

© 2023 г. А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru),  
А.В. ЗУЕВ, канд. техн. наук (alvzuev@yandex.ru)  
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;  
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток),  
В.Ф. ФИЛАРЕТОВ, д-р техн. наук (filaretov@inbox.ru)  
(Институт автоматике и процессов управления ДВО РАН, Владивосток),  
А.Е. ШУМСКИЙ, д-р техн. наук (a.e.shumsky@yandex.con),  
КИМ ЧХУН ИР (kim.ci@dvvf.ru)  
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток)

## ИНТЕРВАЛЬНЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ<sup>1</sup>

Решается задача построения интервальных наблюдателей для линейных динамических систем, описываемых моделями с непрерывным временем, при наличии внешних возмущений, шумов измерений и параметрических неопределенностей. На основе канонической формы Жордана приводятся соотношения, позволяющие построить интервальный наблюдатель, оценивающий множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния системы. Изложенное иллюстрируется практическим примером.

*Ключевые слова:* линейные системы, интервальные наблюдатели, каноническая форма Жордана, оценивание.

DOI: 10.31857/S0005231023110016, EDN: OOMDNF

### 1. Введение и постановка задачи

Проблеме построения интервальных наблюдателей последние годы уделяется большое внимание, решения для различных классов систем – с дискретным и непрерывным временем, с запаздыванием, сингулярных – можно найти в [1–11], где также обсуждаются практические приложения таких наблюдателей в различных областях; обстоятельные обзоры полученных за это время результатов содержатся в [10, 11]. В этих работах, как правило, интервальные наблюдатели дают оценку множества допустимых значений полного вектора состояния, в то же время на практике интерес может представлять интервальная оценка допустимых значений только для определенной линейной функции этого вектора. Соответствующий интервальный наблюдатель может оказаться существенно проще наблюдателя для полного вектора состояния, а ширина интервала заметно меньше за счет появления возможности минимизации влияния внешних возмущений.

<sup>1</sup> Работа поддержана Российским научным фондом (проект 23-29-00191), <https://rscf.ru/project/23-29-00191/>.

Последние годы для решения задач построения интервальных наблюдателей стала активно применяться каноническая форма (КФ) Жордана [4, 10], которая ранее использовалась при анализе свойства самокоррекции сбоев [12]. Матрица, описывающая динамику системы и реализованная в жордановой КФ, при соответствующем выборе собственных чисел обеспечивает устойчивость наблюдателя и является метцлеровой, т.е. ее внедиагональные элементы неотрицательны. Эти свойства позволяют гарантировать, что интервальный наблюдатель в каждый момент времени вырабатывает оценку множества допустимых значений вектора состояния системы с неопределенностями. Анализ жордановой КФ показывает, что, помимо гарантии устойчивости, она позволяет упростить процедуру обеспечения нечувствительности наблюдателя к возмущениям и в ряде случаев уменьшить его размерность за счет отсутствия необходимости обеспечивать устойчивость специальными средствами.

Настоящая статья является логическим продолжением работ [13, 14], в которых рассматривалась задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых линейными моделями с непрерывным временем при наличии внешних возмущений и шумов измерений. В [14] было показано, что использование канонической формы Жордана при построении интервальных наблюдателей позволяет уменьшить размерность наблюдателей и в ряде случаев сократить величину интервала. В настоящей работе ставится и решается задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых моделями с непрерывным временем, работающих в условиях действия внешних возмущений, шумов измерений и параметрических неопределенностей, которые позволяют оценить множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния.

Рассматривается класс систем, описываемых линейной моделью

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (F + \Delta F(\mu(t)))x(t) + Gu(t) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t) + v(t), \end{aligned}$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^l$  – векторы состояния, управления и выхода;  $F$  и  $G$  – постоянные матрицы, описывающие линейную динамику;  $H$  и  $L$  – известные постоянные матрицы,  $\rho(t) \in \mathbb{R}^p$  – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая возмущения, действующие на систему,  $\|\rho(t)\| \leq \rho_*$ ;  $v(t) \in \mathbb{R}^l$  – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая шум измерения,  $\|v(t)\| \leq v_*$ ;  $\mu(t) \in \Pi \subset \mathbb{R}^s$  – ограниченный вектор переменных параметров. По аналогии с [10] предполагается, что значения вектора  $\mu(t)$  недоступны для измерений, множество допустимых значений  $\Pi$  известно, матричная функция  $\Delta F(\mu)$  ограничена для всех  $\mu(t) \in \Pi$  и известных  $\underline{\Delta F}$  и  $\overline{\Delta F}$ :  $\underline{\Delta F} \leq \Delta F \leq \overline{\Delta F}$ . Как и в [2], для произвольных векторов  $w_1, w_2$  и матриц  $A_1, A_2$  отношения  $w_1 \leq w_2$  и  $A_1 \leq A_2$  понимаются поэлементно.

Требуется построить интервальный наблюдатель, имеющий минимальную размерность и формирующий нижнюю  $\underline{z}(t)$  и верхнюю  $\overline{z}(t)$  границы переменной  $z(t) = Mx(t)$  с известной матрицей  $M$  такие, что  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t)$  при

всех  $t \geq 0$ . Поскольку задачи учета шума измерений и возмущений для непрерывных систем были детально рассмотрены в [13], в данной работе акцент сделан на параметрические неопределенности, поэтому вначале предполагается, что  $v(t) = 0$  и  $\rho(t) = 0$ .

## 2. Построение модели

В основе решения задачи лежит модель системы (1.1) минимальной размерности, оценивающая переменную  $z(t)$  и некоторую переменную  $y_*(t)$ , которая определяется в процессе решения задачи:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= (F_* + \Delta F_*(t) - PH_*)x_*(t) + (J_* + J')y(t) + Py_*(t) + G_*u(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t), \\ z(t) &= H_zx_*(t) + Qy(t), \end{aligned}$$

где  $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$ ,  $k < n$  – размерность модели,  $F_*$ ,  $G_*$ ,  $J_*$ ,  $H_*$ ,  $H_z$  и  $Q$  – матрицы, подлежащие определению, матрицы  $\Delta F_*$  и  $J'$  определяются ниже, выбор матрицы  $P$  объясняется в разделе 3. В [4] для интервальной оценки вектора  $x(t)$  было предложено предварительно построенный устойчивый наблюдатель преобразовать к жордановой КФ. В отличие от этого в настоящей работе матрица  $F_*$  сразу ищется в указанной форме; полагая, что собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  этой матрицы задаются разными и отрицательными, получаем матрицу  $F_*$  диагонального вида:

$$(2.2) \quad F_* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Покажем корректность этого предположения. Известно [13], что матрица  $F_*$  всегда может быть реализована в идентификационной канонической форме

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Введением обратной связи по сигналу невязки с матрицей  $K$  она приводится к виду  $F_* - KH_*$ ; выбором собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , которые предполагаются разными и отрицательными, и определением соответствующих элементов матрицы  $K$  матрицу  $F_* - KH_*$  можно сделать устойчивой. Поскольку собственные числа различны, соответствующие им собственные векторы  $v_1, v_2, \dots, v_k$  образуют линейно независимую систему, поэтому составленная

из них матрица  $T^{-1} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k)$  будет невырожденной. Матрица  $T$  имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_k \end{pmatrix},$$

где векторы  $w_1, w_2, \dots, w_k$  удовлетворяют условию  $w_i v_i = 1, i = 1, \dots, k, w_i v_j = 0, i \neq j$ . Преобразуем уравнение  $(F_* - KH_*)v_1 = \lambda_1 v_1$ , следующее из определения собственных чисел и векторов, к виду  $T(F_* - KH_*)T^{-1}Tv_1 = \lambda_1 Tv_1$  умножением слева на матрицу  $T$ . С учетом вида матрицы  $T$  получаем  $Tv_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ , откуда

$$T(F_* - KH_*)T^{-1}(1 \ 0 \ \dots \ 0)^T = (\lambda_1 \ 0 \ \dots \ 0)^T.$$

Из полученного выражения следует, что первый столбец матрицы  $T(F_* - KH_*)T^{-1}$  имеет вид  $(\lambda_1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ . Рассматривая аналогичным образом уравнение  $(F_* - KH_*)v_i = \lambda_i v_i, i = 2, 3, \dots, k$ , приходим к матрице (2.2).

Предполагается, что при отсутствии шумов, возмущений и неопределенностей справедливы равенства  $x_*(t) = \Phi x(t)$  и  $y_*(t) = R_* x(t)$ , где матрица  $\Phi$ , кроме известных условий [15]

$$(2.3) \quad \Phi F = F_* \Phi + J_* H, \quad H_* \Phi = R_* H, \quad \Phi G = G_*,$$

должна удовлетворять дополнительному условию, связанному с наличием переменной  $z(t)$ , получим его. Из  $z(t) = Mx(t)$  и (2.1) следует уравнение

$$(2.4) \quad M = H_z \Phi + QH = (H_z \ Q) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix},$$

которое имеет решение, если

$$(2.5) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ M \end{pmatrix}.$$

Отметим также, что условие  $H_* \Phi = R_* H$  может быть записано в виде уравнения

$$(2.6) \quad (H_* \ -R_*) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = 0,$$

которое имеет решение, если

$$(2.7) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} < \text{rank}(\Phi) + \text{rank}(H).$$

Для матрицы (2.2) первое уравнение в (2.3) распадается на  $k$  независимых уравнений:

$$\Phi_i F = \lambda_i \Phi_i + J_{*i} H, \quad i = 1, \dots, k,$$

которые можно записать в виде

$$(2.8) \quad (\Phi_i \quad - J_{*i}) \begin{pmatrix} F - \lambda_i I_n \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

где  $\Phi_i$  и  $J_{*i}$  —  $i$ -е строки матриц  $\Phi$  и  $J_*$  соответственно,  $I_n$  — единичная  $n \times n$ -матрица.

При решении уравнения (2.8) значения  $\lambda_i < 0$  должны задаваться так, чтобы полученная в результате матрица  $\Phi$  с минимальным числом строк удовлетворяла условиям (2.5) и (2.7), после чего из (2.4) определяются матрицы  $H_z$  и  $Q$ , из (2.6) — матрицы  $H_*$  и  $R_*$ , из (2.3) —  $G_*$ . Неопределенность  $\Delta F_*(t)$ , входящая в (2.1), определяется на основе  $\Delta F(\mu(t))$  следующим образом. Из (1.1) и (2.1) по аналогии с (2.3) следует

$$\Phi(F + \Delta F(\mu(t))) = (F_* + \Delta F_*(t))\Phi + J_*H + J'H.$$

Поскольку матрица  $F_*$  удовлетворяет условию  $\Phi F = F_*\Phi + J_*H$ , то

$$\Phi \Delta F(\mu(t)) = \Delta F_*(t)\Phi + J'H,$$

или

$$(2.9) \quad \Phi \Delta F(\mu) = (\Delta F_* \quad J') \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}.$$

Это уравнение имеет решение, если

$$(2.10) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ \Phi \Delta F(\mu) \end{pmatrix}.$$

После определения матрицы  $\Phi$  проверяется это условие и при его выполнении из уравнения (2.9) определяются  $\Delta F_*(t)$  и  $J'$ . Матрицы  $\underline{\Delta F}_*$  и  $\overline{\Delta F}_*$  также определяются из (2.9). При невыполнении условия (2.10) ищется другое решение уравнения (2.8). Для простоты рассмотрим случай, когда  $J'$  не зависит от  $\Delta F(\mu)$ .

### 3. Построение интервального наблюдателя

#### 3.1. Первый вариант

По аналогии с [2, 10] рассмотрим два варианта построения интервальных наблюдателей — простой, но с ограничениями на исходную систему, и более сложный без ограничений. Начнем с первого, когда дополнительно предполагается, что  $\underline{\Delta F}_* \geq 0$  и  $x_*(t) \geq 0$  при всех  $t \geq 0$ . В этом случае наблюдатель строится на основе модели (2.1) и ищется в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}}_*(t) &= (F_* + \underline{\Delta F}_* - \underline{P}H_*)\underline{x}_*(t) + \underline{P}y_*(t) + (J_* + J')y(t) + G_*u(t), \\ \dot{\overline{x}}_*(t) &= (F_* + \overline{\Delta F}_* - \overline{P}H_*)\overline{x}_*(t) + \overline{P}y_*(t) + (J_* + J')y(t) + G_*u(t), \\ \underline{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Qy(t), \\ \overline{z}(t) &= H_z \overline{x}_*(t) + Qy(t), \\ \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_{*0}, \quad \overline{x}_*(0) = \overline{x}_{*0}. \end{aligned}$$

Введем ошибки оценивания:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \underline{e}_*(t) &= x_*(t) - \underline{x}_*(t), & \bar{e}_*(t) &= \bar{x}_*(t) - x_*(t), \\ \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t), & \bar{e}_z(t) &= \bar{z}(t) - z(t). \end{aligned}$$

С учетом (2.1) и (3.1) для этих ошибок получаем дифференциальные уравнения:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{e}}_*(t) &= (F_* - \underline{P}H_*)\underline{e}_*(t) + \underline{\Delta F}_*x_*(t) - \underline{\Delta F}_*x_*(t), \\ \dot{\bar{e}}_*(t) &= (F_* - \bar{P}H^*)\bar{e}_*(t) + \bar{\Delta F}_*\bar{x}_*(t) - \Delta F_*x_*(t). \end{aligned}$$

Из (3.1) и (3.3) вытекают требования к матрицам  $\underline{P}$  и  $\bar{P}$ : они выбираются так, чтобы матрицы  $F_* + \underline{\Delta F}_* - \underline{P}H_*$  и  $F_* + \bar{\Delta F}_* - \bar{P}H_*$  были устойчивыми, а  $F_* - \underline{P}H_*$  и  $F_* - \bar{P}H_*$  — метцлеровыми. Рекомендации по определению этих матриц можно найти в [2]. Матрица  $P$  в (2.1) выбирается равной  $\underline{P}$  для первого уравнения в (3.1) и  $\bar{P}$  для второго.

*Теорема 1.* Пусть  $0 \leq \underline{\Delta F}_* \leq \Delta F_* \leq \bar{\Delta F}_*$ ,  $H_z \geq 0$ ,  $x_*(t) \geq 0$  при всех  $t \geq 0$ ,  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$  и существуют матрицы  $\underline{P}$  и  $\bar{P}$  с указанными выше свойствами, тогда для интервального наблюдателя (3.3) выполняется соотношение  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$ .

*Доказательство.* Если  $x_*(t) \geq \underline{x}_*(t)$ , то, поскольку  $\underline{\Delta F}_* \geq 0$ , получаем  $\underline{\Delta F}_*(x_*(t) - \underline{x}_*(t)) \geq 0$  и  $\underline{\Delta F}_*x_*(t) \geq \underline{\Delta F}_*\underline{x}_*(t)$ . Так как  $\Delta F_* \geq \underline{\Delta F}_*$  и  $x_*(t) \geq 0$ , то  $(\Delta F_* - \underline{\Delta F}_*)x_*(t) \geq 0$  и  $\Delta F_*x_*(t) \geq \underline{\Delta F}_*x_*(t)$ , откуда с учетом предыдущего имеем  $\Delta F_*x_*(t) \geq \underline{\Delta F}_*\underline{x}_*(t)$ , т.е.  $\Delta F_*x_*(t) - \underline{\Delta F}_*\underline{x}_*(t) \geq 0$  в (3.3). Поскольку при  $t = 0$  по предположению  $x_*(0) \geq \underline{x}_*(0)$ , т.е.  $\underline{e}_*(0) \geq 0$ , а матрица  $F_* - \underline{P}H_*$  в (3.3) метцлерова, то согласно [2] по индукции получаем  $\underline{e}_*(t) \geq 0$  при всех  $t \geq 0$ . Так как  $z(t) = H_zx_*(t) + Qy(t)$ , из (3.2) следует

$$\underline{e}_z(t) = H_zx_*(t) + Qy(t) - (H_z\underline{x}_*(t) + Qy(t)) = H_z\underline{e}_*(t),$$

откуда с учетом  $\underline{e}_*(t) \geq 0$  и допущения  $H_z \geq 0$  получаем  $\underline{e}_z(t) \geq 0$ . Аналогично показывается, что  $\bar{e}_z(t) \geq 0$ . Нетрудно видеть, что последние неравенства эквивалентны доказываемому утверждению. Устойчивость матриц  $F_* + \underline{\Delta F}_* - \underline{P}H_*$  и  $F_* + \bar{\Delta F}_* - \bar{P}H_*$  позволяет утверждать, что границы  $\underline{x}_*(t)$ ,  $\bar{x}_*(t)$  и, соответственно,  $\underline{z}(t)$ ,  $\bar{z}(t)$  конечны. Теорема доказана.

*Замечание 1.* В случае  $H_z \leq 0$  границы  $\underline{z}(t)$  и  $\bar{z}(t)$  определяются соотношениями

$$\underline{z}(t) = H_z\bar{x}_*(t) + Qy(t), \quad \bar{z}(t) = H_z\underline{x}_*(t) + Qy(t).$$

Действительно, тогда

$$\underline{e}_z(t) = z(t) - \underline{z}(t) = H_zx_*(t) + Qy(t) - (H_z\bar{x}_*(t) + Qy(t)) = -H_z\bar{e}_*(t),$$

откуда с учетом  $\bar{e}_*(t) \geq 0$  и  $H_z \leq 0$  получаем  $\underline{e}_z(t) \geq 0$ . Для границы  $\bar{z}(t)$  соответствующее неравенство доказывается аналогично.

Если матрица  $H_z$  является знакопеременной, конечный результат остается прежним, но формулы для расчета верхних и нижних границ усложняются.

Таким образом, для построения интервального наблюдателя, оценивающего переменную  $z(t) = Mx(t)$ , необходимо найти такие решения уравнения (2.8), которые при минимальном  $k$  дают матрицу  $\Phi$ , удовлетворяющую условиям (2.5) и (2.7), вычислить матрицы  $J_*$ ,  $G_*$ ,  $R_*$ ,  $H_*$  и подобрать матрицы  $\underline{P}$  и  $\overline{P}$ , удовлетворяющие указанным выше свойствам. Последнее не всегда возможно, в этом случае необходимо использовать второй вариант построения наблюдателя.

### 3.2. Второй вариант

Рассмотрим более сложный интервальный наблюдатель без ограничений на исходную систему. Изложение предварим леммой.

*Лемма 1.* Пусть  $\underline{A} \leq A \leq \overline{A}$  для некоторых  $k \times k$ -матриц  $\underline{A}$ ,  $A$ ,  $\overline{A}$  и  $\underline{x}_* \leq x_* \leq \overline{x}_*$  для  $k$ -мерных векторов  $\underline{x}_*$ ,  $x_*$ ,  $\overline{x}_*$ . Тогда

$$\underline{A}^+ \underline{x}_*^+ - \overline{A}^+ \underline{x}_*^- - \underline{A}^- \overline{x}_*^+ + \overline{A}^- \overline{x}_*^- \leq Ax \leq \overline{A}^+ \overline{x}_*^+ - \underline{A}^+ \overline{x}_*^- - \overline{A}^- \underline{x}_*^+ + \underline{A}^- \underline{x}_*^- ,$$

где  $A^+ = \max(0, A)$ ,  $A^- = A^+ - A$  и аналогично для вектора  $x_*$ .

Доказательство приведено в [1].

Интервальный наблюдатель строится на основе модели (2.1), в которой принимается  $P = 0$ ; он описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_*(t) &= F_* \underline{x}_*(t) + (\underline{\Delta F}_*^+ \underline{x}_*^+ - \overline{\Delta F}_*^+ \underline{x}_*^- - \underline{\Delta F}_*^- \overline{x}_*^+ + \overline{\Delta F}_*^- \overline{x}_*^-) + \\ &\quad + (J_* + J')y(t) + G_* u(t), \\ \dot{\overline{x}}_*(t) &= F_* \overline{x}_*(t) + (\overline{\Delta F}_*^+ \overline{x}_*^+ - \underline{\Delta F}_*^+ \overline{x}_*^- - \overline{\Delta F}_*^- \underline{x}_*^+ + \underline{\Delta F}_*^- \underline{x}_*^-) + \\ (3.4) \quad &\quad + (J_* + J')y(t) + G_* u(t), \\ \underline{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Qy(t), \\ \overline{z}(t) &= H_z \overline{x}_*(t) + Qy(t), \\ \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_{*0}, \quad \overline{x}_*(0) = \overline{x}_{*0}. \end{aligned}$$

Уравнения для ошибок оценивания здесь принимают вид

$$\begin{aligned} (3.5) \quad \dot{\underline{e}}_*(t) &= F_* \underline{e}_*(t) + \Delta F_* x_*(t) - (\underline{\Delta F}_*^+ \underline{x}_*^+ - \overline{\Delta F}_*^+ \underline{x}_*^- - \underline{\Delta F}_*^- \overline{x}_*^+ + \overline{\Delta F}_*^- \overline{x}_*^-), \\ \dot{\overline{e}}_*(t) &= F_* \overline{e}_*(t) + (\overline{\Delta F}_*^+ \overline{x}_*^+ - \underline{\Delta F}_*^+ \overline{x}_*^- - \overline{\Delta F}_*^- \underline{x}_*^+ + \underline{\Delta F}_*^- \underline{x}_*^-) - \Delta F_* x_*(t). \end{aligned}$$

*Теорема 2.* Пусть  $\underline{\Delta F}_* \leq \Delta F_* \leq \overline{\Delta F}_*$  и  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \overline{x}_*(0)$ , тогда для интервального наблюдателя (3.4) выполняется соотношение  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t)$ .

*Доказательство.* Из  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \overline{x}_*(0)$  согласно (3.2) следует  $\underline{e}_*(0) \geq 0$  и  $\overline{e}_*(0) \geq 0$ . Поскольку матрица  $F_*$  метцлерова, из (3.5) и леммы следует  $\underline{e}_*(t) \geq 0$  и  $\overline{e}_*(t) \geq 0$  для всех  $t \geq 0$  [2]. Соотношение  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t)$  доказывается по аналогии со второй частью теоремы 1 и замечанием 1. Теорема доказана.

*Замечание 2.* Сравнение двух вариантов показывает, что первый из них накладывает заметно больше ограничений на систему, чем второй, но имеет более простую структуру. В частности, во втором варианте нет необходимости определять матрицы  $H_*$  и  $R_*$ , что дает возможность игнорировать условие (2.7) при реализации этого варианта, что также расширяет класс систем, для которых интервальный наблюдатель может быть построен. Из сказанного следует, что при решении конкретной задачи вначале следует сделать попытку реализовать первый вариант и только в случае невозможности этого — второй.

*Замечание 3.* Существенную роль в теоремах 1 и 2 играет условие  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ . Устойчивость матриц  $F_* + \underline{\Delta F}_* - \underline{P}H_*$ ,  $F_* + \overline{\Delta F}_* - \overline{P}H_*$  и  $F_*$  позволяет утверждать, что доказываемое неравенство  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  будет выполняться для некоторого  $t > 0$  даже при невыполнении условия  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ , поскольку влияние начальных условий через определенное время практически “забывается”. Действительно, рассмотрим это на примере второго варианта и первого уравнения в (3.5); обозначим

$$v_0(t) = \Delta F_* x_*(t) - (\underline{\Delta F}_*^+ x_*^+ - \overline{\Delta F}_*^+ x_*^- - \underline{\Delta F}_*^- x_*^+ + \overline{\Delta F}_*^- x_*^-).$$

Из леммы следует, что  $v_0(t) \geq 0$ . Нетрудно видеть, что матрицы, входящие в приведенное выше соотношение, в частности  $\overline{\Delta F}_*^+$ , всегда можно выбрать так, что  $v_0(t) \geq v_{0*}$  для некоторого  $v_{0*} > 0$ .

Поскольку матрица  $F_*$  диагональна, рассмотрим уравнение (3.5) для первой компоненты ошибки  $\underline{e}_*(t)$ :

$$\dot{\underline{e}}_{*1}(t) = \lambda_1 \underline{e}_{*1}(t) + v_{01}(t),$$

которое имеет решение

$$\underline{e}_{*1}(t) = \exp(\lambda_1 t) \underline{e}_{*1}(0) + \exp(\lambda_1 t) \int_0^t v_{01}(\tau) \exp(-\lambda_1 \tau) d\tau.$$

Так как  $\lambda_1 < 0$ , а  $v_0(t) \geq v_{0*} > 0$ , первое слагаемое через некоторое время  $T_1$  станет практически равным нулю, а ошибка  $\underline{e}_{*1}(t)$  положительной, несмотря на возможное отрицательное значение  $\underline{e}_{*1}(0)$ . Для остальных компонент вектора  $\underline{e}_*(t)$  и компонент вектора  $\bar{e}_*(t)$  можно получить аналогичные результаты.

*Замечание 4.* Понятия доверительного интервала и доверительной вероятности из математической статистики можно определенным образом перенести на интервальные наблюдатели: если  $\Delta F_* \in (\underline{\Delta F}_*, \overline{\Delta F}_*)$  с некоторой степенью принадлежности  $\mu_*$ , то  $z(t) \in (\underline{z}(t), \bar{z}(t))$  также со степенью  $\mu_*$ .

#### 4. Учет возмущений и шумов измерений

Случай, когда  $v(t) \neq 0$  и  $\rho(t) \neq 0$ , подробно рассмотрен в [13], отметим только, что наблюдатель также строится на основе модели (2.1), в которой

слагаемое  $J_*y(t)$  заменяется на  $J_*Hx(t)$ , что объясняется необходимостью учесть шумы измерения согласно соотношению  $y(t) = Hx(t) + v(t)$ . Приведем описание интервального наблюдателя в этом случае для первого варианта:

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{x}}_*(t) &= (F_* + \underline{\Delta}F_* - \underline{P}H_*)\underline{x}_*(t) + \underline{P}y_*(t) + (J_* + J')y(t) + G_*u(t) - \\
&\quad - (|J_*| + |J'|)E_k v_* - |L_*|E_k \rho_*, \\
\dot{\bar{x}}_*(t) &= (F_* + \overline{\Delta}F_* - \overline{P}H_*)\bar{x}_*(t) + \overline{P}y_*(t) + (J_* + J')y(t) + G_*u(t) + \\
(4.1) \quad &\quad + (|J_*| + |J'|)E_k v_* + |L_*|E_k \rho_*, \\
\underline{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Qy_0(t), \\
\bar{z}(t) &= H_z \bar{x}_*(t) + Qy_0(t), \\
\underline{x}_*(0) &= \underline{x}_{*0}, \quad \bar{x}_*(0) = \bar{x}_{*0}.
\end{aligned}$$

Здесь матрица  $|A|$  состоит из абсолютных значений соответствующих элементов матрицы  $A$ ,  $E_k$  —  $k \times 1$ -матрица, составленная из единиц. Переменная  $y_0(t)$  представляет те компоненты вектора выхода  $y(t)$ , которые не искажаются возмущением, т.е.  $y_0(t) = N_1 y(t)$  для некоторой матрицы  $N_1$ . Введем матрицу  $L_0$  максимального ранга такую, что  $L_0 L = 0$ . Поскольку вектор  $x'(t) = L_0 x(t)$  не искажается возмущением, то  $y_0(t) = N_2 x'(t)$  для некоторой матрицы  $N_2$ . Тогда для матриц  $N_1$  и  $N_2$  получаем уравнение  $N_1 H = N_2 L_0$ , которое имеет решение, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} < \text{rank}(H) + \text{rank}(L_0).$$

Если это условие выполняется, матрицы  $N_1$  и  $N_2$  определяются из уравнения

$$(N_1 \quad -N_2) \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Невыполнение этого условия означает необходимость замены переменной  $y_0(t)$  в (4.1) на  $y(t)$ , что приведет к расширению интервала  $(\underline{z}(t), \bar{z}(t))$ .

Уравнения для ошибок оценивания принимают вид

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{e}}_*(t) &= (F_* - \underline{P}H_*)\underline{e}_*(t) + \underline{\Delta}F_* x_*(t) - \underline{\Delta}F_* \underline{x}_*(t) - \\
&\quad - (J_* + J')v(t) + (|J_*| + |J'|)E_k v_* - L_* \rho(t) + |L_*|E_k \rho_*, \\
\dot{\bar{e}}_*(t) &= (F_* - \overline{P}H_*)\bar{e}_*(t) + \overline{\Delta}F_* \bar{x}_*(t) - \overline{\Delta}F_* \bar{x}_*(t) + \\
&\quad + (J_* + J')v(t) + (|J_*| + |J'|)E_k v_* + L_* \rho(t) + |L_*|E_k \rho_*.
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что искомый результат следует из доказательства теоремы 1 и очевидных дополнительных неравенств

$$\pm(J_* + J')v(t) + (|J_*| + |J'|)E_k v_* \geq 0, \quad \pm L_* \rho(t) + |L_*|E_k \rho_* \geq 0,$$

верных при всех  $t \geq 0$ .

*Замечание 5.* Как следует из (4.1), величина интервала  $(\underline{z}(t), \bar{z}(t))$  зависит от величины возмущения и уровня шумов. С целью уменьшения этой величины матрицы  $\Phi$  и  $J_*$  следует определять из уравнения

$$(4.2) \quad (S_i - J_{*i}) \begin{pmatrix} L_0(F - \lambda_i I_n) \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

которое получается из (2.8) при  $\Phi = SL_0$  для некоторой матрицы  $S$ , что гарантирует  $L_* = 0$ , т.е. нечувствительность модели к возмущению; здесь  $S_i$  —  $i$ -я строка матрицы  $S$ . Если (4.2) не имеет решения, следует обратиться к робастным методам, излагаемым ниже.

Чувствительность модели (2.1) к возмущению  $\rho(t)$  обычно оценивается нормой  $\|\Phi L\|_F$  матрицы  $\Phi L$ . С целью минимизации этой нормы для  $i = 1, \dots, k$  выбирается  $\lambda_i < 0$ , для которого уравнение (2.8) разрешимо и находятся все решения в виде  $\Phi_i^{(1)}, \dots, \Phi_i^{(n_i)}$ . Представим эти решения в форме

$$\Phi_{*i} = \begin{pmatrix} \Phi_i^{(1)} \\ \dots \\ \Phi_i^{(n_i)} \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} J_{*i}^{(1)} \\ \dots \\ J_{*i}^{(n_i)} \end{pmatrix}.$$

Найдем сингулярное разложение произведения  $\Phi_{*i}L$ , т.е. представим его в виде

$$\Phi_{*i}L = U_L \Sigma_L V_L,$$

где  $U_L$  и  $V_L$  — ортогональные матрицы,

$$\Sigma_L = (\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{c_i}) \ 0) \quad \text{или} \quad \Sigma_L = \begin{pmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{c_i}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

в зависимости от соотношения числа строк и столбцов в матрице  $\Phi_{*i}L$ ,  $c_i = \min(n_i, kp)$ ,  $0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_{c_i}$  — сингулярные числа матрицы  $\Phi_{*i}L$ , упорядоченные по возрастанию [16]. Первый транспонированный столбец матрицы  $U_L$  выбирается в качестве вектора весовых коэффициентов  $w = (w_1 \dots w_{n_i})$  и вычисляются строки  $\Phi_i = w\Phi_{*i}$  и  $J_{*i} = wJ_i$ ; если  $n_i = 1$ , принимаем  $\Phi_i := \Phi_i^{(1)}$  и  $J_{*i} := J_i^{(1)}$ . Полученные строки  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  и  $J_{*1}, \dots, J_{*k}$  компонуются в матрицы

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \dots \\ \Phi_k \end{pmatrix}, \quad J_* = \begin{pmatrix} J_{*1} \\ \dots \\ J_{*k} \end{pmatrix}$$

и проверяется возможность оценки переменных  $z(t)$  и  $y_*(t)$  с помощью критериев (2.5) и (2.7). При их выполнении задача решена, в противном случае для некоторого  $\lambda_i < 0$  нужно найти другой вектор  $w = (w_1 \dots w_{n_i})$  для сингулярного числа  $\sigma > \sigma_1$  и вычислить новую матрицу  $\Phi_i$ .

*Теорема 3.* Указанный способ построения матрицы  $\Phi$  обеспечивает оптимальное решение в смысле минимума нормы  $\|\Phi L\|_F$ .

*Доказательство.* Прямо следует из свойств сингулярного разложения.

Определением матриц  $H_z$ ,  $Q$ ,  $\Delta F_*$ ,  $J'$ ,  $H_*$ ,  $R_*$ ,  $G_* = \Phi G$  и  $L_* = \Phi L$  завершается синтез модели (2.1), минимально чувствительной к возмущениям.

По аналогии с [13, 14] результаты, полученные в работе для оценки переменной  $z(t)$ , можно применить для оценки полного вектора состояния  $x(t)$ . Для этого определяются решения уравнения (4.2) с  $\lambda_i < 0$  и максимально возможным  $k$ , составляется матрица  $\Phi^{(1)} := M^{(1)}$  и при выполнении критериев (2.5) и (2.7) по одному из вариантов определяется интервальная оценка вектора  $x^{(1)}(t) = M^{(1)}x(t)$ ; отметим, что она не будет зависеть от возмущения  $\rho(t)$ . Далее определяются вектор  $x^{(2)}(t)$ , дополняющий  $x^{(1)}(t)$  до  $x(t)$ , и матрица  $M^{(2)}$  такая, что  $x^{(2)}(t) = M^{(2)}x(t)$ . Интервальный наблюдатель, оценивающий переменную  $x^{(2)}(t)$ , строится на основе уравнения (2.8). Композиция двух построенных наблюдателей будет давать интервал  $(\underline{x}(t), \bar{x}(t))$  более узкий, нежели построенный классическими методами [10].

## 5. Практический пример

Рассмотрим трехтанковую систему

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= b_4 u_1(t) / \vartheta_1 - (b_1 - \delta_1(t))(x_1(t) - x_2(t)), \\
 \dot{x}_2(t) &= b_5 u_2(t) / \vartheta_2 + (b_1 - \delta_1(t))(x_1(t) - x_2(t)) - \\
 &\quad - (b_2 - \delta_2(t))(x_2(t) - x_3(t)), \\
 \dot{x}_3(t) &= (b_2 - \delta_2(t))(x_2(t) - x_3(t)) - b_3(x_3(t) - b_6) + \rho(t), \\
 y_1(t) &= x_2(t) + v_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) + v_2(t),
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

где значения коэффициентов  $b_1, \dots, b_5$  определяются геометрическими размерами системы,  $x_1, x_2, x_3$  – уровни жидкости в танках (рис. 1). Жидкость втекает в первый и второй танки и вытекает из третьего по трубе, расположенной на высоте  $b_6$ . Параметрические неопределенности  $\delta_1(t)$  и  $\delta_2(t)$  связаны с возможными засорениями труб, соединяющих танки, и, как следствие, уменьшением их пропускной способности. Возмущение  $\rho(t)$  отражает возможные утечки в третьем танке. Для простоты примем  $b_1 = \dots = b_5 = 1$ ,  $b_6 = 0$ ;  $0 \leq \delta_1(t) \leq 0,2$ ,  $0 \leq \delta_2(t) \leq 0,1$ ;  $|\rho(t)| \leq \rho_*$ ,  $|v_1(t)| \leq v_{*1}$ ,  $|v_2(t)| \leq v_{*2}$ .

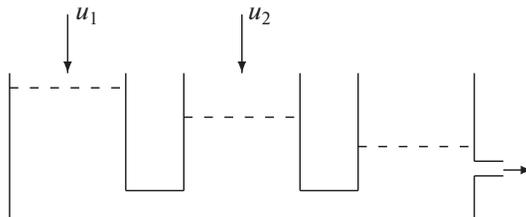


Рис. 1. Трехтанковая система.

Система описывается следующими матрицами:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая общую модель (1.1) и систему (5.1), можно заключить, что матричные функции, описывающие неопределенности, имеют вид

$$\Delta_1 F(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) & -\delta_1(t) & 0 \\ -\delta_1(t) & \delta_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2(t) & -\delta_2(t) \\ -\delta_2(t) & \delta_2(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим интервальный наблюдатель, оценивающий переменную  $z(t) = x_1(t)$ . В этом случае  $M = (1 \ 0 \ 0)$ ,  $L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Уравнение (4.2) принимает вид

$$(S_i - J_{*i}) \begin{pmatrix} -1 - \lambda_i & 1 & 0 \\ 1 & -2 - \lambda_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Примем  $\lambda = -1$ , тогда  $S_i = J_{*i} = (1 \ 0)$ , что дает  $\Phi = (1 \ 0 \ 0)$  и  $G_* = (1 \ 0)$ . Неопределенность  $\Delta F_*(t)$  и матрица  $J'$  определяются на основе (2.9), откуда получаем  $\Delta_1 F_*(t) = \delta_1(t)$ ,  $J'_1 = (-\delta_1(t) \ 0)$ ,  $\Delta_2 F_*(t) = 0$ ,  $J'_2 = 0$ . Поскольку из физических соображений ясно, что  $x_*(t) \geq 0$  и  $\delta_1(t) \geq 0$  при всех  $t \geq 0$ , можно использовать первый вариант построения наблюдателя. Учитывая, что  $0 \leq \delta_1(t) \leq 0,2$ , можно принять  $P = 0$ .

Так как переменная  $x_3(t)$  искажается возмущением  $\rho(t)$ , а  $y_2(t) = x_3(t) + v_2(t)$ , принимаем  $y_0(t) = y_1(t)$ . Нетрудно проверить, что условие (2.5) выполняется и  $H_z = 1$ ,  $Q = 0$ . Модель принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= (\delta_1(t) - 1)x_*(t) + (1 - \delta_1(t))H_1x(t) + u_1(t), \\ z(t) &= x_*(t), \end{aligned}$$

где  $x_* = \Phi x(t) = x_1(t)$ . Интервальный наблюдатель (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_*(t) &= (\underline{\delta}_1 - 1)\underline{x}_*(t) + (1 - \underline{\delta}_1)y_1(t) + u_1(t) - v_*, \\ \dot{\bar{x}}_*(t) &= (\bar{\delta}_1 - 1)\bar{x}_*(t) + (1 - \bar{\delta}_1)y_1(t) + u_1(t) + v_*, \\ \underline{z}(t) &= \underline{x}_*(t), \quad \bar{z}(t) = \bar{x}_*(t). \end{aligned}$$

Так как  $\underline{\delta}_1 - 1 < 0$  и  $\bar{\delta}_1 - 1 < 0$ , очевидно, что наблюдатель устойчив.

Моделирование производилось при  $u_1(t) = 2\sin(t)$ ,  $u_2(t) = 2\sin(5t)$ , шумы  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  и возмущение  $\rho(t)$  представлены независимыми случайными величинами с дисперсиями, равными 0,1, неопределенность  $\delta_1(t)$  задана функцией  $0,1(1 + \sin(10t))$  и  $\underline{\delta}_1 = 0$ ,  $\bar{\delta}_1 = 0,2$ . Результаты моделирования представлены

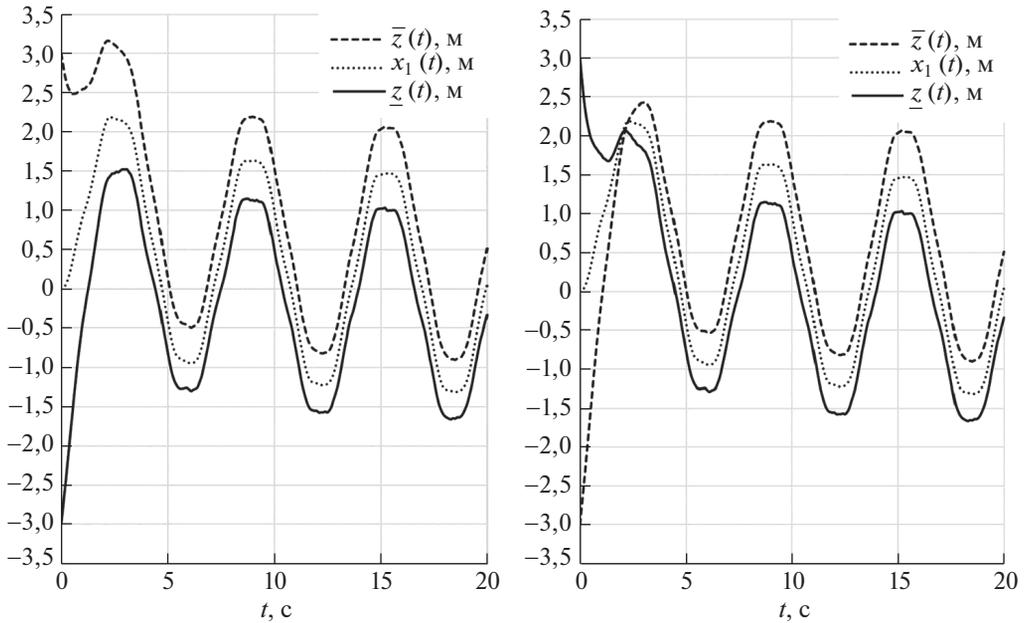


Рис. 2. Графики функций  $x_1(t)$ ,  $\underline{z}(t)$  и  $\bar{z}(t)$  при разных начальных условиях.

на рис. 2, где приведены графики функций  $x_1(t)$ ,  $\underline{z}(t)$  и  $\bar{z}(t)$  с начальными условиями  $x(0) = (0 \ 0 \ 0)^T$ ,  $\underline{x}_*(0) = -3$ ,  $\bar{x}_*(0) = 3$  на рис. 2,а и  $x(0) = (0 \ 0 \ 0)^T$ ,  $\underline{x}_*(0) = 3$ ,  $\bar{x}_*(0) = -3$  на рис. 2,б. Как и показано в разделе 3, “нетипичные” начальные условия достаточно быстро “забываются” и не влияют на процесс оценивания при  $t \geq 2$ .

## 6. Заключение

В работе была поставлена и решена задача построения интервальных наблюдателей для линейных динамических систем, описываемых моделями с непрерывным временем, при наличии внешних возмущений, шумов измерений и параметрических неопределенностей. На основе канонической формы Жордана приведены соотношения, позволяющие построить интервальный наблюдатель минимальной размерности, оценивающий множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния системы. Рассмотрены два варианта решения задачи и произведено их сравнение. Изложенное иллюстрируется практическим примером.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Efimov D., Raissi T., Perruquetti W., Zolghadri A.* Estimation and control of discrete-time LPV systems using interval observers // 52nd IEEE Conf. on Decision and Control. Florence, Italy. 2013. P. 5036–5041.
2. *Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A.* Interval observers for continuous-time LPV systems with L1/L2 performance // Automatica. 2015. V. 51. P. 82–89.

3. *Efimov D., Polyakov A., Richard J.* Interval observer design for estimation and control of time-delay descriptor systems // *Eur. J. Control.* 2015. V. 23. P. 26–35.
4. *Kolesov N., Gruzlikov A., Lukoyanov E.* Using fuzzy interacting observers for fault diagnosis in systems with parametric uncertainty // *Proc. XII-th Inter. Symp. Intelligent Systems, INTELS'16, 5–7 October 2016, Moscow, Russia.* P. 499–504.
5. *Кремлев А.С., Чеботарев С.Г.* Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // *Изв. вузов. Приборостроение.* 2013. Т. 56. №. 4. С. 42–46.
6. *Mazenc F., Bernard O.* Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles // *IEEE Trans. Automatic Control.* 2010. V. 55. № 2. P. 523–527.
7. *Blesa J., Puig V., Bolea Y.* Fault detection using interval LPV models in an open-flow canal // *Control Engineering Practice.* 2010. V. 18. P. 460–470.
8. *Zheng G., Efimov D., Perruquetti W.* Interval state estimation for uncertain nonlinear systems // *IFAC Ncolcos 2013.* Toulouse, France, 2013.
9. *Zhang K., Jiang B., Yan X., Edwards C.* Interval sliding mode based fault accommodation for non-minimal phase LPV systems with online control application // *Int. J. Control.* 2019. <https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1687932>
10. *Ефимов Д.В., Раусси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // *АиТ.* 2016. № 2. С. 5–49.  
*Efomov D., Raissi T.* Design of Interval State Observers for Uncertain Dynamical Systems // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 2. P. 191–225.
11. *Khan A., Xie W., Zhang L., Liu L.* Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // *IET Circuits Devices Syst.* 2020. V. 14. P. 721–740.
12. *Жиравок А.Н.* Самокоррекция ошибок в дискретных динамических системах // *АиТ.* 2006. № 6. С. 41–53.  
*Zhirabok A.* Error Selfcorrection in Discrete Dynamic Systems // *Autom. Remote Control.* 2006. No. 6. P. 936–948.
13. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Ким Чхун Ир* Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2022. № 4. С. 22–32.
14. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., Шумский А.Е., Ким Чхун Ир* Каноническая форма Жордана в задачах диагностирования и оценивания // *АиТ.* 2022. № 9. С. 49–67.  
*Zhirabok A., Zuev A., Filaretov V., Shumsky A., Kim Chung Il* Jordan Canonical Form in the Diagnosis and Estimation Problems // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 9. P. 1355–1370.
15. *Жиравок А.Н., Шумский А.Е., Павлов С.В.* Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом // *АиТ.* 2017. № 7. С. 3–21.  
*Zhirabok A., Shumsky A., Pavlov S.* Diagnosis of Linear Dynamic Systems by the Nonparametric Method // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 7. P. 1173–1188.
16. *Low X., Willsky A., Verghese G.* Optimally robust redundancy relations for failure detection in uncertain systems // *Automatica.* 1996. V. 22. P. 333–344.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.*

Поступила в редакцию 22.01.2023

После доработки 08.08.2023

Принята к публикации 04.09.2023