{R}^n$ — вектор коэффициентов усиления эталонной модели.

Для объекта (2.1) и эталонной модели (2.3) при управляемости пары $(A(t),\, B(t))$ и выполнении допущения 3 возможно предположить выполнение условия идеального отслеживания.

Допущение 4. Существуют матрица $K_x(t) = A_{ref} - A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и вектор $K_r(t) = \left[B^{\mathrm{T}}(t)B(t)\right]^{-1}B^{\mathrm{T}}(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ такие, что верно

$$A(t) + B(t)K_r(t)K_x(t) = A_{ref}, \quad B(t)K_r(t)B_{ref} = B_{ref}. \tag{2.4}$$

С учетом допущения 2 уравнение в отклонениях между уравнением объекта (2.1) и эталонной модели (2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ref}(t) &= A_{ref}e_{ref}(t) + B(t)u(t) - \left(A_{ref} - A(t)\right)x(t) - B_{ref}r(t) = \\ &= A_{ref}e_{ref}(t) + B(t)\left(u(t) - u^*(t)\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $e_{ref}(t) = x(t) - x_{ref}(t)$, $\quad u^*(t) = K_r(t)\left(K_x(t)x(t) + B_{ref}r(t)\right).$

Требуется построить закон управления $u(t)$, гарантирующий достижение цели экспоненциального регулирования:

$$\Phi(t) \in \mathrm{FE} \ \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|e_{ref}(t)\| = 0 \ (\exp), \tag{2.6}$$

где $\Phi(t)$ — некоторый обобщенный вектор измеримых сигналов.

Замечание 1. Допущение 1 из общего класса линейных систем с переменными параметрами выделяет группу систем, для которых в работе ставится и решается задача экспоненциального регулирования (2.6)*. В предложенном решении задачи используется информация о $\beta_{\max} > \beta_{\min} > 0$, что требует принятия допущения 2. Математическое моделирование показывает возможность выбора $\beta_{\max} \to \infty$, $\beta_{\min} \to 0$, что несколько ослабляет строгость этого требования. Допущение 3 гарантирует непрерывность коэффициентов $K_x(t)$, $K_r(t)$ управления $u^*(t)$. Допущение 4 накладывает тре-*

бование структурного соответствия матриц эталонной модели (2.3) матрицам объекта (2.1).

З а м е ч а н и е 2. *Системы (2.1) с согласованной параметрической неопределенностью (2.4) часто встречаются на практике. Например, уравнения динамики углов Эйлера твердого тела при допущении его симметричности описываются звеном второго порядка с согласованной неопределенностью. Другим хорошим примером задачи управления при согласованных неопределенностях является регулирование координат манипулятора в формализме Эйлера–Лагранжа.*

3. Основной результат

В разделе 3.1 поставленную задачу экспоненциального регулирования (2.6) сведем к задаче идентификации начальных условий x_{B_0}, x_{ϑ_0}. В разделе 3.2 из измеримых сигналов составим регрессионное уравнение относительно x_{B_0}, x_{ϑ_0} и введем закон идентификации, доставляющий выполнение цели (2.6).

3.1. Параметризация управления

Запишем управление $u^*(t)$ через измеримые состояния объекта (2.1), (2.2) и неизвестные параметры x_{B_0}, x_{ϑ_0}. Для этого получим решения уравнений (2.2):

$$\begin{gathered}\vartheta(t) = h_\vartheta \Phi_\vartheta(t) x_{\vartheta_0},\\ B(t) = h_B \Phi_B(t) x_{B_0},\end{gathered} \tag{3.1.1}$$

где при выполнении допущений 2 и 3 выполняется неравенство

$$\begin{gathered}0 < \beta_{\min}^2 \leqslant x_{B_0}^{\mathrm{T}} G(t) x_{B_0} \leqslant \lambda_{\max}\left(G(t)\right) \|x_{B_0}\|^2,\\ G(t) = \Phi_B^{\mathrm{T}}(t) h_B^{\mathrm{T}} h_B \Phi_B(t),\end{gathered} \tag{3.1.2}$$

а фундаментальные матрицы $\Phi_\vartheta(t)$ и $\Phi_B(t)$ измеримы и определены уравнениями

$$\begin{gathered}\dot{\Phi}_\vartheta(t) = \mathcal{A}_\vartheta(t)\Phi_\vartheta(t), \quad \Phi_\vartheta\left(t_0^+\right) = I_{n_\vartheta},\\ \dot{\Phi}_B(t) = \mathcal{A}_B(t)\Phi_B(t), \quad \Phi_B\left(t_0^+\right) = I_{n_B}.\end{gathered}$$

С учетом (2.4) и (3.1.1) можем переписать уравнение идеального управления $u^*(t)$ в требуемом виде

$$\begin{aligned}u^*(t) &= K_r(t)\left(K_x(t)x(t) + B_{ref}r(t)\right) =\\ &= \frac{x_{B_0}^{\mathrm{T}}\Phi_B^{\mathrm{T}}(t)h_B^{\mathrm{T}}}{x_{B_0}^{\mathrm{T}}\Phi_B^{\mathrm{T}}(t)h_B^{\mathrm{T}}h_B\Phi_B(t)x_{B_0}}\Big((A_{ref}-A_0)x(t) - e_1\vartheta^{\mathrm{T}}(t)x(t) + B_{ref}r(t)\Big) =\\ &= \frac{x_{B_0}^{\mathrm{T}}\Phi_B^{\mathrm{T}}(t)h_B^{\mathrm{T}}}{F(t)}\, e_1\Big(e_1^{\mathrm{T}}(A_{ref}-A_0)x(t) - x_{\vartheta_0}^{\mathrm{T}}\Phi_\vartheta^{\mathrm{T}}(t)h_\vartheta^{\mathrm{T}}x(t) + e_1^{\mathrm{T}}B_{ref}r(t)\Big),\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

где $F(t) = x_{B_0}^{\mathrm{T}}G(t)x_{B_0} > 0$.

Поскольку в соответствии с описанием системы (2.5) параметры x_{B_0} и x_{ϑ_0} неизвестны, то выражение (3.1.3) мотивирует использование управления с настраиваемыми параметрами:

$$\begin{aligned}u(t) = \frac{\hat{x}_{B_0}^{\mathrm{T}}(t)\Phi_B^{\mathrm{T}}(t)h_B^{\mathrm{T}}}{\hat{F}(t)}e_1\Big(e_1^{\mathrm{T}}\left(A_{ref}-A_0\right)x(t) - \hat{x}_{\vartheta_0}^{\mathrm{T}}(t)\Phi_\vartheta^{\mathrm{T}}(t)h_\vartheta^{\mathrm{T}}x(t) +\\ + e_1^{\mathrm{T}}B_{ref}r(t)\Big),\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

где $\hat{F}(t) = \hat{x}_{B_0}^{\mathrm{T}}(t)G(t)\hat{x}_{B_0}(t)$.

Утверждение 1. Ошибка $u(t) - u^*(t)$ *между формируемым* (3.1.4) *и идеальным управлением* (3.1.3) *имеет вид*

$$u(t) - u^*(t) = \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}(t)\omega(t), \tag{3.1.5}$$

где $\tilde{\theta}(t) = \left[\tilde{x}_{\vartheta_0}^{\mathrm{T}}(t) \quad \tilde{x}_{B_0}^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n_\vartheta + n_B}$ *— параметрическая ошибка,* $\omega(t) \in \mathbb{R}^{n_\vartheta + n_B}$ *— неизмеримый регрессор.*

Доказательство утверждения 1 и функциональное определение регрессора $\omega(t)$ приведены в Приложении.

Подставив (3.1.5) в (2.5), имеем:

$$\dot{e}_{ref}(t) = A_{ref}e_{ref}(t) + B(t)\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}(t)\omega(t). \tag{3.1.6}$$

Тогда в соответствии с результатами первой части работы требуется определить преобразования

$$\Phi(t) = \mathcal{F}_1\left(t, x(t), u(t), \Phi_\vartheta(t), \Phi_B(t)\right), \quad z(t) = \mathcal{F}_2\left(x(t)\right),$$
$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \mathcal{G}\left(\Phi(t), z(t)\right),$$

совместно гарантирующие достижение цели экспоненциального регулирования в расширенном пространстве ошибок:

$$\Phi(t) \in \mathrm{FE} \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\|\xi(t)\| = 0 \ \ (\exp), \tag{3.1.7}$$

где $\xi(t) = \left[e_{ref}^{\mathrm{T}}(t) \quad \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}}$ — обобщенная ошибка слежения.

3.2. Синтез адаптера

Получим регрессионное уравнение относительно неизвестных постоянных параметров x_{B_0} и x_{ϑ_0} идеального закона управления (3.1.3). Результат такой параметризации представим в виде утверждения.

Утверждение 2. На основании состояний набора фильтров ($A_K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— гурвицева матрица*)

$$\begin{aligned}
&\dot{\bar{x}}(t) = A_K\bar{x}(t) - A_Kx(t),\ \bar{x}\left(t_0^+\right) = 0_n,\\
&\dot{\varphi}(t) = A_K\varphi(t) + e_1x^{\mathrm{T}}(t)h_\vartheta\Phi_\vartheta(t),\ \varphi(t_0^+) = 0_{n\times n_\vartheta},\\
&\dot{\psi}(t) = A_K\psi(t) + h_B\Phi_B(t)u(t),\ \psi\left(t_0^+\right) = 0_{n\times n_B},\\
&\dot{\upsilon}(t) = A_K\upsilon(t) + A_0x(t),\ \upsilon\left(t_0^+\right) = 0_n,
\end{aligned} \quad A_K = \begin{bmatrix} K \in \mathbb{R}^n & \begin{matrix} I_{(n-1)\times(n-1)} \\ 0_{1\times(n-1)} \end{matrix}\end{bmatrix}, \tag{3.2.1}$$

процедур нормализации

$$z(t)\colon = \frac{e_1^{\mathrm{T}}\left(x(t) - \bar{x}(t) - \upsilon(t)\right)}{1+\Phi^{\mathrm{T}}(t)\Phi(t)} \quad \Psi^{\mathrm{T}}(t)\colon = \frac{\Phi^{\mathrm{T}}(t)}{1+\Phi^{\mathrm{T}}(t)\Phi(t)}, \tag{3.2.2}$$
$$\Phi^{\mathrm{T}}(t)\colon = \left[e_1^{\mathrm{T}} e^{A_K\left(t-t_0^+\right)} \quad e_1^{\mathrm{T}}\varphi(t) \quad e_1^{\mathrm{T}}\psi(t)\right],$$

динамического расширения

$$\dot{\Delta}(t) = e^{-\sigma\left(t-t_0^+\right)}\Psi(t)\Psi^{\mathrm{T}}(t), \quad \Delta\left(t_0^+\right) = 0_{(n_\vartheta+n_B+n)\times(n_\vartheta+n_B+n)}, \tag{3.2.3a}$$

$$\dot{y}(t) = e^{-\sigma\left(t-t_0^+\right)}\Psi(t)z(t), \quad y\left(t_0^+\right) = 0_{(n_\vartheta+n_B+n)} \tag{3.2.3b}$$

и смешивания

$$Y(t)\colon = \operatorname{adj}\left\{\Delta(t)\right\}y(t), \quad \Omega(t)\colon = \det\left\{\Delta(t)\right\} \tag{3.2.3c}$$

имеем регрессионное уравнение относительно параметров x_{B_0} *и* x_{ϑ_0}*:*

$$\Upsilon(t) := \mathfrak{L}Y(t) = \Omega\left(\Phi(t)\right)\theta, \quad \mathfrak{L} = \left[0_{(n_\vartheta+n_B)\times n} \; I_{(n_\vartheta+n_B)\times(n_\vartheta+n_B)}\right], \tag{3.2.4}$$

где если $\Phi(t)\in\mathrm{FE}$*, то* $\forall t \geqslant t_e$ *верно неравенство* $\Omega_{UB}(t) \geqslant \Omega(t) \geqslant \Omega_{LB} > 0$.

Доказательство утверждения 2 приведено в Приложении.

По уравнению (3.2.4) в соответствии с результатами теоремы 1 из [19] при измеримом $\omega(t)$ возможно ввести закон настройки, гарантирующий достижение цели (3.1.7). В следующей теореме опишем закон настройки, решающий задачу (3.1.7) при неизмеримом $\omega(t)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены допущения 1–4 и* $\Phi(t)\in\mathrm{FE}$*, тогда закон настройки*

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma(t)\Omega(t)\left(\Omega(t)\hat{\theta}(t) - \Upsilon(t)\right) = -\gamma(t)\Omega^2(t)\tilde{\theta}(t), \quad \hat{\theta}\left(t_0^+\right) = \hat{\theta}_0, \tag{3.2.5}$$
$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } \Omega(t) < \rho\in\left(0;\Omega_{LB}\right], \\ \dfrac{\gamma_0\lambda_{\max}\left(\hat{\omega}(t)\hat{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\right)+\gamma_1}{\Omega^2(t)} \quad \text{иначе} \end{cases}$$

при выборе $\gamma_0 > 0,\ \gamma_1 \geqslant 0$ *гарантирует:*

1) $\left|\tilde{\theta}_i\left(t_a\right)\right| \leqslant \left|\tilde{\theta}_i\left(t_b\right)\right| \ \forall t_a \geqslant t_b$;

2) $\left\{\begin{matrix} \operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}\right) \\ \left|V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)\right| > \left|V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}\right| \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{F}(t) > 0$;

3) $\forall t \geqslant t_0^+$ *ограниченность* $\xi(t)\in L_\infty$;

4) *экспоненциальную сходимость* $\xi(t)$ *к нулю для всех* $t \geqslant t_e$.

Доказательство теоремы и определение величин $V_1(t), \hat{\omega}(t)$ приведены в Приложении.

При невыполнении условий второго пункта теоремы в управлении (3.1.4) возможно деление на ноль. Поэтому на практике закон управления (3.1.4) следует дополнить проекционным оператором:

$$
\begin{gathered}
u(t) = \frac{\hat{x}_{B_0}^{\mathrm{T}}(t)\Phi_B^{\mathrm{T}}(t)h_B^{\mathrm{T}}}{\hat{F}_{\mathrm{prj}}(t)} e_1 \times \\
\times \left(e_1^{\mathrm{T}}\left(A_{ref} - A_0\right)x(t) - \hat{x}_{\vartheta_0}^{\mathrm{T}}(t)\Phi_\vartheta^{\mathrm{T}}(t)h_\vartheta^{\mathrm{T}}x(t) + e_1^{\mathrm{T}}B_{ref}r(t)\right), \\
\hat{F}_{\mathrm{prj}}(t) := \begin{cases} \hat{x}_{B_0}^{\mathrm{T}}(t)G(t)\hat{x}_{B_0}(t), \text{ если } \hat{x}_{B_0}^{\mathrm{T}}(t)G(t)\hat{x}_{B_0}(t) > \beta_{\min}^2 > 0, \\ \beta_{\min}^2 \text{ иначе.} \end{cases}
\end{gathered} \tag{3.2.6}
$$

Предложенные преобразования $\mathcal{F}_1(.)$ и $\mathcal{F}_2(.)$ описываются выражениями (3.2.1), (3.2.2), а преобразование $\mathcal{G}(.)$ — соответственно (3.2.3)–(3.2.5). В целом разработанная адаптивная система управления состоит из закона управления (3.1.4), процедур обработки измеримых сигналов (3.2.1)–(3.2.4) и закона адаптации (3.2.5). Фильтрация (3.2.1) позволяет по измеримым сигналам $x(t)$, $u(t)$, $\Phi_\vartheta(t)$, $\Phi_B(t)$ построить статическое регрессионное уравнение относительно неизвестных параметров x_{B_0}, x_{ϑ_0}, x_0. Нормализация (3.2.2) гарантирует ограниченность регрессора $\Psi(t)$, что по доказанному в утверждении 1 из [19] достаточно для ограниченности сверху $\Omega(t)$. Процедуры расширения и смешивания (3.2.3) позволяют перейти от векторного регрессора $\Psi(t)$ сначала к матричному $\Delta(t)$, а затем и к скалярному $\Omega(t)$. Деление в законе настройки (3.2.5) на $\Omega^2(t)$ является безопасной операцией в силу $\Omega(t) \geqslant \Omega_{\mathrm{LB}} > 0$ и при правильном выборе параметра ρ позволяет обеспечить заданное величиной $\gamma_0\lambda_{\max}\left(\hat{\omega}(t)\hat{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\right) + \gamma_1$ значение скорости сходимости параметрической ошибки $\tilde{\theta}(t)$ к нулю.

Согласно результатам теоремы предложенная система, в отличие от большинства известных подходов [3–15] к управлению линейными системами с переменными параметрами, обеспечивает экспоненциальное регулирование (2.6).

Замечание 3. *Использование проекционного оператора* (3.2.6) *является классическим и хорошо известным приемом для устранения сингулярности в схемах адаптивного управления* (*см., например,* [1, с. 400]). *При выполнении условий второго пункта теоремы выбор* $\beta_{\min} \to 0$ *обеспечивает отсутствие переключений в* (3.2.6). *В противном случае выбор* $\beta_{\min} \to 0$ *гарантирует конечное число переключений.*

Замечание 4. *На интервале* $\left[t_0^+; t_e\right]$ *или при* $\Phi(t) \notin \mathrm{FE}$ *контур настройки* (3.2.5) *параметров управления* (3.1.4) *разомкнут, а при произвольном выборе начальных условий* $\hat{\theta}\left(t_0^+\right)$ *качество управления может быть произвольно плохим вплоть до потери устойчивости. Поэтому на практике при использовании предложенной адаптивной системы:*

i) *выбор начальных условий* $\hat{\theta}\left(t_0^+\right)$ *должен осуществляться с применением техник робастного управления таким образом, чтобы было априорно известно об асимптотической устойчивости системы*

$$\dot{x}(t) = \Big(A(t) + B(t)\hat{K}_r(t)\hat{K}_x(t)\Big)\, x(t) \ \text{ при } \ \dot{\hat{\theta}}(t) \equiv 0 \ \text{ для всех } \ t \geqslant t_0^+,$$

ii) *закон управления* (3.1.4) *должен быть снабжен дополнительной робастной составляющей, гарантирующей ограниченность ошибки* $\xi(t)$ *и удовлетворительное качество управления.*

Например, а) *при известном* $\operatorname{sgn}(\beta(t))$ *и оценках* $\beta_{\min}$, $\beta_{\max}$ *можно использовать закон управления*

$$u(t) = \{(3.1.4)\,,\ (3.2.6)\} - \gamma_3 \operatorname{sgn}(\beta(t))\, e_{ref}(t) P e_1 \hat{\omega}(t)\hat{\omega}^{\mathrm{T}}(t), \quad \gamma_3 > 0$$

(*см. лемму 2.2 из* [5]), б) *при неизвестном* $\operatorname{sgn}(\beta(t))$, *но известных оценках* $\beta_{\min}$, $\beta_{\max}$ *можно воспользоваться управлением с демпфером и функцией Нуссбаума* [21]:

$$u(t) = \{(3.1.4)\,, (3.2.6)\} - \gamma_3 N\left(w(t)\right) e_{ref}^{\mathrm{T}}(t) P e_1 \hat{\omega}(t)\hat{\omega}^{\mathrm{T}}(t), \quad \gamma_3 > 0,$$

$$N\left(w(t)\right) = w^2(t) \cos\left(w(t)\right),$$

$$\dot{w}(t) = \gamma_3\gamma_4 e_{ref}^{\mathrm{T}}(t) P e_1 e_1^{\mathrm{T}} P e_{ref}(t)\hat{\omega}(t)\hat{\omega}^{\mathrm{T}}(t), \quad \gamma_4 > 0.$$

4. Численное моделирование

В среде Matlab/Simulink выполним моделирование предложенной адаптивной системы управления при выполнении и нарушении условий второго пункта теоремы. Моделирование будем проводить, используя численное интегрирование явным методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации $\tau_s = 10^{-4}$ с.

4.1. $\operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t) x_{B_0}\right)$ *и* $\left|V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)\right| > \left|V_1^{\mathrm{T}}(t) x_{B_0}\right|$

Матрицы объекта управления (2.1) для всех $t \geqslant 0$ зададим следующим образом:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 \sin(a_2 t) & a_4 e^{a_3 t} + a_5\left(1 - e^{a_3 t}\right) \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \cos(b_2 t) + b_4 e^{b_3 t} + b_5 \end{bmatrix}, \quad x\left(t_0^+\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{4.1.1}$$

где $a_2 = 1$, $a_3 = b_3 = -0{,}25$, $b_2 = \sqrt{12}$ — известные постоянные, $a_1 = -10$, $a_4 = 1$, $a_5 = 7$, $b_1 = 0{,}25$, $b_4 = -2$, $b_5 = -4$ — неизвестные постоянные.

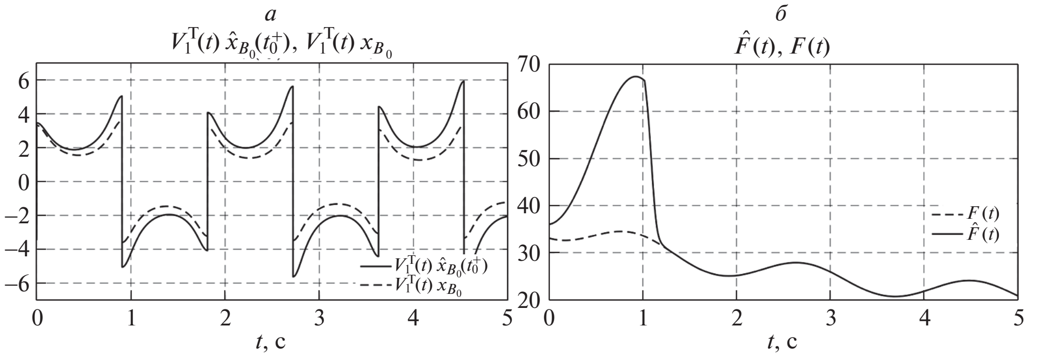

Рис. 1. Переходные процессы по $V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)$ и $V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}$ — *а*, $\hat{F}(t)$ и $F(t)$ — *б*.

Тогда матрицы и начальные условия генераторов (2.2) примут вид:

$$
\mathcal{A}_\vartheta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_{\vartheta_0} = \begin{bmatrix} -a_1 a_2 \\ 0 \\ a_4 - a_5 \\ a_5 \end{bmatrix}, \quad h_\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
\mathcal{A}_B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}, \quad x_{B_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_5 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad h_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.1.2}
$$

Матрицы эталонной модели (2.3), параметры фильтров (3.2.1), (3.2.3) и некоторые параметры закона настройки (3.2.5) установим следующим образом:

$$
A_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_{ref} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad A_K = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma = 5,
$$

$$
\rho = 10^{-62}, \quad \beta_{\min} = 0{,}1, \quad \beta_{\max} = 10, \quad \gamma_0 = 10^{-8}, \quad \gamma_1 = 0, \tag{4.1.3}
$$

$$
\hat{\theta}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.
$$

Прежде всего проверим выполнение в эксперименте требований второй части теоремы. На рис. 1 представлено сравнение функций $V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)$ и $V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}$, и $\hat{F}(t)$ с $F(t)$.

Разрывы на рис. 1 вызваны изменением направления собственного вектора $V_1(t)$ (переходом элементов матрицы $G(t)$ через ноль). Из рис. 1,*а* следует, что сделанный выбор начальных условий (4.1.3) гарантирует в проводимом эксперименте выполнение условий второго пункта теоремы. Совместно рис. 1,*а* и 1,*б* подтверждают импликацию

$$
\left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}\right) \\ \left|V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)\right| > \left|V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}\right| \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{F}(t) > 0.
$$

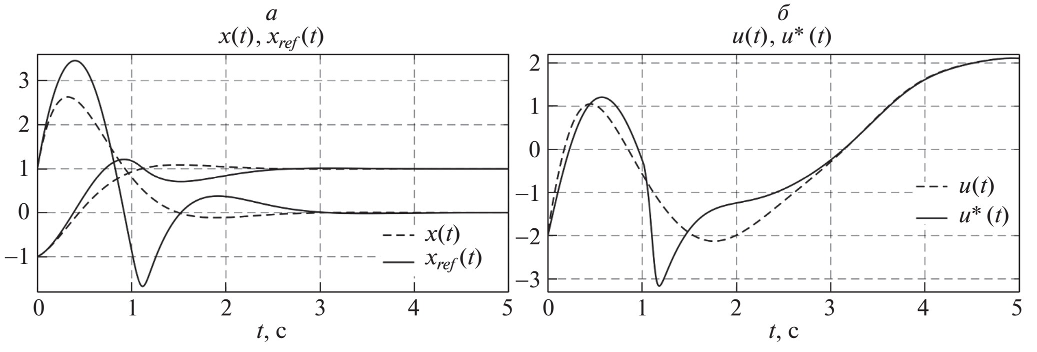

Рис. 2. Переходные процессы по $x(t)$ и $x_{ref}(t)$ — *а*, $u^*(t)$ и $u(t)$ — *б*.

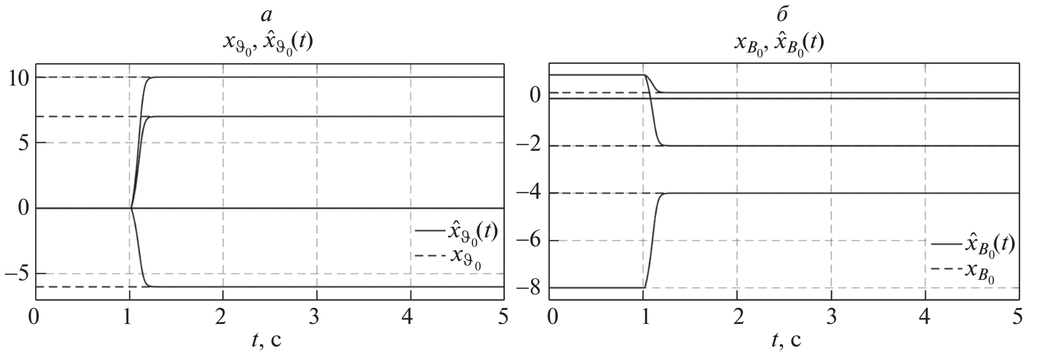

Рис. 3. Переходные процессы по x_{ϑ_0} и $\hat{x}_{\vartheta_0}(t)$ — *а*, x_{B_0} и $\hat{x}_{B_0}(t)$ — *б*.

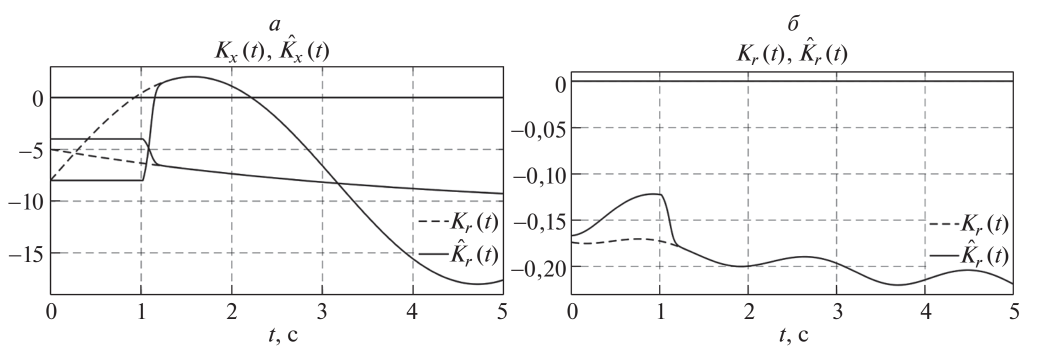

Рис. 4. Переходные процессы по $\hat{K}_x(t)$ и $K_x(t)$ — *а*, $\hat{K}_r(t)$ и $K_r(t)$ — *б*.

Удостоверившись в выполнении условия $\hat{F}(t) > 0$, продолжим моделирование адаптивной системы. На рис. 2,*а* приведено сравнение координат состояния эталонной модели $x_{ref}(t)$ (при $x_{0ref} = x_0$) и координат объекта управления $x(t)$, а на рис. 2,*б* идеального $u^*(t)$ и настраиваемого $u(t)$ управлений.

На рис. 3,*а* приведены сравнения параметров x_{ϑ_0} и $\hat{x}_{\vartheta_0}(t)$, на рис. 3,*б* — x_{B_0} и $\hat{x}_{B_0}(t)$.

На рис. 4 приведены сравнения параметров $K_x(t), K_r(t)$ и их оценок $\hat{K}_x(t)$, $\hat{K}_r(t)$, рассчитанных с помощью $\hat{x}_{\vartheta_0}(t)$, $\hat{x}_{B_0}(t)$.

Результаты моделирования подтверждают теоретические выводы, полученные в теореме 1. Действительно, при $\gamma_0 > 0,\ \gamma_1 \geqslant 0$ предложенная адаптивная система гарантирует достижение поставленной цели (2.6).

Переходные процессы, представленные на рис. 2–4, подтверждают отмеченный в замечании 3 недостаток предложенной системы. На интервале [0; 1] система управления функционирует с разомкнутым контуром адаптации (3.2.5), что приводит к осцилляциям по $x(t)$.

4.2. $\operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)\right) \neq \operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}\right)$

Рассмотрим тот же объект управления (4.1.1), (4.1.2) при тех же параметрах (4.1.3) эталонной модели (2.3), фильтров (3.2.1), (3.2.3), закона настройки (3.2.5), но при более реалистичном для практики сценарии $\operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)\right) \neq \operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}\right)$. Будем использовать модифицированный закон управления (3.2.6) и в соответствии с результатами первой серии экспериментов установим $\gamma_0 = 10^{-10}$, $\gamma_1 = 10$ и $\beta_{\min} = 1$, $\rho = 10^{-81}$, $\hat{\theta}_0 = \left[0\ \ -8\ \ -2\ \ -2\ \ 0\ \ 1\ \ -8\ \ 1\right]^{\mathrm{T}}$.

На рис. 5 представлено сравнение функций $V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)$ и $V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}$, а также $\hat{F}(t)$, $\hat{F}_{\mathrm{prj}}(t)$ с $F(t)$.

Разрывы на рис. 5 вызваны изменением направления собственного вектора $V_1(t)$ (переходом элементов матрицы $G(t)$ через ноль). Из рис. 5,*а* следует, что сделанный выбор начальных условий доставляет выполнение условию $\operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)\right) \neq \operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}\right)$. Рисунок 5,*б* демонстрирует работу проекционного оператора (3.2.6). Совместно рис. 5,*а* и 5,*б* подтверждают импликацию

$$\operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)\right) \neq \operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}\right) \Rightarrow \hat{F}(t) \geqslant 0.$$

На рис. 6 приведено сравнение координат эталонной модели $x_{ref}(t)$ (при $x_{0ref} = x_0$) и координат объекта управления $x(t)$, а также параметров $K_x(t)$, $K_r(t)$ и оценок $\hat{K}_x(t)$, $\hat{K}_r(t)$.

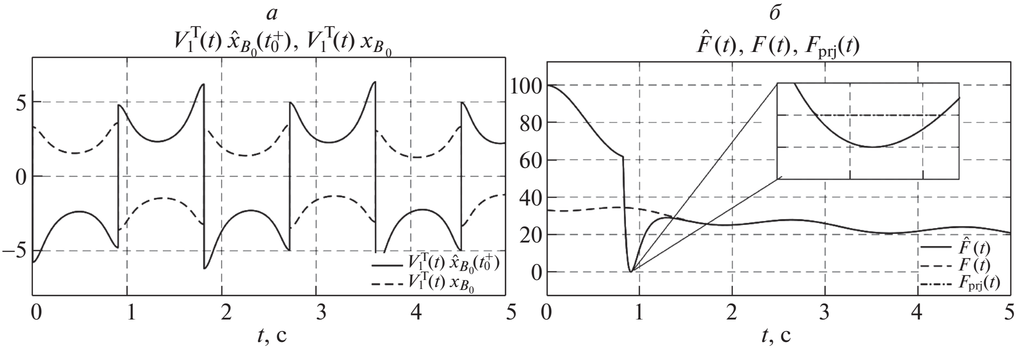

Рис. 5. Переходные процессы по $\hat{\Theta}_0^i(t)$ и $\Theta_0^i(t)$ — *а*, $\hat{F}(t)$, $\hat{F}_{\mathrm{prj}}(t)$ и $F(t)$ — *б*.

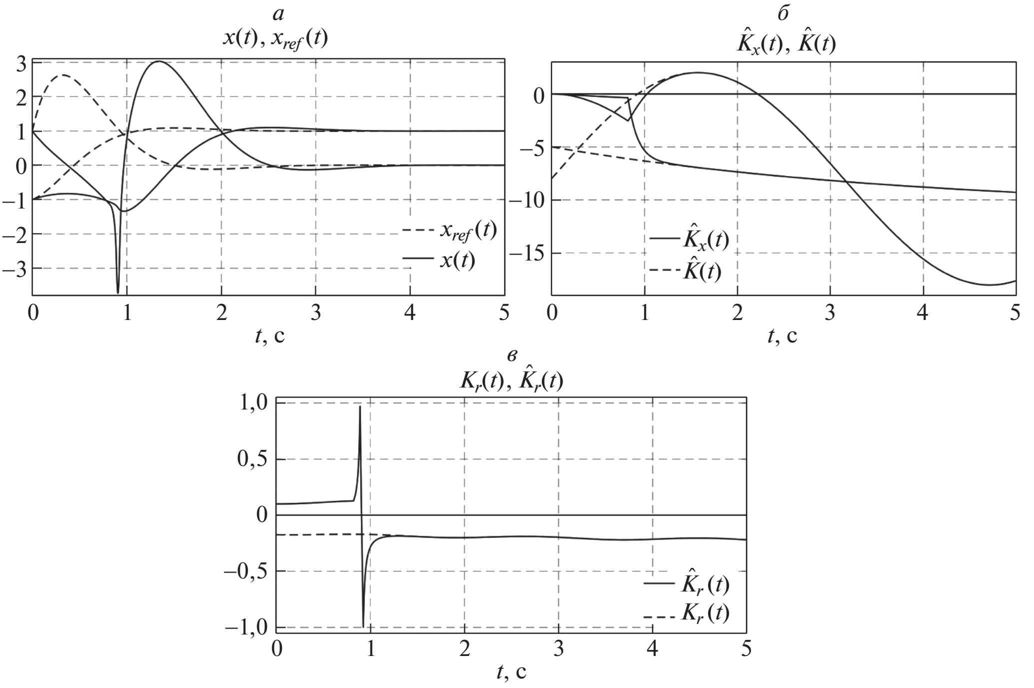

Рис. 6. Сравнение: $x(t)$ и $x_{ref}(t)$ — *а*, $K_x(t)$ и $\hat{K}_x(t)$ — *б*, $K_r(t)$ и $\hat{K}_r(t)$ — *в*.

Результаты эксперимента подтверждают способность настраиваемого закона управления (3.2.6) эффективно противостоять возможному делению на ноль при $\operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^{+}\right)\right) \neq \operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}\right)$.

Проведенные эксперименты полностью подтвердили теоретические выводы, сделанные в теореме 1, замечаниях 3 и 4.

5. Заключение

Результаты первой части работы распространены на класс линейных систем с переменными неизвестными параметрами, описываемыми известными нестационарными генераторами с неизвестными начальными условиями.

Для этого класса систем предложено управление, решающее задачу отслеживания траекторий стационарной эталонной модели нестационарным объектом. Такое управление вычисляется по измеримым сигналам и неизвестным начальным условиям генераторов параметров системы. Для идентификации начальных условий генераторов предложен закон идентификации, гарантирующий экспоненциальную устойчивость ошибки слежения $e_{ref}(t)$ при конечном возбуждении регрессора. Решение не требует знания знаков коэффициента усиления, но требует оценок на его модуль.

Результат имеет общий с [19, 22] недостаток, а именно требует выполнения условия конечного возбуждения регрессора даже для обеспечения ограниченности ошибки слежения. В замечании 4 приведены некоторые способы решения этой проблемы для систем с одним входом. Для систем с несколькими входами обеспечение ограниченности без знания знака элементов матрицы усиления является открытой проблемой.

Целью дальнейших исследований может являться распространение результатов на а) задачи управления по выходу системами с переменными параметрами, б) задачи управления при нарушении условий согласованности, в) системы с несколькими входами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}(t) &= h_{\vartheta}\Phi_{\vartheta}(t)\hat{x}_{\vartheta_0}(t), \\ \hat{B}(t) &= h_B\Phi_B(t)\hat{x}_{B_0}(t), \\ v(t) &= e_1^{\mathrm{T}}\left(A_{ref}-A_0\right)x(t)+e_1^{\mathrm{T}}B_{ref}r(t). \end{aligned} \tag{П.1}$$

С учетом (П.1) разница $u(t)-u^*(t)$ имеет вид (для краткости зависимости от времени временно опущены):

$$\begin{aligned} u-u^* &= \frac{\hat{B}^{\mathrm{T}}}{\hat{F}}e_1\left(v-\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}x\right)-\frac{B^{\mathrm{T}}}{F}e_1\left(v-\vartheta^{\mathrm{T}}x\right)\pm \\ \pm\frac{B^{\mathrm{T}}}{F}e_1\left(v-\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}x\right) &= -\frac{B^{\mathrm{T}}e_1}{F}\tilde{\vartheta}^{\mathrm{T}}x+\left(\frac{\hat{B}^{\mathrm{T}}e_1}{\hat{F}}-\frac{B^{\mathrm{T}}e_1}{F}\right)\left(v-\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}x\right). \end{aligned} \tag{П.2}$$

Приведем разность $\frac{\hat{B}^{\mathrm{T}}e_1}{\hat{F}}-\frac{B^{\mathrm{T}}e_1}{F}$ к виду с линейной зависимостью относительно $\tilde{B}$ и $\tilde{F}$:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{B}^{\mathrm{T}}e_1}{\hat{F}}-\frac{B^{\mathrm{T}}e_1}{F} &= \frac{\hat{B}^{\mathrm{T}}e_1F\pm\hat{B}^{\mathrm{T}}e_1\hat{F}-B^{\mathrm{T}}e_1\hat{F}}{\hat{F}F}= \\ &= \frac{-\hat{B}^{\mathrm{T}}e_1\left(\hat{F}-F\right)+\left(\hat{B}^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}}\right)e_1\hat{F}}{\hat{F}F}= \\ &= \frac{-\hat{B}^{\mathrm{T}}e_1\tilde{F}+\tilde{B}^{\mathrm{T}}e_1\hat{F}}{\hat{F}F}=\frac{-\hat{B}^{\mathrm{T}}e_1}{\hat{F}F}\tilde{F}+\tilde{B}^{\mathrm{T}}\frac{e_1}{F}. \end{aligned} \tag{П.3}$$

Рассмотрим ошибку $\tilde{F}$ отдельно:

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{B}-B^{\mathrm{T}}B+B^{\mathrm{T}}\hat{B}-B^{\mathrm{T}}\hat{B}= \\ &= \left(\hat{B}^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}}\right)\hat{B}+B^{\mathrm{T}}\left(\hat{B}-B\right)=\tilde{B}^{\mathrm{T}}\hat{B}+B^{\mathrm{T}}\tilde{B}. \end{aligned} \tag{П.4}$$

Подстановка выражений (П.4), (П.3) в (П.2) позволяет получить:

$$
\begin{aligned}
u-u^* &= -\frac{B^{\mathrm T}e_1}{F}\tilde{\vartheta}^{\mathrm T}x-\left(\frac{\hat B^{\mathrm T}e_1}{\hat F F}\tilde B^{\mathrm T}\hat B+\frac{\hat B^{\mathrm T}e_1}{\hat F F}B^{\mathrm T}\tilde B-\tilde B^{\mathrm T}\frac{e_1}{F}\right)\left(v-\hat{\vartheta}^{\mathrm T}x\right)= \\
&= -\frac{B^{\mathrm T}e_1}{F}x^{\mathrm T}\tilde{\vartheta}-\left(\frac{\hat B^{\mathrm T}e_1}{\hat F F}\hat B^{\mathrm T}+\frac{\hat B^{\mathrm T}e_1}{\hat F F}B^{\mathrm T}-\frac{e_1^{\mathrm T}}{F}\right)\left(v-\hat{\vartheta}^{\mathrm T}x\right)\tilde B= \\
&= -\frac{B^{\mathrm T}e_1}{F}x^{\mathrm T}h_{\vartheta}\Phi_{\vartheta}\tilde{x}_{\vartheta_0}- \\
&\quad -\left(\frac{\hat B^{\mathrm T}e_1}{\hat F F}\hat B^{\mathrm T}+\frac{\hat B^{\mathrm T}e_1}{\hat F F}B^{\mathrm T}-\frac{e_1^{\mathrm T}}{F}\right)\left(v-\hat{\vartheta}^{\mathrm T}x\right)h_B\Phi_B\tilde{x}_{B_0}=\tilde{\theta}^{\mathrm T}\omega,
\end{aligned}
\tag{П.5}
$$

где

$$
\tilde{\theta}=\left[\tilde{x}_{\vartheta_0}^{\mathrm T}\quad \tilde{x}_{B_0}^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T},\quad \omega=\begin{bmatrix} -\left(\dfrac{B^{\mathrm T}e_1}{F}x^{\mathrm T}h_{\vartheta}\Phi_{\vartheta}\right)^{\mathrm T} \\ -\Phi_B^{\mathrm T}h_B^{\mathrm T}\left[\left(\dfrac{\hat B^{\mathrm T}e_1}{\hat F F}\hat B^{\mathrm T}+\dfrac{\hat B^{\mathrm T}e_1}{\hat F F}B^{\mathrm T}-\dfrac{e_1^{\mathrm T}}{F}\right)\left(v-\hat{\vartheta}^{\mathrm T}x\right)\right]^{\mathrm T}\end{bmatrix},
$$

что завершает доказательство утверждения 1.

Доказательство утверждения 2. Введем в рассмотрение ошибку $\chi(t)=x(t)-\bar{x}(t)$. Дифференцируя $\chi(t)$ по времени, получим:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\chi}(t)=\dot{x}(t)-\dot{\bar{x}}(t)= \\
&=A(t)x(t)+B(t)u(t)-A_K\bar{x}(t)+A_Kx(t)= \\
&=A_K\left(x(t)-\bar{x}(t)\right)+A(t)x(t)+B(t)u(t)= \\
&=A_K\chi(t)+A_0x(t)+e_1x^{\mathrm T}(t)\vartheta(t)+B(t)u(t)= \\
&=A_K\chi(t)+A_0x(t)+e_1x^{\mathrm T}(t)h_{\vartheta}\Phi_{\vartheta}(t)x_{\vartheta_0}+h_B\Phi_B(t)u(t)x_{B_0}.
\end{aligned}
\tag{П.6}
$$

Решение дифференциального уравнения (П.6) с учетом домножения на $e_1^{\mathrm T}$ имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&e_1^{\mathrm T}\left[\chi(t)-\upsilon(t)\right]=e_1^{\mathrm T}\left[x(t)-\bar{x}(t)-\upsilon(t)\right]= \\
&=e_1^{\mathrm T}e^{A_K\left(t-t_0^+\right)}x\left(t_0^+\right)+e_1^{\mathrm T}\varphi(t)x_{\vartheta_0}+e_1^{\mathrm T}\psi(t)x_{B_0}= \\
&=e_1^{\mathrm T}e^{A_K\left(t-t_0^+\right)}x_0+e_1^{\mathrm T}\varphi(t)x_{\vartheta_0}+e_1^{\mathrm T}\psi(t)x_{B_0}= \\
&=\left[e_1^{\mathrm T}e^{A_K\left(t-t_0^+\right)}\quad e_1^{\mathrm T}\varphi(t)\quad e_1^{\mathrm T}\psi(t)\right]\begin{bmatrix}x_0\\ x_{\vartheta_0}\\ x_{B_0}\end{bmatrix}:=\Phi^{\mathrm T}(t)\eta.
\end{aligned}
\tag{П.7}
$$

Применив к регрессионному уравнению (П.7) процедуры нормализации (3.2.2), динамического расширения (3.2.3a), (3.2.3b) и смешивания (3.2.3c), пользуясь свойством $\mathrm{adj}\left\{\Delta(t)\right\}\Delta(t) = \det\left\{\Delta(t)\right\} I_{(n_\vartheta+n_B+n)\times(n_\vartheta+n_B+n)}$, имеем измеримое регрессионное уравнение (3.2.4).

Доказательство выполнения для всех $t \geqslant t_e$ неравенства $\Omega_{\mathrm{UB}}(t) \geqslant \Omega(t) \geqslant \Omega_{LB} > 0$ при выполнении условия $\Phi(t) \in \mathrm{FE}$ было получено в утверждении 4 из [23].

Доказательство теоремы 1. Доказательство первой части теоремы совпадает с доказательством первой части теоремы из [19].

В целях доказательства второй части теоремы выполним собственное разложение матрицы $G(t)$:

$$\begin{gathered}\forall t \geqslant t_0^+ \; F(t) = x_{B_0}^{\mathrm{T}} V(t)\Lambda(t)V^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0} = \\ = x_{B_0}^{\mathrm{T}} V_1(t)\Lambda_1(t)V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0} = \Theta^{\mathrm{T}}(t)\Lambda_1(t)\Theta(t), \\ V(t) = \begin{bmatrix} V_1(t) & V_2(t)\end{bmatrix}, \quad \Lambda(t) = \begin{bmatrix} \Lambda_1(t) & 0_{r_G(t)\times \bar{r}_G(t)} \\ 0_{\bar{r}_G(t)\times r_G(t)} & 0_{\bar{r}_G(t)}\end{bmatrix}, \\ \Lambda_1(t) = \mathrm{diag}\left\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_{r_G(t)}(t)\right\}, \quad \lambda_{\min}\left(\Lambda_1(t)\right) > 0,\end{gathered}$$

где $V_1(t) \in \mathbb{R}^{n_B \times r_G(t)}$, $V_2(t) \in \mathbb{R}^{n_B \times \bar{r}_G(t)}$, $\Lambda(t) \in \mathbb{R}^{n_B\times n_B}$, $r_G(t) = \mathrm{rank}\left\{G(t)\right\}$, $\bar{r}_G(t) = n_B - r_G(t)$.

На основании введенного разложения запишем оценку снизу на функцию $\hat{F}(t)$:

$$\begin{gathered}\forall t \geqslant t_0^+ \; \hat{F}(t) = \hat{B}^{\mathrm{T}}(t)\hat{B}(t) = \hat{x}_{B_0}^{\mathrm{T}}(t) V_1(t)\Lambda_1(t)V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}(t) = \\ = \hat{\Theta}^{\mathrm{T}}(t)\Lambda_1(t)\hat{\Theta}(t) \geqslant \lambda_{\min}\left(\Lambda_1(t)\right)\left\|\hat{\Theta}(t)\right\|^2 > 0.\end{gathered} \tag{П.8}$$

На основании выражения (П.8) для $\hat{F}(t) > 0$ необходимо и достаточно удовлетворить неравенство

$$\begin{gathered}\forall t \geqslant t_0^+ \; \left\|\hat{\Theta}(t)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{r_G(t)} \left(\hat{\Theta}_i(t)\right)^2 \neq 0, \\ \Updownarrow \\ \forall i \in \overline{1,\ r_G(t)} \; \left|\hat{\Theta}_i(t)\right| \neq 0,\end{gathered} \tag{П.9}$$

где $\hat{\Theta}^i(t)$ — i-й элемент вектора $\hat{\Theta}(t) \in \mathbb{R}^{r_G(t)}$.

Получим для всех $t \geqslant t_0^+$ функциональное определение оценки $\hat{\Theta}_i(t)$. Для этого решим дифференциальное уравнение (3.2.5)

$$\forall t \geqslant t_0^+ \; \tilde{x}_{B_0}(t) = \phi\left(t,\ t_0^+\right)\tilde{x}_{B_0}\left(t_0^+\right), \tag{П.10}$$

умножим (П.10) на $V_1^{\mathrm{T}}(t)$ и прибавим $\Theta(t)$ к левой и правой частям произведения:

$$
\begin{gathered}
V_1^{\mathrm{T}}\tilde{x}_{B_0}(t)+\Theta(t)=\hat{\Theta}(t)=\phi\left(t,\ t_0^+\right)V_1^{\mathrm{T}}(t)\tilde{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)+\Theta(t),\\
\Updownarrow\\
\hat{\Theta}_i(t)=\phi\left(t,\ t_0^+\right)\tilde{\Theta}_i^0(t)+\Theta_i(t),
\end{gathered}
\tag{П.11}
$$

где $\phi\left(t,\ t_0^+\right) = e^{-\beta_{\max}\int\limits_{t_0^+}^{t}\begin{cases}0, \text{ если } t<t_e,\\ \gamma_0\lambda_{\max}\left(\hat{\omega}(\tau)\hat{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)\right)+\gamma_1 \text{ иначе}\end{cases}d\tau}$, $\tilde{\Theta}_i^0(t) = \hat{\Theta}_i^0(t)-\Theta_i(t)$, $\hat{\Theta}_i^0(t)$ — i-й элемент вектора $V_1^{\mathrm{T}}\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)$.

Тогда (П.9) выполняется, если верно

$$
\begin{gathered}
\hat{\Theta}_i(t)=\phi\left(t,\ t_0^+\right)\tilde{\Theta}_i^0(t)+\Theta_i(t)\neq 0\Rightarrow\phi\left(t,\ t_0^+\right)\tilde{\Theta}_i^0(t)\neq-\Theta_i(t)\Rightarrow\\
\Rightarrow\underbrace{\operatorname{sgn}\left(\phi\left(t,\ t_0^+\right)\right)}_{=1}\neq\operatorname{sgn}\left(\frac{-\Theta_i(t)}{\tilde{\Theta}_i^0(t)}\right)=\operatorname{sgn}\left(\frac{-\Theta_i(t)}{\hat{\Theta}_i^0(t)-\Theta_i(t)}\right)\Rightarrow\\
\Rightarrow\operatorname{sgn}\left(\hat{\Theta}_i^0(t)-\Theta_i(t)\right)\neq-\operatorname{sgn}\left(\Theta_i(t)\right)\Rightarrow\\
\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sgn}\left(\hat{\Theta}_i^0(t)\right)=\operatorname{sgn}\left(\Theta_i(t)\right)\\ \left|\hat{\Theta}_i^0(t)\right|>\left|\Theta_i(t)\right|\end{array}\right\}\Rightarrow\\
\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)\right)=\operatorname{sgn}\left(V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}\right)\\ \left|V_1^{\mathrm{T}}(t)\hat{x}_{B_0}\left(t_0^+\right)\right|>\left|V_1^{\mathrm{T}}(t)x_{B_0}\right|\end{array}\right\},
\end{gathered}
\tag{П.12}
$$

что подтверждает справедливость второй части теоремы.

Перейдем к доказательству третьей и четвертой частей теоремы. Согласно следствию из леммы Калмана–Якубовича–Попова для пары $(A_{ref},\ I_{n\times n})$, любой постоянной матрицы $D>0$ найдутся матрицы $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $K\in\mathbb{R}^{n\times n}$ и постоянная $\mu>0$, такие что существует решение системы уравнений

$$
\begin{gathered}
A_{ref}^{\mathrm{T}}P+PA_{ref}=-QQ^{\mathrm{T}}-\mu P,\quad PI_{n\times n}=QK,\\
K^{\mathrm{T}}K=D+D^{\mathrm{T}},
\end{gathered}
\tag{П.13}
$$

или эквивалентного в частном случае $D=0{,}5k^2I_{n\times n}$, $K=k^2I_{n\times n}$, $k=1$ уравнения Риккати

$$
A_{ref}^{\mathrm{T}}P+PA_{ref}+PP^{\mathrm{T}}+\mu P=0.
\tag{П.14}
$$

Для анализа устойчивости введем следующую квадратичную форму:

$$
\begin{gathered}
V = \xi^{\mathrm{T}} H \xi = \gamma_0 e_{ref}^{\mathrm{T}} P e_{ref} + \frac{\beta_{\max}^2}{2} \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \tilde{\theta}, \\
H = \operatorname{blockdiag}\left\{ \gamma_0 P, \quad \frac{\beta_{\max}^2}{2} I_{(n_\vartheta + n_B) \times (n_\vartheta + n_B)} \right\}, \\
\underbrace{\lambda_{\min}(H)}_{\lambda_m} \|\xi\|^2 \leqslant V(\|\xi\|) \leqslant \underbrace{\lambda_{\max}(H)}_{\lambda_M} \|\xi\|^2,
\end{gathered}
\tag{П.15}
$$

где матрица P соответствует решению системы (П.13) при $K = k^2 I_{n\times n}$, $D = 0{,}5k^2 I_{n\times n}$, $k = 1$ или эквивалентному уравнению Риккати (П.14).

Производная квадратичной формы (П.15) в силу уравнений (3.1.6) и (3.2.5) имеет вид

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \gamma_0 \left[e_{ref}^{\mathrm{T}} \left(A_{ref}^{\mathrm{T}} P + P A_{ref} \right) e_{ref} + 2\tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \omega e_{ref}^{\mathrm{T}} P B \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} = \\
&= \gamma_0 \left[-\mu e_{ref}^{\mathrm{T}} P e_{ref} - e_{ref}^{\mathrm{T}} Q Q^{\mathrm{T}} e_{ref} + 2\tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \omega e_{ref}^{\mathrm{T}} P I_{n\times n} B \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} = \\
&= \gamma_0 \left[-\mu e_{ref}^{\mathrm{T}} P e_{ref} - e_{ref}^{\mathrm{T}} Q Q^{\mathrm{T}} e_{ref} + 2\tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \omega B^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} e_{ref} \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \gamma \Omega^2 \tilde{\theta}.
\end{aligned}
\tag{П.16}
$$

Дополнив выражение (П.16) до полного квадрата, получим:

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \gamma_0 \Big[-\mu e_{ref}^{\mathrm{T}} P e_{ref} - e_{ref}^{\mathrm{T}} Q Q^{\mathrm{T}} e_{ref} + 2 e_{ref}^{\mathrm{T}} Q B \omega^{\mathrm{T}} \tilde{\theta} \pm \\
&\qquad \pm 2\tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \omega B^{\mathrm{T}} B \omega^{\mathrm{T}} \tilde{\theta} \Big] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} = \\
&= \gamma_0 \left[-\mu e_{ref}^{\mathrm{T}} P e_{ref} - \left(e_{ref}^{\mathrm{T}} Q - B \omega^{\mathrm{T}} \tilde{\theta} \right)^2 + \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \omega B^{\mathrm{T}} B \omega^{\mathrm{T}} \tilde{\theta} \right] - \\
&\qquad - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} \leqslant \\
&\leqslant \gamma_0 \left[-\mu e_{ref}^{\mathrm{T}} P e_{ref} + \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \omega F \omega^{\mathrm{T}} \tilde{\theta} \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \gamma \Omega^2 \tilde{\theta}.
\end{aligned}
\tag{П.17}
$$

Теперь рассмотрим две ситуации $t < t_e$ и $t \geqslant t_e$. В первой ситуации, в наиболее консервативном случае, согласно утверждению 1 верно $\Omega(t) = 0$ и $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\| = \left\|\tilde{\theta}\left(t_0^+\right)\right\|$.

Тогда для любого $t < t_e$ можем переписать уравнение (П.17) в виде

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &\leqslant -\mu\gamma_0 e_{ref}^{\mathrm{T}} P e_{ref} + \gamma_0 \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\left(t_0^+\right) \omega F \omega^{\mathrm{T}} \tilde{\theta}\left(t_0^+\right) \pm \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \tilde{\theta} \leqslant \\
&\leqslant -\mu\gamma_0 e_{ref}^{\mathrm{T}} P e_{ref} - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \tilde{\theta} + \gamma_0 \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\left(t_0^+\right) \omega F \omega^{\mathrm{T}} \tilde{\theta}\left(t_0^+\right) + \\
&\qquad + \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\left(t_0^+\right) \tilde{\theta}\left(t_0^+\right).
\end{aligned}
\tag{П.18}
$$

Введем понятие максимального собственного числа матрицы $\omega(t) B^{\mathrm{T}}(t) B(t) \omega^{\mathrm{T}}(t)$ на интервале времени $[0;\, t_e)$:

$$
\delta = \sup \max_{\forall t < t_e} \lambda_{\max}\left(\omega(t) F(t) \omega^{\mathrm{T}}(t) \right).
\tag{П.19}
$$

Функция $F(t)$ ограничена по допущению 2, скорость изменения регрессора $\omega(t)$ при выполнении допущения 1 не превосходит экспоненциальной, а поэтому верно $\delta \in L_\infty$.

С учетом (П.19) уравнение (П.18) для $t < t_e$ может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}\dot{V} \leqslant -\mu\gamma_0\lambda_{\min}(P)\|e_{ref}\|^2 - \beta_{\max}^2\left\|\tilde{\theta}\right\|^2 + \left(\gamma_0\delta + \beta_{\max}^2\right)\left\|\tilde{\theta}\left(t_0^+\right)\right\|^2 \leqslant \\ \leqslant -\eta_1 V + r_B,\end{aligned} \tag{П.20}$$

где $\eta_1 = \min\left\{\frac{\mu\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}; 2\right\}$, $r_B = \left(\gamma_0\delta + \beta_{\max}^2\right)\left\|\tilde{\theta}\left(t_0^+\right)\right\|^2$.

Решив дифференциальное уравнение (П.20), имеем:

$$\forall t < t_e\colon V(t) \leqslant e^{-\eta_1\left(t - t_0^+\right)}V\left(t_0^+\right) + \frac{r_B}{\eta_1}. \tag{П.21}$$

Учитывая $\lambda_m\|\xi(t)\|^2 \leqslant V(t)$ и $V\left(t_0^+\right) \leqslant \lambda_M\left\|\xi\left(t_0^+\right)\right\|^2$, из (П.21) имеем оценку для всех $t < t_e$ на вектор обобщенной ошибки слежения:

$$\|\xi(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}e^{-\eta_1\left(t - t_0^+\right)}\left\|\xi\left(t_0^+\right)\right\|^2 + \frac{r_B}{\lambda_m\eta_1}} \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}\left\|\xi\left(t_0^+\right)\right\|^2 + \frac{r_B}{\lambda_m\eta_1}}. \tag{П.22}$$

Откуда следует ограниченность $\xi(t)$ для всех $t < t_e$.

Для второй ситуации, учитывая справедливость по утверждению 1 для всех $t \geqslant t_e$ неравенства $0 < \Omega_{\rm LB} \leqslant \Omega(t) \leqslant \Omega_{\rm UB}$ и определение коэффициента усиления γ, из (П.18) для $t \geqslant t_e$ получим:

$$\begin{aligned}\dot{V} \leqslant -\mu\gamma_0 e_{ref}^{\rm T}Pe_{ref} + \gamma_0\tilde{\theta}^{\rm T}\omega F\omega^{\rm T}\tilde{\theta} - \\ - \beta_{\max}^2\tilde{\theta}^{\rm T}\frac{\left(\gamma_0\lambda_{\max}\left(\hat{\omega}\hat{\omega}^{\rm T}\right) + \gamma_1\right)\Omega^2}{\Omega^2}\tilde{\theta} = \\ = -\mu\gamma_0 e_{ref}^{\rm T}Pe_{ref} + \gamma_0\tilde{\theta}^{\rm T}\omega F\omega^{\rm T}\tilde{\theta} - \beta_{\max}^2\tilde{\theta}^{\rm T}\left[\gamma_0\lambda_{\max}\left(\hat{\omega}\hat{\omega}^{\rm T}\right) + \gamma_1\right]\tilde{\theta}.\end{aligned} \tag{П.23}$$

Определим регрессор $\hat{\omega}(t)$ следующим образом:

$$\hat{\omega}(t) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}^2}x^{\rm T}h_\vartheta\Phi_\vartheta\right)^{\rm T} \\ -\Phi_B^{\rm T}h_B^{\rm T}\left[\left(\frac{\hat{B}^{\rm T}e_1}{\beta_{\min}^2\hat{F}e_1^{\rm T}e_1}\hat{B}^{\rm T} + \frac{\hat{B}^{\rm T}e_1}{\beta_{\min}^2\hat{F}e_1^{\rm T}e_1}\beta_{\max}e_1^{\rm T} - \frac{e_1^{\rm T}}{\beta_{\min}^2 e_1^{\rm T}e_1}\right)\left(v - \hat{\vartheta}^{\rm T}x\right)\right]^{\rm T}\end{bmatrix}.$$

Учтем справедливость для любого $\omega(t)$ неравенства

$$\begin{aligned}\gamma_0\tilde{\theta}^{\rm T}\omega F\omega^{\rm T}\tilde{\theta} - \tilde{\theta}^{\rm T}\gamma_0\beta_{\max}^2\lambda_{\max}\left(\hat{\omega}\hat{\omega}^{\rm T}\right)\tilde{\theta} = \\ = \tilde{\theta}^{\rm T}\underbrace{\left(\gamma_0\omega F\omega^{\rm T} - \gamma_0\beta_{\max}^2\lambda_{\max}\left(\hat{\omega}\hat{\omega}^{\rm T}\right)I_{(n_\vartheta + n_B)\times(n_\vartheta + n_B)}\right)}_{\leqslant -\kappa I_{(n_\vartheta + n_B)\times(n_\vartheta + n_B)}}\tilde{\theta} \leqslant 0\end{aligned} \tag{П.24}$$

и перепишем (П.23) в виде

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &\leqslant -\gamma_0 \mu e_{ref}^{\mathrm{T}} P e_{ref} - \tilde{\theta}^{\mathrm{T}} \left(\kappa + \beta_{\max}^2 \gamma_1\right) \tilde{\theta} \leqslant \\
&\leqslant -\mu \gamma_0 \lambda_{\min}\left(P\right) \left\| e_{ref} \right\|^2 - \left(\kappa + \beta_{\max}^2 \gamma_1\right) \left\| \tilde{\theta} \right\|^2 \leqslant -\eta_2 V,
\end{aligned}
\tag{П.25}
$$

где $\eta_2 = \min\left\{ \frac{\mu \lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)};\ 2\left(\frac{\kappa}{\beta_{\max}^2} + \gamma_1\right) \right\}.$

Решив неравенство (П.25), для $t \geqslant t_e$ имеем $V(t) \leqslant e^{-\eta_2 (t - t_e)} V\left(t_e\right).$

Учитывая $\lambda_m \|\xi(t)\|^2 \leqslant V(t)$, $V\left(t_e\right) \leqslant \lambda_M \left\|\xi\left(t_e\right)\right\|^2$ и выражение (П.22), получим для $t \geqslant t_e$ оценку на вектор обобщенной ошибки слежения:

$$
\|\xi(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m} e^{-\eta_2 (t - t_e)} \left\|\xi\left(t_e\right)\right\|^2} \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m} \left(\frac{\lambda_M}{\lambda_m} \left\|\xi\left(t_0^+\right)\right\|^2 + \frac{r_B}{\lambda_m \eta_1} \right)}.
\tag{П.26}
$$

Откуда вместе с (П.22) следует $\xi(t) \in L_\infty$ и экспоненциальная сходимость для всех $t \geqslant t_e$ ошибки $\xi(t)$ к нулю со скоростью, прямо пропорциональной параметрам γ_0, γ_1, что и требовалось доказать в третьем и четвертом пунктах теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. N.Y.: Dover, 2013.
2. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Courier Corporation, 2012.
3. *Chen K., Astolfi A.* Adaptive control for systems with time-varying parameters // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 66. No. 5. P. 1986–2001.
4. *Chen K., Astolfi A.* Identification-based Adaptive Control for Systems with Time-varying Parameters //2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2021. P. 1083–1088.
5. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V.* Nonlinear and Adaptive Control Design. New York, USA: Wiley, 1995.
6. *Patil O.S., Sun R., Bhasin S., Dixon W.E.* Adaptive Control of Time-Varying Parameter Systems with Asymptotic Tracking // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. Vol. 67. No. 9. P. 1–7.
7. *Na J., Xing Y., Costa-Castello R.* Adaptive estimation of time-varying parameters with application to roto-magnet plant // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. 2018. Vol. 51. No. 2. P. 731–741.
8. *Hu Y., Wu J., Zeng C.* Robust adaptive identification of linear time-varying systems under relaxed excitation conditions // IEEE Access. 2020. Vol. 8. No. 1. P. 8268–8274.
9. *Goel R., Roy S.B.* Composite Adaptive Control for Time-varying Systems with Dual Adaptation // arXiv preprint arXiv:2206.01700. 2022. P. 1–6.
10. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Robust Time-Varying Parameters Estimation Based on I-DREM Procedure // IFAC-PapersOnLine. 2022. Vol. 55. No. 12. P. 91–96.

11. *Герасимов Д.Н., Лызлова М.В., Никифоров В.О.* Простые алгоритмы адаптивного и робастного управления классом линейных объектов с переменными параметрами // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2015. Т. 58. № 5. С. 351–361.
12. *Мирошник И.В., Никифоров В.О.* Алгоритм адаптации с астатизмом второго порядка // АиТ. 1995. № 7. С. 99–107.
13. *Цыкунов А.М.* Робастное управление многомерными нестационарными линейными объектами //АиТ. 2009. № 2. С. 109–121.
14. *Цыкунов А.М.* Алгоритм робастного управления нестационарным линейным объектом с компенсацией возмущения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 33–40.
15. *Фуртат И.Б., Цыкунов А.М.* Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // Проблемы управления. 2008. № 5. С. 2–7.
16. *Nikiforov V.O., Gerasimov D.N.* Adaptive Regulation: Reference Tracking and Disturbance Rejection. Springer-Verlag, 2022.
17. *Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Isidori A.* An adaptive observer for uncertain linear time-varying systems with unknown additive perturbations // Automatica. 2023. Vol. 147. P. 110677.
18. *Bobtsov A., Ortega R., Yi B., Nikolaev N.* Adaptive state estimation of state-affine systems with unknown time-varying parameters // Int. J. Control. 2022. Vol. 95. № 9. C. 2460–2472.
19. *Глущенко А.И., Ласточкин К.А., Петров В.А.* Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть I. Объекты с постоянными параметрами // АиТ. 2022. № 4. С. 62–99.

    Glushchenko A., Lastochkin K., Petrov V. Exponentially Stable Adaptive Control. Part I. Time-Invariant Plants // Autom. Remote Control. 2022. Vol. 83. No. 4. P. 548–578.
20. *Leiva H., Siegmund S.* A necessary algebraic condition for controllability and observability of linear time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48. No. 12. P. 2229–2232.
21. *Nussbaum R.D.* Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control // Syst. Control Lett. 1983. Vol. 3. No. 5. P. 243–246.
22. *Глущенко А.И., Ласточкин К.А.* Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть II. Объекты с кусочно-постоянными параметрами // АиТ. 2023. № 3. С. 65–105.

    Glushchenko A., Lastochkin K. Exponentially Stable Adaptive Control. Part II. Switched Systems // Autom. Remote Control. 2023. Vol. 84. No. 3. P. 285–316.
23. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Unknown Piecewise Constant Parameters Identification with Exponential Rate of Convergence // Int. J. Adapt. Control Signal Proc. 2023. Vol. 37. No. 1. P. 315–346.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.

Поступила в редакцию 20.10.2022

После доработки 07.03.2023

Принята к публикации 31.05.2023