Автоматика и телемеханика, № 11, 2023

Линейные системы

© 2023 г. **А.А. ЩЕГЛОВА, д-р физ.-мат. наук (shchegl@icc.ru)**
(Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск)

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Рассматриваются линейные дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ), представляющие собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной на области определения матрицей при производной. Предполагается, что матричные коэффициенты ДАУ зависят от неопределенных параметров, принадлежащих заданному допустимому множеству. Для рассматриваемого параметрического семейства построены структурные формы, в которых разделены дифференциальная и алгебраическая части. Показано, что робастная устойчивость семейства ДАУ равносильна робастной устойчивости его дифференциальной подсистемы. Найдены достаточные условия на структуру возмущений, при которых в процессе разделения ДАУ на алгебраическую и дифференциальную составляющие сохраняется тип функциональной зависимости от неопределенных параметров. Получены достаточные условия робастной устойчивости на основе построения квадратичной функции Ляпунова.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, параметрическая неопределенность, произвольно высокий индекс неразрешенности, робастная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231023110028, **EDN:** OOPCSW

1. Введение

Рассматривается система дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ)

$$A(\gamma)x'(t) + B(\gamma)x(t) = 0, \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1.1}$$

где $\gamma = \mathrm{col}\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ — неопределенный векторный параметр, принадлежащий заданному допустимому множеству $\Gamma = \left\{\gamma \in \mathbf{R}^l : \|\gamma\|_{\mathbf{R}^l} \leqslant a\right\}$, $A(\gamma)$ и $B(\gamma)$ — известные вещественные $(n \times n)$-матрицы, $x(t)$ — искомая n-мерная функция. Предполагается, что $\det A(\gamma) \equiv 0$.

Важнейшей характеристикой ДАУ является индекс неразрешенности, отражающий сложность внутренней структуры системы. Чем выше индекс, тем сложнее разделить ДАУ на дифференциальную и алгебраическую составляющие, без чего невозможно исследование устойчивости нестационарных систем. Точное определение индекса, используемое в работе, сформулировано в разделе 2.1. Наиболее близким к этому определению является понятие индекса по дифферецированию [1], введенного для невозмущенных нестационарных систем ДАУ. Если индекс неразрешенности существует, он будет равен индексу по дифференцированию.

В статье изучается вопрос об асимптотической устойчивости параметрического семейства (1.1). Анализ робастной устойчивости ДАУ существенно сложнее, чем систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной (см., например, [2, с. 186–225]). Это объясняется тем, что даже в простейшем случае индекса 1 сколь угодно малое возмущение коэффициентов может привести к нарушению внутренней структуры системы и, следовательно, к изменению свойств и вида общего решения [3, с. 61].

Публикаций по робастной устойчивости ДАУ относительно немного (см., в частности, [4–14]. Первыми опубликованными исследованиями по данной тематике считаются [4, 5]. Большинство авторов рассматривают системы с возмущенным матричным коэффициентом при $x(t)$ [5–9]. Лишь в нескольких публикациях допускаются возмущения матрицы при производной искомой вектор-функции [4, 10–12]. Отдельные исследования посвящены робастной устойчивости и оценке радиуса устойчивости нестационарных ДАУ индекса 1 [6, 7, 13].

Робастная устойчивость изучается также в рамках исследования допустимости (admissibility) линейных ДАУ (см., например, [15–21]). Допустимость, помимо устойчивости, подразумевает наличие у системы свойств регулярности и либо причинности (causality) для дискретных систем, либо безымпульсности (impulse free) в непрерывном случае.

В настоящее время по-прежнему актуальным остается получение результатов по робастной устойчивости параметрических семейств вида (1.1) произвольно высокого индекса неразрешенности с возмущениями, присутствующими во всех матричных коэффициентах.

В статье для семейства (1.1) с векторным и скалярным параметром доказано существование и предложены алгоритмы построения структурных форм с разделенными алгебраической и дифференциальной подсистемами. В предыдущих работах автора (например, [22, 23]) для того, чтобы размерность пространства решений и структура общего решения возмущенных ДАУ были такими же, как у номинальной системы, требовалось, чтобы возмущения подчинялись некоторым конечным соотношениям. В данной статье рассматриваемые структурные формы определены одновременно для всего семейства (1.1), а их существование доказано без дополнительных ограничений на возмущения.

К сожалению, преобразование ДАУ (1.1) к той или иной структурной форме в общем случае переводит тип функциональной зависимости от неопределенных параметров в более сложный. В работе получены достаточные условия, при которых процесс разделения системы на алгебраическую и дифференциальную части сохраняет в дифференциальной подсистеме тип зависимости от параметров.

В предположениях, при которых проводится анализ, устойчивость системы (1.1) равносильна устойчивости ее дифференциальной части, которая также представляет собой параметрическое семейство. Достаточные условия робастной устойчивости вытекают из требования существования для дифференциальной подсистемы общей квадратичной функции Ляпунова.

2. Достаточные условия робастной устойчивости

2.1. Структурная форма для ДАУ с параметрической неопределенностью

Для системы (1.1) определим $(n(r+1)\times n)$-матрицы

$$\mathcal{B}_r\left[B(\gamma)\right] = \operatorname{col}\left(B(\gamma), O, \ldots, O\right),$$
$$\mathcal{A}_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right] = \operatorname{col}\left(A(\gamma), B(\gamma), O, \ldots, O\right), \tag{2.1}$$

$(n(r+1)\times nr)$-матрицу

$$\Lambda_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right] = \begin{pmatrix} O & O & \ldots & O & O \\ A(\gamma) & O & \ldots & O & O \\ B(\gamma) & A(\gamma) & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \ldots & A(\gamma) & O \\ O & O & \ldots & B(\gamma) & A(\gamma) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

и $(n(r+1)\times n(r+2))$-матрицу

$$\mathcal{D}_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right] = \left(\, \mathcal{B}_r\left[B(\gamma)\right] \,\middle|\, \mathcal{A}_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right] \,\middle\|\, \Lambda_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right] \,\right). \tag{2.3}$$

Предположим, что для некоторого r $(0 \leqslant r \leqslant n)$ выполняется условие

$$\operatorname{rank}\Lambda_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right] = c = \text{const} \quad \forall \gamma \in \Gamma \tag{2.4}$$

и в матрице $\mathcal{D}_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right]$ имеется неособенный для всех $\gamma \in \Gamma$ минор $n(r+1)$-го порядка, включающий в себя c столбцов матрицы $\Lambda_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right]$ и все столбцы матрицы $\mathcal{A}_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right]$. Такой минор будем называть *разрешающим минором*.

Обозначим через $\mathcal{M}_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right]$ квадратную порядка $n(r+1)$ подматрицу матрицы $\mathcal{D}_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right]$, определителем которой является разрешающий минор.

Определение 1. *Наименьшее значение r, при котором справедливо условие* (2.4) *и в матрице $\mathcal{D}_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right]$ существует разрешающий минор, будем называть индексом неразрешенности параметрического семейства* (1.1).

Из приведенной ниже леммы 1 следует, что определение индекса неразрешенности подразумевает постоянство внутренней структуры системы (1.1) при всех $\gamma \in \Gamma$.

Введем обозначение

$$(2.5) \qquad (\, A_1(\gamma) \;\; A_2(\gamma) \,) = A(\gamma) Q, \quad (\, B_1(\gamma) \;\; B_2(\gamma) \,) = B(\gamma) Q,$$

где Q — матрица перестановок столбцов такая, что все столбцы матрицы

$$(2.6) \qquad \mathcal{B}_{2,r}(\gamma) = \mathrm{col}\ (B_2(\gamma), O, \dots, O)$$

входят в разрешающий минор, а столбцы col $(B_1(\gamma), O, \dots, O)$ не входят в этот минор. Блоки $B_2(\gamma)$ и $A_2(\gamma)$ из (2.5), (2.6) имеют размеры $n \times d$, где $d = nr - c$. О построении матрицы Q см. [22]. Таким образом, d — это число столбцов матрицы $\mathcal{B}_r[B(\gamma)]$, входящих в разрешающий минор матрицы (2.3).

Лемма 1. Пусть:

1) $A(\gamma),\ B(\gamma) \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$;

2) *выполнено условие* (2.4);

3) *в матрице* $\mathcal{D}_r\,[A(\gamma), B(\gamma)]$ *имеется разрешающий минор.*

Тогда существует оператор

$$(2.7) \qquad \mathcal{R}_\gamma = R_0(\gamma) + R_1(\gamma) \frac{d}{dt} + \ldots + R_r(\gamma) \left(\frac{d}{dt} \right)^r$$

$(R_j(\gamma) \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$ — $(n \times n)$*-матрицы* $(j = \overline{0, r}))$ *такой, что*

$$(2.8) \quad \mathcal{R}_\gamma \left[A(\gamma) Q \xi'(t) + B(\gamma) Q \xi(t) \right] = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \xi'(t) + \begin{pmatrix} J_1(\gamma) & E_d \\ J_2(\gamma) & O \end{pmatrix} \xi(t)$$

для всех значений $t \in T$, $\gamma \in \Gamma$ *и для любой* n*-мерной вектор-функции* $\xi(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$. *Здесь* E_d — *единичная матрица порядка* d, Q — *матрица перестановок из* (2.5); $J_1(\gamma),\ J_2(\gamma) \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$ — *некоторые матрицы соответствующих размеров.*

При этом

$$(2.9) \qquad (\, R_0(\gamma) \;\; R_1(\gamma) \;\; \ldots \;\; R_r(\gamma) \,) = (\, E_n \;\; O \;\; \ldots \;\; O \,)\ \mathcal{M}_r^{-1}\,[A(\gamma), B(\gamma)]\,.$$

Лемма 2. Пусть для ДАУ (1.1) :

1) *выполнены все предположения леммы 1;*

2) *в матрице* $\mathcal{D}_{r+1}\,[A(\gamma), B(\gamma)]$ *имеется обратимая для всех* $\gamma \in \Gamma$ *подматрица* $\mathcal{M}_{r+1}\,[A(\gamma), B(\gamma)]$ *порядка* $n(r+2)$, *которая включает в себя матрицу* $\mathcal{M}_r\,[A(\gamma), B(\gamma)]$ *и еще* n *столбцов матрицы* $\Lambda_{r+1}\,[A(\gamma), B(\gamma)]$.

Тогда оператор $\mathcal{R}_\gamma$ *обладает левым обратным оператором* $\mathcal{L}_\gamma = L_0(\gamma) + L_1(\gamma)\frac{d}{dt}$, *где* $L_0(\gamma),\ L_1(\gamma) \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$ — $(n \times n)$*-матрицы.*

Доказательства лемм приведены в Приложении.

Согласно лемме 1 действие оператора $\mathcal{R}_\gamma$ преобразует семейство (1.1) к виду

$$\tilde{A}(\gamma)\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \tilde{B}(\gamma)\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \tag{2.10}$$

где

$$Q\mathrm{col}\,(x_1(t), x_2(t)) = x(t), \tag{2.11}$$

Q — матрица перестановок строк (см. (2.5), (2.6)),

$$\tilde{A}(\gamma) = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} = (R_0(\gamma)A(\gamma) + R_1(\gamma)B(\gamma))\,Q, \tag{2.12}$$

$$\tilde{B}(\gamma) = \begin{pmatrix} J_1(\gamma) & E_d \\ J_2(\gamma) & O \end{pmatrix} = R_0(\gamma)B(\gamma)Q. \tag{2.13}$$

Компонента $x_1(t)$ решения ДАУ (2.10) удовлетворяет уравнению

$$x_1'(t) + J_2(\gamma)x_1(t) = 0. \tag{2.14}$$

В свою очередь, $x_2(t) = -J_1(\gamma)x_1(t)$. Поскольку матрица $J_1(\gamma)$ является постоянной при каждом фиксированном значении $\gamma \in \Gamma$, семейство (2.10), (2.12), (2.13) будет асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает система (2.14).

В предположениях леммы 2 оператор $\mathcal{R}_\gamma$ имеет левый обратный оператор. Кроме того, решения систем (1.1) и (2.10), (2.12), (2.13) связаны посредством матрицы перестановок строк Q (см. (2.11)). На основании этих фактов можно заключить, что семейство ДАУ (1.1) будет асимптотически устойчиво в том и только том случае, если асимптотической устойчивостью обладает система (2.14).

Потребуем, чтобы у всего семейства (2.14) была общая квадратичная функция Ляпунова

$$W(x_1) = x_1^\top V x_1, \tag{2.15}$$

обладающая положительно определенной производной по переменной t в силу системы (2.14). Здесь $(n-d) \times (n-d)$-матрица V симметрична и положительно определена. Известно [2, с. 198; 21, с. 210], что семейство (2.14) будет асимптотически устойчиво, если существует решение системы линейных матричных неравенств

$$J_2(\gamma)^\top V + VJ_2(\gamma) > 0, \quad \gamma \in \Gamma. \tag{2.16}$$

В этом случае асимптотически устойчиво будет и семейство ДАУ (1.1). Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть выполнены все предположения леммы 2. Кроме того, существует симметричная и положительно определенная постоянная матрица V, удовлетворяющая системе матричных неравенств (2.16).

Тогда параметрическое семейство ДАУ (1.1) *асимптотически устойчиво.*

Сформулируем еще один полезный факт, базирующийся на известном результате из теории возмущений [2, с. 198].

Теорема 2. Пусть выполнены все предположения леммы 2 и в системе (2.10)–(2.13) *все собственные значения $\lambda_i(0)$ матрицы $J_2(0)$ различны, а α_i и β_i — соответствующие правые и левые собственные векторы:*

$$J_2(0)\alpha_i = \lambda_i(0)\alpha_i, \quad \beta_i^* J_2(0) = \lambda_i(0)\beta_i^*,$$
$$\|\alpha_i\|_{\mathbf{R}^{n-d}} = \|\beta_i\|_{\mathbf{R}^{n-d}} = 1, \quad i = \overline{1, n-d}.$$

Тогда собственные значения матрицы $J_2(\gamma)$ представимы в виде

$$\lambda_i(\gamma) = \lambda_i(0) + \sum_{j=1}^{l} \frac{\beta_i^* \Theta_j \alpha_i}{\beta_i^* \alpha_i}\gamma_j + o(\gamma),$$

где

$$\Theta_j = \frac{\partial J_2(\gamma)}{\partial \gamma_j}\Big|_{\gamma=0}.$$

Пример. Рассмотрим ДАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & -\gamma_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varphi(\gamma_3) & 0 & 0 & \varphi(\gamma_3) \\ 0 & 0 & \psi(\gamma_3) & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \tag{2.17}$$
$$+ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \gamma_1 - 1 \\ 0 & 2-\gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) = 0,$$

где

$$\Gamma = \left\{ \mathrm{col}\ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) : \ \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \leqslant 1/2 \right\}.$$

Функции $\varphi(\gamma_3)$ и $\psi(\gamma_3)$ бесконечно дифференцируемы по параметру $\gamma_3 \in \in [-1/2,\ 1/2]$ и выбираются по правилу: $\psi(\gamma_3) = 0$, если $\varphi(\gamma_3) \neq 0$. Поскольку $\phi(\gamma_3)$ и $\psi(\gamma_3)$ обращаются в ноль либо одновременно, либо по очереди, матрица при производной имеет в области Γ переменный ранг.

В $\mathcal{D}_2\,[A(\gamma),\,B(\gamma)]$ имеется разрешающий минор, обведенный пунктирной линией:

$$\left(\begin{array}{cc:cc|cccc||cccc|cc:cc}
2 & 0 & 0 & f_1 & 1 & -\gamma_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & f_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & -\varphi & 0 & 0 & \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & f_1 & 1 & -\gamma_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\varphi & 0 & 0 & \varphi & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & f_1 & 1 & -\gamma_2 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\varphi & 0 & 0 & \varphi\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \psi & 0
\end{array}\right).$$

Здесь зависимость φ и ψ от параметра γ_3 опущена, $f_1 = \gamma_1 - 1$, $f_2 = 2 - \gamma_2$. Матрица $\Lambda_2[A(\gamma), B(\gamma)]$ расположена правее двойной вертикальной линии, ее ранг равен шести.

Построим матрицу $\mathcal{D}_3\,[A(\gamma),\,B(\gamma)]$, дополнив $\mathcal{D}_2$ четырьмя нулевыми столбцами справа и четырьмя строками снизу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc||ccc|cccc|cccc}
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & 0 & f_1 & \boxed{1} & -\gamma_2 & 1 & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\varphi & 0 & 0 & \varphi\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \psi & 0
\end{array}\right).$$

Подматрица $\mathcal{M}_3\,[A(\gamma),\,B(\gamma)]$ в $\mathcal{D}_3$ имеется: она включает в себя все столбцы, в которых расположен разрешающий минор, а также еще четыре столбца, в которых присутствуют обведенные рамками единицы. Таким образом, все предположения леммы 2 выполнены. При этом $d = 2$, $Q = E_4$.

Оператор

$$\mathcal{R}_\gamma = R_0(\gamma) + R_1(\gamma)\frac{d}{dt} + R_2(\gamma)\left(\frac{d}{dt}\right)^2,$$

где

$$R_0(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & \gamma_2 & 0 & 1-\gamma_1\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\varphi(\gamma_3)\\ 0 & 0 & -\psi(\gamma_3) & 0\\ 0 & 0 & (\gamma_1 - 1)\psi(\gamma_3) - 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varphi(\gamma_3)\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

преобразует систему (2.17) к виду

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) x'(t) + \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1+\gamma_1 & \gamma_2\,(2-\gamma_2) & 0 & 0 \\ 0 & 2-\gamma_2 & 0 & 0 \end{array}\right) x(t) = 0.$$

При этом $J_2(\gamma) = \begin{pmatrix} 1+\gamma_1 & \gamma_2\,(2-\gamma_2) \\ 0 & 2-\gamma_2 \end{pmatrix}$.

Пусть в матричном неравенстве (2.16) $V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, тогда

$$J_2(\gamma)^\top V + V J_2(\gamma) = \begin{pmatrix} 4\,(1+\gamma_1) & 2\gamma_2\,(2-\gamma_2) \\ 2\gamma_2\,(2-\gamma_2) & 4\,(2-\gamma_2) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица положительно определена, так как все ее главные миноры положительны при любых значениях γ_1 и γ_2 из отрезка $[-1/2, 1/2]$. В частности, определитель этой матрицы равен $4\,(2-\gamma_2)\left\{4\,(1+\gamma_1) - \gamma_2^2\,(2-\gamma_2)\right\}$. Очевидно, $2-\gamma_2 > 0 \ \ \forall \gamma_2 \in [-1/2, 1/2]$. Выражение в фигурных скобках принимает минимальное значение $11/8 > 0$ при $\gamma_1 = -1/2$, $\gamma_2 = -1/2$.

По теореме 1 это означает, что семейство (2.17) асимптотически устойчиво.

3. Условия робастной устойчивости ДАУ со скалярным параметром

Рассмотрим ДАУ

$$A(\gamma_0)x'(t) + B(\gamma_0)x(t) = 0, \quad t \in T, \tag{3.1}$$

где $\gamma_0 \in G_0$ — скалярный параметр, $G_0 = \{\gamma_0 \in \mathbf{R}: \ |\gamma_0| \leqslant a\}$ — заданное допустимое можество.

Теорема 3. Пусть:

1) $A(\gamma_0), B(\gamma_0) \in \mathbf{C}^A(G_0)$;

2) $\operatorname{rank} \Lambda_r[A(\gamma_0), B(\gamma_0)] = \mathrm{const} \ \ \forall \gamma_0 \in G_0$;

3) *в матрице* $\mathcal{D}_r[A(\gamma_0), B(\gamma_0)]$ *имеется разрешающий минор.*

Тогда найдутся обратимые для всех $\gamma_0 \in G_0$ *матрицы* $P(\gamma_0)$, $S(\gamma_0) \in \mathbf{C}^A(G_0)$ *такие, что умножение слева на* $P(\gamma_0)$ *и замена переменной*

$$x(t) = S(\gamma_0)\mathrm{col}\,(z_1(t), z_2(t))$$

преобразует систему (3.1) *к виду*

$$\begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ O & N(\gamma_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(\gamma_0) & O \\ O & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = 0, \ \ t \in T, \tag{3.2}$$

где $N(\gamma_0)$ *– верхнетреугольная матрица с* r *квадратными нулевыми блоками на диагонали, так что* $N^r(\gamma_0) \equiv O$, $J(\gamma_0)$ *– некоторая* $(n-d)\times(n-d)$*-матрица.*

Доказательство теоремы опущено. Оно базируется на технике пошагового зануления линейно зависимых строк в матрице при $x'(t)$ и применения оператора дифференцирования к соответствующим строкам матрицы при $x(t)$.

Структурная форма (3.2) является аналогом "сильной стандартной канонической формы", введенной в работе [25] для системы вида $A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t)$ в предположении ее "аналитической разрешимости".

В предположениях теоремы 3 решения систем (3.1) и (3.2) связаны тождеством

$$x(t) = S(\gamma_0)\mathrm{col}\ (z_1(t), z_2(t)) \tag{3.3}$$

с обратимой при всех $\gamma_0 \in G_0$ матрицей $S(\gamma_0)$.

Рассмотрим ДАУ (3.2). Из структуры матрицы $N(\gamma_0)$ следует , что подсистема

$$N(\gamma_0)z_2'(t) + z_2(t) = 0$$

имеет только тривиальное решение $z_2(t) \equiv 0$ при всех $\gamma_0 \in G_0$.

В свою очередь, компонента $z_1(t)$ удовлетворяет подсистеме

$$z_1'(t) + J(\gamma_0)z_1(t) = 0. \tag{3.4}$$

Поэтому можно сказать, что ДАУ (3.2) будут асимптотически устойчивы, тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает система (3.4).

Поскольку в (3.3) матрица $S(\gamma_0)$ постоянна при каждом фиксированном значении γ_0, семейство ДАУ (3.1) будет асимптотически устойчиво в том и только том случае, когда асимптотически устойчива система (3.4).

Допустим, что для (3.4) нашлась общая функция Ляпунова

$$W_0(z_1) = z_1^\top V_0 z_1$$

с симметричной и положительно определенной $(n-d) \times (n-d)$-матрицей V_0, удовлетворяющей матричному неравенству

$$J^\top(\gamma_0)V_0 + V_0 J(\gamma_0) > 0, \ \ \gamma_0 \in G_0. \tag{3.5}$$

В этом случае семейство (3.4) будет асимптотически устойчиво, а следовательно, таким же свойством будет обладать и параметрическое семейство (3.1).

Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 3. Семейство ДАУ* (3.1) *асимптотически устойчиво, если существует постоянная, симметричная и положительно определенная матрица V_0, удовлетворяющая матричному неравенству* (3.5) *при всех $\gamma_0 \in G_0$.*

4. Условия сохранения типа функциональной зависимости от параметров

В предыдущих разделах рассматривались преобразования параметрических семейств ДАУ к некоторым структурным формам. Было показано, что при определенных условиях робастная устойчивость исходного семейства равносильна робастной устойчивости его дифференциальной подсистемы. К сожалению, в процессе преобразований первоначальный тип функциональной зависимости коэффициентов системы от неопределенных параметров в общем случае переходит в более сложный.

Рассмотрим семейство ДАУ с аффинной неопределенностью

$$\left(A_0+\sum_{j=1}^{l}\gamma_j A_j\right)x'(t)+\left(B_0+\sum_{j=1}^{l}\gamma_j B_j\right)x(t)=0,\quad t\in T, \tag{4.1}$$

где A_j и B_j $(j=\overline{0,l})$ — заданные $(n\times n)$-матрицы с вещественными элементами, $\det A_0=0$, $\gamma=\mathrm{col}\,(\gamma_1,\dots,\gamma_l)\in\Gamma_a=\{\gamma\in\mathbf{R}^l:\,|\gamma_j|\leqslant a,\ j=\overline{1,l}\}$.

В данном разделе получены достаточные условия на структуру коэффициентов A_j и B_j $(j=\overline{1,l})$, при которых робастная устойчивость семейства (4.1) эквивалентна робастной устойчивости системы обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенной относительно производной, с аффинной неопределенностью.

4.1. Условия, полученные с использованием канонической формы Кронекера–Вейерштрасса

Определение 2. Пучок матриц μA_0+B_0 называется регулярным, если существует $\mu\in\mathbf{R}$ такое, что $\det(\mu A_0+B_0)\neq 0$.

Лемма 3 [26, с. 313]. *Пусть пучок матриц μA_0+B_0 регулярен. Тогда существуют обратимые $(n\times n)$-матрицы P и S такие, что*

$$PA_0S=\begin{pmatrix}E_{n-d} & O\\ O & N\end{pmatrix},\quad PB_0S=\begin{pmatrix}J_0 & O\\ O & E_d\end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где J_0 — некоторая квадратная матрица порядка $n-d$, N — верхнетреугольная матрица с r квадратными нулевыми блоками на диагонали, так что $N^r=O$.

Система $PA_0Sz'(t)+PB_0Sz(t)=0$, $z(t)=S^{-1}x(t)$, со свойством (4.2) получила название *канонической формы Кронекера–Вейерштрасса* для ДАУ $A_0x'(t)+B_0x(t)=0$.

Допустим, что в (4.1) матричный пучок μA_0+B_0 регулярен, тогда по лемме 4 существуют обратимые матрицы P и S со свойством (4.2). Предположим, что

$$PA_jS=\begin{pmatrix}O & O\\ A_{j,1} & O\end{pmatrix},\quad PB_jS=\begin{pmatrix}B_{j,1} & O\\ B_{j,2} & O\end{pmatrix},\quad j=\overline{1,l}, \tag{4.3}$$

где $A_{j,1}$, $B_{j,1}$ и $B_{j,2}$ — некоторые матрицы, элементы которых могут быть отличны от нуля. При этом $A_{j,1}$ и $B_{j,2}$ имеют размеры $d \times (n-d)$, блок $B_{j,1}$ — квадратный порядка $n-d$.

Умножим (4.1) слева на матрицу P и произведем замену переменной $x(t) = S\operatorname{col}(x_1(t), x_2(t))$. В результате получим систему, которая с учетом (4.2), (4.3) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ \sum\limits_{j=1}^{l} \gamma_j A_{j,1} & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_0 + \sum\limits_{j=1}^{l} \gamma_j B_{j,1} & O \\ \sum\limits_{j=1}^{l} \gamma_j B_{j,2} & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

Обозначим

$$Y_1(\gamma) = J_0 + \sum_{j=1}^{l} \gamma_j B_{j,1}, \tag{4.5}$$

$$Y_2(\gamma) = \sum_{j=1}^{l} \gamma_j \left(B_{j,2} - A_{j,1} Y_1(\gamma)\right). \tag{4.6}$$

Из первого уравнения системы (4.4) найдем

$$x_1'(t) = -Y_1(\gamma) x_1(t), \tag{4.7}$$

откуда

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^i x_1(t) = (-1)^i Y_1^i(\gamma) x_1(t), \quad i = \overline{2, l}. \tag{4.8}$$

Принимая во внимание (4.5)–(4.7), второе уравнение системы (4.4) можно записать в следующей форме:

$$N x_2'(t) + x_2(t) + Y_2(\gamma) x_1(t) = 0. \tag{4.9}$$

Подействовав на (4.9) оператором

$$E_d + \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^k N^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \tag{4.10}$$

и воспользовавшись формулами (4.7) и (4.8), получим

$$x_2(t) = \left(Y_2(\gamma) + \sum_{k=1}^{r-1} N^k Y_2(\gamma) Y_1^k(\gamma)\right) x_1(t). \tag{4.11}$$

Нетрудно убедиться, что оператор (4.10) имеет обратный вида $E_d + N\frac{d}{dt}$.

Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в предыдущих разделах, можно показать, что семейство ДАУ (4.1) асимптотически устойчиво при всех $\gamma \in \Gamma_a$ тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает семейство (4.7) или, что то же, ДАУ

$$x_1'(t) + \left(J_0 + \sum_{j=1}^{l} \gamma_j B_{j,1} \right) x_1(t) = 0. \tag{4.12}$$

В системе (4.12) аффинная структура неопределенности сохраняется, в то время как в уравнении (4.11) она уже нарушена.

З а м е ч а н и е. Если в исходном семействе зависимость от параметров была бы не аффинная, а иная, например мультилинейная или полиномиальная, то условия (4.3) обеспечили бы такой же тип неопределенности и в уравнении, аналогичном (4.12).

Семейство (4.12) будет асимптотически устойчиво при всех значениях $\gamma \in \Gamma_a$, если для него найдется общая функция Ляпунова вида (2.15), имеющая положительно определенную производную по переменной t в силу системы (4.12).

Т е о р е м а 5. Пусть в системе (4.1) *пучок матриц* $\mu A_0 + B_0$ *регулярен и справедливы равенства* (4.3). *Если найдется симметричная положительно определенная* $(n-d) \times (n-d)$*-матрица* V*, удовлетворяющая при всех* $\gamma \in \Gamma_a$ *неравенству*

$$Y_1^{\top}(\gamma) V + V Y_1(\gamma) > 0, \tag{4.13}$$

то семейство (4.1) *будет асимптотически устойчиво при всех* $\gamma \in \Gamma_a$. *Матрица* $Y_1(\gamma)$ *вычисляется по формуле* (4.5).

Благодаря тому, что в (4.12) сохраняется аффинная структура зависимости от неопределенных параметров, неравенства (4.13) достаточно решить лишь в конечном числе точек, для которых $|\gamma_j| = a$ $(j = \overline{1,l})$ [2, с. 199].

По той же причине теорема 2 позволяет получить приближенную оценку радиуса устойчивости для системы (4.12).

Допустим, что все собственные числа λ_k матрицы J_0 имеют положительные вещественные части: $\mathrm{Re}\,(\lambda_k) > 0$, $k = \overline{1, n-d}$. Обозначим через λ собственное значение этой матрицы, имеющее наименьшую вещественную часть. Пусть α и β — соответствующие правый и левый собственные векторы. По теореме 2 λ перейдет в собственное значение $\lambda(\gamma)$ матрицы $J_0 + \sum\limits_{j=1}^{l} \gamma_j B_{j,1}$:

$$\lambda(\gamma) \approx \lambda + \sum_{j=1}^{l} \frac{\beta^* B_{j,1} \alpha}{\beta^* \alpha} \gamma_j$$

при малых γ. Поэтому можно ожидать, что при

$$\bar{a} = \operatorname{Re}\lambda / \sum_{j=1}^{l} \left| \operatorname{Re} \frac{\beta^* B_{j,1}\alpha}{\beta^*\alpha} \right|$$

хотя бы одно из собственных значений матрицы (4.5) будет иметь нулевую вещественную часть, т.е. $\bar{a}$ — оценка радиуса устойчивости системы (4.12) [2, с. 198].

4.2. Условия, полученные с использованием дифференциального оператора

Следует отметить, что построение для регулярного пучка $\mu A_0 + B_0$ матриц P и S, обладающих свойством (4.2), в общем случае является нетривиальной задачей. Поэтому получим для семейства (4.1) другие, более конструктивные, условия сохранения типа функциональной зависимости от параметров. При этом на коэффициенты рассматриваемой системы налагаются ограничения, отличные от тех, которые использовались в разделе 4.1.

Пусть в системе (4.1) матрицы A_0 и B_0 таковы, что выполняются условия:

A1) в матрице $\mathcal{D}_r[A_0, B_0]$ имеется разрешающий минор;

A2) $\operatorname{rank} \Lambda_{r+1}[A_0, B_0] = \operatorname{rank} \Lambda_r[A_0, B_0] + n$.

Тогда по лемме 2 существует оператор

$$\mathcal{R} = R_0 + R_1 \frac{d}{dt} + \ldots + R_r \left(\frac{d}{dt}\right)^r,$$

такой что

$$\mathcal{R}\left[A_0 x'(t) + B_0 x(t)\right] = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

где $Q\mathrm{col}\,(x_1(t), x_2(t)) = x(t)$, Q — соответствующая матрица перестановок строк (см. (2.5), (2.6)). При этом $\mathcal{R}$ имеет левый обратный оператор $\mathcal{L} = L_0 + L_1 \frac{d}{dt}$ и

$$(\, R_0 \; R_1 \; \ldots \; R_r \,) = (\, E_n \; O \; \ldots \; O \,)\, M_r^{-1}[A_0, B_0],$$

$M_r[A_0, B_0]$ — матрица, определителем которой является разрешающий минор.

Подействовав на (4.1) оператором $\mathcal{R}$, получим систему

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{r+1} \left[\sum_{j=1}^{l} \gamma_j R_{i,j} \right] \left(\frac{d}{dt}\right)^i \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \tag{4.14}$$

где

$$R_{0,j} = R_0 B_j Q; \quad R_{i,j} = (R_{i-1}A_j + R_i B_j)\, Q, \quad i = \overline{1,r}; \qquad (4.15)$$
$$R_{r+1,j} = R_r A_j Q, \quad j = \overline{1,l}.$$

Предположим, что матричные коэффициенты (4.15) имеют следующую структуру:

$$R_{0,j} = \begin{pmatrix} B_{j,1} & O \\ B_{j,2} & O \end{pmatrix}, \quad R_{i,j} = \begin{pmatrix} A_j^{[i]} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,l},\ i = \overline{1,r+1}, \qquad (4.16)$$

где $B_{j,1}$, $B_{j,2}$ и $A_j^{[i]}$ — некоторые матрицы, причем $B_{j,1}$ и $A_j^{[i]}$ имеют размеры $d \times (n-d)$, а блок $B_{j,2}$ — квадратный порядка $n-d$.

С учетом (4.16) система (4.14) приобретает форму

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 + \sum\limits_{j=1}^{l} \gamma_j B_{j,1} & E_d \\ J_2 + \sum\limits_{j=1}^{l} \gamma_j B_{j,2} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{r+1} \left[\sum\limits_{j=1}^{l} \gamma_j A_j^{[i]} \right] \left(\dfrac{d}{dt} \right)^i x_1(t) & O \\ O & O \end{pmatrix} = 0.$$

Рассуждая так же, как в предыдущем случае, можно показать, что в предположениях A1 и A2 система (4.1) будет асимптотически устойчива при каждом значении $\gamma \in \Gamma_a$ в том и только том случае, когда тем же свойством обладает подсистема

$$x_1'(t) + \left(J_2 + \sum_{j=1}^{l} \gamma_j B_{j,2} \right) x_1(t) = 0.$$

Сформулируем аналог теоремы 5.

Т е о р е м а 6. *Пусть выполнены предположения* A1 *и* A2 *и справедливы равенства* (4.16). *Если найдется симметричная положительно определенная* $(n-d)\times(n-d)$*-матрица* V, *удовлетворяющая при всех* $\gamma \in \Gamma_a$ *неравенству*

$$\left(J_2 + \sum_{j=1}^{l} \gamma_j B_{j,2} \right)^{\top} V + V \left(J_2 + \sum_{j=1}^{l} \gamma_j B_{j,2} \right) > 0,$$

то семейство (4.1) *будет асимптотически устойчиво при всех* $\gamma \in \Gamma_a$.

5. Заключение

В данной работе для исследования робастной устойчивости ДАУ были предложены алгоритмы построения структурных форм с разделенными дифференциальной и алгебраической подсистемами в случае ограниченного по норме векторного и скалярного неопределенного параметра (лемма 1 и теорема 3).

Подход, базирующийся на применении линейного дифференциального оператора, отличается конструктивностью, поскольку для нахождения коэффициентов этого оператора достаточно обратить матрицу, определителем которой является разрешающий минор. Кроме того, система, полученная в результате такого преобразования, эквивалентна исходной системе в смысле решений (лемма 2).

Основная трудность, возникающая при исследовании устойчивости ДАУ в условиях неопределенности, связана с тем, что даже в простейших случаях при сколь угодно малом возмущении коэффициентов может измениться внутренняя структура системы и, следовательно, вид общего решения, в результате чего структура и свойства невозмущенной системы могут потерять для анализа всякое значение.

Отличительной особенностью представленных выше результатов является то, что при анализе устойчивости не используется информация о внутренней структуре номинальной системы. Структурные формы строятся сразу для всего семейства (подразделы 2.1 и 3.1). По этой причине не возникает необходимость введения дополнительных структурных ограничений на возмущения, которые обеспечивали бы совпадение внутренней структуры номинальных и возмущенных ДАУ.

Показано, что устойчивость параметрического семейства (1.1) равносильна устойчивости его дифференциальной подсистемы, которая также зависит от неопределенных параметров. Достаточное условие робастной устойчивости вытекает из требования существования для дифференциальной подсистемы общей квадратичной функции Ляпунова вида (2.15) (теоремы 1 и 4).

С другой стороны, в результате преобразования системы к той или иной структурной форме тип функциональной зависимости от неопределенных параметров дифференциальной подсистемы, для которой и строится функция Ляпунова, может оказаться гораздо более сложным по сравнению с системой (1.1). В этой связи для ДАУ с аффинной неопределенностью получены достаточные условия, при которых дифференциальная подсистема также представляет собой аффинное семейство (раздел 4). Этот подход применим и для систем с другими видами параметрической неопределенности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Пусть Q_Λ — матрица перестановок столбцов такая, что
$$\Lambda_r\left[A(\gamma), B(\gamma)\right] Q_\Lambda = \left(\Lambda_{r,1}(\gamma)\ \Lambda_{r,2}(\gamma)\right),$$

где блок $\Lambda_{r,1}(\gamma)$ входит в разрешающий минор и состоит из c столбцов, причем $\operatorname{rank}\Lambda_{r,1}(\gamma)=c\ \forall\gamma\in\Gamma$.

Обратимся к матрице $\mathcal{D}_r\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]$. Умножив ее справа на матрицу перестановок столбцов $Q_r=\operatorname{diag}\left\{Q,Q,Q_\Lambda\right\}$[1] и слева на $\mathcal{M}_r^{-1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]$, получим

$$\mathcal{M}_r^{-1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]\mathcal{D}_r\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]Q_r=\left(\begin{array}{cc|cc||cc} J_1(\gamma) & E_d & O & O & O & \Phi_1(\gamma)\\ J_2(\gamma) & O & E_{n-d} & O & O & \Phi_2(\gamma)\\ \hline J_3(\gamma) & O & O & E_d & O & \Phi_3(\gamma)\\ J_4(\gamma) & O & O & O & E_c & \Phi_4(\gamma)\end{array}\right),$$

где $J_i(\gamma)$, $\Phi_i(\gamma)$ $(i=\{1,2,3,4\})$ — некоторые матрицы соответствующих размеров. В силу условия (2.4)

$$\Phi_1(\gamma)\equiv O,\quad \Phi_2(\gamma)\equiv O,\quad \Phi_3(\gamma)\equiv O,\quad \gamma\in\Gamma.$$

В этом случае

$$\left(\,E_n\ \ O\ \ \ldots\ \ O\,\right)\mathcal{M}_r^{-1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]\mathcal{D}_r\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]Q_r\mathrm{col}\left(\xi(t),\ldots,\xi^{(r+1)}(t)\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc||ccc} J_1(\gamma) & E_d & O & O & O & \ldots & O\\ J_2(\gamma) & O & E_{n-d} & O & O & \ldots & O\end{array}\right)\mathrm{col}\left(\xi(t),\ldots,\xi^{(r+1)}(t)\right), \tag{П.1}$$

откуда очевидным образом вытекают формулы (2.9) и (2.8).

Доказательство леммы 2. Заметим, что тождество (П.1) не изменится, если положить в нем

$$Q_r=\operatorname{diag}\left\{Q,\ldots,Q\right\}.$$

Пусть $\xi(t)\in\mathbf{C}^{r+2}(T)$ — произвольная n-мерная вектор-функция. Продифференцируем (П.1) по переменной t. Принимая во внимание представление (2.9), получим

$$\left(\,O\ \ R_0(\gamma)\ \ R_1(\gamma)\ \ \ldots\ \ R_r(\gamma)\,\right)\mathcal{D}_{r+1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]Q_{r+1}\mathrm{col}\left(\xi(t),\ldots,\xi^{(r+2)}(t)\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc|cc|ccc} O & O & J_1(\gamma) & E_d & O & O & O & \ldots & O\\ O & O & J_2(\gamma) & O & E_{n-d} & O & O & \ldots & O\end{array}\right)\mathrm{col}\left(\xi(t),\ldots,\xi^{(r+2)}(t)\right). \tag{П.2}$$

Из (П.1) и (П.2) вытекает тождество

$$\left(\begin{array}{ccccc} R_0(\gamma) & R_1(\gamma) & \ldots & R_r(\gamma) & O\\ O & R_0(\gamma) & \ldots & R_{r-1}(\gamma) & R_r(\gamma)\end{array}\right)\mathcal{D}_{r+1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]Q_{r+1}=$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc|cc} J_1(\gamma) & E_d & O & O & O & O\\ J_2(\gamma) & O & E_{n-d} & O & O & O\\ \hline O & O & J_1(\gamma) & E_d & O & O\\ O & O & J_2(\gamma) & O & E_{n-d} & O\end{array}\right). \tag{П.3}$$

[1] Q_r — квазидиагональная матрица, на главной диагонали которой стоят блоки, перечисленные в скобках, остальные элементы — нулевые.

Согласно предположению 2 леммы 2 в матрице

$$\mathcal{D}_{r+1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]=\left(\ \mathcal{B}_{r+1}\left[B(\gamma)\right]\,\middle|\,\mathcal{A}_{r+1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]\,\middle\|\,\Lambda_{r+1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]\ \right)$$

имеется обратимая на Γ подматрица $\mathcal{M}_{r+1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]$ порядка $n(r+2)$. При этом число столбцов матрицы $\mathcal{B}_{r+1}\left[B(\gamma)\right]$, входящих в $\mathcal{M}_{r+1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]$, останется по-прежнему равным d, и это будут столбцы матрицы

$$\mathcal{B}_{2,r+1}(\gamma)=\mathrm{col}\ (B_2(\gamma),O,\dots,O)$$

(см. (2.5), (2.6)). Количество столбцов матрицы $\Lambda_{r+1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]$, входящих в $\mathcal{M}_{r+1}$, будет равно $c+n$.

В результате умножения справа обеих частей равенства (П.3) на матрицу, вычеркивающую в $\mathcal{D}_{r+1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]Q_{r+1}$ столбцы, не входящие в $\mathcal{M}_{r+1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]$, получим

$$\text{(П.4)}\quad \begin{pmatrix} R_0(\gamma) & R_1(\gamma) & \dots & R_r(\gamma) & O\\ O & R_0(\gamma) & \dots & R_{r-1}(\gamma) & R_r(\gamma)\end{pmatrix}\mathcal{M}_{r+1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]=\left(\,\mathcal{E}(\gamma)\ \ O\,\right),$$

где

$$\text{(П.5)}\qquad \mathcal{E}(\gamma)=\left(\begin{array}{c|cc||c} E_d & O & O & O\\ O & E_{n-d} & O & O\\ \hline O & J_1(\gamma) & E_d & O\\ O & J_2(\gamma) & O & E_{n-d}\end{array}\right).$$

При этом блочный столбец

$$\text{(П.6)}\qquad \mathrm{col}\ (O,O,O,E_{n-d})$$

матрицы, присутствующей в правой части тождества (П.3), полностью войдет в матрицу $\mathcal{E}(\gamma)$. В самом деле, поскольку $\mathcal{D}_{r+1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right]$, как и матрица, стоящая в правой части (П.3), имеют полный строчный ранг при всех $\gamma\in\Gamma$, из (П.3) следует, что тем же свойством будет обладать и матрица

$$\text{(П.7)}\qquad \begin{pmatrix} R_0(\gamma) & R_1(\gamma) & \dots & R_r(\gamma) & O\\ O & R_0(\gamma) & \dots & R_{r-1}(\gamma) & R_r(\gamma)\end{pmatrix}.$$

Допустим, что в результате преобразования (П.3) в (П.4) часть столбцов матрицы (П.6) будет вычеркнута. В этом случае матрица $\mathcal{E}(\gamma)$ уже не будет обратимой, что противоречит полноте строчного ранга матрицы (П.7).

Из (П.4) следует

$$\text{(П.8)}\quad \begin{pmatrix} R_0(\gamma) & R_1(\gamma) & \dots & R_r(\gamma) & O\\ O & R_0(\gamma) & \dots & R_{r-1}(\gamma) & R_r(\gamma)\end{pmatrix}=\left(\,\mathcal{E}(\gamma)\ \ O\,\right)\mathcal{M}_{r+1}^{-1}\left[A(\gamma),B(\gamma)\right],$$

Лемма будет доказана, если показать, что система

$$\text{(П.9)}\quad \left(\,L_0(\gamma)\ L_1(\gamma)\,\right)\begin{pmatrix} R_0(\gamma) & R_1(\gamma) & \dots & R_r(\gamma) & O\\ O & R_0(\gamma) & \dots & R_{r-1}(\gamma) & R_r(\gamma)\end{pmatrix}=\left(\,E_n\ O\ \dots O\,\right)$$

имеет решение $\left(\,L_0(\gamma)\ L_1(\gamma)\,\right)\in\mathbf{C}^1(\Gamma)$.

С учетом представления (П.8) необходимое и достаточное условие поточечной разрешимости уравнения (П.9) можно записать в виде

$$\text{(П.10)} \qquad \operatorname{rank}\mathcal{E}(\gamma) = \operatorname{rank}\left(\frac{(\,\mathcal{E}(\gamma)\;O\,)}{(\,E_n\;O\;\ldots O\,)\,\mathcal{M}_{r+1}\,[A(\gamma),B(\gamma)]}\right).$$

Очевидно (см. (П.5)), что $\operatorname{rank}\mathcal{E}(\gamma)=2n$. По построению

$$\text{(П.11)} \qquad (\,E_n\;O\;\ldots O\,)\,\mathcal{M}_{r+1}\,[A(\gamma),B(\gamma)] = \left(\;B_2(\gamma)\,\middle|\,A_1(\gamma)\quad A_2(\gamma)\,\middle\|\,O\;\right).$$

С учетом (П.5), (П.11) нетрудно убедиться, что равенство (П.10) имеет место при всех $\gamma\in\Gamma$.

Решение $L_0(\gamma),\ L_1(\gamma)\in\mathbf{C}^1(\Gamma)$ системы (П.9) может быть найдено по формуле

$$(\,L_0(\gamma)\;L_1(\gamma)\,) = (\,E_n\;O\;\ldots O\,)\,\mathcal{M}_{r+1}\,[A(\gamma),B(\gamma)]\begin{pmatrix}\mathcal{E}^{-1}(\gamma)\\ O\end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R.* Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations (Classics in Applied Mathematics; 14). Philadelphia: SIAM, 1996.
2. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
3. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.
4. *Byers R., Nichols N.K.* On the stability radius of a generalized state-space system // Linear Algebra Appl. 1993. No. 188–189. P. 113–134.
5. *Qiu L., Davisov E.J.* The stability robustness of generalized eigenvalues // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. No. 37. P. 886–891.
6. *Chyan C.J., Du N.H., Linh V.H.* On data-dependence of exponential stability and the stability radii for linear time-varying differential-algebraic systems // J. Differ. Equat. 2008. No. 245. P. 2078–2102.
7. *Du N.H., Linh V.H.* Stability radii for linear time-varying differential-algebraic equations with respect to dynamics perturbations // J. Differ. Equat. 2006. No. 230. P. 579–599.
8. *Fang C.-H., Chang F.-R.* Analysis of stability robustness for generalized state-space systems with structured perturbations // Systems Control Lett. 1993. No. 21. P. 109–114.
9. *Lee L., Fang C.-H., Hsieh J.-G.* Exact uninderectional perturbation bounds for robustness of uncertain generalized state-space systems: continuous-time cases // Automatica. 1997. No. 33. P. 1923–1927.
10. *De Teran F., Dopico F.M., Moro J.* First Order Spectral Perturbation Theory of Square Singular Matrix Pencil // Linear Algebra Appl. 2008. No. 429. P. 548–576.
11. *Linh V.H., Mehrmann V.* Lyapunov, Bohl and Sacker-Sell Spectral Intervals for Differential-Algebraic Equations // J. Dyn. Differ. Equat. 2009. V. 21. P. 153–194.

12. *Lin Ch., Lam J., Wang J., Yang G.-H.* Analysis on Robust Stability for Interval Descriptor Systems // Syst. Control Lett. 2001. No. 42. P. 267–278.
13. *Berger T.* Robustness of Stability of Time-Varying Index-1 DAEs // Math. Control Signals Syst. 2014. No. 26. P. 403–433.
14. *Du N.H., Linh V.H., Mehrmann V.* Robust Stability of Differential-Algebraic Equations / Surveys in Differential-Algebraic Equations I. Ilchmann A., Reis T. (Eds.). Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
15. *Barbosa K., de Sousa C., Coutinho D.* Robust admissibility and H_∞ perfomance of time-varying descriptor systems // Proc. 10th Int. Conf. on Control Autom., IEEE, Hangzhou, China. 2013. P. 1138–1143.
16. *Bara G.I.* Robust analysis and control of parameter-dependent uncertain descriptor systems // Syst. Control Lett. 2011. V. 60. No. 5. P. 356–364.
17. *Gao L., Chen W., Sun Y.* On robust admissibility condition for descriptor systems with convex polytopic uncertsinty // Proc. 2003 Amer. Control Conf., Denver, USA. 2003. V. 6. P. 5083–5088.
18. *Xing S., Zhang Q., Zhu B.* Mean-Square Admissibility for Stochastic T-S Fussy Singular Systems Based on Extented Quadratic Lyapunov Function Approach // Fuzzy Sets Syst. 2017. V. 307. P. 99–114.
19. *Chen G., Zheng M., Yang Sh., Li L.* Admissibility Analysis of a Sampled-Data Singular System based on the Input Delay Approach // Complexity. 2022. https://doi.org/10.1155/2022/3151620.
20. *Taniguchi T., Tanaka K., Yamafuji K., Wang H.O.* Fuzzy Descriptor Systems: Stability Analysis and Design via LMis // Pro. 1999 Amer. Control Conf., IEEE, San Diego, USA. 1999. V. 3. P. 1827–1831.
21. *Dong X.-Z.* Admissibility Analysis of Linear Singular Systems via a Delta Operator Method // Int. J. Syst. Sci. 2014. V. 45. P. 2366–2375.
22. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса // А и Т. 2017. № 5. С. 36–55.

    Shcheglova A.A., Kononov A.D. Robust Stability of Differential-Algebraic Equations with an Arbitrary Unsolvability Index // Autom. Remote Control. 2017. No. 5. P. 798–814.
23. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений в условиях неопределенности // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 881–890.

    Shcheglova A.A., Kononov A.D. Stability of Differential-Algebraic Equations under Uncertainty // Differential Equations. 2018. V. 54, No. 7. P. 860–869.
24. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
25. *Campbell S.L., Petzold L.R.* Canonical Forms and Solvable Singular Systems of differential Equations // SIAM J. Alg. Discrete Methods. 1983. No. 4. P. 517–521.
26. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988 (4-е изд.).

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 23.03.2022

После доработки 25.07.2023

Принята к публикации 04.09.2023