



Российская Академия Наук

А АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год



ноябрь

Москва

2023

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

© 2023 г. А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru),
А.В. ЗУЕВ, канд. техн. наук (alvzuev@yandex.ru)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток),
В.Ф. ФИЛАРЕТОВ, д-р техн. наук (filaretov@inbox.ru)
(Институт автоматике и процессов управления ДВО РАН, Владивосток),
А.Е. ШУМСКИЙ, д-р техн. наук (a.e.shumsky@yandex.con),
КИМ ЧХУН ИР (kim.ci@dvvf.ru)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток)

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ¹

Решается задача построения интервальных наблюдателей для линейных динамических систем, описываемых моделями с непрерывным временем, при наличии внешних возмущений, шумов измерений и параметрических неопределенностей. На основе канонической формы Жордана приводятся соотношения, позволяющие построить интервальный наблюдатель, оценивающий множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния системы. Изложенное иллюстрируется практическим примером.

Ключевые слова: линейные системы, интервальные наблюдатели, каноническая форма Жордана, оценивание.

DOI: 10.31857/S0005231023110016, EDN: OOMDNF

1. Введение и постановка задачи

Проблеме построения интервальных наблюдателей последние годы уделяется большое внимание, решения для различных классов систем – с дискретным и непрерывным временем, с запаздыванием, сингулярных – можно найти в [1–11], где также обсуждаются практические приложения таких наблюдателей в различных областях; обстоятельные обзоры полученных за это время результатов содержатся в [10, 11]. В этих работах, как правило, интервальные наблюдатели дают оценку множества допустимых значений полного вектора состояния, в то же время на практике интерес может представлять интервальная оценка допустимых значений только для определенной линейной функции этого вектора. Соответствующий интервальный наблюдатель может оказаться существенно проще наблюдателя для полного вектора состояния, а ширина интервала заметно меньше за счет появления возможности минимизации влияния внешних возмущений.

¹ Работа поддержана Российским научным фондом (проект 23-29-00191), <https://rscf.ru/project/23-29-00191/>.

Последние годы для решения задач построения интервальных наблюдателей стала активно применяться каноническая форма (КФ) Жордана [4, 10], которая ранее использовалась при анализе свойства самокоррекции сбоев [12]. Матрица, описывающая динамику системы и реализованная в жордановой КФ, при соответствующем выборе собственных чисел обеспечивает устойчивость наблюдателя и является метцлеровой, т.е. ее внедиагональные элементы неотрицательны. Эти свойства позволяют гарантировать, что интервальный наблюдатель в каждый момент времени вырабатывает оценку множества допустимых значений вектора состояния системы с неопределенностями. Анализ жордановой КФ показывает, что, помимо гарантии устойчивости, она позволяет упростить процедуру обеспечения нечувствительности наблюдателя к возмущениям и в ряде случаев уменьшить его размерность за счет отсутствия необходимости обеспечивать устойчивость специальными средствами.

Настоящая статья является логическим продолжением работ [13, 14], в которых рассматривалась задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых линейными моделями с непрерывным временем при наличии внешних возмущений и шумов измерений. В [14] было показано, что использование канонической формы Жордана при построении интервальных наблюдателей позволяет уменьшить размерность наблюдателей и в ряде случаев сократить величину интервала. В настоящей работе ставится и решается задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых моделями с непрерывным временем, работающих в условиях действия внешних возмущений, шумов измерений и параметрических неопределенностей, которые позволяют оценить множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния.

Рассматривается класс систем, описываемых линейной моделью

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (F + \Delta F(\mu(t)))x(t) + Gu(t) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t) + v(t), \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$ – векторы состояния, управления и выхода; F и G – постоянные матрицы, описывающие линейную динамику; H и L – известные постоянные матрицы, $\rho(t) \in \mathbb{R}^p$ – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая возмущения, действующие на систему, $\|\rho(t)\| \leq \rho_*$; $v(t) \in \mathbb{R}^l$ – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая шум измерения, $\|v(t)\| \leq v_*$; $\mu(t) \in \Pi \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченный вектор переменных параметров. По аналогии с [10] предполагается, что значения вектора $\mu(t)$ недоступны для измерений, множество допустимых значений Π известно, матричная функция $\Delta F(\mu)$ ограничена для всех $\mu(t) \in \Pi$ и известных $\underline{\Delta F}$ и $\overline{\Delta F}$: $\underline{\Delta F} \leq \Delta F \leq \overline{\Delta F}$. Как и в [2], для произвольных векторов w_1, w_2 и матриц A_1, A_2 отношения $w_1 \leq w_2$ и $A_1 \leq A_2$ понимаются поэлементно.

Требуется построить интервальный наблюдатель, имеющий минимальную размерность и формирующий нижнюю $\underline{z}(t)$ и верхнюю $\overline{z}(t)$ границы переменной $z(t) = Mx(t)$ с известной матрицей M такие, что $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t)$ при

всех $t \geq 0$. Поскольку задачи учета шума измерений и возмущений для непрерывных систем были детально рассмотрены в [13], в данной работе акцент сделан на параметрические неопределенности, поэтому вначале предполагается, что $v(t) = 0$ и $\rho(t) = 0$.

2. Построение модели

В основе решения задачи лежит модель системы (1.1) минимальной размерности, оценивающая переменную $z(t)$ и некоторую переменную $y_*(t)$, которая определяется в процессе решения задачи:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= (F_* + \Delta F_*(t) - PH_*)x_*(t) + (J_* + J')y(t) + Py_*(t) + G_*u(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t), \\ z(t) &= H_zx_*(t) + Qy(t), \end{aligned}$$

где $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$, $k < n$ – размерность модели, F_* , G_* , J_* , H_* , H_z и Q – матрицы, подлежащие определению, матрицы ΔF_* и J' определяются ниже, выбор матрицы P объясняется в разделе 3. В [4] для интервальной оценки вектора $x(t)$ было предложено предварительно построенный устойчивый наблюдатель преобразовать к жордановой КФ. В отличие от этого в настоящей работе матрица F_* сразу ищется в указанной форме; полагая, что собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ этой матрицы задаются разными и отрицательными, получаем матрицу F_* диагонального вида:

$$(2.2) \quad F_* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Покажем корректность этого предположения. Известно [13], что матрица F_* всегда может быть реализована в идентификационной канонической форме

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Введением обратной связи по сигналу невязки с матрицей K она приводится к виду $F_* - KH_*$; выбором собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, которые предполагаются разными и отрицательными, и определением соответствующих элементов матрицы K матрицу $F_* - KH_*$ можно сделать устойчивой. Поскольку собственные числа различны, соответствующие им собственные векторы v_1, v_2, \dots, v_k образуют линейно независимую систему, поэтому составленная

из них матрица $T^{-1} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k)$ будет невырожденной. Матрица T имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_k \end{pmatrix},$$

где векторы w_1, w_2, \dots, w_k удовлетворяют условию $w_i v_i = 1, i = 1, \dots, k, w_i v_j = 0, i \neq j$. Преобразуем уравнение $(F_* - KH_*)v_1 = \lambda_1 v_1$, следующее из определения собственных чисел и векторов, к виду $T(F_* - KH_*)T^{-1}Tv_1 = \lambda_1 Tv_1$ умножением слева на матрицу T . С учетом вида матрицы T получаем $Tv_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$, откуда

$$T(F_* - KH_*)T^{-1}(1 \ 0 \ \dots \ 0)^T = (\lambda_1 \ 0 \ \dots \ 0)^T.$$

Из полученного выражения следует, что первый столбец матрицы $T(F_* - KH_*)T^{-1}$ имеет вид $(\lambda_1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$. Рассматривая аналогичным образом уравнение $(F_* - KH_*)v_i = \lambda_i v_i, i = 2, 3, \dots, k$, приходим к матрице (2.2).

Предполагается, что при отсутствии шумов, возмущений и неопределенностей справедливы равенства $x_*(t) = \Phi x(t)$ и $y_*(t) = R_* x(t)$, где матрица Φ , кроме известных условий [15]

$$(2.3) \quad \Phi F = F_* \Phi + J_* H, \quad H_* \Phi = R_* H, \quad \Phi G = G_*,$$

должна удовлетворять дополнительному условию, связанному с наличием переменной $z(t)$, получим его. Из $z(t) = Mx(t)$ и (2.1) следует уравнение

$$(2.4) \quad M = H_z \Phi + QH = (H_z \ Q) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix},$$

которое имеет решение, если

$$(2.5) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ M \end{pmatrix}.$$

Отметим также, что условие $H_* \Phi = R_* H$ может быть записано в виде уравнения

$$(2.6) \quad (H_* \ - R_*) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = 0,$$

которое имеет решение, если

$$(2.7) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} < \text{rank}(\Phi) + \text{rank}(H).$$

Для матрицы (2.2) первое уравнение в (2.3) распадается на k независимых уравнений:

$$\Phi_i F = \lambda_i \Phi_i + J_{*i} H, \quad i = 1, \dots, k,$$

которые можно записать в виде

$$(2.8) \quad (\Phi_i \quad - J_{*i}) \begin{pmatrix} F - \lambda_i I_n \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

где Φ_i и J_{*i} — i -е строки матриц Φ и J_* соответственно, I_n — единичная $n \times n$ -матрица.

При решении уравнения (2.8) значения $\lambda_i < 0$ должны задаваться так, чтобы полученная в результате матрица Φ с минимальным числом строк удовлетворяла условиям (2.5) и (2.7), после чего из (2.4) определяются матрицы H_z и Q , из (2.6) — матрицы H_* и R_* , из (2.3) — G_* . Неопределенность $\Delta F_*(t)$, входящая в (2.1), определяется на основе $\Delta F(\mu(t))$ следующим образом. Из (1.1) и (2.1) по аналогии с (2.3) следует

$$\Phi(F + \Delta F(\mu(t))) = (F_* + \Delta F_*(t))\Phi + J_*H + J'H.$$

Поскольку матрица F_* удовлетворяет условию $\Phi F = F_*\Phi + J_*H$, то

$$\Phi \Delta F(\mu(t)) = \Delta F_*(t)\Phi + J'H,$$

или

$$(2.9) \quad \Phi \Delta F(\mu) = (\Delta F_* \quad J') \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}.$$

Это уравнение имеет решение, если

$$(2.10) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ \Phi \Delta F(\mu) \end{pmatrix}.$$

После определения матрицы Φ проверяется это условие и при его выполнении из уравнения (2.9) определяются $\Delta F_*(t)$ и J' . Матрицы $\underline{\Delta F}_*$ и $\overline{\Delta F}_*$ также определяются из (2.9). При невыполнении условия (2.10) ищется другое решение уравнения (2.8). Для простоты рассмотрим случай, когда J' не зависит от $\Delta F(\mu)$.

3. Построение интервального наблюдателя

3.1. Первый вариант

По аналогии с [2, 10] рассмотрим два варианта построения интервальных наблюдателей — простой, но с ограничениями на исходную систему, и более сложный без ограничений. Начнем с первого, когда дополнительно предполагается, что $\underline{\Delta F}_* \geq 0$ и $x_*(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. В этом случае наблюдатель строится на основе модели (2.1) и ищется в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}}_*(t) &= (F_* + \underline{\Delta F}_* - \underline{P}H_*)\underline{x}_*(t) + \underline{P}y_*(t) + (J_* + J')y(t) + G_*u(t), \\ \dot{\overline{x}}_*(t) &= (F_* + \overline{\Delta F}_* - \overline{P}H_*)\overline{x}_*(t) + \overline{P}y_*(t) + (J_* + J')y(t) + G_*u(t), \\ \underline{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Qy(t), \\ \overline{z}(t) &= H_z \overline{x}_*(t) + Qy(t), \\ \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_{*0}, \quad \overline{x}_*(0) = \overline{x}_{*0}. \end{aligned}$$

Введем ошибки оценивания:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \underline{e}_*(t) &= x_*(t) - \underline{x}_*(t), & \bar{e}_*(t) &= \bar{x}_*(t) - x_*(t), \\ \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t), & \bar{e}_z(t) &= \bar{z}(t) - z(t). \end{aligned}$$

С учетом (2.1) и (3.1) для этих ошибок получаем дифференциальные уравнения:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{e}}_*(t) &= (F_* - \underline{P}H_*)\underline{e}_*(t) + \underline{\Delta F}_*x_*(t) - \underline{\Delta F}_*x_*(t), \\ \dot{\bar{e}}_*(t) &= (F_* - \bar{P}H^*)\bar{e}_*(t) + \bar{\Delta F}_*\bar{x}_*(t) - \Delta F_*x_*(t). \end{aligned}$$

Из (3.1) и (3.3) вытекают требования к матрицам \underline{P} и \bar{P} : они выбираются так, чтобы матрицы $F_* + \underline{\Delta F}_* - \underline{P}H_*$ и $F_* + \bar{\Delta F}_* - \bar{P}H_*$ были устойчивыми, а $F_* - \underline{P}H_*$ и $F_* - \bar{P}H_*$ — метцлеровыми. Рекомендации по определению этих матриц можно найти в [2]. Матрица P в (2.1) выбирается равной \underline{P} для первого уравнения в (3.1) и \bar{P} для второго.

Теорема 1. Пусть $0 \leq \underline{\Delta F}_* \leq \Delta F_* \leq \bar{\Delta F}_*$, $H_z \geq 0$, $x_*(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$, $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ и существуют матрицы \underline{P} и \bar{P} с указанными выше свойствами, тогда для интервального наблюдателя (3.3) выполняется соотношение $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$.

Доказательство. Если $x_*(t) \geq \underline{x}_*(t)$, то, поскольку $\underline{\Delta F}_* \geq 0$, получаем $\underline{\Delta F}_*(x_*(t) - \underline{x}_*(t)) \geq 0$ и $\underline{\Delta F}_*x_*(t) \geq \underline{\Delta F}_*\underline{x}_*(t)$. Так как $\Delta F_* \geq \underline{\Delta F}_*$ и $x_*(t) \geq 0$, то $(\Delta F_* - \underline{\Delta F}_*)x_*(t) \geq 0$ и $\Delta F_*x_*(t) \geq \underline{\Delta F}_*x_*(t)$, откуда с учетом предыдущего имеем $\Delta F_*x_*(t) \geq \underline{\Delta F}_*\underline{x}_*(t)$, т.е. $\Delta F_*x_*(t) - \underline{\Delta F}_*\underline{x}_*(t) \geq 0$ в (3.3). Поскольку при $t = 0$ по предположению $x_*(0) \geq \underline{x}_*(0)$, т.е. $\underline{e}_*(0) \geq 0$, а матрица $F_* - \underline{P}H_*$ в (3.3) метцлерова, то согласно [2] по индукции получаем $\underline{e}_*(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. Так как $z(t) = H_zx_*(t) + Qy(t)$, из (3.2) следует

$$\underline{e}_z(t) = H_zx_*(t) + Qy(t) - (H_z\underline{x}_*(t) + Qy(t)) = H_z\underline{e}_*(t),$$

откуда с учетом $\underline{e}_*(t) \geq 0$ и допущения $H_z \geq 0$ получаем $\underline{e}_z(t) \geq 0$. Аналогично показывается, что $\bar{e}_z(t) \geq 0$. Нетрудно видеть, что последние неравенства эквивалентны доказываемому утверждению. Устойчивость матриц $F_* + \underline{\Delta F}_* - \underline{P}H_*$ и $F_* + \bar{\Delta F}_* - \bar{P}H_*$ позволяет утверждать, что границы $\underline{x}_*(t)$, $\bar{x}_*(t)$ и, соответственно, $\underline{z}(t)$, $\bar{z}(t)$ конечны. Теорема доказана.

Замечание 1. В случае $H_z \leq 0$ границы $\underline{z}(t)$ и $\bar{z}(t)$ определяются соотношениями

$$\underline{z}(t) = H_z\bar{x}_*(t) + Qy(t), \quad \bar{z}(t) = H_z\underline{x}_*(t) + Qy(t).$$

Действительно, тогда

$$\underline{e}_z(t) = z(t) - \underline{z}(t) = H_zx_*(t) + Qy(t) - (H_z\bar{x}_*(t) + Qy(t)) = -H_z\bar{e}_*(t),$$

откуда с учетом $\bar{e}_*(t) \geq 0$ и $H_z \leq 0$ получаем $\underline{e}_z(t) \geq 0$. Для границы $\bar{z}(t)$ соответствующее неравенство доказывается аналогично.

Если матрица H_z является знакопеременной, конечный результат остается прежним, но формулы для расчета верхних и нижних границ усложняются.

Таким образом, для построения интервального наблюдателя, оценивающего переменную $z(t) = Mx(t)$, необходимо найти такие решения уравнения (2.8), которые при минимальном k дают матрицу Φ , удовлетворяющую условиям (2.5) и (2.7), вычислить матрицы J_* , G_* , R_* , H_* и подобрать матрицы \underline{P} и \overline{P} , удовлетворяющие указанным выше свойствам. Последнее не всегда возможно, в этом случае необходимо использовать второй вариант построения наблюдателя.

3.2. Второй вариант

Рассмотрим более сложный интервальный наблюдатель без ограничений на исходную систему. Изложение предварим леммой.

Лемма 1. Пусть $\underline{A} \leq A \leq \overline{A}$ для некоторых $k \times k$ -матриц \underline{A} , A , \overline{A} и $\underline{x}_* \leq x_* \leq \overline{x}_*$ для k -мерных векторов \underline{x}_* , x_* , \overline{x}_* . Тогда

$$\underline{A}^+ \underline{x}_*^+ - \overline{A}^+ \underline{x}_*^- - \underline{A}^- \overline{x}_*^+ + \overline{A}^- \overline{x}_*^- \leq Ax \leq \overline{A}^+ \overline{x}_*^+ - \underline{A}^+ \overline{x}_*^- - \overline{A}^- \underline{x}_*^+ + \underline{A}^- \underline{x}_*^- ,$$

где $A^+ = \max(0, A)$, $A^- = A^+ - A$ и аналогично для вектора x_* .

Доказательство приведено в [1].

Интервальный наблюдатель строится на основе модели (2.1), в которой принимается $P = 0$; он описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_*(t) &= F_* \underline{x}_*(t) + (\underline{\Delta F}_*^+ \underline{x}_*^+ - \overline{\Delta F}_*^+ \underline{x}_*^- - \underline{\Delta F}_*^- \overline{x}_*^+ + \overline{\Delta F}_*^- \overline{x}_*^-) + \\ &\quad + (J_* + J')y(t) + G_* u(t), \\ \dot{\overline{x}}_*(t) &= F_* \overline{x}_*(t) + (\overline{\Delta F}_*^+ \overline{x}_*^+ - \underline{\Delta F}_*^+ \overline{x}_*^- - \overline{\Delta F}_*^- \underline{x}_*^+ + \underline{\Delta F}_*^- \underline{x}_*^-) + \\ (3.4) \quad &\quad + (J_* + J')y(t) + G_* u(t), \\ \underline{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Qy(t), \\ \overline{z}(t) &= H_z \overline{x}_*(t) + Qy(t), \\ \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_{*0}, \quad \overline{x}_*(0) = \overline{x}_{*0}. \end{aligned}$$

Уравнения для ошибок оценивания здесь принимают вид

$$\begin{aligned} (3.5) \quad \dot{\underline{e}}_*(t) &= F_* \underline{e}_*(t) + \Delta F_* x_*(t) - (\underline{\Delta F}_*^+ \underline{x}_*^+ - \overline{\Delta F}_*^+ \underline{x}_*^- - \underline{\Delta F}_*^- \overline{x}_*^+ + \overline{\Delta F}_*^- \overline{x}_*^-), \\ \dot{\overline{e}}_*(t) &= F_* \overline{e}_*(t) + (\overline{\Delta F}_*^+ \overline{x}_*^+ - \underline{\Delta F}_*^+ \overline{x}_*^- - \overline{\Delta F}_*^- \underline{x}_*^+ + \underline{\Delta F}_*^- \underline{x}_*^-) - \Delta F_* x_*(t). \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $\underline{\Delta F}_* \leq \Delta F_* \leq \overline{\Delta F}_*$ и $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \overline{x}_*(0)$, тогда для интервального наблюдателя (3.4) выполняется соотношение $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t)$.

Доказательство. Из $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \overline{x}_*(0)$ согласно (3.2) следует $\underline{e}_*(0) \geq 0$ и $\overline{e}_*(0) \geq 0$. Поскольку матрица F_* метцлерова, из (3.5) и леммы следует $\underline{e}_*(t) \geq 0$ и $\overline{e}_*(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$ [2]. Соотношение $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t)$ доказывается по аналогии со второй частью теоремы 1 и замечанием 1. Теорема доказана.

Замечание 2. Сравнение двух вариантов показывает, что первый из них накладывает заметно больше ограничений на систему, чем второй, но имеет более простую структуру. В частности, во втором варианте нет необходимости определять матрицы H_* и R_* , что дает возможность игнорировать условие (2.7) при реализации этого варианта, что также расширяет класс систем, для которых интервальный наблюдатель может быть построен. Из сказанного следует, что при решении конкретной задачи вначале следует сделать попытку реализовать первый вариант и только в случае невозможности этого — второй.

Замечание 3. Существенную роль в теоремах 1 и 2 играет условие $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$. Устойчивость матриц $F_* + \underline{\Delta F}_* - \underline{P}H_*$, $F_* + \overline{\Delta F}_* - \overline{P}H_*$ и F_* позволяет утверждать, что доказываемое неравенство $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$ будет выполняться для некоторого $t > 0$ даже при невыполнении условия $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$, поскольку влияние начальных условий через определенное время практически “забывается”. Действительно, рассмотрим это на примере второго варианта и первого уравнения в (3.5); обозначим

$$v_0(t) = \Delta F_* x_*(t) - (\underline{\Delta F}_*^+ x_*^+ - \overline{\Delta F}_*^+ x_*^- - \underline{\Delta F}_*^- x_*^+ + \overline{\Delta F}_*^- x_*^-).$$

Из леммы следует, что $v_0(t) \geq 0$. Нетрудно видеть, что матрицы, входящие в приведенное выше соотношение, в частности $\overline{\Delta F}_*^+$, всегда можно выбрать так, что $v_0(t) \geq v_{0*}$ для некоторого $v_{0*} > 0$.

Поскольку матрица F_* диагональна, рассмотрим уравнение (3.5) для первой компоненты ошибки $\underline{e}_*(t)$:

$$\dot{\underline{e}}_{*1}(t) = \lambda_1 \underline{e}_{*1}(t) + v_{01}(t),$$

которое имеет решение

$$\underline{e}_{*1}(t) = \exp(\lambda_1 t) \underline{e}_{*1}(0) + \exp(\lambda_1 t) \int_0^t v_{01}(\tau) \exp(-\lambda_1 \tau) d\tau.$$

Так как $\lambda_1 < 0$, а $v_0(t) \geq v_{0*} > 0$, первое слагаемое через некоторое время T_1 станет практически равным нулю, а ошибка $\underline{e}_{*1}(t)$ положительной, несмотря на возможное отрицательное значение $\underline{e}_{*1}(0)$. Для остальных компонент вектора $\underline{e}_*(t)$ и компонент вектора $\bar{e}_*(t)$ можно получить аналогичные результаты.

Замечание 4. Понятия доверительного интервала и доверительной вероятности из математической статистики можно определенным образом перенести на интервальные наблюдатели: если $\Delta F_* \in (\underline{\Delta F}_*, \overline{\Delta F}_*)$ с некоторой степенью принадлежности μ_* , то $z(t) \in (\underline{z}(t), \bar{z}(t))$ также со степенью μ_* .

4. Учет возмущений и шумов измерений

Случай, когда $v(t) \neq 0$ и $\rho(t) \neq 0$, подробно рассмотрен в [13], отметим только, что наблюдатель также строится на основе модели (2.1), в которой

слагаемое $J_*y(t)$ заменяется на $J_*Hx(t)$, что объясняется необходимостью учесть шумы измерения согласно соотношению $y(t) = Hx(t) + v(t)$. Приведем описание интервального наблюдателя в этом случае для первого варианта:

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{x}}_*(t) &= (F_* + \underline{\Delta}F_* - \underline{P}H_*)\underline{x}_*(t) + \underline{P}y_*(t) + (J_* + J')y(t) + G_*u(t) - \\
&\quad - (|J_*| + |J'|)E_k v_* - |L_*|E_k \rho_*, \\
\dot{\bar{x}}_*(t) &= (F_* + \overline{\Delta}F_* - \overline{P}H_*)\bar{x}_*(t) + \overline{P}y_*(t) + (J_* + J')y(t) + G_*u(t) + \\
(4.1) \quad &\quad + (|J_*| + |J'|)E_k v_* + |L_*|E_k \rho_*, \\
\underline{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Qy_0(t), \\
\bar{z}(t) &= H_z \bar{x}_*(t) + Qy_0(t), \\
\underline{x}_*(0) &= \underline{x}_{*0}, \quad \bar{x}_*(0) = \bar{x}_{*0}.
\end{aligned}$$

Здесь матрица $|A|$ состоит из абсолютных значений соответствующих элементов матрицы A , E_k — $k \times 1$ -матрица, составленная из единиц. Переменная $y_0(t)$ представляет те компоненты вектора выхода $y(t)$, которые не искажаются возмущением, т.е. $y_0(t) = N_1 y(t)$ для некоторой матрицы N_1 . Введем матрицу L_0 максимального ранга такую, что $L_0 L = 0$. Поскольку вектор $x'(t) = L_0 x(t)$ не искажается возмущением, то $y_0(t) = N_2 x'(t)$ для некоторой матрицы N_2 . Тогда для матриц N_1 и N_2 получаем уравнение $N_1 H = N_2 L_0$, которое имеет решение, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} < \text{rank}(H) + \text{rank}(L_0).$$

Если это условие выполняется, матрицы N_1 и N_2 определяются из уравнения

$$(N_1 \quad -N_2) \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Невыполнение этого условия означает необходимость замены переменной $y_0(t)$ в (4.1) на $y(t)$, что приведет к расширению интервала $(\underline{z}(t), \bar{z}(t))$.

Уравнения для ошибок оценивания принимают вид

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{e}}_*(t) &= (F_* - \underline{P}H_*)\underline{e}_*(t) + \underline{\Delta}F_* x_*(t) - \underline{\Delta}F_* \underline{x}_*(t) - \\
&\quad - (J_* + J')v(t) + (|J_*| + |J'|)E_k v_* - L_* \rho(t) + |L_*|E_k \rho_*, \\
\dot{\bar{e}}_*(t) &= (F_* - \overline{P}H_*)\bar{e}_*(t) + \overline{\Delta}F_* \bar{x}_*(t) - \overline{\Delta}F_* \bar{x}_*(t) + \\
&\quad + (J_* + J')v(t) + (|J_*| + |J'|)E_k v_* + L_* \rho(t) + |L_*|E_k \rho_*.
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что искомый результат следует из доказательства теоремы 1 и очевидных дополнительных неравенств

$$\pm(J_* + J')v(t) + (|J_*| + |J'|)E_k v_* \geq 0, \quad \pm L_* \rho(t) + |L_*|E_k \rho_* \geq 0,$$

верных при всех $t \geq 0$.

Замечание 5. Как следует из (4.1), величина интервала $(\underline{z}(t), \bar{z}(t))$ зависит от величины возмущения и уровня шумов. С целью уменьшения этой величины матрицы Φ и J_* следует определять из уравнения

$$(4.2) \quad (S_i - J_{*i}) \begin{pmatrix} L_0(F - \lambda_i I_n) \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

которое получается из (2.8) при $\Phi = SL_0$ для некоторой матрицы S , что гарантирует $L_* = 0$, т.е. нечувствительность модели к возмущению; здесь S_i — i -я строка матрицы S . Если (4.2) не имеет решения, следует обратиться к робастным методам, излагаемым ниже.

Чувствительность модели (2.1) к возмущению $\rho(t)$ обычно оценивается нормой $\|\Phi L\|_F$ матрицы ΦL . С целью минимизации этой нормы для $i = 1, \dots, k$ выбирается $\lambda_i < 0$, для которого уравнение (2.8) разрешимо и находятся все решения в виде $\Phi_i^{(1)}, \dots, \Phi_i^{(n_i)}$. Представим эти решения в форме

$$\Phi_{*i} = \begin{pmatrix} \Phi_i^{(1)} \\ \dots \\ \Phi_i^{(n_i)} \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} J_{*i}^{(1)} \\ \dots \\ J_{*i}^{(n_i)} \end{pmatrix}.$$

Найдем сингулярное разложение произведения $\Phi_{*i}L$, т.е. представим его в виде

$$\Phi_{*i}L = U_L \Sigma_L V_L,$$

где U_L и V_L — ортогональные матрицы,

$$\Sigma_L = (\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{c_i}) \ 0) \quad \text{или} \quad \Sigma_L = \begin{pmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{c_i}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

в зависимости от соотношения числа строк и столбцов в матрице $\Phi_{*i}L$, $c_i = \min(n_i, kp)$, $0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_{c_i}$ — сингулярные числа матрицы $\Phi_{*i}L$, упорядоченные по возрастанию [16]. Первый транспонированный столбец матрицы U_L выбирается в качестве вектора весовых коэффициентов $w = (w_1 \ \dots \ w_{n_i})$ и вычисляются строки $\Phi_i = w\Phi_{*i}$ и $J_{*i} = wJ_i$; если $n_i = 1$, принимаем $\Phi_i := \Phi_i^{(1)}$ и $J_{*i} := J_i^{(1)}$. Полученные строки Φ_1, \dots, Φ_k и J_{*1}, \dots, J_{*k} компонуются в матрицы

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \dots \\ \Phi_k \end{pmatrix}, \quad J_* = \begin{pmatrix} J_{*1} \\ \dots \\ J_{*k} \end{pmatrix}$$

и проверяется возможность оценки переменных $z(t)$ и $y_*(t)$ с помощью критериев (2.5) и (2.7). При их выполнении задача решена, в противном случае для некоторого $\lambda_i < 0$ нужно найти другой вектор $w = (w_1 \ \dots \ w_{n_i})$ для сингулярного числа $\sigma > \sigma_1$ и вычислить новую матрицу Φ_i .

Теорема 3. Указанный способ построения матрицы Φ обеспечивает оптимальное решение в смысле минимума нормы $\|\Phi L\|_F$.

Доказательство. Прямо следует из свойств сингулярного разложения.

Определением матриц H_z , Q , ΔF_* , J' , H_* , R_* , $G_* = \Phi G$ и $L_* = \Phi L$ завершается синтез модели (2.1), минимально чувствительной к возмущениям.

По аналогии с [13, 14] результаты, полученные в работе для оценки переменной $z(t)$, можно применить для оценки полного вектора состояния $x(t)$. Для этого определяются решения уравнения (4.2) с $\lambda_i < 0$ и максимально возможным k , составляется матрица $\Phi^{(1)} := M^{(1)}$ и при выполнении критериев (2.5) и (2.7) по одному из вариантов определяется интервальная оценка вектора $x^{(1)}(t) = M^{(1)}x(t)$; отметим, что она не будет зависеть от возмущения $\rho(t)$. Далее определяются вектор $x^{(2)}(t)$, дополняющий $x^{(1)}(t)$ до $x(t)$, и матрица $M^{(2)}$ такая, что $x^{(2)}(t) = M^{(2)}x(t)$. Интервальный наблюдатель, оценивающий переменную $x^{(2)}(t)$, строится на основе уравнения (2.8). Композиция двух построенных наблюдателей будет давать интервал $(\underline{x}(t), \bar{x}(t))$ более узкий, нежели построенный классическими методами [10].

5. Практический пример

Рассмотрим трехтанковую систему

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= b_4 u_1(t) / \vartheta_1 - (b_1 - \delta_1(t))(x_1(t) - x_2(t)), \\
 \dot{x}_2(t) &= b_5 u_2(t) / \vartheta_2 + (b_1 - \delta_1(t))(x_1(t) - x_2(t)) - \\
 &\quad - (b_2 - \delta_2(t))(x_2(t) - x_3(t)), \\
 \dot{x}_3(t) &= (b_2 - \delta_2(t))(x_2(t) - x_3(t)) - b_3(x_3(t) - b_6) + \rho(t), \\
 y_1(t) &= x_2(t) + v_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) + v_2(t),
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

где значения коэффициентов b_1, \dots, b_5 определяются геометрическими размерами системы, x_1, x_2, x_3 – уровни жидкости в танках (рис. 1). Жидкость втекает в первый и второй танки и вытекает из третьего по трубе, расположенной на высоте b_6 . Параметрические неопределенности $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ связаны с возможными засорениями труб, соединяющих танки, и, как следствие, уменьшением их пропускной способности. Возмущение $\rho(t)$ отражает возможные утечки в третьем танке. Для простоты примем $b_1 = \dots = b_5 = 1$, $b_6 = 0$; $0 \leq \delta_1(t) \leq 0,2$, $0 \leq \delta_2(t) \leq 0,1$; $|\rho(t)| \leq \rho_*$, $|v_1(t)| \leq v_{*1}$, $|v_2(t)| \leq v_{*2}$.

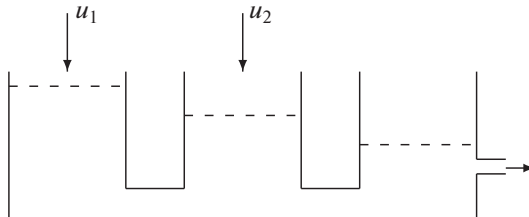


Рис. 1. Трехтанковая система.

Система описывается следующими матрицами:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая общую модель (1.1) и систему (5.1), можно заключить, что матричные функции, описывающие неопределенности, имеют вид

$$\Delta_1 F(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) & -\delta_1(t) & 0 \\ -\delta_1(t) & \delta_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2(t) & -\delta_2(t) \\ -\delta_2(t) & \delta_2(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим интервальный наблюдатель, оценивающий переменную $z(t) = x_1(t)$. В этом случае $M = (1 \ 0 \ 0)$, $L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Уравнение (4.2) принимает вид

$$(S_i - J_{*i}) \begin{pmatrix} -1 - \lambda_i & 1 & 0 \\ 1 & -2 - \lambda_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Примем $\lambda = -1$, тогда $S_i = J_{*i} = (1 \ 0)$, что дает $\Phi = (1 \ 0 \ 0)$ и $G_* = (1 \ 0)$. Неопределенность $\Delta F_*(t)$ и матрица J' определяются на основе (2.9), откуда получаем $\Delta_1 F_*(t) = \delta_1(t)$, $J'_1 = (-\delta_1(t) \ 0)$, $\Delta_2 F_*(t) = 0$, $J'_2 = 0$. Поскольку из физических соображений ясно, что $x_*(t) \geq 0$ и $\delta_1(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$, можно использовать первый вариант построения наблюдателя. Учитывая, что $0 \leq \delta_1(t) \leq 0,2$, можно принять $P = 0$.

Так как переменная $x_3(t)$ искажается возмущением $\rho(t)$, а $y_2(t) = x_3(t) + v_2(t)$, принимаем $y_0(t) = y_1(t)$. Нетрудно проверить, что условие (2.5) выполняется и $H_z = 1$, $Q = 0$. Модель принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= (\delta_1(t) - 1)x_*(t) + (1 - \delta_1(t))H_1x(t) + u_1(t), \\ z(t) &= x_*(t), \end{aligned}$$

где $x_* = \Phi x(t) = x_1(t)$. Интервальный наблюдатель (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_*(t) &= (\underline{\delta}_1 - 1)\underline{x}_*(t) + (1 - \underline{\delta}_1)y_1(t) + u_1(t) - v_*, \\ \dot{\bar{x}}_*(t) &= (\bar{\delta}_1 - 1)\bar{x}_*(t) + (1 - \bar{\delta}_1)y_1(t) + u_1(t) + v_*, \\ \underline{z}(t) &= \underline{x}_*(t), \quad \bar{z}(t) = \bar{x}_*(t). \end{aligned}$$

Так как $\underline{\delta}_1 - 1 < 0$ и $\bar{\delta}_1 - 1 < 0$, очевидно, что наблюдатель устойчив.

Моделирование производилось при $u_1(t) = 2\sin(t)$, $u_2(t) = 2\sin(5t)$, шумы $v_1(t)$, $v_2(t)$ и возмущение $\rho(t)$ представлены независимыми случайными величинами с дисперсиями, равными 0,1, неопределенность $\delta_1(t)$ задана функцией $0,1(1 + \sin(10t))$ и $\underline{\delta}_1 = 0$, $\bar{\delta}_1 = 0,2$. Результаты моделирования представлены

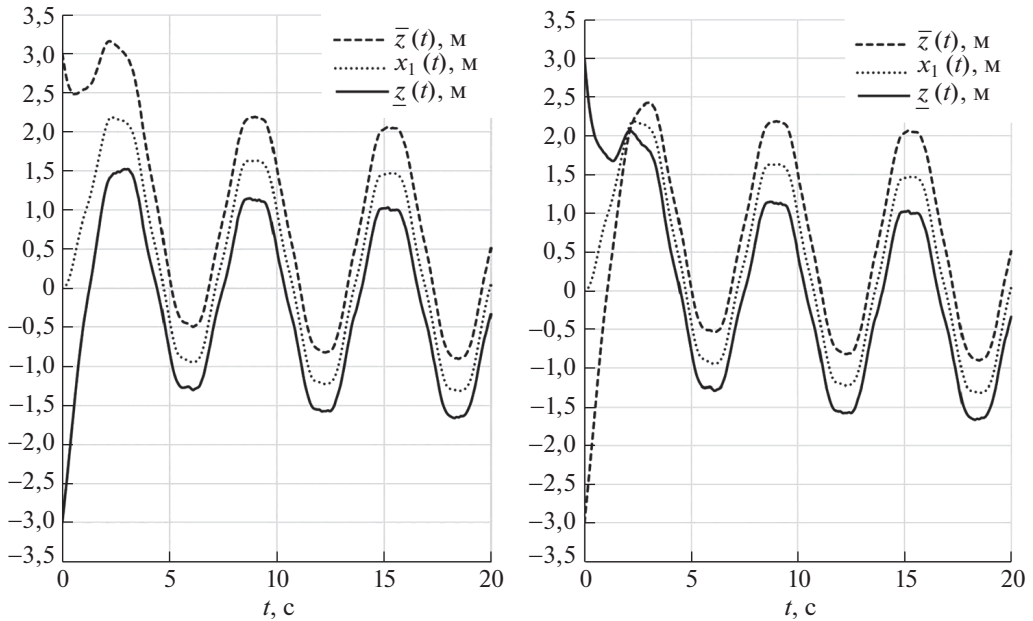


Рис. 2. Графики функций $x_1(t)$, $\underline{z}(t)$ и $\bar{z}(t)$ при разных начальных условиях.

на рис. 2, где приведены графики функций $x_1(t)$, $\underline{z}(t)$ и $\bar{z}(t)$ с начальными условиями $x(0) = (0 \ 0 \ 0)^T$, $\underline{x}_*(0) = -3$, $\bar{x}_*(0) = 3$ на рис. 2,а и $x(0) = (0 \ 0 \ 0)^T$, $\underline{x}_*(0) = 3$, $\bar{x}_*(0) = -3$ на рис. 2,б. Как и показано в разделе 3, “нетипичные” начальные условия достаточно быстро “забываются” и не влияют на процесс оценивания при $t \geq 2$.

6. Заключение

В работе была поставлена и решена задача построения интервальных наблюдателей для линейных динамических систем, описываемых моделями с непрерывным временем, при наличии внешних возмущений, шумов измерений и параметрических неопределенностей. На основе канонической формы Жордана приведены соотношения, позволяющие построить интервальный наблюдатель минимальной размерности, оценивающий множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния системы. Рассмотрены два варианта решения задачи и произведено их сравнение. Изложенное иллюстрируется практическим примером.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Efimov D., Raissi T., Perruquetti W., Zolghadri A.* Estimation and control of discrete-time LPV systems using interval observers // 52nd IEEE Conf. on Decision and Control. Florence, Italy. 2013. P. 5036–5041.
2. *Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A.* Interval observers for continuous-time LPV systems with L1/L2 performance // Automatica. 2015. V. 51. P. 82–89.

3. *Efimov D., Polyakov A., Richard J.* Interval observer design for estimation and control of time-delay descriptor systems // *Eur. J. Control.* 2015. V. 23. P. 26–35.
4. *Kolesov N., Gruzlikov A., Lukoyanov E.* Using fuzzy interacting observers for fault diagnosis in systems with parametric uncertainty // *Proc. XII-th Inter. Symp. Intelligent Systems, INTELS'16, 5–7 October 2016, Moscow, Russia.* P. 499–504.
5. *Кремлев А.С., Чеботарев С.Г.* Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // *Изв. вузов. Приборостроение.* 2013. Т. 56. №. 4. С. 42–46.
6. *Mazenc F., Bernard O.* Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles // *IEEE Trans. Automatic Control.* 2010. V. 55. № 2. P. 523–527.
7. *Blesa J., Puig V., Bolea Y.* Fault detection using interval LPV models in an open-flow canal // *Control Engineering Practice.* 2010. V. 18. P. 460–470.
8. *Zheng G., Efimov D., Perruquetti W.* Interval state estimation for uncertain nonlinear systems // *IFAC Ncolcos 2013.* Toulouse, France, 2013.
9. *Zhang K., Jiang B., Yan X., Edwards C.* Interval sliding mode based fault accommodation for non-minimal phase LPV systems with online control application // *Int. J. Control.* 2019. <https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1687932>
10. *Ефимов Д.В., Раусси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // *АиТ.* 2016. № 2. С. 5–49.
Efomov D., Raissi T. Design of Interval State Observers for Uncertain Dynamical Systems // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 2. P. 191–225.
11. *Khan A., Xie W., Zhang L., Liu L.* Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // *IET Circuits Devices Syst.* 2020. V. 14. P. 721–740.
12. *Жиравок А.Н.* Самокоррекция ошибок в дискретных динамических системах // *АиТ.* 2006. № 6. С. 41–53.
Zhirabok A. Error Selfcorrection in Discrete Dynamic Systems // *Autom. Remote Control.* 2006. No. 6. P. 936–948.
13. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Ким Чхун Ир* Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2022. № 4. С. 22–32.
14. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., Шумский А.Е., Ким Чхун Ир* Каноническая форма Жордана в задачах диагностирования и оценивания // *АиТ.* 2022. № 9. С. 49–67.
Zhirabok A., Zuev A., Filaretov V., Shumsky A., Kim Chung Il Jordan Canonical Form in the Diagnosis and Estimation Problems // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 9. P. 1355–1370.
15. *Жиравок А.Н., Шумский А.Е., Павлов С.В.* Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом // *АиТ.* 2017. № 7. С. 3–21.
Zhirabok A., Shumsky A., Pavlov S. Diagnosis of Linear Dynamic Systems by the Nonparametric Method // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 7. P. 1173–1188.
16. *Low X., Willsky A., Verghese G.* Optimally robust redundancy relations for failure detection in uncertain systems // *Automatica.* 1996. V. 22. P. 333–344.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.

Поступила в редакцию 22.01.2023

После доработки 08.08.2023

Принята к публикации 04.09.2023

© 2023 г. А.А. ШЕГЛОВА, д-р физ.-мат. наук (shchegl@icc.ru)
(Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск)

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Рассматриваются линейные дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ), представляющие собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной на области определения матрицей при производной. Предполагается, что матричные коэффициенты ДАУ зависят от неопределенных параметров, принадлежащих заданному допустимому множеству. Для рассматриваемого параметрического семейства построены структурные формы, в которых разделены дифференциальная и алгебраическая части. Показано, что робастная устойчивость семейства ДАУ равносильна робастной устойчивости его дифференциальной подсистемы. Найдены достаточные условия на структуру возмущений, при которых в процессе разделения ДАУ на алгебраическую и дифференциальную составляющие сохраняется тип функциональной зависимости от неопределенных параметров. Получены достаточные условия робастной устойчивости на основе построения квадратичной функции Ляпунова.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, параметрическая неопределенность, произвольно высокий индекс неразрешенности, робастная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231023110028, EDN: OOPCSW

1. Введение

Рассматривается система дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ)

$$(1.1) \quad A(\gamma)x'(t) + B(\gamma)x(t) = 0, \quad t \in T = [0, +\infty),$$

где $\gamma = \text{col}(\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ — неопределенный векторный параметр, принадлежащий заданному допустимому множеству $\Gamma = \{\gamma \in \mathbf{R}^l : \|\gamma\|_{\mathbf{R}^l} \leq a\}$, $A(\gamma)$ и $B(\gamma)$ — известные вещественные $(n \times n)$ -матрицы, $x(t)$ — искомая n -мерная функция. Предполагается, что $\det A(\gamma) \equiv 0$.

Важнейшей характеристикой ДАУ является индекс неразрешенности, отражающий сложность внутренней структуры системы. Чем выше индекс, тем сложнее разделить ДАУ на дифференциальную и алгебраическую составляющие, без чего невозможно исследование устойчивости нестационарных

систем. Точное определение индекса, используемое в работе, сформулировано в разделе 2.1. Наиболее близким к этому определению является понятие индекса по дифференцированию [1], введенного для невозмущенных нестационарных систем ДАУ. Если индекс неразрешенности существует, он будет равен индексу по дифференцированию.

В статье изучается вопрос об асимптотической устойчивости параметрического семейства (1.1). Анализ робастной устойчивости ДАУ существенно сложнее, чем систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной (см., например, [2, с. 186–225]). Это объясняется тем, что даже в простейшем случае индекса 1 сколь угодно малое возмущение коэффициентов может привести к нарушению внутренней структуры системы и, следовательно, к изменению свойств и вида общего решения [3, с. 61].

Публикаций по робастной устойчивости ДАУ относительно немного (см., в частности, [4–14]). Первыми опубликованными исследованиями по данной тематике считаются [4, 5]. Большинство авторов рассматривают системы с возмущенным матричным коэффициентом при $x(t)$ [5–9]. Лишь в нескольких публикациях допускаются возмущения матрицы при производной искомой вектор-функции [4, 10–12]. Отдельные исследования посвящены робастной устойчивости и оценке радиуса устойчивости нестационарных ДАУ индекса 1 [6, 7, 13].

Робастная устойчивость изучается также в рамках исследования допустимости (admissibility) линейных ДАУ (см., например, [15–21]). Допустимость, помимо устойчивости, подразумевает наличие у системы свойств регулярности и либо причинности (causality) для дискретных систем, либо безымпульсности (impulse free) в непрерывном случае.

В настоящее время по-прежнему актуальным остается получение результатов по робастной устойчивости параметрических семейств вида (1.1) произвольно высокого индекса неразрешенности с возмущениями, присутствующими во всех матричных коэффициентах.

В статье для семейства (1.1) с векторным и скалярным параметром доказано существование и предложены алгоритмы построения структурных форм с разделенными алгебраической и дифференциальной подсистемами. В предыдущих работах автора (например, [22, 23]) для того, чтобы размерность пространства решений и структура общего решения возмущенных ДАУ были такими же, как у номинальной системы, требовалось, чтобы возмущения подчинялись некоторым конечным соотношениям. В данной статье рассматриваемые структурные формы определены одновременно для всего семейства (1.1), а их существование доказано без дополнительных ограничений на возмущения.

К сожалению, преобразование ДАУ (1.1) к той или иной структурной форме в общем случае переводит тип функциональной зависимости от неопределенных параметров в более сложный. В работе получены достаточные условия, при которых процесс разделения системы на алгебраическую и диффе-

ренциальную часть сохраняет в дифференциальной подсистеме тип зависимости от параметров.

В предположениях, при которых проводится анализ, устойчивость системы (1.1) равносильна устойчивости ее дифференциальной части, которая также представляет собой параметрическое семейство. Достаточные условия робастной устойчивости вытекают из требования существования для дифференциальной подсистемы общей квадратичной функции Ляпунова.

2. Достаточные условия робастной устойчивости

2.1. Структурная форма для ДАУ с параметрической неопределенностью

Для системы (1.1) определим $(n(r+1) \times n)$ -матрицы

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{B}_r [B(\gamma)] &= \text{col} (B(\gamma), O, \dots, O), \\ \mathcal{A}_r [A(\gamma), B(\gamma)] &= \text{col} (A(\gamma), B(\gamma), O, \dots, O), \end{aligned}$$

$(n(r+1) \times nr)$ -матрицу

$$(2.2) \quad \Lambda_r [A(\gamma), B(\gamma)] = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & O \\ A(\gamma) & O & \dots & O & O \\ B(\gamma) & A(\gamma) & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & A(\gamma) & O \\ O & O & \dots & B(\gamma) & A(\gamma) \end{pmatrix}$$

и $(n(r+1) \times n(r+2))$ -матрицу

$$(2.3) \quad \mathcal{D}_r [A(\gamma), B(\gamma)] = (\mathcal{B}_r [B(\gamma)] \mid \mathcal{A}_r [A(\gamma), B(\gamma)] \parallel \Lambda_r [A(\gamma), B(\gamma)]).$$

Предположим, что для некоторого r ($0 \leq r \leq n$) выполняется условие

$$(2.4) \quad \text{rank } \Lambda_r [A(\gamma), B(\gamma)] = c = \text{const} \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

и в матрице $\mathcal{D}_r [A(\gamma), B(\gamma)]$ имеется неособенный для всех $\gamma \in \Gamma$ минор $n(r+1)$ -го порядка, включающий в себя c столбцов матрицы $\Lambda_r [A(\gamma), B(\gamma)]$ и все столбцы матрицы $\mathcal{A}_r [A(\gamma), B(\gamma)]$. Такой минор будем называть *разрешающим минором*.

Обозначим через $\mathcal{M}_r [A(\gamma), B(\gamma)]$ квадратную порядка $n(r+1)$ подматрицу матрицы $\mathcal{D}_r [A(\gamma), B(\gamma)]$, определителем которой является разрешающий минор.

Определение 1. Наименьшее значение r , при котором справедливо условие (2.4) и в матрице $\mathcal{D}_r [A(\gamma), B(\gamma)]$ существует разрешающий минор, будем называть индексом неразрешенности параметрического семейства (1.1).

Из приведенной ниже леммы 1 следует, что определение индекса неразрешенности подразумевает постоянство внутренней структуры системы (1.1) при всех $\gamma \in \Gamma$.

Введем обозначение

$$(2.5) \quad (A_1(\gamma) \ A_2(\gamma)) = A(\gamma)Q, \quad (B_1(\gamma) \ B_2(\gamma)) = B(\gamma)Q,$$

где Q — матрица перестановок столбцов такая, что все столбцы матрицы

$$(2.6) \quad \mathcal{B}_{2,r}(\gamma) = \text{col} (B_2(\gamma), O, \dots, O)$$

входят в разрешающий минор, а столбцы $\text{col} (B_1(\gamma), O, \dots, O)$ не входят в этот минор. Блоки $B_2(\gamma)$ и $A_2(\gamma)$ из (2.5), (2.6) имеют размеры $n \times d$, где $d = nr - c$. О построении матрицы Q см. [22]. Таким образом, d — это число столбцов матрицы $\mathcal{B}_r[B(\gamma)]$, входящих в разрешающий минор матрицы (2.3).

Лемма 1. Пусть:

- 1) $A(\gamma), B(\gamma) \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$;
- 2) выполнено условие (2.4);
- 3) в матрице $\mathcal{D}_r[A(\gamma), B(\gamma)]$ имеется разрешающий минор.

Тогда существует оператор

$$(2.7) \quad \mathcal{R}_\gamma = R_0(\gamma) + R_1(\gamma) \frac{d}{dt} + \dots + R_r(\gamma) \left(\frac{d}{dt} \right)^r$$

($R_j(\gamma) \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$ — $(n \times n)$ -матрицы ($j = \overline{0, r}$)) такой, что

$$(2.8) \quad \mathcal{R}_\gamma [A(\gamma)Q\xi'(t) + B(\gamma)Q\xi(t)] = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \xi'(t) + \begin{pmatrix} J_1(\gamma) & E_d \\ J_2(\gamma) & O \end{pmatrix} \xi(t)$$

для всех значений $t \in T$, $\gamma \in \Gamma$ и для любой n -мерной вектор-функции $\xi(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$. Здесь E_d — единичная матрица порядка d , Q — матрица перестановок из (2.5); $J_1(\gamma), J_2(\gamma) \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$ — некоторые матрицы соответствующих размеров.

При этом

$$(2.9) \quad (R_0(\gamma) \ R_1(\gamma) \ \dots \ R_r(\gamma)) = (E_n \ O \ \dots \ O) \mathcal{M}_r^{-1}[A(\gamma), B(\gamma)].$$

Лемма 2. Пусть для ДАУ (1.1):

- 1) выполнены все предположения леммы 1;
- 2) в матрице $\mathcal{D}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)]$ имеется обратимая для всех $\gamma \in \Gamma$ подматрица $\mathcal{M}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)]$ порядка $n(r+2)$, которая включает в себя матрицу $\mathcal{M}_r[A(\gamma), B(\gamma)]$ и еще n столбцов матрицы $\Lambda_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)]$.

Тогда оператор \mathcal{R}_γ обладает левым обратным оператором $\mathcal{L}_\gamma = L_0(\gamma) + L_1(\gamma) \frac{d}{dt}$, где $L_0(\gamma), L_1(\gamma) \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$ — $(n \times n)$ -матрицы.

Доказательства лемм приведены в Приложении.

2.2. Условия робастной устойчивости

Согласно лемме 1 действие оператора \mathcal{R}_γ преобразует семейство (1.1) к виду

$$(2.10) \quad \tilde{A}(\gamma) \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \tilde{B}(\gamma) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0,$$

где

$$(2.11) \quad Q \text{col} (x_1(t), x_2(t)) = x(t),$$

Q — матрица перестановок строк (см. (2.5), (2.6)),

$$(2.12) \quad \tilde{A}(\gamma) = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} = (R_0(\gamma)A(\gamma) + R_1(\gamma)B(\gamma))Q,$$

$$(2.13) \quad \tilde{B}(\gamma) = \begin{pmatrix} J_1(\gamma) & E_d \\ J_2(\gamma) & O \end{pmatrix} = R_0(\gamma)B(\gamma)Q.$$

Компонента $x_1(t)$ решения ДАУ (2.10) удовлетворяет уравнению

$$(2.14) \quad x_1'(t) + J_2(\gamma)x_1(t) = 0.$$

В свою очередь, $x_2(t) = -J_1(\gamma)x_1(t)$. Поскольку матрица $J_1(\gamma)$ является постоянной при каждом фиксированном значении $\gamma \in \Gamma$, семейство (2.10), (2.12), (2.13) будет асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает система (2.14).

В предположениях леммы 2 оператор \mathcal{R}_γ имеет левый обратный оператор. Кроме того, решения систем (1.1) и (2.10), (2.12), (2.13) связаны посредством матрицы перестановок строк Q (см. (2.11)). На основании этих фактов можно заключить, что семейство ДАУ (1.1) будет асимптотически устойчиво в том и только том случае, если асимптотической устойчивостью обладает система (2.14).

Потребуем, чтобы у всего семейства (2.14) была общая квадратичная функция Ляпунова

$$(2.15) \quad W(x_1) = x_1^\top V x_1,$$

обладающая положительно определенной производной по переменной t в силу системы (2.14). Здесь $(n-d) \times (n-d)$ -матрица V симметрична и положительно определена. Известно [2, с. 198; 21, с. 210], что семейство (2.14) будет асимптотически устойчиво, если существует решение системы линейных матричных неравенств

$$(2.16) \quad J_2(\gamma)^\top V + V J_2(\gamma) > 0, \quad \gamma \in \Gamma.$$

В этом случае асимптотически устойчиво будет и семейство ДАУ (1.1). Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть выполнены все предположения леммы 2. Кроме того, существует симметричная и положительно определенная постоянная матрица V , удовлетворяющая системе матричных неравенств (2.16).

Тогда параметрическое семейство ДАУ (1.1) асимптотически устойчиво.

Сформулируем еще один полезный факт, базирующийся на известном результате из теории возмущений [2, с. 198].

Теорема 2. Пусть выполнены все предположения леммы 2 и в системе (2.10)–(2.13) все собственные значения $\lambda_i(0)$ матрицы $J_2(0)$ различны, а α_i и β_i — соответствующие правые и левые собственные векторы:

$$J_2(0)\alpha_i = \lambda_i(0)\alpha_i, \quad \beta_i^* J_2(0) = \lambda_i(0)\beta_i^*, \\ \|\alpha_i\|_{\mathbf{R}^{n-d}} = \|\beta_i\|_{\mathbf{R}^{n-d}} = 1, \quad i = \overline{1, n-d}.$$

Тогда собственные значения матрицы $J_2(\gamma)$ представимы в виде

$$\lambda_i(\gamma) = \lambda_i(0) + \sum_{j=1}^l \frac{\beta_i^* \Theta_j \alpha_i}{\beta_i^* \alpha_i} \gamma_j + o(\gamma),$$

где

$$\Theta_j = \left. \frac{\partial J_2(\gamma)}{\partial \gamma_j} \right|_{\gamma=0}.$$

Пример. Рассмотрим ДАУ

$$(2.17) \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & -\gamma_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varphi(\gamma_3) & 0 & 0 & \varphi(\gamma_3) \\ 0 & 0 & \psi(\gamma_3) & 0 \end{array} \right) x'(t) + \\ + \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & \gamma_1 - 1 \\ 0 & 2 - \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) x(t) = 0,$$

где

$$\Gamma = \left\{ \text{col } (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) : \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \leq 1/2 \right\}.$$

Функции $\varphi(\gamma_3)$ и $\psi(\gamma_3)$ бесконечно дифференцируемы по параметру $\gamma_3 \in [-1/2, 1/2]$ и выбираются по правилу: $\psi(\gamma_3) = 0$, если $\varphi(\gamma_3) \neq 0$. Поскольку $\varphi(\gamma_3)$ и $\psi(\gamma_3)$ обращаются в ноль либо одновременно, либо по очереди, матрица при производной имеет в области Γ переменный ранг.

В $\mathcal{D}_2[A(\gamma), B(\gamma)]$ имеется разрешающий минор, обведенный пунктирной линией:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc||cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & f_1 & 1 & -\gamma_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\varphi & 0 & 0 & \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & f_1 & 1 & -\gamma_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\varphi & 0 & 0 & \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & f_1 & 1 & -\gamma_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\varphi & 0 & 0 & \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \psi \end{array} \right).$$

Здесь зависимость φ и ψ от параметра γ_3 опущена, $f_1 = \gamma_1 - 1$, $f_2 = 2 - \gamma_2$. Матрица $\Lambda_2[A(\gamma), B(\gamma)]$ расположена правее двойной вертикальной линии, ее ранг равен шести.

Построим матрицу $\mathcal{D}_3[A(\gamma), B(\gamma)]$, дополнив \mathcal{D}_2 четырьмя нулевыми столбцами справа и четырьмя строками снизу:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc||cccc|cccc} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & f_1 & \boxed{1} & -\gamma_2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\varphi & 0 & 0 & \varphi \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \psi & 0 \end{array} \right).$$

Подматрица $\mathcal{M}_3[A(\gamma), B(\gamma)]$ в \mathcal{D}_3 имеется: она включает в себя все столбцы, в которых расположен разрешающий минор, а также еще четыре столбца, в которых присутствуют обведенные рамками единицы. Таким образом, все предположения леммы 2 выполнены. При этом $d = 2$, $Q = E_4$.

Оператор

$$\mathcal{R}_\gamma = R_0(\gamma) + R_1(\gamma) \frac{d}{dt} + R_2(\gamma) \left(\frac{d}{dt} \right)^2,$$

где

$$R_0(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \gamma_2 & 0 & 1 - \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\varphi(\gamma_3) \\ 0 & 0 & -\psi(\gamma_3) & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma_1 - 1)\psi(\gamma_3) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(\gamma_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

преобразует систему (2.17) к виду

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) x'(t) + \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 + \gamma_1 & \gamma_2(2 - \gamma_2) & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \gamma_2 & 0 & 0 \end{array} \right) x(t) = 0.$$

При этом $J_2(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 + \gamma_1 & \gamma_2(2 - \gamma_2) \\ 0 & 2 - \gamma_2 \end{pmatrix}$.

Пусть в матричном неравенстве (2.16) $V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, тогда

$$J_2(\gamma)^T V + V J_2(\gamma) = \begin{pmatrix} 4(1 + \gamma_1) & 2\gamma_2(2 - \gamma_2) \\ 2\gamma_2(2 - \gamma_2) & 4(2 - \gamma_2) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица положительно определена, так как все ее главные миноры положительны при любых значениях γ_1 и γ_2 из отрезка $[-1/2, 1/2]$. В частности, определитель этой матрицы равен $4(2 - \gamma_2)\{4(1 + \gamma_1) - \gamma_2^2(2 - \gamma_2)\}$. Очевидно, $2 - \gamma_2 > 0 \quad \forall \gamma_2 \in [-1/2, 1/2]$. Выражение в фигурных скобках принимает минимальное значение $11/8 > 0$ при $\gamma_1 = -1/2, \gamma_2 = -1/2$.

По теореме 1 это означает, что семейство (2.17) асимптотически устойчиво.

3. Условия робастной устойчивости ДАУ со скалярным параметром

Рассмотрим ДАУ

$$(3.1) \quad A(\gamma_0)x'(t) + B(\gamma_0)x(t) = 0, \quad t \in T,$$

где $\gamma_0 \in G_0$ — скалярный параметр, $G_0 = \{\gamma_0 \in \mathbf{R} : |\gamma_0| \leq a\}$ — заданное допустимое множество.

Теорема 3. Пусть:

- 1) $A(\gamma_0), B(\gamma_0) \in \mathbf{C}^A(G_0)$;
- 2) $\text{rank } \Lambda_r[A(\gamma_0), B(\gamma_0)] = \text{const} \quad \forall \gamma_0 \in G_0$;
- 3) в матрице $\mathcal{D}_r[A(\gamma_0), B(\gamma_0)]$ имеется разрешающий минор.

Тогда найдутся обратимые для всех $\gamma_0 \in G_0$ матрицы $P(\gamma_0), S(\gamma_0) \in \mathbf{C}^A(G_0)$ такие, что умножение слева на $P(\gamma_0)$ и замена переменных

$$x(t) = S(\gamma_0)\text{col}(z_1(t), z_2(t))$$

преобразует систему (3.1) к виду

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ O & N(\gamma_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(\gamma_0) & O \\ O & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T,$$

где $N(\gamma_0)$ — верхнетреугольная матрица с r квадратными нулевыми блоками на диагонали, так что $N^r(\gamma_0) \equiv O$, $J(\gamma_0)$ — некоторая $(n-d) \times (n-d)$ -матрица.

Доказательство теоремы опущено. Оно базируется на технике пошагового зануления линейно зависимых строк в матрице при $x'(t)$ и применения оператора дифференцирования к соответствующим строкам матрицы при $x(t)$.

Структурная форма (3.2) является аналогом “сильной стандартной канонической формы”, введенной в работе [25] для системы вида $A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t)$ в предположении ее “аналитической разрешимости”.

В предположениях теоремы 3 решения систем (3.1) и (3.2) связаны тождеством

$$(3.3) \quad x(t) = S(\gamma_0) \text{col} (z_1(t), z_2(t))$$

с обратимой при всех $\gamma_0 \in G_0$ матрицей $S(\gamma_0)$.

Рассмотрим ДАУ (3.2). Из структуры матрицы $N(\gamma_0)$ следует, что подсистема

$$N(\gamma_0)z_2'(t) + z_2(t) = 0$$

имеет только тривиальное решение $z_2(t) \equiv 0$ при всех $\gamma_0 \in G_0$.

В свою очередь, компонента $z_1(t)$ удовлетворяет подсистеме

$$(3.4) \quad z_1'(t) + J(\gamma_0)z_1(t) = 0.$$

Поэтому можно сказать, что ДАУ (3.2) будут асимптотически устойчивы, тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает система (3.4).

Поскольку в (3.3) матрица $S(\gamma_0)$ постоянна при каждом фиксированном значении γ_0 , семейство ДАУ (3.1) будет асимптотически устойчиво в том и только том случае, когда асимптотически устойчива система (3.4).

Допустим, что для (3.4) нашлась общая функция Ляпунова

$$W_0(z_1) = z_1^T V_0 z_1$$

с симметричной и положительно определенной $(n-d) \times (n-d)$ -матрицей V_0 , удовлетворяющей матричному неравенству

$$(3.5) \quad J^T(\gamma_0)V_0 + V_0J(\gamma_0) > 0, \quad \gamma_0 \in G_0.$$

В этом случае семейство (3.4) будет асимптотически устойчиво, а следовательно, таким же свойством будет обладать и параметрическое семейство (3.1).

Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теоремы 3. Семейство ДАУ (3.1) асимптотически устойчиво, если существует постоянная, симметричная и положительно определенная матрица V_0 , удовлетворяющая матричному неравенству (3.5) при всех $\gamma_0 \in G_0$.

4. Условия сохранения типа функциональной зависимости от параметров

В предыдущих разделах рассматривались преобразования параметрических семейств ДАУ к некоторым структурным формам. Было показано, что при определенных условиях робастная устойчивость исходного семейства равносильна робастной устойчивости его дифференциальной подсистемы. К сожалению, в процессе преобразований первоначальный тип функциональной зависимости коэффициентов системы от неопределенных параметров в общем случае переходит в более сложный.

Рассмотрим семейство ДАУ с аффинной неопределенностью

$$(4.1) \quad \left(A_0 + \sum_{j=1}^l \gamma_j A_j \right) x'(t) + \left(B_0 + \sum_{j=1}^l \gamma_j B_j \right) x(t) = 0, \quad t \in T,$$

где A_j и B_j ($j = \overline{0, l}$) — заданные $(n \times n)$ -матрицы с вещественными элементами, $\det A_0 = 0$, $\gamma = \text{col}(\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \Gamma_a = \{\gamma \in \mathbf{R}^l : |\gamma_j| \leq a, j = \overline{1, l}\}$.

В данном разделе получены достаточные условия на структуру коэффициентов A_j и B_j ($j = \overline{1, l}$), при которых робастная устойчивость семейства (4.1) эквивалентна робастной устойчивости системы обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенной относительно производной, с аффинной неопределенностью.

4.1. Условия, полученные с использованием канонической формы Кронекера–Вейерштрасса

Определение 2. Пучок матриц $\mu A_0 + B_0$ называется регулярным, если существует $\mu \in \mathbf{R}$ такое, что $\det(\mu A_0 + B_0) \neq 0$.

Лемма 3 [26, с. 313]. Пусть пучок матриц $\mu A_0 + B_0$ регулярен. Тогда существуют обратимые $(n \times n)$ -матрицы P и S такие, что

$$(4.2) \quad PA_0S = \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ O & N \end{pmatrix}, \quad PB_0S = \begin{pmatrix} J_0 & O \\ O & E_d \end{pmatrix},$$

где J_0 — некоторая квадратная матрица порядка $n - d$, N — верхнетреугольная матрица с r квадратными нулевыми блоками на диагонали, так что $N^r = O$.

Система $PA_0Sz'(t) + PB_0Sz(t) = 0$, $z(t) = S^{-1}x(t)$, со свойством (4.2) получила название канонической формы Кронекера–Вейерштрасса для ДАУ $A_0x'(t) + B_0x(t) = 0$.

Допустим, что в (4.1) матричный пучок $\mu A_0 + B_0$ регулярен, тогда по лемме 4 существуют обратимые матрицы P и S со свойством (4.2). Предположим, что

$$(4.3) \quad PA_jS = \begin{pmatrix} O & O \\ A_{j,1} & O \end{pmatrix}, \quad PB_jS = \begin{pmatrix} B_{j,1} & O \\ B_{j,2} & O \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, l},$$

где $A_{j,1}$, $B_{j,1}$ и $B_{j,2}$ — некоторые матрицы, элементы которых могут быть отличны от нуля. При этом $A_{j,1}$ и $B_{j,2}$ имеют размеры $d \times (n - d)$, блок $B_{j,1}$ — квадратный порядка $n - d$.

Умножим (4.1) слева на матрицу P и произведем замену переменной $x(t) = S \text{col}(x_1(t), x_2(t))$. В результате получим систему, которая с учетом (4.2), (4.3) будет иметь вид

$$(4.4) \quad \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ \sum_{j=1}^l \gamma_j A_{j,1} & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_0 + \sum_{j=1}^l \gamma_j B_{j,1} & O \\ \sum_{j=1}^l \gamma_j B_{j,2} & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0.$$

Обозначим

$$(4.5) \quad Y_1(\gamma) = J_0 + \sum_{j=1}^l \gamma_j B_{j,1},$$

$$(4.6) \quad Y_2(\gamma) = \sum_{j=1}^l \gamma_j (B_{j,2} - A_{j,1} Y_1(\gamma)).$$

Из первого уравнения системы (4.4) найдем

$$(4.7) \quad x_1'(t) = -Y_1(\gamma)x_1(t),$$

откуда

$$(4.8) \quad \left(\frac{d}{dt} \right)^i x_1(t) = (-1)^i Y_1^i(\gamma)x_1(t), \quad i = \overline{2, l}.$$

Принимая во внимание (4.5)–(4.7), второе уравнение системы (4.4) можно записать в следующей форме:

$$(4.9) \quad N x_2'(t) + x_2(t) + Y_2(\gamma)x_1(t) = 0.$$

Подействовав на (4.9) оператором

$$(4.10) \quad E_d + \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^k N^k \left(\frac{d}{dt} \right)^k$$

и воспользовавшись формулами (4.7) и (4.8), получим

$$(4.11) \quad x_2(t) = \left(Y_2(\gamma) + \sum_{k=1}^{r-1} N^k Y_2(\gamma) Y_1^k(\gamma) \right) x_1(t).$$

Нетрудно убедиться, что оператор (4.10) имеет обратный вида $E_d + N \frac{d}{dt}$.

Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в предыдущих разделах, можно показать, что семейство ДАУ (4.1) асимптотически устойчиво при всех $\gamma \in \Gamma_a$ тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает семейство (4.7) или, что то же, ДАУ

$$(4.12) \quad x_1'(t) + \left(J_0 + \sum_{j=1}^l \gamma_j B_{j,1} \right) x_1(t) = 0.$$

В системе (4.12) аффинная структура неопределенности сохраняется, в то время как в уравнении (4.11) она уже нарушена.

З а м е ч а н и е. Если в исходном семействе зависимость от параметров была бы не аффинная, а иная, например мультилинейная или полиномиальная, то условия (4.3) обеспечили бы такой же тип неопределенности и в уравнении, аналогичном (4.12).

Семейство (4.12) будет асимптотически устойчиво при всех значениях $\gamma \in \Gamma_a$, если для него найдется общая функция Ляпунова вида (2.15), имеющая положительно определенную производную по переменной t в силу системы (4.12).

Теорема 5. Пусть в системе (4.1) пучок матриц $\mu A_0 + B_0$ регулярен и справедливы равенства (4.3). Если найдется симметричная положительно определенная $(n - d) \times (n - d)$ -матрица V , удовлетворяющая при всех $\gamma \in \Gamma_a$ неравенству

$$(4.13) \quad Y_1^\top(\gamma)V + VY_1(\gamma) > 0,$$

то семейство (4.1) будет асимптотически устойчиво при всех $\gamma \in \Gamma_a$. Матрица $Y_1(\gamma)$ вычисляется по формуле (4.5).

Благодаря тому, что в (4.12) сохраняется аффинная структура зависимости от неопределенных параметров, неравенства (4.13) достаточно решить лишь в конечном числе точек, для которых $|\gamma_j| = a$ ($j = \overline{1, l}$) [2, с. 199].

По той же причине теорема 2 позволяет получить приближенную оценку радиуса устойчивости для системы (4.12).

Допустим, что все собственные числа λ_k матрицы J_0 имеют положительные вещественные части: $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$, $k = \overline{1, n - d}$. Обозначим через λ собственное значение этой матрицы, имеющее наименьшую вещественную часть. Пусть α и β — соответствующие правый и левый собственные векторы. По теореме 2 λ перейдет в собственное значение $\lambda(\gamma)$ матрицы $J_0 + \sum_{j=1}^l \gamma_j B_{j,1}$:

$$\lambda(\gamma) \approx \lambda + \sum_{j=1}^l \frac{\beta^* B_{j,1} \alpha}{\beta^* \alpha} \gamma_j$$

при малых γ . Поэтому можно ожидать, что при

$$\bar{a} = \operatorname{Re} \lambda / \sum_{j=1}^l \left| \operatorname{Re} \frac{\beta^* B_{j,1} \alpha}{\beta^* \alpha} \right|$$

хотя бы одно из собственных значений матрицы (4.5) будет иметь нулевую вещественную часть, т.е. \bar{a} — оценка радиуса устойчивости системы (4.12) [2, с. 198].

4.2. Условия, полученные с использованием дифференциального оператора

Следует отметить, что построение для регулярного пучка $\mu A_0 + B_0$ матриц P и S , обладающих свойством (4.2), в общем случае является нетривиальной задачей. Поэтому получим для семейства (4.1) другие, более конструктивные, условия сохранения типа функциональной зависимости от параметров. При этом на коэффициенты рассматриваемой системы налагаются ограничения, отличные от тех, которые использовались в разделе 4.1.

Пусть в системе (4.1) матрицы A_0 и B_0 таковы, что выполняются условия:

- A1) в матрице $\mathcal{D}_r[A_0, B_0]$ имеется разрешающий минор;
- A2) $\operatorname{rank} \Lambda_{r+1}[A_0, B_0] = \operatorname{rank} \Lambda_r[A_0, B_0] + n$.

Тогда по лемме 2 существует оператор

$$\mathcal{R} = R_0 + R_1 \frac{d}{dt} + \dots + R_r \left(\frac{d}{dt} \right)^r,$$

такой что

$$\mathcal{R} [A_0 x'(t) + B_0 x(t)] = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

где $Q \operatorname{col} (x_1(t), x_2(t)) = x(t)$, Q — соответствующая матрица перестановок строк (см. (2.5), (2.6)). При этом \mathcal{R} имеет левый обратный оператор $\mathcal{L} = L_0 + L_1 \frac{d}{dt}$ и

$$(R_0 \ R_1 \ \dots \ R_r) = (E_n \ O \ \dots \ O) M_r^{-1}[A_0, B_0],$$

$M_r[A_0, B_0]$ — матрица, определителем которой является разрешающий минор.

Поддействовав на (4.1) оператором \mathcal{R} , получим систему

$$(4.14) \quad \begin{aligned} & \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \\ & + \sum_{i=0}^{r+1} \left[\sum_{j=1}^l \gamma_j R_{i,j} \right] \left(\frac{d}{dt} \right)^i \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

где

$$(4.15) \quad \begin{aligned} R_{0,j} &= R_0 B_j Q; \quad R_{i,j} = (R_{i-1} A_j + R_i B_j) Q, \quad i = \overline{1, r}; \\ R_{r+1,j} &= R_r A_j Q, \quad j = \overline{1, l}. \end{aligned}$$

Предположим, что матричные коэффициенты (4.15) имеют следующую структуру:

$$(4.16) \quad R_{0,j} = \begin{pmatrix} B_{j,1} & O \\ B_{j,2} & O \end{pmatrix}, \quad R_{i,j} = \begin{pmatrix} A_j^{[i]} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, r+1},$$

где $B_{j,1}$, $B_{j,2}$ и $A_j^{[i]}$ — некоторые матрицы, причем $B_{j,1}$ и $A_j^{[i]}$ имеют размеры $d \times (n-d)$, а блок $B_{j,2}$ — квадратный порядка $n-d$.

С учетом (4.16) система (4.14) приобретает форму

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 + \sum_{j=1}^l \gamma_j B_{j,1} & E_d \\ J_2 + \sum_{j=1}^l \gamma_j B_{j,2} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{r+1} \left[\sum_{j=1}^l \gamma_j A_j^{[i]} \right] \left(\frac{d}{dt} \right)^i x_1(t) & O \\ O & O \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Рассуждая так же, как в предыдущем случае, можно показать, что в предположениях A1 и A2 система (4.1) будет асимптотически устойчива при каждом значении $\gamma \in \Gamma_a$ в том и только том случае, когда тем же свойством обладает подсистема

$$x_1'(t) + \left(J_2 + \sum_{j=1}^l \gamma_j B_{j,2} \right) x_1(t) = 0.$$

Сформулируем аналог теоремы 5.

Теорема 6. Пусть выполнены предположения A1 и A2 и справедливы равенства (4.16). Если найдется симметричная положительно определенная $(n-d) \times (n-d)$ -матрица V , удовлетворяющая при всех $\gamma \in \Gamma_a$ неравенству

$$\left(J_2 + \sum_{j=1}^l \gamma_j B_{j,2} \right)^T V + V \left(J_2 + \sum_{j=1}^l \gamma_j B_{j,2} \right) > 0,$$

то семейство (4.1) будет асимптотически устойчиво при всех $\gamma \in \Gamma_a$.

5. Заключение

В данной работе для исследования робастной устойчивости ДАУ были предложены алгоритмы построения структурных форм с разделенными дифференциальной и алгебраической подсистемами в случае ограниченного по норме векторного и скалярного неопределенного параметра (лемма 1 и теорема 3).

Подход, базирующийся на применении линейного дифференциального оператора, отличается конструктивностью, поскольку для нахождения коэффициентов этого оператора достаточно обратить матрицу, определителем которой является разрешающий минор. Кроме того, система, полученная в результате такого преобразования, эквивалентна исходной системе в смысле решений (лемма 2).

Основная трудность, возникающая при исследовании устойчивости ДАУ в условиях неопределенности, связана с тем, что даже в простейших случаях при сколь угодно малом возмущении коэффициентов может измениться внутренняя структура системы и, следовательно, вид общего решения, в результате чего структура и свойства невозмущенной системы могут потерять для анализа всякое значение.

Отличительной особенностью представленных выше результатов является то, что при анализе устойчивости не используется информация о внутренней структуре номинальной системы. Структурные формы строятся сразу для всего семейства (подразделы 2.1 и 3.1). По этой причине не возникает необходимость введения дополнительных структурных ограничений на возмущения, которые обеспечивали бы совпадение внутренней структуры номинальных и возмущенных ДАУ.

Показано, что устойчивость параметрического семейства (1.1) равносильна устойчивости его дифференциальной подсистемы, которая также зависит от неопределенных параметров. Достаточное условие робастной устойчивости вытекает из требования существования для дифференциальной подсистемы общей квадратичной функции Ляпунова вида (2.15) (теоремы 1 и 4).

С другой стороны, в результате преобразования системы к той или иной структурной форме тип функциональной зависимости от неопределенных параметров дифференциальной подсистемы, для которой и строится функция Ляпунова, может оказаться гораздо более сложным по сравнению с системой (1.1). В этой связи для ДАУ с аффинной неопределенностью получены достаточные условия, при которых дифференциальная подсистема также представляет собой аффинное семейство (раздел 4). Этот подход применим и для систем с другими видами параметрической неопределенности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Пусть Q_Λ — матрица перестановок столбцов такая, что

$$\Lambda_r [A(\gamma), B(\gamma)] Q_\Lambda = (\Lambda_{r,1}(\gamma) \Lambda_{r,2}(\gamma)),$$

где блок $\Lambda_{r,1}(\gamma)$ входит в разрешающий минор и состоит из c столбцов, причем $\text{rank } \Lambda_{r,1}(\gamma) = c \forall \gamma \in \Gamma$.

Обратимся к матрице $\mathcal{D}_r [A(\gamma), B(\gamma)]$. Умножив ее справа на матрицу перестановок столбцов $Q_r = \text{diag } \{Q, Q, Q_\Lambda\}^1$ и слева на $\mathcal{M}_r^{-1} [A(\gamma), B(\gamma)]$, получим

$$\mathcal{M}_r^{-1} [A(\gamma), B(\gamma)] \mathcal{D}_r [A(\gamma), B(\gamma)] Q_r = \left(\begin{array}{cc|cc} J_1(\gamma) & E_d & O & O \\ J_2(\gamma) & O & E_{n-d} & O \\ \hline J_3(\gamma) & O & O & E_d \\ J_4(\gamma) & O & O & O \end{array} \left\| \begin{array}{cc} O & \Phi_1(\gamma) \\ O & \Phi_2(\gamma) \\ O & \Phi_3(\gamma) \\ E_c & \Phi_4(\gamma) \end{array} \right. \right),$$

где $J_i(\gamma), \Phi_i(\gamma)$ ($i = \{1, 2, 3, 4\}$) — некоторые матрицы соответствующих размеров. В силу условия (2.4)

$$\Phi_1(\gamma) \equiv O, \quad \Phi_2(\gamma) \equiv O, \quad \Phi_3(\gamma) \equiv O, \quad \gamma \in \Gamma.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} & (E_n \ O \ \dots \ O) \mathcal{M}_r^{-1} [A(\gamma), B(\gamma)] \mathcal{D}_r [A(\gamma), B(\gamma)] Q_r \text{col} \left(\xi(t), \dots, \xi^{(r+1)}(t) \right) = \\ \text{(II.1)} \quad & = \left(\begin{array}{cc|cc} J_1(\gamma) & E_d & O & O \\ J_2(\gamma) & O & E_{n-d} & O \\ \hline O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{array} \right) \text{col} \left(\xi(t), \dots, \xi^{(r+1)}(t) \right), \end{aligned}$$

откуда очевидным образом вытекают формулы (2.9) и (2.8).

Доказательство леммы 2. Заметим, что тождество (II.1) не изменится, если положить в нем

$$Q_r = \text{diag } \{Q, \dots, Q\}.$$

Пусть $\xi(t) \in \mathbf{C}^{r+2}(T)$ — произвольная n -мерная вектор-функция. Продифференцируем (II.1) по переменной t . Принимая во внимание представление (2.9), получим

$$\begin{aligned} & (O \ R_0(\gamma) \ R_1(\gamma) \ \dots \ R_r(\gamma)) \mathcal{D}_{r+1} [A(\gamma), B(\gamma)] Q_{r+1} \text{col} \left(\xi(t), \dots, \xi^{(r+2)}(t) \right) = \\ \text{(II.2)} \quad & = \left(\begin{array}{cc|cc} O & O & J_1(\gamma) & E_d \\ O & O & J_2(\gamma) & O \\ \hline O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{array} \right) \text{col} \left(\xi(t), \dots, \xi^{(r+2)}(t) \right). \end{aligned}$$

Из (II.1) и (II.2) вытекает тождество

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} R_0(\gamma) & R_1(\gamma) & \dots & R_r(\gamma) & O \\ O & R_0(\gamma) & \dots & R_{r-1}(\gamma) & R_r(\gamma) \end{array} \right) \mathcal{D}_{r+1} [A(\gamma), B(\gamma)] Q_{r+1} = \\ \text{(II.3)} \quad & = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} J_1(\gamma) & E_d & O & O & O & O \\ J_2(\gamma) & O & E_{n-d} & O & O & O \\ \hline O & O & J_1(\gamma) & E_d & O & O \\ O & O & J_2(\gamma) & O & E_{n-d} & O \end{array} \right). \end{aligned}$$

¹ Q_r — квазидиагональная матрица, на главной диагонали которой стоят блоки, перечисленные в скобках, остальные элементы — нулевые.

Согласно предположению 2 леммы 2 в матрице

$$\mathcal{D}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)] = (\mathcal{B}_{r+1}[B(\gamma)] \mid \mathcal{A}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)] \parallel \Lambda_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)])$$

имеется обратимая на Γ подматрица $\mathcal{M}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)]$ порядка $n(r+2)$. При этом число столбцов матрицы $\mathcal{B}_{r+1}[B(\gamma)]$, входящих в $\mathcal{M}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)]$, останется по-прежнему равным d , и это будут столбцы матрицы

$$\mathcal{B}_{2,r+1}(\gamma) = \text{col}(B_2(\gamma), O, \dots, O)$$

(см. (2.5), (2.6)). Количество столбцов матрицы $\Lambda_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)]$, входящих в \mathcal{M}_{r+1} , будет равно $s+n$.

В результате умножения справа обеих частей равенства (П.3) на матрицу, вычеркивающую в $\mathcal{D}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)] Q_{r+1}$ столбцы, не входящие в $\mathcal{M}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)]$, получим

$$(П.4) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} R_0(\gamma) & R_1(\gamma) & \dots & R_r(\gamma) & O \\ O & R_0(\gamma) & \dots & R_{r-1}(\gamma) & R_r(\gamma) \end{array} \right) \mathcal{M}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)] = (\mathcal{E}(\gamma) \ O),$$

где

$$(П.5) \quad \mathcal{E}(\gamma) = \left(\begin{array}{c|cc} E_d & O & O \\ O & E_{n-d} & O \\ \hline O & J_1(\gamma) & E_d \\ O & J_2(\gamma) & O \\ \hline & & E_{n-d} \end{array} \right).$$

При этом блочный столбец

$$(П.6) \quad \text{col}(O, O, O, E_{n-d})$$

матрицы, присутствующей в правой части тождества (П.3), полностью войдет в матрицу $\mathcal{E}(\gamma)$. В самом деле, поскольку $\mathcal{D}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)]$, как и матрица, стоящая в правой части (П.3), имеют полный строчный ранг при всех $\gamma \in \Gamma$, из (П.3) следует, что тем же свойством будет обладать и матрица

$$(П.7) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} R_0(\gamma) & R_1(\gamma) & \dots & R_r(\gamma) & O \\ O & R_0(\gamma) & \dots & R_{r-1}(\gamma) & R_r(\gamma) \end{array} \right).$$

Допустим, что в результате преобразования (П.3) в (П.4) часть столбцов матрицы (П.6) будет вычеркнута. В этом случае матрица $\mathcal{E}(\gamma)$ уже не будет обратимой, что противоречит полноте строчного ранга матрицы (П.7).

Из (П.4) следует

$$(П.8) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} R_0(\gamma) & R_1(\gamma) & \dots & R_r(\gamma) & O \\ O & R_0(\gamma) & \dots & R_{r-1}(\gamma) & R_r(\gamma) \end{array} \right) = (\mathcal{E}(\gamma) \ O) \mathcal{M}_{r+1}^{-1}[A(\gamma), B(\gamma)],$$

Лемма будет доказана, если показать, что система

$$(П.9) \quad (L_0(\gamma) \ L_1(\gamma)) \left(\begin{array}{cccc|c} R_0(\gamma) & R_1(\gamma) & \dots & R_r(\gamma) & O \\ O & R_0(\gamma) & \dots & R_{r-1}(\gamma) & R_r(\gamma) \end{array} \right) = (E_n \ O \ \dots \ O)$$

имеет решение $(L_0(\gamma) \ L_1(\gamma)) \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$.

С учетом представления (П.8) необходимое и достаточное условие поточечной разрешимости уравнения (П.9) можно записать в виде

$$(П.10) \quad \text{rank } \mathcal{E}(\gamma) = \text{rank} \left(\frac{(\mathcal{E}(\gamma) O)}{(E_n O \dots O) \mathcal{M}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)]} \right).$$

Очевидно (см. (П.5)), что $\text{rank } \mathcal{E}(\gamma) = 2n$. По построению

$$(П.11) \quad (E_n O \dots O) \mathcal{M}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)] = (B_2(\gamma) \mid A_1(\gamma) \ A_2(\gamma) \parallel O).$$

С учетом (П.5), (П.11) нетрудно убедиться, что равенство (П.10) имеет место при всех $\gamma \in \Gamma$.

Решение $L_0(\gamma)$, $L_1(\gamma) \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$ системы (П.9) может быть найдено по формуле

$$(L_0(\gamma) \ L_1(\gamma)) = (E_n O \dots O) \mathcal{M}_{r+1}[A(\gamma), B(\gamma)] \begin{pmatrix} \mathcal{E}^{-1}(\gamma) \\ O \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R.* Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations (Classics in Applied Mathematics; 14). Philadelphia: SIAM, 1996.
2. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
3. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.
4. *Byers R., Nichols N.K.* On the stability radius of a generalized state-space system // Linear Algebra Appl. 1993. No. 188–189. P. 113–134.
5. *Qiu L., Davison E.J.* The stability robustness of generalized eigenvalues // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. No. 37. P. 886–891.
6. *Chyan C.J., Du N.H., Linh V.H.* On data-dependence of exponential stability and the stability radii for linear time-varying differential-algebraic systems // J. Differ. Equat. 2008. No. 245. P. 2078–2102.
7. *Du N.H., Linh V.H.* Stability radii for linear time-varying differential-algebraic equations with respect to dynamics perturbations // J. Differ. Equat. 2006. No. 230. P. 579–599.
8. *Fang C.-H., Chang F.-R.* Analysis of stability robustness for generalized state-space systems with structured perturbations // Systems Control Lett. 1993. No. 21. P. 109–114.
9. *Lee L., Fang C.-H., Hsieh J.-G.* Exact unidirectional perturbation bounds for robustness of uncertain generalized state-space systems: continuous-time cases // Automatica. 1997. No. 33. P. 1923–1927.
10. *De Teran F., Dopico F.M., Moro J.* First Order Spectral Perturbation Theory of Square Singular Matrix Pencil // Linear Algebra Appl. 2008. No. 429. P. 548–576.
11. *Linh V.H., Mehrmann V.* Lyapunov, Bohl and Sacker-Sell Spectral Intervals for Differential-Algebraic Equations // J. Dyn. Differ. Equat. 2009. V. 21. P. 153–194.

12. *Lin Ch., Lam J., Wang J., Yang G.-H.* Analysis on Robust Stability for Interval Descriptor Systems // Syst. Control Lett. 2001. No. 42. P. 267–278.
13. *Berger T.* Robustness of Stability of Time-Varying Index-1 DAEs // Math. Control Signals Syst. 2014. No. 26. P. 403–433.
14. *Du N.H., Linh V.H., Mehrmann V.* Robust Stability of Differential-Algebraic Equations / Surveys in Differential-Algebraic Equations I. Ilchmann A., Reis T. (Eds.). Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
15. *Barbosa K., de Sousa C., Coutinho D.* Robust admissibility and H_∞ performance of time-varying descriptor systems // Proc. 10th Int. Conf. on Control Autom., IEEE, Hangzhou, China. 2013. P. 1138–1143.
16. *Bara G.I.* Robust analysis and control of parameter-dependent uncertain descriptor systems // Syst. Control Lett. 2011. V. 60. No. 5. P. 356–364.
17. *Gao L., Chen W., Sun Y.* On robust admissibility condition for descriptor systems with convex polytopic uncertainty // Proc. 2003 Amer. Control Conf., Denver, USA. 2003. V. 6. P. 5083–5088.
18. *Xing S., Zhang Q., Zhu B.* Mean-Square Admissibility for Stochastic T-S Fuzzy Singular Systems Based on Extended Quadratic Lyapunov Function Approach // Fuzzy Sets Syst. 2017. V. 307. P. 99–114.
19. *Chen G., Zheng M., Yang Sh., Li L.* Admissibility Analysis of a Sampled-Data Singular System based on the Input Delay Approach // Complexity. 2022. <https://doi.org/10.1155/2022/3151620>.
20. *Taniguchi T., Tanaka K., Yamafuji K., Wang H.O.* Fuzzy Descriptor Systems: Stability Analysis and Design via LMIs // Proc. 1999 Amer. Control Conf., IEEE, San Diego, USA. 1999. V. 3. P. 1827–1831.
21. *Dong X.-Z.* Admissibility Analysis of Linear Singular Systems via a Delta Operator Method // Int. J. Syst. Sci. 2014. V. 45. P. 2366–2375.
22. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса // А и Т. 2017. № 5. С. 36–55.
Shcheglova A.A., Kononov A.D. Robust Stability of Differential-Algebraic Equations with an Arbitrary Unsolvability Index // Autom. Remote Control. 2017. No. 5. P. 798–814.
23. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений в условиях неопределенности // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 881–890.
Shcheglova A.A., Kononov A.D. Stability of Differential-Algebraic Equations under Uncertainty // Differential Equations. 2018. V. 54, No. 7. P. 860–869.
24. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
25. *Campbell S.L., Petzold L.R.* Canonical Forms and Solvable Singular Systems of differential Equations // SIAM J. Alg. Discrete Methods. 1983. No. 4. P. 517–521.
26. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988 (4-е изд.).

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 23.03.2022

После доработки 25.07.2023

Принята к публикации 04.09.2023

Нелинейные системы

© 2023 г. Д.А. КУЛИКОВ, канд. физ.-мат. наук (kulikov_d_a@mail.ru)
(Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова)

БИФУРКАЦИИ ПАТТЕРНОВ В НЕЛОКАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ЭРОЗИИ

Рассматривается периодическая краевая задача для нелинейного уравнения с частными производными с отклоняющейся пространственной переменной. Это уравнение носит название нелокального уравнения эрозии и было предложено в качестве одной из моделей формирования динамических паттернов на поверхности полупроводников.

Показано, что формирование пространственно неоднородного рельефа — это процесс самоорганизации. Неоднородный рельеф возникает как результат локальных бифуркаций в окрестности однородных состояний равновесия при смене ими устойчивости. Анализ задачи опирается на современные методы теории бесконечномерных динамических систем, включая такие разделы, как теория инвариантных многообразий, аппарат нормальных форм, асимптотические методы анализа динамических систем.

Ключевые слова: нелокальное уравнение эрозии, аттракторы, устойчивость, бифуркации, нормальные формы, асимптотика.

DOI: 10.31857/S000523102311003X, EDN: OOVFMW

1. Введение

Одной из актуальных задач микроэлектроники (наноэлектроники), начиная с 80-х гг. 20-го века считалась и продолжает считаться проблема описания процесса формирования неоднородного (например, волнового) рельефа на поверхности полупроводниковых материалов под воздействием потока ионов. Природа волнообразного рельефа продолжает вызывать много дискуссий (см., например, [1–6]). Экспериментально установлено, что волновой нанорельеф образуется на поверхности полупроводников и диэлектриков в определенном диапазоне углов падения ионов. Он, естественно, зависит от интенсивности пучка, типа ионов, а также материала облучаемого образца. Экспериментально наиболее изучен процесс формирования наноструктур на поверхности кремния.

Почти сразу возникли математические модели, предложенные для объяснения феномена формирования неоднородного микро(нано) рельефа. Использовались два подхода: стохастический и детерминистский.

С прикладной точки зрения более привлекателен подход, который рассматривает такой процесс как динамический. Наиболее известной моделью

следует считать вариант, предложенный Бредли и Харпером [7]. Основу этой модели представляет одна из версий известного уравнения Курамото–Сивашинского, дополненного естественными, с точки зрения физики процесса, краевыми условиями. В принципе, различные варианты и модификации этой модели дали достаточно убедительное описание процесса формирования неоднородного (волнового) рельефа. Вместе с тем эта модель в первоначальной постановке имела ряд недостатков. Одним из них можно назвать то обстоятельство, что во многих случаях у соответствующей краевой задачи выявлялась возможность формирования неоднородного рельефа, в котором основную роль играла первая из возможных мод (см., например, [8–11]). Такой вывод во многих случаях противоречит результатам опытов.

Одной из возможных неформальных модификаций является модель, известная под названием “нелокальное уравнение эрозии” [8–11], которая учитывает ряд нелокальных эффектов. К ним, в первую очередь, следует отнести то обстоятельство, что место “внедрения” (“входа”) иона в полупроводниковый материал и “выхода” не обязаны совпадать. Это привело к появлению математической модели, в которой использовалось дифференциальное уравнение с частными производными, содержащее в ряде членов уравнения неизвестную функцию с отклонением у нее пространственного аргумента.

В данной работе будем рассматривать один из вариантов нелокального уравнения эрозии, дополненного периодическими краевыми условиями. В [11–16] можно найти иные постановки задач для нелокального уравнения эрозии.

Далее будет рассматриваться периодическая краевая задача (КЗ) для нелокального уравнения эрозии

$$(1.1) \quad u_\tau = du_{yy} - c_1 w_y + c_2 w_y^2 + c_3 w_y^3,$$

$$(1.2) \quad u(\tau, y + 2l) = u(\tau, y),$$

где $u = u(\tau, y)$, $w = u(\tau, y - h_0)$, h_0 – положительная постоянная, призванная учесть нелокальные эффекты (она пропорциональна среднему расстоянию между точками “входа” и “выхода” иона из падающего пучка), $d > 0$, $c_1 > 0$, $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ – постоянные, характеризующие условия бомбардировки. Так, например, d – коэффициент диффузии материала мишени, коэффициент c_1 характеризует интенсивность (энергию) пучка ионов. Основным параметром, отличающим данную модель от иных (например, Бредли–Харпера), следует считать учет отклонения $h_0 > 0$. Постоянная h_0 пропорциональна углу наклона между направлением пучка и нормалью к поверхности, которая до начала обработки была плоской. Сразу отметим, что, в принципе, отклонение рельефа от состояния равновесия $u(\tau, y)$ должно зависеть от второй пространственной координаты y_1 : $u = u(\tau, y, y_1)$. Но в большинстве экспериментов зависимость от y_1 весьма слабая и поэтому приближение $u = u(\tau, y)$ считается допустимым.

Замены

$$\tau = \frac{l}{\pi c_1} t, \quad y = \frac{l}{\pi} x$$

позволяют переписать КЗ (1.1), (1.2) в следующем виде:

$$(1.3) \quad u_t = au_{xx} - w_x + b_2 w_x^2 + b_3 w_x^3,$$

$$(1.4) \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x),$$

где $u = u(t, x)$, $w = u(t, x - h)$, а

$$h = \frac{h_0\pi}{l}, \quad a = \frac{d\pi}{lc_1}, \quad b_2 = \frac{c_2\pi}{c_1l}, \quad b_3 = \frac{c_3\pi^2}{l^2c_1}.$$

Сразу отметим, что КЗ (1.3), (1.4) имеет решение вида $u(t, x) = \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Если КЗ (1.3), (1.4) дополнить начальными условиями

$$(1.5) \quad u(0, x) = f(x) \quad (w(0, x) = f(x - h)),$$

где $f(x) \in \mathbb{H}_2^1$, то полученная начально-краевая задача будет локально корректно разрешима. Это вытекает из результатов, полученных в [17, 18]. Более того, начально-краевая задача (1.3), (1.4), (1.5) порождает локальный гладкий полупоток $T^t : f(x) \rightarrow u(t, x)$, $t \in (0, \delta)$, $\delta > 0$.

Напомним, что $f(x) \in \mathbb{H}_2^1$, если:

- 1) $f(x + 2\pi) = f(x)$;

- 2) при $x \in [0, 2\pi]$ справедливо включение $f(x) \in \mathbb{W}_2^1[0, 2\pi]$, где $\mathbb{W}_2^1[0, 2\pi]$ – пространство функций $f(x)$, для которых $f(x) \in \mathbb{L}_2(0, 2\pi)$ и обобщенная производная $f'(x) \in \mathbb{L}_2(0, 2\pi)$ (см., например, [19]).

Отметим одну из особенностей КЗ (1.3), (1.4). Пусть $u(t, x)$ – какое-либо решение этой КЗ, тогда $\alpha + u(t, x)$ также будет ее решением. Далее будет изучаться вопрос о структуре окрестности решений вида $u(t, x) = \alpha$ – пространственно однородных состояний равновесия. В частности, предполагается изучить механизм формирования локальных аттракторов, содержащих пространственно неоднородные решения.

2. Некоторые предварительные построения

Рассмотрим нелинейную КЗ (1.3), (1.4). Через

$$M(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) dx$$

обозначим пространственное среднее функции $u(t, x)$. Если представить решение $u(t, x)$ в виде ряда Фурье относительно пространственной переменной x , то тогда получим равенство

$$u(t, x) = u_0(t) + \sum_{n \neq 0} u_n(t) \exp(inx),$$

где

$$u_0(t) = M(u), \quad u_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) \exp(-inx) dx.$$

Следовательно, любое решение нелинейной КЗ (1.3), (1.4) можно записать в виде

$$u(t, x) = u_0(t) + v(t, x), \quad v(t, x) = \sum_{n \neq 0} u_n(t) \exp(inx), \quad M(v) = 0.$$

Поэтому КЗ (1.3), (1.4) можно записать в следующем виде:

$$(2.1) \quad u_{0t}(t) = b_2 M(w_x^2) + b_3 M(w_x^3),$$

$$(2.2) \quad v_t = Av + F_2(w_x) + F_3(w_x),$$

$$(2.3) \quad v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad M(v) = 0.$$

В уравнениях (2.1), (2.2) использованы следующие обозначения:

$$Av = av_{xx} - w_x, \quad w = v(t, x - h),$$

$$F_2(w_x) = b_2 w_x^2 - b_2 M(w_x^2), \quad F_3(w_x) = b_3 w_x^3 - b_3 M(w_x^3).$$

При формировании правой части дифференциального уравнения (2.2) учтено, что $Au_0 = 0$ и что правая часть первоначального варианта дифференциального уравнения с частными производными (1.3) не зависит от $u_0(t)$.

Анализ КЗ (1.3), (1.4) может быть разделен на два этапа. Первый этап состоит в изучении КЗ (2.2), (2.3). После этого на втором этапе уравнение (2.1) позволит восстановить $u_0(t)$. При этом отметим, что без дополнительных условий из уравнения (2.1) функция $u_0(t)$ восстанавливается с точностью до произвольной постоянной.

Итак, основным моментом при изучении КЗ (1.3), (1.4) следует считать анализ вспомогательной нелинейной КЗ (2.2), (2.3). Подчеркнем, что у нее есть единственное пространственно однородное состояние равновесия $v(t, x) = 0$.

3. Об устойчивости нулевого решения вспомогательной нелинейной КЗ

Для анализа устойчивости нулевого состояния равновесия нелинейной КЗ (2.2), (2.3) предварительно изучим ее линеаризованный вариант, т.е. линейную КЗ

$$(3.1) \quad v_t = Av, \quad Av = av_{xx} - w_x,$$

$$(3.2) \quad v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad M(v) = 0, \quad w = v(t, x - h).$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор (ЛДО)

$$Ap = A(a, h)p = ap_{xx}(x) - p_x(x - h),$$

где достаточно гладкая функция $p(x)$ удовлетворяет периодическим краевым условиям $p(x+2\pi) = p(x)$ и имеет нулевое среднее. У него существует счетный набор собственных значений

$$\lambda_n = \lambda_n(a, h) = -an^2 - in \exp(-inh), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

которым отвечает набор собственных функций $\{\exp(inx)\}$, формирующих полную ортогональную систему функций в пространстве $\mathbb{L}_{2,0}(0, 2\pi)$: $f(x) \in \mathbb{L}_{2,0}(0, 2\pi)$, если $f(x) \in \mathbb{L}_2(0, 2\pi)$ и $M(f) = 0$.

Справедливо утверждение.

Лемма 1. Если $\lambda_n(a, h)$ при выбранных a, h таковы, что

$$\operatorname{Re}\lambda_n(a, h) < 0,$$

то все решения линейной КЗ (3.1), (3.2) асимптотически устойчивы в метрике пространства начальных условий КЗ (3.1), (3.2).

В качестве пространства начальных условий естественно выбрать функциональное пространство $\mathbb{H}_{2,0}^1 : f(x) \in \mathbb{H}_{2,0}^1$, если $f(x) \in \mathbb{H}_2^1$ и $M(f) = 0$. Действительно, рассмотрим начально-краевую задачу (3.1), (3.2), (1.5) при $f(x) \in \mathbb{H}_{2,0}^1$. Ее решение можно найти в явном виде

$$(3.3) \quad v(t, x) = \sum_{n \neq 0} f_n \exp(\lambda_n t) \exp(inx),$$

где λ_n – собственные числа ЛДО A , а $\{f_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ ($f_0 = 0$, так как $M(f) = 0$).

Достаточно стандартно проверяется, что

- 1) $v(t, x) \rightarrow f(x)$ в метрике $\mathbb{H}_{2,0}^1$, если $t \rightarrow +0$;
- 2) при $t \geq t_0 > 0$ решение (3.3) – бесконечно-дифференцируемая функция.

Свойство 2) вытекает из следующего замечания, которое проверяется достаточно стандартным способом: при $t \geq t_0 > 0$ ряд в правой части (3.3) сходится равномерно вместе с частными производными любого порядка. Это доказательство использует то обстоятельство, что

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n(a, h)}{n^2} = -a.$$

Отметим также, что $\lim_{|n| \rightarrow \infty} (\operatorname{Im}(\lambda_n(a, h)))/n^2 = 0$. Следовательно, справедливо следующее неравенство: $|\operatorname{Im}\lambda_n(a, h)| \leq K|\operatorname{Re}\lambda_n(a, h)|$, если $|n| \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$ – множеству натуральных чисел), а K – некоторая положительная постоянная.

Эти замечания, в частности, позволяют сформулировать утверждение, что ЛДО A – производящий оператор аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов, а линейная КЗ (3.1), (3.2) может быть включена в класс абстрактных параболических уравнений в смысле определений из [17, 18, 20].

Если при некотором $n = m$ оказалось, что $\operatorname{Re}\lambda_m(a, h) > 0$, то, естественно, решения линейной КЗ (3.1), (3.2) неустойчивы.

Из вышесказанных замечаний вытекает справедливость утверждения.

Лемма 2. Пусть при всех $n \in \mathbb{Z}_$ (множеству целых чисел $n \neq 0$) справедливы неравенства*

$$\operatorname{Re}\lambda_n \leq -\gamma_0 < 0,$$

тогда нулевое решение нелинейной КЗ (2.2), (2.3) асимптотически устойчиво. Если же существует $m \in \mathbb{Z}_$, такое что $\operatorname{Re}\lambda_m > 0$, то оно неустойчиво.*

Отметим, что условия $Re\lambda_n \leq 0$, $Re\lambda_m = 0$ при некоторых $m \in Z_*$ выделяют критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения КЗ (2.2), (2.3).

Далее в этом разделе уделим основное внимание вопросу о том, при каких условиях может реализоваться критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения КЗ (2.2), (2.3). Подчеркнем, что при $h = 0$

$$\lambda_n(a, 0) = -an^2 - in$$

и, следовательно, $Re\lambda_n(a, 0) < 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_*$ ($\mathbb{Z}_* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Поэтому критический случай возможен лишь при $h > 0$ ($h \geq 0$ по условию). При всех $a > 0$ найдем наименьшее положительное $h = h_*(a)$, при котором он может реализоваться.

Сначала найдем такие значения h_n , при которых справедливы равенства

$$Re\lambda_n(a, h_n) = 0.$$

Такие h_n следует искать как решения уравнения $-an^2 - n \sin nh = 0$ или

$$(3.4) \quad \sin nh = -an.$$

Уравнение (3.4) имеет решения, если $|an| \leq 1$. Без нарушения общности можно считать, что $n \in \mathbb{N}$ – множеству натуральных чисел, так как замена n на $-n$ не меняет уравнение (3.4).

Итак, $an \leq 1$. Тогда уравнение (3.4) имеет две группы решений:

- 1) $h_n(m) = \frac{1}{n}(2\pi m - \arcsin(an))$, $m \in \mathbb{Z}$,
- 2) $h_n(k) = \frac{1}{n}(\pi + \arcsin(an) + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

В первой группе решений тригонометрического уравнения наименьший положительный корень равен $h_n(1) = (2\pi - \arcsin(na))/n$, а во второй группе решений $h_n(0) = (\pi + \arcsin(na))/n$. Более того, справедливо неравенство

$$(3.5) \quad \frac{1}{n}(\pi + \arcsin(na)) \leq \frac{1}{n}(2\pi - \arcsin(na))$$

при любом натуральном n , если, конечно, $na \leq 1$. Неравенство (3.5) эквивалентно неравенству

$$2 \arcsin(na) \leq \pi \quad \text{или} \quad \arcsin(na) \leq \frac{\pi}{2}.$$

В результате приходим к заключению, что h_* следует искать как наименьший элемент последовательности

$$d_n = d_n(a) = \frac{1}{n}(\pi + \arcsin(an)), \quad \text{если } n \leq \frac{1}{a}.$$

Подчеркнем, что $d_n = h_n(0)$. Ясно, что, в принципе, выбор наименьшего d_n можно сделать простым перебором. Например, если $a = 1$, то эта последовательность содержит один элемент $d_1 = 3\pi/2$ и $h_* = 3\pi/2$. Если же $a = 1/2$,

то $d_1 = 7\pi/6$, $d_2 = 3\pi/4$, поэтому $h_* = 3\pi/4$. Вместе с тем при уменьшении a число элементов в последовательности $d_n(a)$ возрастает, поэтому желательно простой перебор усовершенствовать и предложить более короткий вариант выбора h_* .

Например, если $a \geq a_0$, где положительная постоянная a_0 будет указана позднее, то можно заметить, что при всех таких a выполнены неравенства $d_k(a) \leq d_{k-1}(a)$, т.е. последовательность $d_k(a)$ убывает с ростом k . Проверка последнего свойства для элементов последовательности $d_k(a)$ может быть сведена к анализу неравенств

$$g_k(a) = (k-1) \arcsin(ka) - k \arcsin((k-1)a) \leq \pi,$$

которые при $k = 1, 2, 3$ тривиальны и выполнены при всех допустимых a . Нетрудно проверить, что справедливы неравенства

$$\frac{dg_k(a)}{da} = k(k-1) \left(\frac{1}{\sqrt{1-(ak)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-a^2(k-1)^2}} \right) > 0, \quad ak \in [0, 1].$$

Следовательно, $d_k(a) \leq d_{k-1}(a)$ будет выполнено при всех допустимых a , если оно выполнено при максимально возможном a ($a = 1/k$). Откуда вытекает, что изучаемый вопрос сводится к проверке неравенств

$$\frac{1}{k-1} \left(\pi + \arcsin \frac{k-1}{k} \right) \geq \frac{3\pi}{2k} \quad \text{или} \quad \arcsin \frac{k-1}{k} \geq \frac{\pi(k-3)}{2k}.$$

Оказалось, что последние неравенства справедливы при $k = 1, \dots, 10$.

Итак, пусть $a > 1/11$. Тогда наименьшее h_* равно $h(a) = (\pi + \arcsin(ka))/k$, где $k = [1/a]$, так как при таком выборе a последовательность d_k будет убывающей. При остальных k , т.е. если $k \geq 11$ ($a \leq 1/11$), возможно иное упрощение при выборе h_* . Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$B(z) = \frac{1}{z}(\pi + \arcsin(z)),$$

которая определена при $z \in (0, 1]$. Элементарно проверяется, что при $z \in (0, z_*)$ она убывает, а при $z \in (z_*, 1)$ возрастает, а z_* — естественно, ее минимум, т.е. $B'(z_*) = 0$. Соответствующее значение z_* находим как наименьший положительный корень уравнения $B'(z) = 0$. Оказалось, что $z = z_* \approx 0,9761$. При этом $d_n(a) = aB(na)$. Поэтому $h_* = \min\{d_m(a), d_{m+1}(a)\}$, где $ma \leq z_*$, а $(m+1)a > z_*$.

Возможный вариант, когда $d_m = d_{m+1}$, исключим из рассмотрения, как особый, исключительный случай, который в рамках этой статьи не будет рассматриваться. Он приводит к иной бифуркационной задаче, коразмерность которой равна 2. Далее ограничимся изучением ситуации общего положения $d_m \neq d_{m+1}$.

Рассмотрим теперь ЛДО, зависящий от малого параметра, т.е.

$$A(\varepsilon)y = ay'' - y'(x - h(\varepsilon)),$$

область определения которого состоит из достаточно гладких функций, удовлетворяющих условию $y(x + 2\pi) = y(x)$, $M(y) = 0$. Здесь $h(\varepsilon) = h_*(1 + \nu\varepsilon)$, $\nu = \pm 1$ или 0 , $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $h_* = (\pi + \arcsin(ma))/m$. При таком выборе $h = h(\varepsilon)$ изучаемый ЛДО имеет счетное множество собственных значений

$$\lambda_k(\varepsilon) = -ak^2 - ik \exp(-ikh(\varepsilon)), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

При этом, если $k \neq \pm m$, то

$$\operatorname{Re} \lambda_k \leq -\gamma_0 < 0,$$

а $\lambda_{\pm m}(\varepsilon) = -am^2 \mp im \exp(-i(\pi + \mu_m)(1 + \nu\varepsilon))$, $\mu_m = \arcsin(ma)$ и, следовательно,

$$\lambda_{\pm m}(0) = \pm i\sigma_m, \quad \sigma_m = m \cos(\mu_m) = m\sqrt{1 - (ma)^2},$$

т.е. при $(ma)^2 \neq 1$ ЛДО A имеет пару простых чисто мнимых собственных значений, а при $(ma)^2 = 1$ у него есть двукратное нулевое собственное число. Поэтому вариант $(ma)^2 = 1$ требует дополнительного анализа. В следующем разделе ограничимся вариантом общего положения $\sigma_m \neq 0$.

Отметим также, что

$$\lambda'_m(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \tau'_m + i\sigma'_m,$$

где $\tau'_m = \nu m(\pi + \arcsin(ma))\sqrt{1 - (ma)^2} \neq 0$, $\sigma'_m = -\nu(\pi + \arcsin(ma))m^2a \neq 0$. При $\nu = 1$ справедливо неравенство $\tau'_m > 0$, т.е. при превышении h критического значения h_* происходит потеря устойчивости, если $\nu = -1$, то $\tau'_m < 0$ и нулевое решение КЗ (2.2), (2.3) сохраняет устойчивость. Наконец, при $\nu = 0$ реализуется критический случай пары чисто мнимых собственных значений.

4. Локальные бифуркации

В этом разделе рассмотрим нелинейную КЗ (2.2), (2.3) при $h = h(\varepsilon) = h_*(1 + \nu\varepsilon)$. При таком выборе h КЗ (2.2), (2.3) может быть записана в следующем виде:

$$(4.1) \quad v_t = A(\varepsilon)v + F_2(w_x, \varepsilon) + F_3(w_x, \varepsilon),$$

$$(4.2) \quad v(t, x + 2\pi) = v(x), \quad M(v) = 0.$$

Здесь

$$w = v(t, x - h(\varepsilon)), \quad A(\varepsilon)v = av_{xx}(t, x) - v_x(t, x - h(\varepsilon)), \\ F_j(w_x, \varepsilon) = F_j(w_x), \quad j = 2, 3.$$

При этом функции $F_j(w_x)$ были введены ранее. Напомним, что величина отклонения h_* была выбрана в разделе 3. В результате для КЗ (4.1), (4.2) реализуется случай, близкий к критическому, спектра устойчивости нулевого решения (спектра ЛДО $A(\varepsilon)$). В рассматриваемом варианте КЗ (4.1), (4.2)

имеет двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$, к которому приближаются все решения из достаточно малой окрестности $Q(r_0)$ нулевого решения изучаемого варианта КЗ. При этом радиус шара пространства \mathbb{H}_2^1 , обозначенный как r_0 , достаточно мал, но не зависит от ε (см., например, [21–23]). Как хорошо известно (см., например, [23]), анализ бифуркаций может быть сведен к изучению системы двух дифференциальных уравнений, которую принято называть нормальной формой (НФ) согласно терминологии, предложенной в свое время А. Пуанкаре (см. [23]). В комплексной форме записи в ситуации общего положения такое уравнение может быть записано в следующем виде:

$$(4.3) \quad z' = (\tau'_m + i\sigma'_m)z + (l_1 + il_2)z|z|^2,$$

где $z = z(s)$, $s = \varepsilon t$ – “медленное” время, штрихом обозначена производная по s , $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ и априори считаем, что $l_1 \neq 0$, т.е. первая ляпуновская величина отлична от нуля. В уравнении (4.3) отброшены слагаемые, стремящиеся к нулю, если $\varepsilon \rightarrow 0$. Уравнение (4.3) представляет собой “главную” часть НФ или “укороченную” НФ. При $l_1 \neq 0$ уравнение (4.3) играет определяющую роль при анализе изучаемого варианта КЗ (2.2), (2.3) и (4.1), (4.2).

Решения КЗ (4.1), (4.2), принадлежащие $M_2(\varepsilon)$, будем искать в виде суммы

$$(4.4) \quad v(t, x, z, \bar{z}, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}v_1(t, x, z, \bar{z}) + \varepsilon v_2(t, x, z, \bar{z}) + \varepsilon^{3/2}v_3(t, x, z, \bar{z}) + O(\varepsilon^2).$$

При этом, разумеется,

$$(4.5) \quad \begin{aligned} w(t, x, z, \bar{z}, \varepsilon) = & \varepsilon^{1/2}w_1(t, x, z, \bar{z}) + \varepsilon w_2(t, x, z, \bar{z}) + \\ & + \varepsilon^{3/2}w_3(t, x, z, \bar{z}) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

В последнем равенстве

$$\begin{aligned} w(t, x, z, \bar{z}, \varepsilon) = & v(t, x - h_*(\varepsilon), z, \bar{z}, \varepsilon), \\ v_j(t, x, z, \bar{z}) = & v_j(t, x - h_*, z, \bar{z}), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Наконец,

$$v_1(t, x) = zq + \bar{z}\bar{q}, \quad q = q(t, x) = \exp(i\sigma_m t) \exp(imx).$$

Функции $v_2(t, x, z, \bar{z}), v_3(t, x, z, \bar{z}) \in \Phi$. Через Φ обозначен класс функций, который определен ниже.

Функция $\varphi = \varphi(t, x, z, \bar{z}) \in \Phi$, если для нее выполнены следующие условия:

1) она гладко зависит от совокупности аргументов при всех t и $x \in \mathbb{R}$ и $|z| < \delta$ (δ – некоторая положительная постоянная);

2) $\varphi(t, x, 0, 0) = 0$;

3) по переменной t она имеет период $2\pi/\sigma_m$ и 2π по переменной x ;

4) справедливы равенства:

a) $M(\varphi) = 0$ при всех рассматриваемых t, z, \bar{z} ;

$$\text{b) } M_{\pm}(\varphi) = \frac{\sigma_m}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi/\sigma_m} \varphi q_{\mp} dt \right) dx = 0, \quad q_+ = q, \quad q_- = \bar{q}.$$

Далее при анализе КЗ (4.1), (4.2) сформулируем вспомогательное утверждение, которое в различных разделах дифференциальных уравнений принято называть условиями разрешимости. Пусть $A_0 = A(0)$.

Замечание 1. Рассмотрим линейную неоднородную КЗ

$$\begin{aligned} A_0 v &= g(t, x), \quad v = v(t, x), \\ v(t, x + 2\pi) &= v(t, x), \quad M(v) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $g(t, x)$ – достаточно гладкая функция, которая по переменной t имеет период $2\pi/\sigma_m$, а по x – период 2π . Пусть дополнительно известно, что $M(g(t, x)) = 0$. Тогда последняя линейная неоднородная КЗ имеет периодические по t решения, если

$$M_{\pm}(g(t, x)) = 0.$$

Условия $M_{\pm}(v) = 0$ выделяют одно подходящее решение линейной неоднородной КЗ, рассматриваемой в замечании 1.

Подстановка суммы (4.4), а также связанной с ней суммы (4.5) в нелинейную КЗ (4.1), (4.2) приводит к линейным неоднородным КЗ для нахождения v_2, v_3 .

Выделяя слагаемые при ε , получаем неоднородную КЗ

$$(4.6) \quad v_{2t} - A_0 v_2 = \Phi_2(t, x, z, \bar{z}),$$

$$(4.7) \quad v_2(t, x + 2\pi) = v_2(t, x), \quad M(v_2) = M_{\pm}(v_2) = 0.$$

Если выделить слагаемые, пропорциональные $\varepsilon^{3/2}$, то получим аналогичную КЗ

$$(4.8) \quad v_{3t} - A_0 v_3 = \Phi_3(t, x, z, \bar{z}),$$

$$(4.9) \quad v_3(t, x + 2\pi) = v_3(t, x), \quad M(v_3) = M_{\pm}(v_3) = 0.$$

Здесь $A_0 v_j = a v_{jxx} - w_{jx}$, $w_j = v_j(t, x - h_*)$, $j = 2, 3$,

$$\Phi_2(t, x, z, \bar{z}) = b_2 w_{1x}^2 - b_2 M(w_{1x}^2),$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(t, x, z, \bar{z}) &= b_3 w_{1x}^3 - b_3 M(w_{1x}^3) + 2b_2(w_{1x} w_{2x} - M(w_{1x} w_{2x})) + \\ &+ A_1 u_1 - (z'q + \bar{z}'\bar{q}), \end{aligned}$$

$$w_{1x} = im(Qzq - \bar{Q}\bar{z}\bar{q}), \quad Q = \exp(-imh_*).$$

Отметим, что $A_1 = A'(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$, а

$$Q = Q_1 + iQ_2, \quad Q_1 = -\sqrt{1 - (ma)^2}, \quad Q_2 = ma.$$

Решения КЗ (4.6), (4.7) $v_2(t, x, z, \bar{z}) \in \Phi$ можно и целесообразно искать в виде

$$v_2(t, x, z, \bar{z}) = \eta_m z^2 q^2 + \bar{\eta}_m \bar{z}^2 \bar{q}^2.$$

Если при этом учесть, что в данном случае

$$\Phi_2(t, x, z, \bar{z}) = b_2 m^2 (Q^2 z^2 q^2 - \bar{Q}^2 \bar{z}^2 \bar{q}^2),$$

то достаточно простые вычисления показывают, что

$$\eta_m = -\frac{b_2 m^2 Q^2 \bar{p}_m}{|p_m|^2}, \quad p_{m_1} = 4mQ_2(1 - Q_1), \quad p_{m_2} = 2m(Q_1^2 - Q_2^2 - Q_1).$$

Перейдем теперь к КЗ (4.8), (4.9). Она имеет решение $v_3(t, x, z, \bar{z}) \in \Phi$, если выполнены условия разрешимости (см. замечание 1), т.е. в случае КЗ (4.8), (4.9) должны выполняться равенства

$$(4.10) \quad M_{\pm}(\Phi_3) = 0.$$

Использование условий (4.10) позволяет определить коэффициенты НФ (4.3). Оказалось, что справедливы равенства

$$l_1 = l_1^{(2)} + l_1^{(3)}, \quad l_2 = l_2^{(2)} + l_2^{(3)},$$

где, в свою очередь,

$$\begin{aligned} l_1^{(3)} &= -3b_3 m^3 Q_2, \quad l_2^{(3)} = 3b_3 m^3 Q_1, \\ l_1^{(2)} &= -\frac{4b_2^2 m^4}{p_{m_1}^2 + p_{m_2}^2} \left(p_{m_1} Q_1 (Q_1^2 - 3Q_2^2) + p_{m_2} Q_2 (3Q_1^2 - Q_2^2) \right), \\ l_2^{(2)} &= -\frac{4b_2^2 m^4}{p_{m_1}^2 + p_{m_2}^2} \left(p_{m_1} Q_2 (3Q_1^2 - Q_2^2) - p_{m_2} Q_1 (Q_1^2 - 3Q_2^2) \right), \end{aligned}$$

$$\tau'_m = \nu m (\pi + \mu_m) \sqrt{1 - (ma)^2}, \quad \sigma'_m = -\nu (\pi + \mu_m) m^2 a, \quad \mu_m = \arcsin(ma).$$

Отметим, что $\tau'_m > 0$, если $\nu = 1$, и $\tau'_m < 0$, если $\nu = -1$. Итак, коэффициенты НФ (4.3) вычислены в явном виде.

Подчеркнем, что в иной форме записи

$$l_1^{(2)} = -\frac{8b_2^2 m^6 a}{p_{m_1}^2 + p_{m_2}^2} \left(\sqrt{1 - (ma)^2} (1 + 4(ma)^2) + 1 \right).$$

Следовательно,

$$l_1 = -3b_3 m^4 a - \frac{8b_2^2 m^6 a}{p_{m_1}^2 + p_{m_2}^2} \left(\sqrt{1 - (ma)^2} (1 + 4(ma)^2) + 1 \right).$$

Последний вариант формулы для l_1 показывает, что при $b_3 > 0$ заведомо $l_1 < 0$. Нетрудно заметить, что вариант, когда $l_1 < 0$, реализуется “чаще”, чем тот, когда справедливо неравенство $l_1 > 0$.

Перейдем теперь к анализу НФ (4.3). Положим

$$z(s) = \rho(s) \exp(i\varphi(s)).$$

В результате перехода к тригонометрической форме записи получим два действительных дифференциальных уравнения

$$(4.11) \quad \rho' = \tau'_m \rho + l_1 \rho^3,$$

$$(4.12) \quad \varphi' = \sigma'_m + l_2 \rho^2.$$

Уравнение (4.11), кроме тривиального состояния равновесия $\rho = 0$, может иметь также ненулевое состояние равновесия

$$\rho(s) = \xi = \sqrt{-\frac{\tau'_m}{l_1}},$$

которое существует, если $\tau'_m/l_1 < 0$.

Стандартный анализ состояния равновесия $\rho(s) = \xi$ с использованием теоремы А.М. Ляпунова по первому (линейному) приближению показывает, что ненулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво, если $l_1 < 0$ ($\tau'_m > 0$ или, иначе, $\nu = 1$) и оно неустойчиво, если $l_1 > 0$ ($\tau'_m < 0$ или, иначе, $\nu = -1$). Нулевое состояние равновесия дифференциального уравнения (4.11) асимптотически устойчиво, если $\tau'_m < 0$, и неустойчиво, если $\tau'_m > 0$.

Теперь нетрудно заметить, что при $\rho(s) = \xi$ уравнение (4.12) имеет решение

$$\varphi(s) = (\sigma'_m + l_2 \xi^2)s + \varphi_0, \quad \varphi_0 \in \mathbb{R}.$$

Из этих построений вытекает, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Дифференциальное уравнение (4.3) имеет предельный цикл C_0 , порожденный однопараметрическим семейством периодических решений

$$(4.13) \quad z(s) = \xi \exp(i(\sigma'_m + l_2 \xi^2)s + i\varphi_0),$$

где $\xi = \sqrt{-\tau'_m/l_1}$. Эти периодические решения устойчивы (орбитально асимптотически устойчивы), если $l_1 < 0$ ($\tau'_m > 0$) и они неустойчивы при $l_1 > 0$ ($\tau'_m < 0$).

Доказательство леммы 3 изложено во многих работах. Из результатов работ [11–16] вытекает, что справедлива

Теорема 1. Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ КЗ (2.2), (2.3) при $h = h(\varepsilon) = h_(1 + \nu\varepsilon)$ имеет предельный цикл $C(\varepsilon)$, соответствующий C_0 , который наследует устойчивость C_0 . Для решений, формирующих $C(\varepsilon)$, справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} v(t, x, \varepsilon, \gamma) = & \varepsilon^{1/2} \xi \left(\exp(imx + i(\sigma_m + \varepsilon\beta_m)t + i\gamma) + \right. \\ & \left. + \exp(-imx - i(\sigma_m + \varepsilon\beta_m)t - i\gamma) \right) + \\ & + \varepsilon \xi^2 \left(\eta_m \exp(2imx + 2i(\sigma_m + \varepsilon\beta_m)t + 2i\gamma) + \right. \\ & \left. + \bar{\eta}_m \exp(-2imx - 2i(\sigma_m + \varepsilon\beta_m)t - 2i\gamma) \right) + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned}$$

где $\xi = \sqrt{-\tau'_m/l_1}$, $\beta_m = \sigma'_m - \tau'_m l_2/l_1$, γ – произвольная действительная постоянная, а постоянная η_m была выбрана в процессе реализации алгоритма построения НФ.

5. Особый вариант бифуркационной задачи

Как уже отмечалось в разделе 3, у ЛДО $A(\varepsilon)$ собственные значения $\lambda_k(\varepsilon)$ определяются равенствами

$$\lambda_k(\varepsilon) = -ak^2 - ik \exp(-ikh(\varepsilon)), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Если рассматривается особый случай, когда $a = 1/m$, то нетрудно проверить, что $\operatorname{Re} \lambda_k(\varepsilon) \leq -\gamma < 0$, если $k \neq \pm m$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ и $0 < \varepsilon_0 \ll 1$.

При $a = 1/m$ (m – некоторое натуральное число, $m < 11$) можно утверждать, что:

1) $h_* = 3\pi/(2m)$.

2) Если $h(\varepsilon) = h_* + \varepsilon$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, тогда $\lambda_m(\varepsilon) = \tau_m(\varepsilon) + i\sigma_m(\varepsilon)$, где $\tau_m(\varepsilon) = -m(1 - \cos m\varepsilon)$, $\sigma_m(\varepsilon) = -m \sin m\varepsilon$.

3) Аналитическая функция $\tau_m(\varepsilon)$ зависит от аргумента ε четным образом.

4) Аналитическая функция $\sigma_m(\varepsilon)$ зависит от аргумента ε нечетным образом.

5) Справедливы равенства $\lambda_m(0) = \lambda_{-m}(0) = 0$. При $\varepsilon = 0$ ЛДО A_0 имеет двукратное нулевое собственное значение. Ему соответствуют собственные функции $\exp(\pm imx)$.

Следовательно, у КЗ (4.1), (4.2) при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ в окрестности ее нулевого состояния равновесия существует, как и ранее (см. раздел 4), двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$, которое для решений КЗ (4.1), (4.2) с достаточно малыми начальными условиями будет локальным аттрактором. Как и ранее (см. предыдущий раздел), анализ динамики решений КЗ (4.1), (4.2) может быть сведен к изучению комплекснозначного дифференциального уравнения (НФ)

$$(5.1) \quad z' = (\tau(\varepsilon) + i\sigma(\varepsilon))z + \psi(z, \bar{z}, \varepsilon),$$

где достаточно гладкая функция $\psi(z, \bar{z}, \varepsilon)$ такова, что

$$\psi(0, 0, \varepsilon) = \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} = 0.$$

Еще раз подчеркнем, что определяющую роль в изучении поведения решений КЗ (4.1), (4.2) играет не только уравнение (5.1), но и ее “укороченный” вариант

$$(5.2) \quad z' = (\tau(\varepsilon) + i\sigma(\varepsilon))z + \psi_0(z, \bar{z}),$$

где $\psi_0(z, \bar{z}) = \psi(z, \bar{z}, 0)$ и достаточно гладкая функция $\psi_0(z, \bar{z})$ в нуле имеет порядок малости выше первого.

Для нахождения “главной части” функции $\psi_0(z, \bar{z})$ достаточно рассмотреть КЗ (4.1), (4.2) при $\varepsilon = 0$ и для нее построить НФ. Решения КЗ (4.1), (4.2) в изучаемом в этом разделе варианте при $\varepsilon = 0$ будем искать в следующем виде:

$$(5.3) \quad v(t, x, z, \bar{z}) = (qz + \bar{q}\bar{z}) + p_2(x)z^2 + p_0(x)z\bar{z} + \bar{p}_2(x)\bar{z}^2 + \\ + r_3(x)z^3 + r_1(x)z^2\bar{z} + \bar{r}_1(x)z\bar{z}^2 + \bar{r}_3(x)\bar{z}^3 + \dots,$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по совокупности переменных z, \bar{z} . Наконец $q(x) = \exp(imx)$, функции $p_2(x), p_0(x), r_1(x), r_3(x)$ имеют по переменной x период 2π и нулевые средние:

$$M(p_j) = 0, \quad M_{\pm}(p_j) = 0, \quad M(r_k) = 0, \quad M_{\pm}(r_k) = 0,$$

где $j = 0, 2, k = 1, 3, q_+ = \exp(imx), q_- = \exp(-imx), q = q_+, \bar{q} = q_-$

$$M(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi dx, \quad M_{\pm}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi q_{\pm} dx, \quad \varphi = \varphi(x).$$

Подставляя сумму (5.3) в КЗ (4.1), (4.2) с $\varepsilon = 0$ и последовательно выделяя члены получившегося равенства, пропорциональные $z^2, z\bar{z}, \bar{z}^2, z^3, z^2\bar{z}, z\bar{z}^2, \bar{z}^3$, получаем последовательность линейных неоднородных уравнений, анализ которых и позволяет определить “главную” часть комплекснозначной функции $\psi_0(z, \bar{z})$. При формировании КЗ следует учесть, что

$$\psi_0(z, \bar{z}) = \psi_2 z^2 + \psi_0 z\bar{z} + \bar{\psi}_2 \bar{z}^2 + \psi_3 z^3 + \psi_1 z^2\bar{z} + \bar{\psi}_1 z\bar{z}^2 + \bar{\psi}_3 \bar{z}^3 + \dots,$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по совокупности аргументов z, \bar{z} .

В результате получаем следующие неоднородные КЗ для определения периодических функций с нулевыми средними. Так, для определения $p_2(x), p_0(x)$ получаем две линейные неоднородные КЗ

$$(5.4) \quad A_0 p_2(x) = -b_2 m^2 q^2 + \psi_2 q,$$

$$(5.5) \quad p_2(x + 2\pi) = p_2(x), \quad M(p_2) = M_{\pm}(p_2) = 0,$$

$$(5.6) \quad A_0 p_0(x) = \psi_0,$$

$$(5.7) \quad p_0(x + 2\pi) = p_0(x), \quad M(p_0) = M_{\pm}(p_0) = 0.$$

Если искать решения вспомогательных линейных неоднородных КЗ (5.4), (5.5) и (5.6), (5.7) в требуемом классе решений, то с необходимостью $\psi_2 = 0, \psi_0 = 0$ и

$$p_0(x) = 0, \quad p_2(x) = \eta_2 Q^2 q^2, \quad \bar{p}_2(x) = \bar{\eta}_2 \bar{Q}^2 \bar{q}^2,$$

где в данном случае $Q = \exp(-ih_* m)$, т.е. $Q = \exp(-i3\pi/2) = i, Q^2 = -1$. Наконец

$$\eta_2 = \frac{b_2 m}{10} (2 + i).$$

На третьем шаге реализации алгоритма получаем две КЗ для определения $r_1(x), r_3(x)$

$$(5.8) \quad A_0 r_3(x) = \psi_3 q + b_3 m^3 q^3 - 4b_2 \eta_2 i m^2 q^3,$$

$$(5.9) \quad r_3(x + 2\pi) = r_3(x), \quad M(r_3) = M_{\pm}(r_3) = 0,$$

$$(5.10) \quad A_0 r_1(x) = \psi_1 q + 3b_3 m^3 q - 4b_2 \eta_2 i m^2 q,$$

$$(5.11) \quad r_1(x + 2\pi) = r_1(x), \quad M(r_1) = M_{\pm}(r_1) = 0.$$

Из условий разрешимости КЗ (5.8), (5.9) и (5.10), (5.11) находим, что $\psi_3 = 0$, $\psi_1 = -3b_3 m^3 + \frac{2}{5} b_2^2 m^3 (-1 + 2i)$.

В итоге получаем, что главная часть НФ (5.1) приобретает вид

$$(5.12) \quad z' = \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} m^3 - i m^2 \varepsilon \right) z + (l_1 + i l_2) z |z|^2,$$

где $l_1 = -3b_3 m^3 - \frac{2}{5} b_2^2 m^3$, $l_2 = \frac{4}{5} b_2^2 m^3$.

Для ее анализа перепишем данное дифференциальное уравнение в тригонометрической форме и положим

$$(5.13) \quad z(t) = \rho(t) \exp(i\varphi(t)).$$

Тогда вместо комплексного уравнения (5.12) получим два действительных дифференциальных уравнения

$$(5.14) \quad \rho' = -\frac{\varepsilon^2}{2} m^3 \rho + l_1 \rho^3,$$

$$(5.15) \quad \varphi' = -\varepsilon m^2 + l_2 \rho^2.$$

Как и в предыдущем разделе, анализ системы дифференциальных уравнений (5.14), (5.15) можно начать с изучения уравнения (5.14) для амплитуды $\rho(t)$.

Лемма 4. Дифференциальное уравнение (5.14), кроме нулевого состояния равновесия $S_0: \rho = 0$, может иметь также состояние равновесия $S_: \rho_* = \sqrt{\varepsilon^2 m^3 / (2l_1)}$. Состояние равновесия ρ_* дифференциального уравнения (5.14) существует, если $l_1 > 0$. Это состояние равновесия неустойчиво. Асимптотически устойчивым будет состояние равновесия $\rho = 0$.*

Анализ устойчивости найденных состояний равновесия использует теорему А.М. Ляпунова об устойчивости по первому (линейному) приближению. Отметим, что состоянию равновесия S_* соответствует решение дифференциального уравнения (5.15) вида

$$\varphi_*(t) = \left(-\varepsilon m^2 + \frac{l_2 \varepsilon^2 m^3}{2l_1} \right) t + \varphi_0,$$

где φ_0 – произвольная действительная постоянная. Использование равенства (5.13) позволяет найти периодическое по t решение НФ (5.12)

$$z(t) = z(t, \varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 m^3}{2l_1}} \exp(i\varphi_*(t)).$$

Из результатов работ [11–16] вытекает справедливость утверждения.

Теорема 2. Пусть $am = 1$ ($h_* = 3\pi/(2m)$), где $m = 1, \dots, 10$. Можно указать такую положительную постоянную ε_0 , что при всех $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $h = h_* + \varepsilon$, и $\varepsilon \neq 0$ КЗ (4.1), (4.2) имеет однопараметрическое семейство неустойчивых t -периодических решений

$$(5.16) \quad \begin{aligned} v_*(t, x, \varepsilon, \varphi_0) = & \rho_*(q_m(t, x, \varphi_0) + \bar{q}_m(t, x, \varphi_0)) + \\ & + \rho_*^2(\eta_2 q_m^2(t, x, \varphi_0) + \bar{\eta}_2 \bar{q}_m^2(t, x, \varphi_0)) + o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где $q_m(t, x, \varphi_0) = \exp(i\omega(\varepsilon)t + imx + i\varphi_0)$, $\omega(\varepsilon) = -\varepsilon m^2 + l_2 m^3 \varepsilon^2 / (2l_1) + o(\varepsilon^2)$. Постоянные l_1, l_2 были указаны ранее. Семейство решений (5.16) существует, если первая ляпуновская величина $l_1 > 0$ (см. лемму 4).

При $l_1 < 0$ у КЗ (4.1), (4.2) нулевое решение асимптотически устойчиво.

Замечание 2. Ситуация, когда в рассматриваемом особом варианте для КЗ (4.1), (4.2) существуют периодические решения, достаточно редко реализуется, а если такое случается, то они неустойчивы. Ясно, что вариант, когда $l_1 > 0$, встречается достаточно редко. Преобладают варианты $l_1 < 0$. Тогда у дифференциального уравнения (5.14), а значит у КЗ (4.1), (4.2), малые периодические решения по переменной t отсутствуют.

6. Основной результат

Возвратимся к анализу основной нелинейной КЗ (1.3), (1.4), рассматриваемой при $h = h(\varepsilon) = h_*(1 + \nu\varepsilon)$, если $am \neq 1$.

Пусть $v(t, x, \varepsilon, \gamma)$ – периодическое решение, полученное для КЗ (2.2), (2.3). Тогда $u_0(t)$ определяется из уравнения (2.1) после подстановки $v(t, x, \varepsilon, \gamma)$ в правую часть этого уравнения с последующим интегрированием. В данном случае получаем, что

$$u_0(t, \varepsilon, \gamma_0) = \left(2b_2 \xi^2 m^2 \varepsilon + o(\varepsilon) \right) t + \gamma_0,$$

где γ_0 – произвольная действительная постоянная, $\xi^2 = -(\tau'_m / l_1) > 0$.

Теорема 3. Существует такая положительная постоянная ε_0 , такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $h = h_*(1 + \nu\varepsilon)$ нелинейная КЗ (1.3), (1.4) имеет двухпараметрическое семейство $V_2(\varepsilon, \gamma_0, \gamma)$ решений

$$u(t, x, \varepsilon) = u_0(t, \varepsilon, \gamma_0) + v(t, x, \varepsilon, \gamma),$$

если КЗ (2.2), (2.3) имеет предельный цикл $C(\varepsilon)$. Это семейство формирует интегральное многообразие нелинейной КЗ (1.3), (1.4).

Семейство $V_2(\varepsilon, \gamma_0, \gamma)$ – локальный аттрактор, если локальным аттрактором является предельный цикл $C(\varepsilon)$ вспомогательной КЗ (2.2), (2.3). Это семейство неустойчиво (седловое), если аналогичным свойством характеризуется $C(\varepsilon)$.

Пусть теперь оказалось, что реализуется особый случай, когда $am = 1$, $h_* = 3\pi/(2m)$. Тогда формулировка основного результата, естественно, нуждается в коррекции и из теоремы 2 вытекает справедливость уже следующего утверждения.

Теорема 4. Существует такая положительная постоянная ε_0 , что при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0)$, $h = h_ + \varepsilon$ КЗ (1.3), (1.4) имеет двухпараметрическое семейство решений $V_*(\varepsilon, \gamma_0, \varphi_0)$, сформированное решениями вида*

$$u(t, x, \varepsilon) = u_0(t, \varepsilon, \gamma_0) + v_*(t, x, \varepsilon, \varphi_0),$$

где $v_*(t, x, \varepsilon, \varphi_0)$ – решение (5.16) вспомогательной КЗ (4.1), (4.2) (см. теорему 2), а

$$u_0(t, \varepsilon, \gamma_0) = \left(b_2 \frac{\varepsilon^2 m^2}{l_{1,0}} + o(\varepsilon^2) \right) t + \gamma_0,$$

γ_0 – произвольная постоянная, $l_{1,0} = -3b_3 - 2b_2^2/5$. Напомним, что в рассматриваемом варианте решение существует, если $l_{1,0} > 0$.

Подчеркнем, что семейство решений $V_(\varepsilon, \gamma_0, \varphi_0)$ всегда неустойчиво.*

7. Заключение

В работе исследованы локальные бифуркации в периодической КЗ для одной из версий нелокального уравнения эрозии. Оно представляет собой уравнение с частными производными с отклоняющимся пространственным аргументом. Показано, что учет отклоняющегося аргумента — это существенный фактор при анализе бифуркаций. При величине отклонения $h = 0$ формирование неоднородного рельефа не происходит. Увеличение же h до некоторых пороговых значений приводит к формированию нанорельефа.

В большинстве вариантов такой рельеф формируется как результат бифуркаций Андронова–Хопфа при соответствующем выборе $h \approx h_*$ и a . В особом варианте, когда произведение $ak \approx 1$, реализуется иной вариант бифуркаций и возникают неустойчивые паттерны.

Анализ актуальной физической задачи о формировании нанорельефа оказался достаточно эффективным, так как опирался на современные методы теории динамических систем: методы инвариантных многообразий и теорию нормальных форм Пуанкаре, развитую до возможности использования для задач с бесконечномерным фазовым пространством. Уместно подчеркнуть, что использование и развитие метода интегральных (инвариантных) многообразий достаточно продуктивно при анализе многих задач математической физики, так как позволяет во многих случаях свести бесконечномерную задачу к анализу конечномерной динамической системы. Иной вариант анализа бесконечномерных динамических систем продемонстрирован в [24, 25].

Подчеркнем еще раз, что включение (учет) нелокальных членов в дифференциальное уравнение с частными производными часто существенно изменяет динамику его решения, делая ее существенно более сложной и богатой. Например, бифуркации могут возникать на старших модах, что неоднократно наблюдалось в экспериментах.

Отметим также, что учет нелокальных членов в математических моделях приводит к выявлению новых эффектов не только в задачах наноэлектроники, но и других нелинейных моделях физики (см., например, [26–29]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sigmund P.* Theory of ripple topography induced by ion bombardment // *Phys. Rev.* 1969. V. 184. No. 2. P. 383–416.
2. *Yamamura Y., Shindo S.* An empirical formula for angular dependence of sputtering yields // *Radiat. Effect.* 1984. V. 80. No. 1–2. P. 57–72.
3. *Elst K., Vandervorst W.* Influence of the composition of the altered layer on the ripple formation // *J. Vacuum Sci. Tech. A.* 1994. V. 12. No. 2. P. 3205–3216.
4. *Sigmund P.* A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment // *J. Mater. Sci.* 1973. V. 8. No. 2. P. 1545–1553.
5. *Смирнов В.К., Кубалов Д.С., Лепшин П.А., Бачурин В.И.* Влияние топографических неровностей на процесс образования волнообразного микрорельефа на поверхности кремния // *Изв. РАН. Сер. физическая.* 2000. Т. 64. № 4. С. 626–630.
6. *Рудый А.С., Куликов А.Н., Метлицкая А.В.* Самоорганизация наноструктур в рамках пространственно-нелокальной модели эрозии поверхности кремния ионной бомбардировкой / *Кремниевые наноструктуры. Физика. Технология. Моделирование: монограф. под ред. Рудакова В.И.* Ярославль: Индиго, 2014. С. 8–57.
7. *Bradley R.M., Harper M.E.* Theory of ripple topography induced by ion bombardment // *J. Vacuum Sci. Tech. A.* 1988. V. 6. No. 4. P. 2390–2395.
8. *Рудый А.С., Бачурин В.И.* Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой // *Изв. РАН. Сер. физическая.* 2008. Т. 72. № 5. С. 624–629.
9. *Рудый А.С., Куликов А.Н., Метлицкая А.В.* Высокомодовые волновые рельефы в рамках пространственно нелокальной модели эрозии // *Микроэлектроника.* 2013. Т. 43. № 6. С. 282–288.
10. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Нелокальная модель формирования рельефа под воздействием потока ионов. Неоднородные наноструктуры // *Математическое моделирование.* 2016. Т. 28. № 3. С. 33–50.
11. *Рудый А.С., Куликов А.Н., Куликов Д.А., Метлицкая А.В.* Высокомодовые волновые рельефы в рамках пространственно-нелокальной модели эрозии // *Микроэлектроника.* 2014. Т. 43. № 4. С. 282–288.
12. *Куликов Д.А., Рудый А.С.* Формирование волнового нанорельефа при распылении поверхности ионной бомбардировкой. Нелокальная модель эрозии // *Моделирование и анализ информационных систем.* 2012. Т. 19. № 5. С. 40–49.
13. *Kulik D.A.* Spatially nonhomogeneous dissipative structures of a periodic boundary-value problem for a nonlocal erosion equation // *Nonlinear Oscillations.* 2014. V. 17. No. 1. P. 72–86.
14. *Ковалева А.М., Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Устойчивость и бифуркации волнообразных решений для одного функционально-дифференциального уравнения // *Известия института математики и информатики УдГУ.* 2015. № 46. С. 60–68.
15. *Kovaleva A.M., Kulik D.A.* Bifurcations of spatially inhomogeneous solutions in two versions of the nonlocal erosion equation // *J. Math. Sci.* 2020. V. 248. No. 4. P. 438–447.
16. *Куликов Д.А.* Неоднородные диссипативные структуры в задаче о формировании нанорельефа // *Динамические системы.* 2012. Т. 2 (30). № 3–4. С. 259–272.
17. *Соболевский П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // *Труды ММО.* 1961. Vol. 10. С. 297–350.

18. *Якубов С.Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Труды ММО. 1970. V. 23. С. 37–60.
19. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1950.
20. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1977.
21. *Marsden J.E., McCracken M.* The Hopf bifurcation and its applications. New York: Springer-Verlag, 1976.
22. *Куликов А.Н.* Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы операторов в гильбертовом пространстве // Итоги науки и техники. Темат. обзоры. 2020. Т. 186. С. 57–66.
23. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
24. *Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.* Аттракторы в моделях фильтрации // ДАН. 2017. Т. 472. № 6. С. 627–630.
25. *Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V.* Contact geometry and non-linear differential equations. Cambridge: Cambridge Univers. Press, 2007.
26. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* О возможности реализации сценария Ландау–Хопфа в задаче о колебаниях трубы под воздействием потока жидкости // Теорет. и мат. физика. 2020. Т. 203. № 1. С. 78–90.
27. *Kulikov A.N., Kulikov D.A.* Invariant varieties of the periodic boundary value problem of the nonlocal Ginzburg-Landau equation // Math. Meth. Appl. Sci. 2021. V. 44. No. 3. P. 11985–11997.
28. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Инвариантные многообразия, глобальный аттрактор, интегро-дифференциального уравнения Гинзбурга–Ландау // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1500–1514.
29. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Инвариантные многообразия слабодиссипативного варианта нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау // АиТ. 2021. № 2. С. 94–110.
Kulikov A.N., Kulikov D.A. Invariant Manifolds of a Weakly Dissipative Version of the Nonlocal Ginzburg-Landau Equation // Autom. Remote Control. V. 82. No. 2. P. 264–277.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 15.05.2023

После доработки 10.07.2023

Принята к публикации 20.07.2023

© 2023 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

ПЛОТНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ. АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ¹

Рассматривается класс систем, названных плотностными, для которых производная от квадратичной функции зависит от некоторой функции, названной функцией плотности. С помощью функции плотности задаются свойства пространства, которые оказывают влияние на поведение исследуемых систем. Показана роль плотностных систем в синтезе законов управления. Рассмотрено построение систем управления для объектов с известными и неизвестными параметрами. Все полученные результаты сопровождаются моделированием, иллюстрирующим теоретические выводы.

Ключевые слова: динамическая система, квадратичная функция, устойчивость, управление.

DOI: 10.31857/S0005231023110041, EDN: OOVXMH

1. Введение

В работе рассмотрен класс динамических систем в нормальной форме, правая часть которых зависит от некоторой функции, задающей свойства пространства и влияющей на поведение системы. Данную функцию будем называть функцией плотности. Все соответствующие определения будут рассмотрены в основной части статьи.

Частный класс таких систем рассматривался в [1–8]. В [1] впервые для изучения (не)устойчивости системы $\dot{x} = f(x)$ на плоскости рассматривалась новая система $\dot{x} = \rho(x)f(x)$ со вспомогательной функцией $\rho(x) > 0$ для всех x . Затем вопрос (не)устойчивости таких систем изучался с использованием свойств дивергенции и потока вектора фазовой скорости в [2–8]. В [4] функция $\rho(x)$ названа функцией плотности (от англ. «density function»), а в [5–8] показана связь полученных результатов с уравнением непрерывности [9], которое встречается в электромагнетизме, теории волн, гидродинамике, механике деформируемого твердого тела и квантовой механике.

В [10–14] предложен ряд методов управления, гарантирующих нахождения регулируемых сигналов в заданных разработчиком множествах. Для выполнения данной цели с помощью соответствующего закона управления вводилась вспомогательная функция, от вида которой выполнялись соответствующие свойства в замкнутой системе. Так, в [10, 12] предложен закон

¹ Работа выполнена в ИПМаш РАН при поддержке госзадания № 121112500298-6 (ЕГИСУ НИОКТР).

управления с эффектом воронки (от англ. «funnel control»), а в [11] – закон управления с заданным качеством регулирования (от англ. «prescribed performance control»), которые гарантируют нахождение переходных процессов в сходящейся к окрестности нуля трубке. В [13, 14] предложен метод, обобщающий результаты [10–12] и позволяющий гарантировать нахождение выходных переменных в заданной разработчиком трубке, которая может быть несимметрична относительно положения равновесия и не сходится к заданной константе.

В данной работе будет рассмотрен класс систем, которые явно или неявно зависят от функции плотности. С помощью данной функции будет задаваться плотность пространства в смысле выделения областей (не)устойчивости, запретных областей (где отсутствуют решения системы) и от значения функции плотности будет зависеть поведение исследуемой системы. В отличие:

- 1) от [1–8] будут рассмотрены системы, где функция плотности не обязательно умножается на всю ее правую часть;
- 2) от [10–14] функция плотности может присутствовать неявно в правой части системы;
- 3) от [10–14] функция плотности может гарантировать нахождение решений системы в неограниченном множестве с запретными областями и границы данных множеств могут быть заданы непрерывными (при некоторых предположениях и разрывными) функциями по всем аргументам.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 даны мотивирующие примеры, определения функции плотности и плотностной системы. Показаны некоторые свойства данных систем. В разделе 3 иллюстрируется применение полученных результатов к синтезу законов управления для объектов с известными и неизвестными параметрами. Здесь же приведены результаты моделирования полученных схем управления с подтверждением теоретических выводов.

В работе используются следующие *обозначения*: \mathbb{R}^n – евклидово пространство размерности n с нормой $|\cdot|$; \mathbb{R}_+ (\mathbb{R}_-) – множество положительных (отрицательных) вещественных чисел; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования; λ – комплексная переменная.

2. Мотивирующие примеры. Определения

Перед введением основных определений рассмотрим два примера.

Пример 1. Хорошо известно, что решения системы

$$(1) \quad \dot{x} = -x$$

асимптотически сходятся к нулю, где $x \in \mathbb{R}$. Умножим правую часть данной системы на непрерывную по t и локально липшицевую по x функцию $\rho(x, t) : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и перепишем (1) в виде

$$(2) \quad \dot{x} = -\rho(x, t)x.$$

Очевидно, что от свойств $\rho(x, t)$ зависит поведение системы (2). С помощью функции $\rho(x, t)$ можно задавать некоторые свойства и ограничения в пространстве (x, t) . Таким образом можно влиять на качество переходных процессов исходной системы (1) и качественно менять их. В связи с этим $\rho(x, t)$ назовем *функцией плотности*. Рассмотрим несколько примеров задания данной функции и соответствующее поведение новой системы (2).

1. Функция плотности $\rho(x, t) = \alpha > 0$ позволяет сохранить единственное положение равновесия $x = 0$, принимает одно и то же положительное значение для любых x и t и тем самым качественно не влияет на экспоненциальную устойчивость траекторий исходной системы (1) (см. рис. 1 слева) за исключением скорости сходимости решения (2) к положению равновесия в зависимости от значения α . Действительно, выбрав функцию Ляпунова в виде $V = 0,5x^2$, получим $\dot{V} = -\alpha x^2 < 0$ в области $D_S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Рассмотрим функцию плотности $\rho(x, t) = \frac{\alpha}{w(t)-|x(t)|}$ с непрерывной функцией $w(t) > 0$. Функция $\rho(x, t)$ принимает положительные значения в области $D_S = \{x \in \mathbb{R} : -w < x < w\}$, а при $|x - w| \rightarrow 0$ в D_S имеем $\rho(x, t) \rightarrow +\infty$. Данные свойства гарантирует равномерную асимптотическую устойчивость точки равновесия $x = 0$ с начальными условиями $x(0) \in (-w(0); w(0))$. При этом траектории системы никогда не покидают данную область (см. рис. 1 справа). Выбрав квадратичную функцию $V = 0,5x^2$, получим $\dot{V} = -\frac{\alpha}{w-|x|}x^2 < 0$ в области $x \in D_S \setminus \{0\}$, что подтверждает сделанные выводы.

3. Рассмотрим функцию плотности $\rho(x, t) = \alpha[x(t) - w(t)]\text{arctg}(x/\epsilon)$ с непрерывной функцией $w(t)$ и достаточно большим положительным числом ϵ . Функция $\rho(x, t)$ принимает положительные значения в области $D_S = \{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty; 0) \cup (w; +\infty) \text{ при } w > 0 \text{ и } x \in (-\infty; w) \cup (0; +\infty) \text{ при } w < 0\}$ и отрицательные в области $D_U = \{x \in \mathbb{R} : x \in (0; w) \text{ при } w > 0 \text{ и } x \in (w; 0) \text{ при } w < 0\}$, что гарантирует слежение $x(t)$ за $w(t)$ (см. рис. 2 слева). Выбрав квадратичную функцию $V = 0,5x^2$, получим $\dot{V} = \alpha[x - w]\text{arctg}(x/\epsilon)x^2 < 0$ при $x \in D_S$ и $\dot{V} > 0$ при $x \in D_U$.

4. Рассмотрим функцию плотности $\rho(x, t) = -\alpha \ln \frac{\bar{w}(t)-x(t)}{x(t)-\underline{w}(t)}$ с непрерывными функциями $\bar{w}(t) > \underline{w}(t) > 0$. Обозначим: $w = 0,5[\bar{w} + \underline{w}]$, где $\rho(x, t) = 0$ при $x = w$ и любых t . Функция $\rho(x, t)$ принимает положительные значения в области $D_S = \{x \in \mathbb{R} : w < x < \bar{w}\}$ и отрицательные в области $D_U = \{x \in \mathbb{R} : \underline{w} < x < w\}$, что гарантирует слежение $x(t)$ за траекторией $w(t)$. В заштрихованной области система (2) не имеет решений (см. рис. 2 справа). При этом траектории системы никогда не покидают область $D_S \cup D_U$, так как $|\rho(x, t)| \rightarrow +\infty$ при приближении x к границам \underline{w} и \bar{w} . Выбрав квадратичную функцию $V = 0,5x^2$, получим $\dot{V} = \alpha \ln \frac{\bar{w}-x}{x-\underline{w}}x^2 < 0$ при $x \in D_S$ и $\dot{V} > 0$ при $x \in D_U$, что подтверждает слежение $x(t)$ за траекторией $w(t)$.

5. Теперь рассмотрим $\rho(x, t) = \alpha \ln(x(t) - g(t))$ с непрерывной функцией $g(t) > 0$. Обозначим: $w = 1 + g$, где $\rho(x, t) = 0$ при $x = w$ и любых t . Функция $\rho(x, t)$ принимает положительные значения в области $D_S = \{x \in \mathbb{R}_+ :$

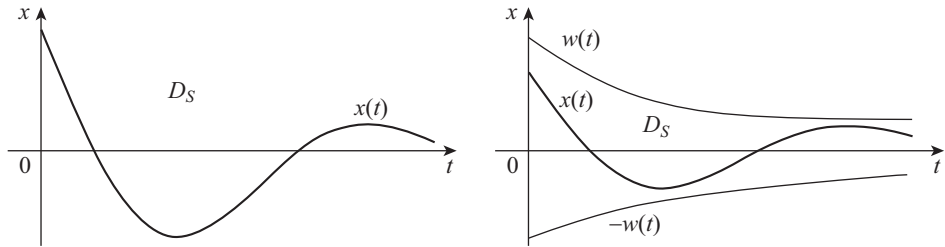


Рис. 1. Переходные процессы в системе (2) с функцией плотности $\rho(x, t) = \alpha$ (слева) и $\rho(x, t) = \frac{\alpha}{w(t) - |x(t)|}$ (справа).

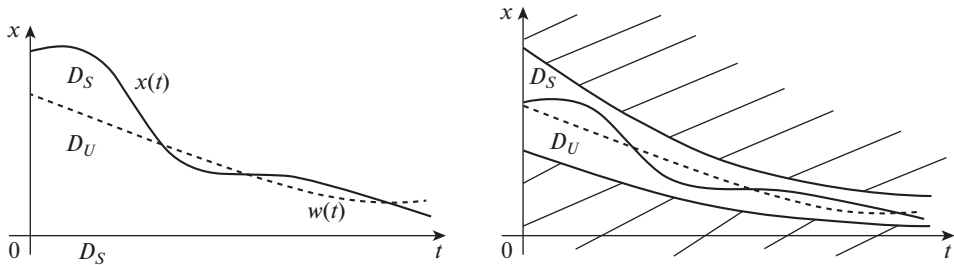


Рис. 2. Переходные процессы в системе (2) с функцией плотности $\rho(x, t) = \alpha[x(t) - w(t)] \operatorname{arctg}(x/\epsilon)$ (слева) и $\rho(x, t) = \alpha \ln \frac{\bar{w}(t) - x(t)}{x(t) - \underline{w}(t)}$ (справа).

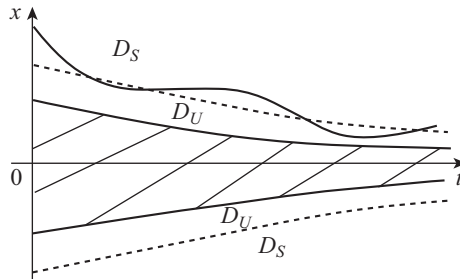


Рис. 3. Переходной процесс в системе (2) с функцией плотности $\rho(x, t) = \alpha \ln(x(t) - g(t))$.

: $w < x < +\infty$ } и отрицательные значения в области $D_U = \{x \in \mathbb{R}_+ : g < x < w\}$, что гарантирует слежение $x(t)$ за траекторией $w(t)$ (см. рис. 3). При этом траектории системы никогда не входят в заштрихованную область, так как при приближении к границе $g(t)$ имеем $\rho(x, t) \rightarrow -\infty$, что обеспечивает движение $x(t)$ вдоль поверхности (см. рис. 3). Выбрав квадратичную функцию $V = 0,5x^2$, получим $\dot{V} = -\alpha \ln(x - g)x^2 < 0$ при $x \in D_S$ и $\dot{V} > 0$ при $x \in D_U$.

Замечание 1. Здесь рассмотрим вопрос о возможности исследования динамических систем с разрывной правой частью по t и x , в том числе и функции плотности $\rho(x, t)$.

Рассмотрим для начала неавтономную систему общего вида $\dot{x} = f(x, t)$ с $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть функция $f(x, t)$ определена в некоторой открытой области D

переменных (x, t) . Будем говорить, что она удовлетворяет условию Каратеодори [15], если $f(x, t)$ непрерывна по x для почти всех t , кусочно-непрерывна по t для всех x (достаточно предполагать измеримость по t), а также для любого компактного множества $G \subset D$ найдется неотрицательная интегрируемая функция $m(t)$ такая, что $|f(x, t)| \leq m(t)$ для всех $(x, t) \in G$.

Если функция $f(x, t)$ удовлетворяет условию Каратеодори, то по теоремам 1.1.1 и 1.1.4 из [15] для любых начальных данных из области D существует локально абсолютно непрерывное решение $x(t)$ системы $\dot{x} = f(x, t)$. Уравнение $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ выполнено для почти всех t . Производная $x(t)$ может не существовать для тех t , в которых функция $f(x, t)$ терпит разрыв по t . Кроме того, либо решение $x(t)$ определено на $[0, +\infty)$, либо при некотором конечном t_0 решение $x(t)$ стремится к границе области D при $t \rightarrow t_0$. Если функция $f(x, t)$ локально липшицева по x , то по теореме 1.1.2 из [15] решение будет единственным.

Теперь рассмотрим систему (2) из примера 1. Если функция $\rho(x, t)$ удовлетворяет условию Каратеодори, то у этой системы существует локально абсолютно непрерывное решение, а если функция $\rho(x, t)$ вдобавок локально Липшицева по x , то такое решение будет единственным.

Рассмотрим случай 2 примера 1. В качестве области D определим множество всех тех (x, t) , которые не принадлежат замыканиям графиков функции $w(t)$ и $-w(t)$. Если, например, $w(t) = 2$ при $t \in [0, 1]$ и $w(t) = 1$ при $t > 1$, то из области D нужно исключить не только график $w(t)$, но и точку $(1, 1)$. Функция $\rho(x, t)$ удовлетворяет условию Каратеодори и является локально липшицевой по x . Поэтому у уравнения $\dot{x} = -\rho(x, t)x$ существует единственное локально абсолютно непрерывное решение, которое либо определено на всей оси, либо при некотором конечном t_0 расстояние от $(x(t), t)$ до границы D будет стремиться к нулю при $t \rightarrow t_0$.

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(x) = 0,5x^2$. Берем решение $x(t)$ и рассматриваем функцию $V(x(t))$, которая является локально абсолютно непрерывной. По теореме о дифференцируемости сложной функции для почти всех t будет выполнено $\dot{V} = -\rho(x(t), t)x(t)^2 \leq 0$. В силу абсолютной непрерывности для любого t будет выполнено $V(t) - V(0) = \int_0^t \dot{V}(s)ds \leq 0$ (доказательство того, что абсолютно непрерывная функция «восстанавливается» через интеграл по своей производной см. в [16]). Из неравенства $V(t) \leq V(0)$ следует, что положение равновесия устойчиво. Его асимптотическую устойчивость можно доказать с помощью теоремы ЛаСалля для неавтономных систем (теорема 1 в [17]) в случае, если множество $\{x : |x| < w(t)\}$ содержит трубку постоянной ненулевой ширины и функция $w(t)$ не является неограниченно возрастающей. Если же $w(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то асимптотическая устойчивость следует просто из того факта, что решение остается в области D_S .

Здесь, однако, требуется оговорка, связанная с кусочной непрерывностью $w(t)$. Может так случиться, что решения из области D_S будут выходить из этой области. Например, пусть $w(t) = 2$ при $t \in [0, t_0]$ и $w(t) = 1$ при

$t > t_0$. Если t_0 – достаточно малая величина, а начальное условие $x(0)$ близко к 2 или -2 , то при $t \rightarrow t_0$ траектория $x(t)$ просто «врезается в стенку», образованную скачком функции $w(t)$. Теорема существования гарантирует, что это решение продолжимо дальше, но анализ устойчивости в данном случае уже неприменим. Такое решение «выпрыгнет» из области D_S и начнет неограниченно возрастать.

Если функция $w(t)$ непрерывна, то нетрудно показать, что решения с начальными условиями из D_S не выходят из области D_S . Однако для кусочно-непрерывной функции $w(t)$ это, вообще говоря, неверно. Если у функции $w(t)$ много скачков, то может оказаться так, что некоторые решения, начинающиеся в D_S , выпрыгивают из этой области, когда «врезаются в стенки», образованные скачками функции $w(t)$. Если же решение остается в области D_S , то оно будет стремиться к положению равновесия.

При рассмотрении дифференциальных уравнений с разрывной правой частью по x (здесь же можно и по t [18, 19]) необходимо понимать решения таких систем в смысле Филиппова [15]. Тогда в случае 2 примера 1 можно рассматривать функцию $\rho(x, t) = \alpha[x(t) - w(t)]\text{sign}(x)$, где $\text{sign}(\cdot)$ – знаковая функция. Устойчивость разрывных неавтономных систем подробно изучалась, например, в [18–21].

Таким образом, в настоящей статье можно рассматривать динамические системы с разрывной правой частью, в том числе и разрывные функции $\rho(x, t)$. Однако такие системы усложняют анализ, что связано с обоснованием выбора начальных условий, частоты и величины скачков функции и т.д. Поскольку статья посвящена исследованию поведения динамических систем в зависимости от свойств функции плотности, то, ради простоты, все теоретические результаты будут сформулированы для динамических систем с непрерывной правой частью по t и локально-липишицевой по x . Все же в качестве иллюстрации некоторые примеры могут содержать разрывные правые части.

Итак, в примере 1 показано, как функция плотности $\rho(x, t)$, заданная в пространстве (x, t) , может качественно влиять на переходные процессы исходной системы (1). В следующем примере покажем, что функция плотности не обязательно должна умножаться на всю правую часть, как в примере 1 (см. (1) и (2)), а может явно или неявно присутствовать в правой части системы.

Пример 2. Исследуем систему

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \rho_1(x, t)x_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \rho_2(x, t)x_2, \end{aligned}$$

где $\rho_1(x, t)$ и $\rho_2(x, t)$ – непрерывные функции по t и x на $\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$. Рассмотрим квадратичную функцию

$$(4) \quad V = 0,5(x_1^2 + x_2^2).$$

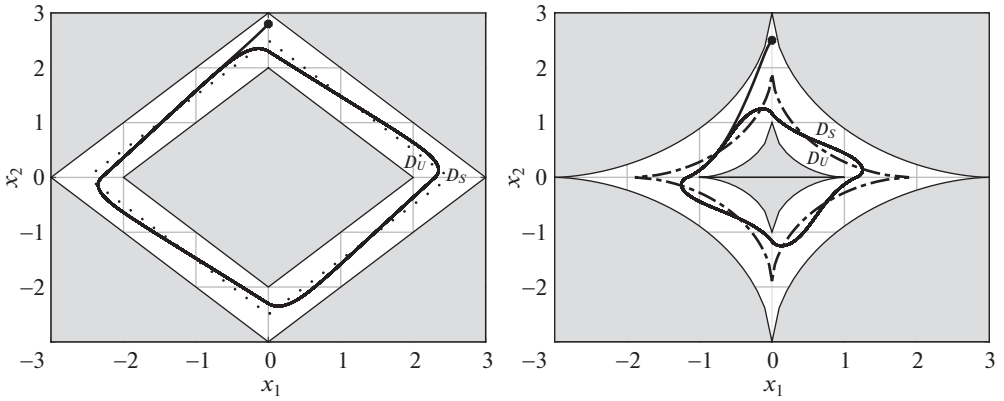


Рис. 4. Фазовая траектория системы (3) с функциями плотности $\rho(x, t) = \ln \frac{3-|x_1|-|x_2|}{|x_1|+|x_2|-2}$ (слева) и $\rho(x, t) = \ln \frac{3^{0,6}-|x_1|^{0,6}-|x_2|^{0,6}}{|x_1|^{0,6}+|x_2|^{0,6}-1}$ (справа).

Возьмем от нее полную производную по времени вдоль решений (3). В результате получим

$$(5) \quad \dot{V} = -\rho_1 x_1^2 - \rho_2 x_2^2.$$

1. Пусть $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \ln \frac{\bar{g}-|x_1|^\beta-|x_2|^\beta}{|x_1|^\beta+|x_2|^\beta-\underline{g}}$, где $\beta > 0$ (при $0 < \beta < 1$ см. замечание 1) и $\bar{g}(t) > \underline{g}(t) > 0$ – непрерывные функции. Имеем $\rho = 0$ при $|x_1|^\beta + |x_2|^\beta = \underline{g}$, где $\underline{g} = 0,5(\bar{g} + \underline{g})$. Тогда $\dot{V} < 0$, где $\rho(x, t) > 0$, т.е. в области $D_S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \underline{g} < |x_1|^\beta + |x_2|^\beta < \bar{g}\}$, а также $\dot{V} > 0$, где $\rho(x, t) < 0$, т.е. в области $D_U = \{x \in \mathbb{R}^2 : \bar{g} < |x_1|^\beta + |x_2|^\beta < \underline{g}\}$. В данном случае функция плотности $\rho(x, t)$ в явном виде присутствует в системе (3), но не умножается на всю правую часть, как в примере 1. На рис. 4 приведены результаты моделирования для $\beta = 1$, $\bar{g} = 3$, $\underline{g} = 2$ (слева) и $\beta = 0,6$, $\bar{g} = 3^{0,6}$, $\underline{g} = 1$ (справа) при $x(0) = \text{col}\{0, 2, 5\}$.

Здесь и далее:

- серые области на рисунках означают, что функция плотности выбрана так, что в данных областях нет решений системы (на границе данной области значение плотности возрастает до бесконечности);
- точечная кривая соответствует нулевому значению функции плотности и, соответственно, данная кривая является границей разделения устойчивой D_S и неустойчивой D_U областей.

2. Пусть $\rho_1 = 1 - x_1^2$ и $\rho_2 = -x_1^2$. Тогда $\dot{V} = -\rho(x, t)x_1^2 < 0$, где $\rho(x, t) = x_1^2 + x_2^2 - 1 > 0$ в области $D_S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1 \text{ и } x_1 \neq 0\}$, а также $\dot{V} > 0$, где $\rho(x, t) < 0$ в области $D_U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1 \text{ и } x_1 \neq 0\}$. В данном случае функция плотности $\rho(x, t)$ присутствует неявно в (3) в отличие от предыдущего случая. Однако в отличие от предыдущего случая, значение функции плотности не оказывает влияние на систему (3) всюду (т.е. $\dot{V} = 0$ при $x_1 = 0$ независимо от значения ρ). На рис. 5 приведены результаты моделирования при $x(0) = \text{col}\{2, 1\}$.

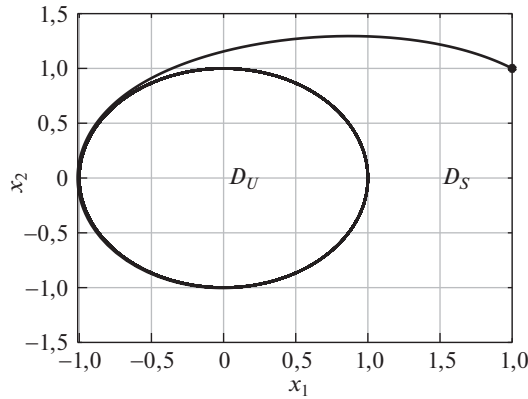


Рис. 5. Фазовая траектория системы (3) с функцией плотности $\rho(x, t) = x_1^2 + x_2^2 - 1$.

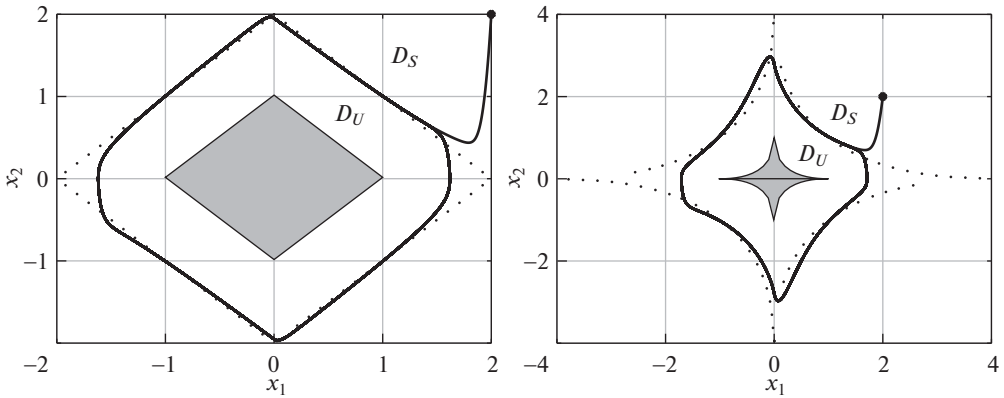


Рис. 6. Фазовая траектория системы (3) с функциями плотности $\rho(x, t) = 20 \ln(|x_1| + |x_2| - 1)$ (слева) и $\rho(x, t) = 20 \ln(|x_1|^{0,5} + |x_2|^{0,5} - 1)$ (справа).

3. Пусть $\rho_1 = \alpha \ln(|x_1|^\beta + |x_2|^\beta - 1)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (при $0 < \beta < 1$ см. замечание 1) и $\rho_2 = 0$. Тогда $\dot{V} = -\rho(x, t)x_1^2 < 0$, где $\rho(x, t) = \alpha \ln(|x_1|^\beta + |x_2|^\beta - 1) > 0$ в области $D_S = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^\beta + |x_2|^\beta > 2 \text{ и } x_1 \neq 0\}$, а также $\dot{V} > 0$, где $\rho(x, t) < 0$ в области $D_U = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x_1|^\beta + |x_2|^\beta < 2 \text{ и } x_1 \neq 0\}$. В данном случае функция плотности $\rho(x, t)$ присутствует всего лишь в одном из уравнений (3) в отличие от случаев 1 и 2. Однако, как и в случае 2, функция плотности не оказывает влияние на систему (3) всюду. На рис. 6 приведены результаты моделирования для $\beta = 1$ (слева) и $\beta = 0,5$ (справа) при $\alpha = 20$ и $x(0) = \text{col}\{2, 2\}$.

Теперь рассмотрим динамическую систему вида

$$(6) \quad \dot{x} = f(x, t),$$

где $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, функция $f : D \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная по t и локально липшицева по x на $D \times [0, +\infty)$. Относительно возможности рассмотрения систем (6) с разрывной правой частью см. замечание 1.

Определение 1. Система (6) называется плотностной с функцией плотности $\rho(x, t) : D \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, если существует непрерывно-дифференцируемая функция $V(x, t) : D \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$(a) \quad w_1(x) \leq V(x, t) \leq w_2(x),$$

$$(б) \quad \dot{V} \leq \rho(x, t)W_1(x) \leq 0 \quad \text{или} \quad \dot{V} \geq \rho(x, t)W_2(x) \geq 0$$

для любых $t \geq 0$ и $x \in D$. Здесь $\rho(x, t)$ – непрерывная по t и локально-липшицева по x функция, $w_1(x)$ и $w_2(x)$ – положительно определенные функции, $W_1(x)$ и $W_2(x)$ – ненулевые (за исключением в положениях равновесия) непрерывные функции в D .

Определение 2. Если в определении 1 функции $W_1(x)$ и $W_2(x)$ непрерывные в D , то система (6) называется слабо плотностной.

Определение 3. Если в условии (б) определения 1 выполнено $\dot{V} \leq \rho(x, t)W_1(x) < 0$ или $\dot{V} \geq \rho(x, t)W_2(x) > 0$, то систему (6) будем называть строго плотностной.

Определение 4. Если $\dot{V} \leq \rho(x, t)W_1(x) \leq 0$ в области $D_S \times [0, +\infty)$, то функцию плотности $\rho(x, t)$ и область D_S будем называть устойчивыми. Если $\dot{V} \geq \rho(x, t)W_2(x) > 0$ в области $D_U \times [0, +\infty)$, то функцию плотности $\rho(x, t)$ и область D_U будем называть неустойчивыми.

Утверждение 1. Пусть в областях D_S и D_U система (6) строго плотностная. Если для каждого t выполнено условие $V(x_s, t) - V(x_u, t) > 0$, где $x_s \in D_S$ и $x_u \in D_U$, то траектории системы притягиваются к границе разделения областей D_S и D_U . Если для системы (6) для каждого t выполнено условие $V(x_s, t) - V(x_u, t) < 0$, то траектории системы отдаляются от границы разделения областей D_S и D_U .

Доказательство. Пусть выполнено условие $V(x_s, t) - V(x_u, t) > 0$ для каждого $t \geq 0$, где $x_s \in D_S$ и $x_u \in D_U$. Так как система строго плотностная, то согласно определению 3 в области D_S выполнено $\dot{V} \leq \rho(x, t)W_1(x) < 0$, а в области D_U выполнено $\dot{V} \geq \rho(x, t)W_2(x) > 0$. Значит, граница разделения областей D_S и D_U является множеством, к которому притягиваются траектории системы.

Пусть выполнено $V(x_s, t) - V(x_u, t) < 0$ для каждого $t \geq 0$, где $x_s \in D_S$ и $x_u \in D_U$. Согласно определению 3 в области D_S выполнено $\dot{V} \leq \rho(x, t)W_1(x) < 0$, а в области D_U выполнено $\dot{V} \geq -\rho(x, t)W_2(x) > 0$. Значит, граница разделения областей D_S и D_U является множеством, которое покидают траектории системы.

Замечание 2. Отметим, что в утверждении 1 и в его доказательстве под притяжением траекторий к некоторому множеству могут рассматриваться случаи приближения траекторий к данному множеству с течением времени или нахождения траекторий в некоторой окрестности данного множества. Причем размер данной окрестности может оставаться постоянным или увеличиваться с течением времени. Это зависит от значения плотности пространства. Приведем несколько предельных случаев:

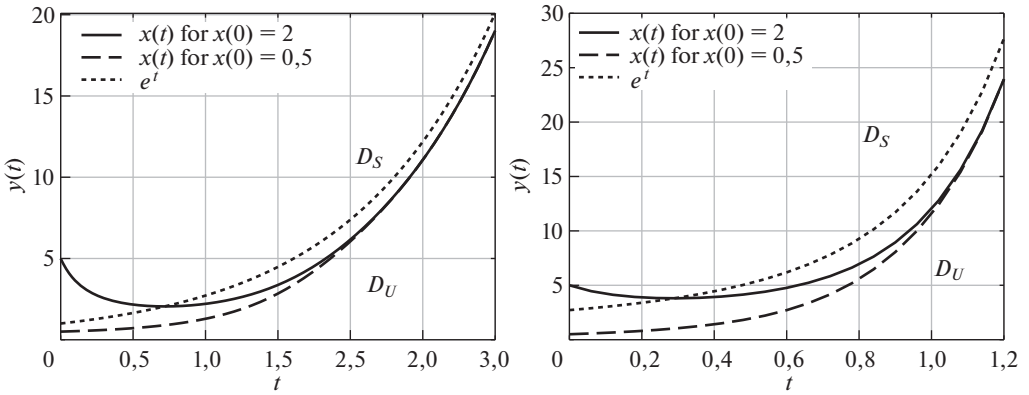


Рис. 7. Слежение $x(t)$ за неограниченными сигналами $w(t) = e^t$ (слева) и $w(t) = e^{e^t}$ (справа).

- если в окрестности границы разделения областей D_S и D_U значение функции плотности убывает до нуля, то траектории системы не будут приближаться к данной границе. Поэтому они могут находиться как в окрестности данной границы, так и отдаляться от нее;
- если в окрестности границы разделения областей D_S и D_U значение функции плотности неограниченно возрастает, то траектории системы будут приближаться к данной границе.

Для иллюстрации сказанного в утверждении 1 и замечании 2 рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Рассмотрим снова систему (2), где только $x \in \mathbb{R}_+$.

Выберем квадратичную функцию $V = 0,5x^2$. Тогда $\dot{V} = -\rho(x, t)x^2$. Значит, $\dot{V} < 0$ в области $D_S = \{x, t \in \mathbb{R}_+ : \rho(x, t) > 0\}$ и $\dot{V} > 0$ в области $D_U = \{x, t \in \mathbb{R}_+ : \rho(x, t) < 0\}$.

Согласно определению 3 система (2) строго плотностная при $x \in \mathbb{R}_+$. Проанализируем утверждение 1. Зафиксируем произвольное $t = t_1$. Тогда $V(x_s(t_1)) - V(x_u(t_1)) > 0$. Очевидно, что данная разность будет справедлива для любых фиксированных t . Значит, согласно утверждению 1 траектории системы будут притягиваться к границе разделения D_S и D_U .

Пусть функция плотности задана в виде $\rho(x, t) = x - w$, $w(t) = e^t$. В этом случае $\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - x(t)) = \text{const}$ (см. рис. 7 слева). Если $w(t) = e^{e^t}$, то разница между $w(t)$ и $x(t)$ увеличивается с течением времени (см. рис. 7 справа). Это связано с тем, что $w(t)$ – неограниченная функция, а плотность $|\rho(x, t)|$ уменьшается при приближении x к w . В результате $x(t)$ «пытается приблизиться» к $w(t)$, но не может из-за низкой плотности пространства в окрестности $w(t)$ и большой скорости изменения $w(t)$.

Пусть функция плотности задана в виде $\rho = w \arctg \frac{x-w}{\epsilon}$ (или $\rho = w \text{sign}(x - w)$ с учетом замечания 1), $\epsilon > 0$ – достаточно большое число, $w(t) = e^t$ или $w(t) = e^{e^t}$. В этом случае плотность пространства в окрестно-

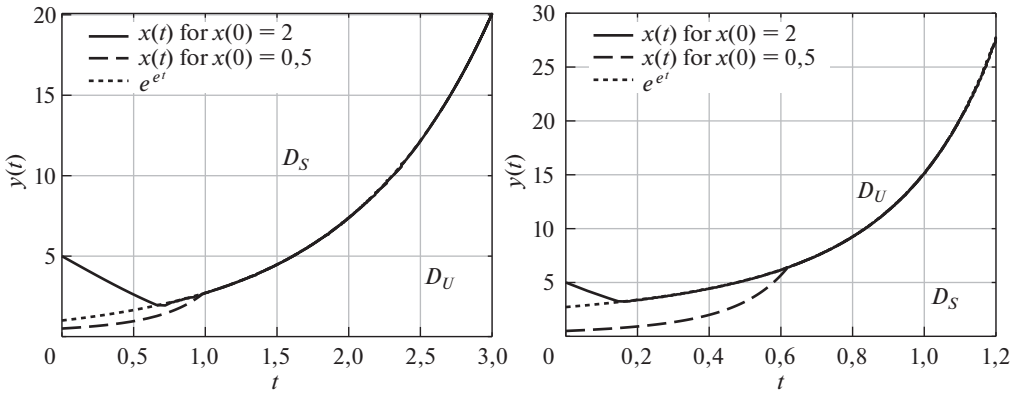


Рис. 8. Слежение $x(t)$ за неограниченными сигналами $w(t) = e^t$ (слева) и $w(t) = e^{e^t}$ (справа).

сти $w(t)$ увеличивается с увеличением $w(t)$, что гарантирует приближение x к w при $t \rightarrow \infty$ (см. рис. 8).

Также при изучении плотностных систем будем выделять особые области. Они уже рассматривались ранее в качестве серых областей на рисунках. Теперь определим их.

Определение 5. Если $\dot{V} \leq \rho(x, t)W_1(x) < 0$ в окрестности области $D_{bh} \times [0, +\infty)$, в данной области отсутствуют решения (6) и при приближении к данной области значение функции плотности возрастает до бесконечности, то область D_{bh} будем называть абсолютно устойчивой.

Определение 6. Если $\dot{V} \geq \rho(x, t)W_2(x) > 0$ в окрестности области $D_{wh} \times [0, +\infty)$, в данной области отсутствуют решения (6) и при приближении к данной области значение функции плотности возрастает до бесконечности, то область D_{wh} будем называть абсолютно неустойчивой.

Пример 4. Рассмотрим систему (3), где $\rho_1(x, t) = \rho_2(x, t) = \rho(x)$. Выберем квадратичную функцию (4). Тогда $\dot{V} = -\rho(x)(x_1^2 + x_2^2)$.

Если $\rho(x) = e^{(x_1^2 + x_2^2 - 1)^{-0.98}}$, то все траектории стремятся к области $D_{bh} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ (см. рис. 9 слева). То есть из любых начальных условий траектории системы будут притянуты к D_{bh} , где значение функции плотности возрастает до бесконечности при приближении к границе данной области. Если $\rho(x) = -\ln(x_1^2 + x_2^2 - 1)$, то траектории с начальными условиями из области $x_1^2 + x_2^2 \geq \sqrt{2}$ остаются в данной области, но все траектории с начальными условиями из области $1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq \sqrt{2}$ не могут покинуть данной области и будут притянуты к области $D_{bh} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ (см. рис. 9 справа), где функция плотности возрастает до бесконечности при приближении к границе D_{bh} .

Если $\rho(x) = -e^{(x_1^2 + x_2^2 - 1)^{-0.98}}$, то все траектории стремятся от области $D_{wh} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ (см. рис. 10 слева) и никогда не смогут приблизиться к границе данной области, где функция плотности возрастет до

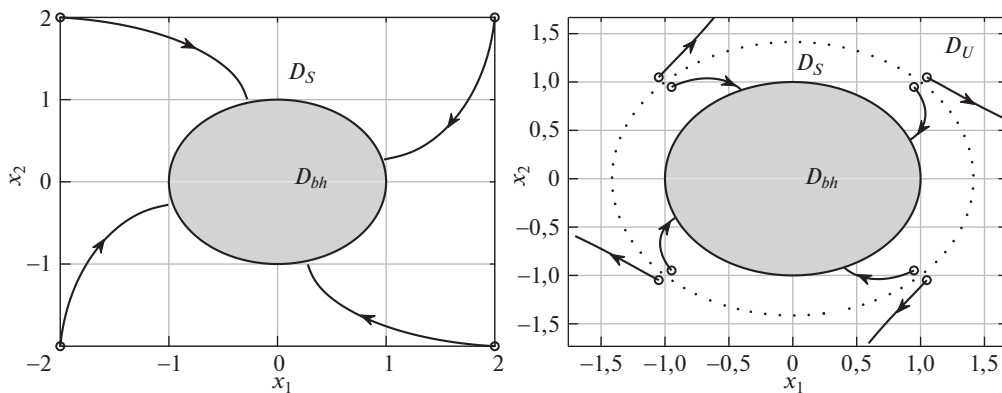


Рис. 9. Фазовый портрет системы (3) с плотностью $\rho(x) = e^{(x_1^2+x_2^2-1)^{-0,98}}$ (слева) и с плотностью $\rho(x) = -\ln(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ (справа).

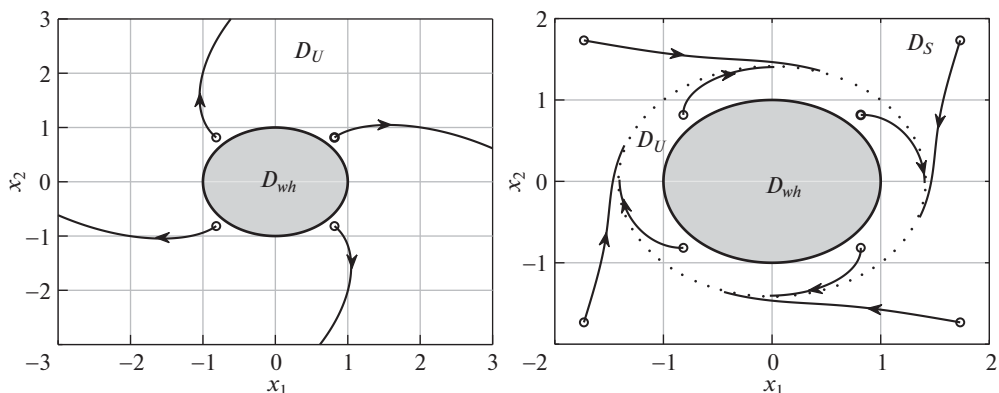


Рис. 10. Фазовый портрет системы (3) с плотностью $\rho(x) = -e^{(x_1^2+x_2^2-1)^{-0,98}}$ (слева) и с плотностью $\rho(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ (справа).

минус бесконечности при приближении к границе D_{wh} . Если $\rho(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 1)$, то траектории с начальными условиями из области $x_1^2 + x_2^2 \geq \sqrt{2}$ остаются в данной области, но все траектории с начальными условиями из области $1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq \sqrt{2}$ стремятся от области $D_{wh} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ (см. рис. 10 справа).

Замечание 3. Поясним физический смысл рассматриваемых систем. Если функция плотности явно присутствует в правой части уравнения системы, например, в виде $\dot{x} = \rho(x, t)f(x, t)$, то значение плотности пространства напрямую влияет на скорость фазового потока. Так, если $\rho(x, t) = 1$, то имеем исходную систему вида $\dot{x} = f(x, t)$. Если $\rho(x, t) > 0$, то присутствие функции плотности может качественно не влиять на положения равновесия, но может оказывать влияние на фазовый портрет. При $0 < \rho(x, t) < 1$ значение вектора фазовой скорости уменьшается из-за того, что уменьшается плотность пространства. При $\rho(x, t) > 1$, наоборот, значение вектора фазо-

вой скорости увеличивается из-за увеличения плотности пространства. При изменении знака функции плотности качественно меняется фазовый портрет.

Условие (б) определения 1 можно интерпретировать как скорость изменения фазового объема, задаваемого с помощью функции $V(x, t)$, с учетом плотности пространства.

Приведем модели реальных процессов:

- уравнение маятника $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2$, где x_1 – угол отклонения маятника от вертикальной оси, x_2 – угловая скорость маятника, g – ускорение свободного падения, l – длина маятника, k – коэффициент трения [22]. Выбрав функцию Ляпунова в виде полной энергии системы $V = \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) + 0,5x_2^2$, получим $\dot{V} = -\frac{k}{m}x_2^2$. Если положить функцию плотности $\rho(x, t) = k$, то при отсутствии трения ($\rho(x, t) = 0$) имеем незатухающие колебания, а при наличии трения ($\rho(x, t) \neq 0$) – затухающие;
- в [25] виды моделей размножения можно записать как $\dot{x} = \rho(x)x$, где x – величина биологической популяции. При $\rho(x) = k > 0$ имеем модель нормального размножения, при $\rho(x) = kx$ – модель взрыва, при $\rho(x) = 1 - x$ – модель логистической кривой;
- абсолютно устойчивые и абсолютно неустойчивые области из определений 5 и 6 можно встретить в качестве простейших моделей черных и белых дыр соответственно [26], обладающих большой плотностью и гравитацией. Поэтому плотностные системы также можно рассматривать в качестве *гравитационных систем*, где $\rho(x, t)$ – *функция гравитации*. Это означает, что на поведение систем может влиять не плотность пространства, а гравитационное поле, создаваемое плотным телом. В связи с этим принципы построения управления с использованием функции плотности в следующих разделах можно рассматривать как управление с использованием функции гравитации. Независимо от названия функции $\rho(x, t)$ и соответствующих систем все математические описания и выводы сохраняются.

Замечание 4. Во введении отмечалось, что предложенные в разделе 2 понятия функции плотности, плотностных систем и их свойства обобщают результаты [1–8, 10–14]. Разберем это более подробно.

- В [1–8] для исследования устойчивости системы $\dot{x} = f(x)$ рассматривается новая система $\dot{x} = \rho(x)f(x)$, которая затем исследуется либо с помощью дивергентных методов, либо с помощью метода функций Ляпунова. В настоящем разделе для анализа систем $\dot{x} = f(x)$ используются зависимости $\dot{V} \leq \rho(x, t)W_1(x)$ или $\dot{V} \geq \rho(x, t)W_1(x)$ (см. определение 1 и пример 2), что не требует умножения функции плотности на всю правую часть исследуемой системы.
- В [10–14] изучается устойчивость систем вида $\dot{x} = f(x, \rho(x, t))$, где функция плотности в явном виде присутствует в правой части. Предложенные в настоящей статье результаты допускают неявное присутствие функции плотности в правой части системы (см. случай 2 в примере 2).

- В [10–14] специальным выбором функции плотности можно гарантировать нахождение решений системы только в ограниченном множестве без запретных областей. При этом границы данных множеств задаются непрерывно дифференцируемыми функциями по t и x . В настоящей статье допускается рассмотрение неограниченных множеств (см. случай 5 в примере 1 и случай 3 в примере 2) с запретными областями (см. случаи 4 и 5 в примере 1, случаи 1 и 3 в примере 2). Причем границы данных множеств могут быть заданы непрерывными функциями по t и локально-липищевыми по x . Если рассматривать решения исследуемых систем в смысле Филиппова, то допускается исследование систем с разрывной правой частью, см. замечание 1.

Таким образом, предложенные новые понятия функции плотности и плотностной системы позволяют по-новому взглянуть на некоторый класс динамических систем, который шире, чем в [1–8, 10–14]. Также эволюцию динамических систем теперь можно рассматривать и влиять на нее с учетом плотности пространства.

Полученные в данном разделе результаты могут быть использованы не только для анализа динамических систем, но и для синтеза законов управления. Этому будет посвящен следующий раздел.

3. Плотностное управление

Рассмотрим несколько примеров синтеза законов управления с целью получения замкнутых систем, которые описываются плотностными системами.

3.1. Объекты с известными параметрами

Рассмотрим объект управления

$$(7) \quad Q(p)y(t) = R(p)u(t),$$

где $y \in \mathbb{R}$ – выходной сигнал, $u \in \mathbb{R}$ – сигнал управления, $Q(p)$ и $R(p)$ – линейные дифференциальные операторы с постоянными известными коэффициентами, $R(\lambda)$ – гурвицевый полином.

Если относительная степень объекта (7) равна 1 (т.е. $\deg Q(p) - \deg R(p) = 1$), то закон управления

$$(8) \quad u(t) = -\frac{Q(p)}{pR(p)}\rho(y, t)y(t)$$

приводит систему (7) к виду

$$(9) \quad \dot{y}(t) = -\rho(y, t)y(t),$$

которая имеет структуру плотностной системы. В частности, примеры задания функции плотности $\rho(y, t)$ были рассмотрены в примере 1.

Если относительная степень объекта (7) больше 1 (т.е. $\deg Q(p) - \deg R(p) = \gamma > 1$), то перепишем закон управления (8) в виде

$$(10) \quad u(t) = -\frac{Q(p)}{pR(p)(\mu p + 1)^{\gamma-1}}\rho(y, t)y(t)$$

где $\mu > 0$ – достаточно малое число. В результате получим замкнутую систему вида

$$(11) \quad \dot{y}(t) = -\frac{1}{(\mu p + 1)^{\gamma-1}}\rho(y, t)y(t).$$

При $\mu = 0$ система (11) имеет структуру плотностной системы (9). Если функция плотности $\rho(y, t)$ выбрана так, что решения плотностной системы (9) асимптотически устойчивы, то согласно [22, 24] существует достаточно малое $\bar{\mu} > 0$ такое, что при $0 < \mu < \bar{\mu}$ решения системы (11) достаточно близки к решению системы (9).

3.2. Объекты с неизвестными параметрами

Рассмотрим объект управления (7) с неизвестными параметрами операторов $Q(p)$ и $R(p)$, но известным значением k . Пусть относительная степень объекта равна 1. Все полученные результаты могут быть распространены на объекты с относительной степенью больше 1, например, с использованием схем [23]. В настоящей статье рассмотрим только объекты с относительной степенью 1, дабы избежать громоздких выводов по преодолению проблемы высокой относительной степени.

Перепишем операторы $Q(p)$ и $R(p)$ как $Q(p) = Q_m(p) + \Delta Q(p)$ и $R(p) = R_m(p) + \Delta R(p)$, где $Q_m(\lambda)$ и $R_m(\lambda)$ – произвольные гурвицевы многочлены порядков n и $n - 1$ соответственно, порядки $\Delta Q(p)$ и $\Delta R(p)$ соответственно равны $n - 1$ и $n - 2$. Выбрав $Q_m(\lambda)/R_m(\lambda) = \lambda + a$, $a > 0$ – известное число, и выделив целую часть в $\frac{\Delta Q(\lambda)}{Q_m(\lambda)} = k_{0y} + \frac{\Delta \tilde{Q}(\lambda)}{R_m(\lambda)}$, перепишем (7) в виде

$$(12) \quad \dot{y}(t) = -ay(t) + k \left(u(t) + \frac{\Delta R(p)}{R_m(p)}u - \frac{\Delta \tilde{Q}(p)}{R_m(p)}y - k_{0y}y \right).$$

Введем $c_0 = \text{col}\{c_{0y}, c_{0u}, k_{0y}\}$ – вектор неизвестных параметров, где $\Delta \tilde{Q}(p) = c_{0y}^T [1 \ p \ \dots \ p^{n-2}]$ и $\Delta R(p) = c_{0u}^T [1 \ p \ \dots \ p^{n-2}]$. Также рассмотрим вектор регрессии $w = \text{col}\{V_y, V_u, y\}$, составленный с помощью следующих фильтров:

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{V}_y &= FV_y + by, \\ \dot{V}_u &= FV_u + bu. \end{aligned}$$

Здесь F – матрица в форме Фробениуса с характеристическим многочленом $R_m(\lambda)$, $b = \text{col}\{0, \dots, 0, 1\}$.

Тогда с учетом введенных обозначений уравнение (12) можно переписать в виде

$$(14) \quad \dot{y}(t) = -ay(t) + k[u(t) - c_0^T w(t)].$$

Зададим закон управления

$$(15) \quad u(t) = c^T(t)w(t) + \frac{a}{k}y(t) + \rho(y, t).$$

Подставив (15) в (14), получим уравнение замкнутой системы

$$(16) \quad \dot{y}(t) = \rho(y, t) + k(c(t) - c_0)^T w(t).$$

Теорема 1. Закон управления (15) вместе с алгоритмом адаптации

$$(17) \quad \dot{c} = -\alpha y w$$

приводит объект (7) к системе плотностного вида. Если при $t \rightarrow \infty$ имеем устойчивую плотность $\rho(y, t)$ с предельным устойчивым множеством в окрестности нуля, то все сигналы в замкнутой системе будут ограниченными.

Доказательство. Выберем квадратичную функцию

$$(18) \quad V = \frac{1}{2}y^2 + \frac{k}{2\alpha}(c(t) - c_0)^T(c(t) - c_0).$$

Найдем полную производную по времени от (18) вдоль решений (16), (17) и результат запишем в виде

$$(19) \quad \dot{V} = \rho(y, t)y.$$

В итоге получили плотностную систему.

Если при $t \rightarrow \infty$ имеем устойчивую плотность $\rho(y, t)$ с предельным устойчивым множеством в окрестности нуля, то $\rho(y, t)$ выбрана так, что $\rho(y, t)y < 0$. Значит, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. Тогда из (16) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} (c(t) - c_0)^T(t)w(t) = 0$. Предельная ограниченность $V_y(t)$ следует из первого уравнения (13), предельной ограниченности $y(t)$ и гурвицевости матрицы F . Поставив (15) во второе уравнение (13), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_u &= FV_u + bc_0^T w + b(c - c_0)^T w + b\frac{a}{k}y(t) + b\rho(y, t) = \\ &= (F + bc_{0u})V_u + b \left[c_{0y}^T V_y + k_{0y}y + b(c - c_0)^T w + \frac{a}{k}y(t) + \rho(y, t) \right]. \end{aligned}$$

Матрица $F + bc_{0u}$ имеет гурвицевый характеристический многочлен $R(\lambda)$ из постановки задачи. Значит, при ограниченных слагаемых в квадратных скобках функция $V_u(t)$ предельно ограниченная. Тогда вектор регрессии $w(t)$ также предельно ограниченный. Из условия $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, предельной ограниченности $w(t)$ и (17) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{c}(t) = 0$. Следовательно, $c(t)$ предельно ограниченная функция. Тогда из (15) следует ограниченность закона управления. В результате все сигналы ограничены в замкнутой системе.

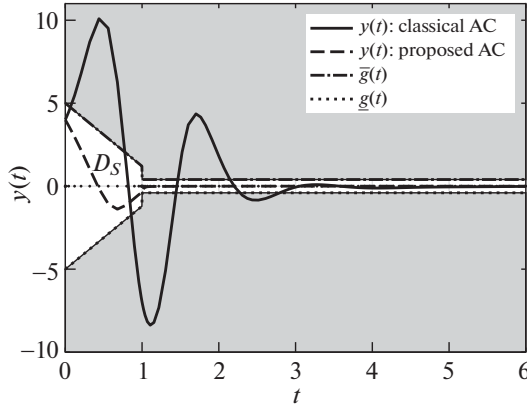


Рис. 11. Переходные процессы в адаптивной системе управления с функциями плотности $\rho(y, t) = -\alpha y$ [23] (кривая, пересекающая серую область) и $\rho(y, t) = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y}$ (кривая, находящиеся внутри трубки с штриховыми границами).

Пример 5. Рассмотрим объект управления (7) с неизвестными параметрами операторов $Q(p) = (p - 1)^3$ и $R(p) = (p + 1)^2$, известным $k = 1$ и неизвестными начальными условиями $p^2 y(0) = 1$, $py(0) = 1$, $y(0) = 4$.

Определим $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ в фильтрах (13). В алгоритме адаптации (17) зададим $\alpha = 0,1$. В законе управления (15) выберем $a = 1$.

Рассмотрим различные виды функции плотности $\rho(y, t)$ в (15).

1. При $\rho(y, t) = -\alpha y$ замкнутая система (16) имеет точку равновесия $y = 0$. Подставив $\rho(y, t)$ в (19), имеем $\dot{V} = -\alpha y^2 \leq 0$ в области $D_S = \mathbb{R}$. Получили задачу адаптивной стабилизации, которая подробно описана в [23]. На рис. 11 (см. только траекторию, входящую в серую область) приведен переходной процесс при $\alpha = 1$ и $p^2 y(0) = py(0) = 0$, $y(0) = 4$.

2. При $\rho(y, t) = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y}$, $g(t) > 0$ замкнутая система (16) имеет положение равновесия $y = 0$. Подставив $\rho(y, t)$ в (19), имеем $\dot{V} = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y} y < 0$ в области $D_S = \{y \in \mathbb{R} : -g < y < g\}$. Причем $\rho(y, t) \rightarrow -\infty$ при $y \rightarrow g$ и $\rho(y, t) \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow -g$. Получили задачу стабилизации с симметричными ограничениями $-g$ и g . На рис. 11 приведены результаты переходных процессов при $\alpha = 1$ (траектория внутри пунктирной трубки), $p^2 y(0) = py(0) = 0$, $y(0) = 4$ и $g(t) = \begin{cases} -4,6t + 5, & t \leq 1, \\ 0,4, & t > 1. \end{cases}$ Видно, что в отличие от классической схемы адаптивного управления [23] (траектория, соответствующая $\rho(y, t) = -\alpha y$) задание функции плотности вида $\rho(y, t) = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y}$ гарантирует нахождение переходного процесса в трубке в любой момент времени.

3. Рассмотрим $\rho(y, t) = \alpha \ln \frac{\bar{g}-y}{y-\underline{g}}$, где $\bar{g}(t) > \underline{g}(t)$ для всех t . Обозначим $y = w = \frac{\bar{g}+\underline{g}}{2}$. Тогда $\rho(y, t) = 0$ при $y = w$ и любых t . Подставив $\rho(y, t)$ в (19), имеем $\dot{V} = \alpha \ln \frac{\bar{g}-y}{y-\underline{g}} y < 0$ в $D_S = \{y \in \mathbb{R}_+ : w < y < \bar{g}\} \cup \{y \in \mathbb{R}_- : \underline{g} < y < w\}$ и

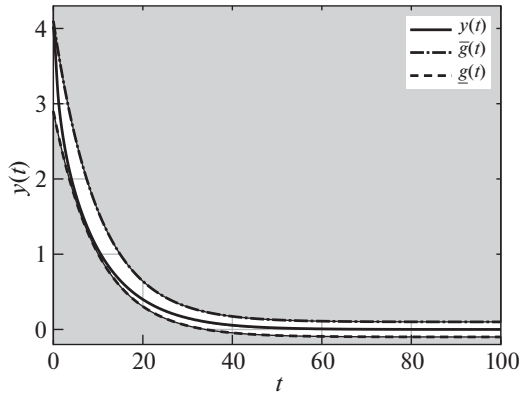


Рис. 12. Переходные процессы в адаптивной системе управления с функцией плотности $\rho(y, t) = -\alpha \ln \frac{\bar{g}-y}{y-\underline{g}}$.

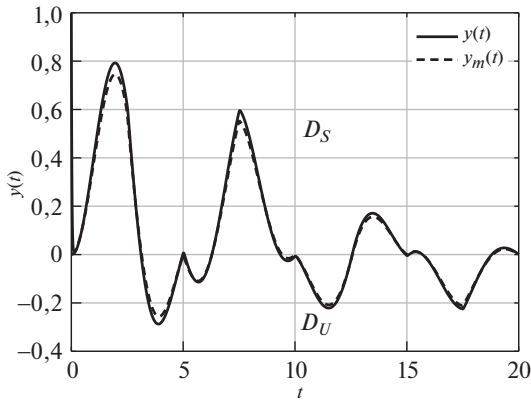


Рис. 13. Переходные процессы в адаптивной системе управления с функцией плотности $\rho(y, t) = -\alpha(y - y_m)$.

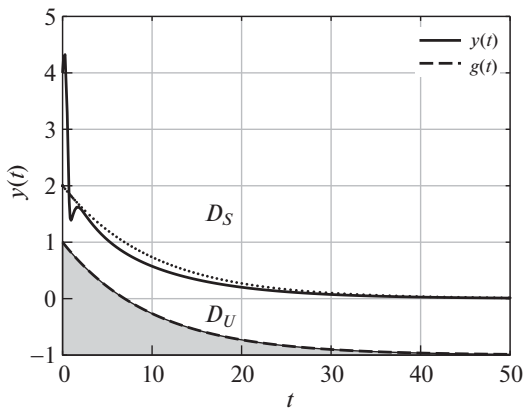


Рис. 14. Переходные процессы в адаптивной системе управления с функцией плотности $\rho(y, t) = -\alpha \ln(y - g)$.

$\dot{V} > 0$ в $D_U = \{y \in \mathbb{R}_+ : \underline{g} < y < w\} \cup \{y \in \mathbb{R}_- : w < y < \bar{g}\}$. Причем $\rho(y, t) \rightarrow -\infty$ при $y \rightarrow \bar{g}$ и $\rho(y, t) \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow \underline{g}$, если $y \in \mathbb{R}_+$, а также $\rho(y, t) \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow \bar{g}$ и $\rho(y, t) \rightarrow -\infty$ при $y \rightarrow \underline{g}$, если $y \in \mathbb{R}_-$. Получили задачу стабилизации с несимметричными ограничениями \bar{g} и \underline{g} . На рис. 12 приведен переходной процесс при $\alpha = 5$, $\bar{g} = 4e^{-0,1t} + 0,1$, $\underline{g} = 3e^{-0,1t} - 0,1$ и $p^2y(0) = py(0) = 0$, $y(0) = 4$.

4. Пусть $\rho(y, t) = -\alpha(y - y_m)$. Тогда $\rho(y, t) = 0$ при $y = y_m$ и любых t . Подставив $\rho(y, t)$ в (19), имеем $\dot{V} = -\alpha(y - y_m)y < 0$ в $D_S = \{y \in \mathbb{R}_+ : y > y_m\} \cup \{y \in \mathbb{R}_- : y < y_m\}$ и $\dot{V} > 0$ в $D_U = \{y \in \mathbb{R}_+ : y < y_m\} \cup \{y \in \mathbb{R}_- : y > y_m\}$. Получили задачу слежения y за y_m . На рис. 13 приведен переходной процесс для $\alpha = 50$, $y_m = e^{-0,1t} \sin(t)P(t)$, $P(t) \in [0; 1,25]$ – генератор треугольных импульсов (с равнобедренными треугольниками) с периодом 5 с и $p^2y(0) = py(0) = 0$, $y(0) = 1$.

5. Рассмотрим $\rho(y, t) = -\alpha \ln(y - g)$, $g(t) \geq -1$. Тогда $\rho(y, t) = 0$ при $y = g + 1$ и любых t . Подставив $\rho(y, t)$ в (19), имеем $\dot{V} = -\alpha \ln(y - g)y < 0$ в $D_S = \{y \in \mathbb{R}_+ : y > g + 1\}$ и $\dot{V} > 0$ в $D_U = \{y \in \mathbb{R}_+ : y > g + 1\}$. Причем $\rho(y, t) \rightarrow -\infty$ при $y \rightarrow g$. Получим задачу спуска $x(t)$ вдоль поверхности с границей $g(t)$. На рис. 14 приведен переходной процесс при $\alpha = 10$, $g = 2e^{-0,1t} - 1$ и $p^2y(0) = py(0) = 0$, $y(0) = 4$.

3.3. Сравнение полученных законов управления с некоторыми существующими

Сравним предложенные законы управления (8), (10) и (13), (15), (17) с законами управления, полученными с использованием метода барьерных функций Ляпунова (от англ. «barrier Lyapunov function») [27, 28], метода управления с эффектом воронки (от англ. «funnel control») [10, 12] и методов управления с заданным качеством регулирования (от англ. «prescribed performance control») [11, 13, 14, 29].

- По способу и виду задания целевого (допустимого) множества (под целевым (допустимым) множеством понимается область, в которой должны находиться переходные процессы выходного сигнала объекта в замкнутой системе) методы [10–14, 27–29] и предложенный результат отличаются в следующем:
 - в [27, 28] границы допустимого множества постоянные, а эталонный сигнал должен быть достаточно гладким;
 - в [10–12] границы целевого множества задаются непрерывно-дифференцируемыми функциями, симметричными относительно оси времени. Рассматриваются только ограниченные целевые множества;
 - в [13, 14, 29] границы целевого множества задаются непрерывно-дифференцируемыми, несимметричными функциями. Рассматриваются только ограниченные целевые множества;
 - в предложенном в данной статье подходе целевые множества могут задаваться непрерывными (или разрывными, см. замечание 1), несимметричными функциями (см. случай 5 в примере 5). Целевое множе-

ство может быть неограниченным (см. случаи 2, 3 и 5 в примере 5). Эталонный сигнал может задаваться непрерывными (см. случай 4 в примере 5) или кусочно-непрерывными (см. замечание 1) функциями.

- По синтезу закона управления и анализу устойчивости замкнутой системы методы [10–14, 27–29] и предложенный результат отличаются в следующем:
 - методы [27, 28] используют функции Ляпунова специального вида, существующие на определенном подмножестве области определения системы (допустимом множестве);
 - методы [10–12] используют функции плотности специального вида;
 - подходы [11, 13, 14, 29] рассматривают нелинейное преобразование координат, которое сводит исходную задачу с ограничениями к задаче без ограничений. Однако данное преобразование координат приводит к анализу расширенной системы, содержащей переменные исходной и новой систем, что усложняет структуру закона управления и анализ устойчивости замкнутой системы. Более того, нелинейное преобразование координат приводит к изучению системы вида $\dot{\varepsilon}(t) = \rho(\varepsilon, t)f(\varepsilon, t)$, где ε – новая переменная, $\rho(\varepsilon, t) > 0$ – функция плотности, зависящая от производной функции замены координат по переменной ε . Следовательно, данный вид системы является частным случаем систем, рассмотренных в разделе 2;
 - предложенный в статье подход не содержит преобразования координат, что позволяет избежать рассмотрение дополнительных переменных и дополнительных динамических систем. Знак функции плотности может быть произвольным. Функция Ляпунова может существовать во всей области определения системы.

4. Заключение

В работе рассмотрен класс динамических систем, названных плотностными, которые содержат в правой части функцию плотности, задающую свойства пространства. Определяя свойства данной функции можно влиять на поведение исследуемой системы. Данный вывод в дальнейшем используется для синтеза законов управления. Показано, что при различных заданиях функции плотности можно получать как классические законы управления, так и новые, позволяющие формировать новые целевые требования к системе. В частности, приведен пример построения адаптивного закона управления с гарантией переходных процессов в заданном разработчиком множестве, в то время как классическое адаптивное управление обеспечивает только предельную ограниченность траекторий. При этом параметры множества задаются с помощью функции плотности, которая задает плотность рассматриваемого пространства. Результаты моделирования подтвердили теоретические выводы.

В статье показано, как некоторые существующие алгоритмы управления могут быть модифицированы с использованием функции плотности для получения нового качества переходных процессов. В дальнейшем свойства плотностных систем можно использовать и для построения более сложных алгоритмов управления, например, управление по выходу с любой относительной степенью объекта, управление с использованием наблюдателей, управление на скользящих режимах и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматлит, 1963.
2. *Жуков В.П.* Необходимые и достаточные условия неустойчивости нелинейных автономных динамических систем // *АиТ.* 1990. № 12. С. 59–65.
Zhukov V.P. Necessary and sufficient conditions for instability of nonlinear autonomous dynamic systems // *Autom. Remote Control.* 1990. V. 51. No. 12. P. 1652–1657.
3. *Жуков В.П.* Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка // *АиТ.* 1999. № 7. С. 34–43.
Zhukov V.P. On the divergence conditions for the asymptotic stability of second-order nonlinear dynamical systems // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 7. P. 934–940.
4. *Rantzer A.* A dual to Lyapunov's stability theorem // *Systems & Control Letters.* 2001. V. 42. P. 161–168.
5. *Фуртат И.Б.* Дивергентные условия устойчивости динамических систем // *АиТ.* 2020. № 2. С. 62–75.
Furtat I.B. Divergent stability conditions of dynamic systems // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 2. P. 247–257.
6. *Furtat I.B., Gushchin P.A.* Stability study and control of nonautonomous dynamical systems based on divergence conditions // *J. Franklin Institute.* 2020. V. 357. No. 18. P. 13753–13765.
7. *Furtat I.B., Gushchin P.A.* Stability/instability study and control of autonomous dynamical systems: Divergence method // *IEEE Access.* 2021. No. 9. P. 49088–49094.
8. *Furtat I.B., Gushchin P.A.* Divergence Method for Exponential Stability Study of Autonomous Dynamical Systems // *IEEE Access.* 2022. No. 10. P. 49088–49094.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика / Теоретическая физика. М.: Наука, 1986.
10. *Liberzon D., Trenn S.* The bang-bang funnel controller for uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2013. V. 58. No. 12. P. 3126–3141.
11. *Bechlioulis C., Rovithakis G.* A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems // *Automatica.* 2014. V. 50. No. 4. P. 1217–1226.
12. *Berger T., Le H., Reis T.* Funnel control for nonlinear systems with known strict relative degree // *Automatica.* 2018. V. 87. P. 345–357.

13. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А.* Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // *АиТ.* 2021. № 4. С. 121–139.
Furtat I.B., Gushchin P.A. Control of Dynamical Plants with a Guarantee for the Controlled Signal to Stay in a Given Set // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 4. P. 654–669.
14. *Furtat I.B., Gushchin P.A.* Nonlinear feedback control providing plant output in given set // *Int. J. Control.* 2021. <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>
15. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
16. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
17. *LaSalle J.P.* Stability of Nonautonomous Systems // *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications.* 1976. V. 1. No. 1. P. 83–91.
18. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
19. *Polyakov A.* Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2012. Vol. 57, no. 8. P. 2106–2110.
20. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
21. *Dolgopolik M.V., Fradkov A.L.* Nonsmooth and discontinuous speed-gradient algorithms // *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* 2017. V. 25. P. 99–113.
22. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009.
23. *Мирошник И.В., Нижифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
24. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1973.
25. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012.
26. *Carroll S.M.* Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. San Francisco, Addison Wesley, 2004.
27. *Tee K.P., Ge S.S., Tay E.H.* Barrier Lyapunov Functions for the control of output-constrained nonlinear systems // *Automatica.* 2009. V. 45. No. 4. P. 918–927.
28. *Azimi V., Hutchinson S.* Exponential Control Lyapunov-Barrier Function Using a Filtering-Based Concurrent Learning Adaptive Approach // *IEEE Trans. on Automatic Control.* 2022. V. 67. No. 10. P. 5376–5383.
29. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А., Нгуен Б.Х., Колесник Н.С.* Адаптивное управление с гарантией заданного качества регулирования // *Управление большими системами.* 2023. Т. 102. С. 44–57.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Красносельским.

Поступила в редакцию 07.03.2023

После доработки 23.08.2023

Принята к публикации 04.09.2023

Стохастические системы

© 2023 г. **А.А. БАТЕНКОВ**, д-р техн. наук (batenkov1957@mail.ru)
(Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева),
К.А. БАТЕНКОВ, д-р техн. наук (pustur@yandex.ru)
(МИРЭА — Российский технологический университет, Москва),
А.Б. ФОКИН (tatarin57ru@mail.ru)
(Академия ФСО России, Орёл)

АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТИ СВЯЗНОСТИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ МАТРИЦЫ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Представлен подход к анализу вероятности связности телекоммуникационной сети как показателя ее надежности и живучести. Используется стандартная форма перехода к замещению, получаемая модифицированным методом многопеременной инверсии (multiple-variable-inversion), рассматривающим события несвязности исходной сети. В результате устраняется необходимость повторения процедур анализа элементов на уникальность в отдельных слагаемых функции связности, что приводит к снижению вычислительной сложности даже по сравнению с методом двудольных графов при условии абсолютной надежности вершин и использовании в качестве простых конструкций сечений. На примерах мостикового графа и магистральной сети юга России продемонстрированы возможности предложенного подхода.

Ключевые слова: вероятность связности, телекоммуникационная сеть, надежность, многопеременная инверсия.

DOI: 10.31857/S0005231023110053, **EDN:** OOOZVVV

1. Введение

В качестве показателя структурной надежности телекоммуникационных сетей наиболее часто используют вероятность связности пары вершин графа, которым она описывается [1–3]. При этом для большинства сетей подобная вероятность не вычисляется по простейшим формулам последовательного и параллельного соединения элементов.

В целом вероятность связности при условии использования критерия связности в виде наличия, по крайней мере, одного пути между заданными парами вершин [1, 2] является эквивалентом коэффициента готовности телекоммуникационной сети [4], который рассматривается и в отечественных стандартах, и в зарубежных. Так, соответствующая терминология определена в ГОСТ Р 27.102-2021 [5], разработанном с учетом основных нормативных положений международного стандарта ИЕС 60050-192:2015 [6, 7] и пришедшем на смену ГОСТ 27.002-2015 [8]. В ГОСТ Р 27.102-2021 [5] вводит-

ся частный случай общего понятия «коэффициент готовности» — нестационарный (мгновенный) коэффициент готовности (*instantaneous availability*), а ГОСТ Р 27.101-2021 [9] дополняет его асимптотическим (стационарным) коэффициентом готовности (*steady state availability*), усредненным коэффициентом готовности (*mean availability*) [5, 10]. Близкий по смыслу коэффициент готовности услуг сети из конца в конец (*end-to-end*) как доля продолжительности работоспособного состояния используется в ГОСТ Р 27.018-2021 (IEC 62673:2013) [11, 12].

Следует отметить, что в отечественном ГОСТ Р 53111-2008 [13] рассматривается сразу два коэффициента: готовности и оперативной готовности, первый из которых характеризует надежность телекоммуникационной сети, а второй — живучесть. Эти коэффициенты, в свою очередь, определены также и в ГОСТ Р 27.102-2021 [5], и в IEC 61907:2009 [14]. При этом оба коэффициента также рассчитываются в виде вероятности связности с той лишь разницей, что коэффициент оперативной готовности отдельного канала электросвязи взвешивается вероятностью сохранения его работоспособности при воздействии внешних дестабилизирующих факторов. В этой трактовке коэффициент оперативной готовности близок к термину, определенному в [15], где вероятность сохранения работоспособного состояния задается как вероятность того, что система, будучи исправной в произвольный момент времени, не выйдет из строя в некотором интервале, начинающемся с этого момента. Следует однако отметить, что коэффициент оперативной готовности, определенный в ГОСТ Р 53111-2008, фактически таковым не является, поскольку не соответствует определению этого показателя в ГОСТ Р 27.102-2021. Так, в [16] показаны неуместность применения в качестве числового показателя живучести коэффициента оперативной готовности и непригодность рекомендуемого в ГОСТ Р 53111-2008 метода его расчета, а также сделан общий вывод о неприемлемости вероятностных показателей для оценки живучести.

Для больших и сложных по структуре телекоммуникационных сетей расчет вероятности связности оказывается весьма громоздким и трудоемким процессом вследствие огромного числа элементов в результирующем выражении [17]. Наиболее целесообразным выходом из подобной ситуации является подход, основанный на представлении события связности сети в виде сумм произведений несовместных событий [3] (*SDP — sum of disjoint product*), представляющих собой форму перехода к замещению [18], допускающую непосредственный переход к вероятностной функции заменой логических переменных (множеств) вероятностями, а логических операций (операций над множествами) соответствующими арифметическими операциями [19]. Данное представление приводит к достаточно компактной форме записи результирующего уравнения связности и, как следствие, к снижению вычислительной сложности и уменьшению результирующей ошибки округления [13]. Отметим, что в отечественной научной литературе данный подход получил название метода объединения простых цепей с учетом поглощения [1].

В отличие от метода прямого перебора простых цепей [1] (inclusion-exclusion technique [3] — метод включения–исключения), использующего логическую схему “или”, метод сумм произведений несовместных событий SDM основан на алгоритме ортогонализации [18] и использует схему “либо”. Отметим, что метод прямого перебора простых цепей рекомендован отечественным ГОСТ для расчета устойчивости функционирования сетей [13].

В целом же рассматриваемые подходы входят в группу, предполагающую отыскание так называемых простых конструкций [18, 20] графа телекоммуникационной сети — простых цепей, деревьев или сечений [3] (некоторых событий), которые используются в том числе для построения кумулятивных оценок вероятности связности графов, существенно снижающих сложность расчетов, но позволяющих получать лишь приближенные значения вероятности связности графа. Следует заметить, что метод кумулятивного оценивания берет свое начало еще с работ [1, 2], где описаны общие подходы к приближенному расчету, хотя непосредственно сам метод описан в [21], где предложено использовать кумулятивные оценки границ, сходящиеся к точному значению вероятности связности случайного графа, для однозначного принятия решения о его надежности. В основу данного метода могут быть положены все известные методы точного анализа: метод факторизации, логико-вероятностные методы, метод разложения по остовному дереву [21–29].

Для случаев точных вычислений одним из первых алгоритмов вычисления суммы событий связности является подход, изложенный в [30]. Данный алгоритм значительно сократил объем вычислений, необходимых для получения сумм произведений несовместных событий, по сравнению с более ранними подходами. Применение алфавитно-цифрового упорядочивания переменных состояния приводит к сокращению размеров непересекающихся сумм [31]. Более эффективный подход изложен в [32], где используется модификация правил упорядочивания списка произведений. Компоновка минимальных простых цепей усовершенствована в [33, 34]. В [35] предложен алгоритм инверсии произведений переменных взамен применяемого ранее инвертирования отдельных переменных. Альтернативой выступает способ, предполагающий рекурсивную процедуру расчета вероятности объединенного события, изначально разработанный для анализа вероятности блокировки в сетях с вариативной маршрутизацией [36].

Следует отметить, что даже наиболее совершенным модификациям метода, использующим многопеременную инверсию (MVI — multiple-variable-inversion), свойственен существенный недостаток, связанный с необходимостью сравнительного анализа каждого слагаемого со всеми ранее рассмотренными на предмет уникальности содержащихся ребер, а также выполнения в ряде случаев дополнительных операций над множествами [3, 37–40]. Для устранения подобных повторяющихся рутинных процедур целесообразно рассматривать не объединение событий связности (несвязности), вырождающееся в сумму несовместных произведений, а пересечение противоположных событий, приводящее также к подобной сумме, но для получения которой

нет необходимости выполнять многопеременную инверсию для каждого из слагаемых над всеми ранее проанализированными.

2. Общий подход к анализу вероятности связности на основе несовместных событий

В данной работе рассматривается модель телекоммуникационной сети в форме графа G . В общем случае граф может быть ориентированным, при этом неориентированный вариант оказывается частным случаем первого. Здесь предполагается, что узлы телекоммуникационной сети обладают абсолютной надежностью (вероятность работоспособности вершин равна единице), а линии связи ненадежны (вероятность работоспособности ребер отлична от единицы). Сама телекоммуникационная сеть может быть общего вида, т.е. быть многополюсной, когда необходимо обеспечить связность между заданным множеством вершин–полюсов. При этом предельными случаями выступают варианты двухполюсной и всеполюсной сетей, в первом из которых число полюсов равно двум, а во втором – совпадает с количеством вершин графа.

В данном контексте под событием S связности графа G понимается наличие хотя бы одного пути между любыми вершинами–полюсами. Отметим, что в общем случае для многополюсной сети событие S связности подразумевает существование хотя бы одного подграфа, связывающего вершины–полюсы, для двухполюсной – простой цепи, а для всеполюсной – остового дерева. Первоначально в кумулятивных методах событие S связности представляется в форме объединения событий связности отдельных связанных подграфов, которые в общем случае являются зависимыми. Основная задача метода многопеременной инверсии MVI заключается в преобразовании подобного объединения в форму объединения независимых событий a_i , $i = 1, \dots, s'$, которая является формой перехода к замещению [18]. По сути, аналогом каждого из данных независимых событий a_i является элементарная простая цепь [1]. При этом из всего многообразия булевых преобразований достаточно использовать две базовые процедуры – расщепления и поглощения

$$\begin{aligned}\overline{ab} \overline{ac} &= \overline{a} \cup (a \overline{b} \overline{c}), \\ ab \overline{ac} &= ab\overline{c},\end{aligned}$$

где a , b , c – некоторые взаимонезависимые события [1].

Отметим, что в соответствии с принципом двойственности также можно рассматривать событие несвязности графа G , под которым понимается отсутствие пути между хотя бы одной парой вершин–полюсов. При этом несколько изменяется форма объединения событий, которая в данном случае становится объединением событий полной несвязности сечений графа G . Однако общий подход к расчету не изменяется, поэтому далее подразумевается, если не оговорено дополнительно, что событие S связности может быть заменено событием несвязности.

После выполнения рекурсивной процедуры формируется конечное выражение для события S связности (или несвязности) графа G , являющееся объединением независимых событий $a_i, i = 1, \dots, s'$, представляющих отрицание пересечения или пересечение определенных неповторяющихся событий работоспособности ребер,

$$S = \bigcup_{i=1}^{s'} a_i,$$

что позволяет его считать формой перехода к замещению, т.е.

$$(1) \quad P(S) = \sum_{i=1}^{s'} P(a_i).$$

В свою очередь каждое независимое событие a_i является пересечением нескольких других событий $a_{i,k}, i = 1, \dots, s', k = 1, \dots, g_i + 2$,

$$(2) \quad a_i = \bigcap_{k=1}^{g_i} \overline{\bigcap_{i_k \in b_{i,k}} l_{i_k}} \bigcap_{i_{g_i+1} \in b_{i,g_i+1}} l_{i_{g_i+1}} = \bigcap_{k=1}^{g_i+1} a_{i,k},$$

где g_i – количество групп событий неработоспособности в событии a_i ;

$l_j, j = 1, \dots, l$ – событие работоспособности j -го ребра графа G ;

$b_{i,k}$ – множество номеров ребер, образующих k -е событие несвязности в i -м независимом событии a_i ;

b_{i,g_i+1} – множество номеров ребер, образующих событие связности в i -м независимом событии a_i .

Их целесообразно сгруппировать по следующему принципу. Первоначально образуются k групп событий несвязности в событии a_i , каждое из которых определяет обратное событие одновременной работоспособности некоторого набора ребер,

$$(3) \quad a_{i,k} = \overline{\bigcap_{i_k \in b_{i,k}} l_{i_k}}, \quad k = 1, \dots, g_i.$$

Следующей $(g_i + 1)$ -й группой является пересечение событий работоспособности ребер (без отрицания)

$$(4) \quad a_{i,g_i+1} = \bigcap_{i_{g_i+1} \in b_{i,g_i+1}} l_{i_{g_i+1}}.$$

Последняя же $(g_i + 2)$ -я группа включает все достоверные события (неиспользуемые ребра в событии a_i , вероятность возникновения которых равна единице [41])

$$(5) \quad a_{i,g_i+2} = \bigcap_{i_{g_i+2} \notin \bigcup_k b_{i,k}} l_{i_{g_i+2}}.$$

При этом каждое подобное независимое событие a_i содержит лишь однократное включение простых событий работоспособности отдельного ребра l_j , что позволяет представить его в форме вектора, а набор всех этих независимых событий как матрицу $\mathbf{Y} = \{y_{j,i}\}_{\substack{j=1,\dots,l, \\ i=1,\dots,s'}}$, каждый элемент $y_{j,i}$ которой соответствует определенному j -му ребру i -го события, а значения задаются по принципу принадлежности к определенной группе

$$(6) \quad y_{j,i} = \begin{cases} k, & j \in b_{i,k}, \\ 0, & j \in b_{i,g_i+1} \\ -1, & j \notin \bigcup_k b_{i,k}. \end{cases}$$

3. Переход от матрицы независимых событий к вероятностной функции

Непосредственно переход от матрицы событий к вероятностной функции базируется на представлении элементов данной матрицы в виде выражения (6), а также на уравнении (2) для произвольного независимого события a_i и суммы вероятностей их связности, имеющей аналитическую форму (1).

Вероятность независимого события a_i согласно теореме умножения вероятностей для независимых событий и выражению (2) равна произведению вероятностей составляющих его событий (групп)

$$P(a_i) = \prod_{k=1}^{g_i+1} P(a_{i,k}).$$

Для каждой из групп событий также в соответствии с данной теоремой, формулой для полной группы событий и выражениями (3)–(5) вероятности факторизуются

$$\begin{aligned} P(a_{i,k}) &= 1 - \prod_{i_k \in b_{i,k}} p_{i_k}, \quad k = 1, \dots, g_i, \\ P(a_{i,g_i+1}) &= \prod_{i_{g_i+1} \in b_{i,g_i+1}} p_{i_{g_i+1}}, \\ P(a_{i,g_i+2}) &= 1 - \prod_{i_{g_i+2} \notin \bigcup_k b_{i,k}} 0 = 1, \end{aligned}$$

где $p_{i_k} = P(l_{i_k})$ – вероятность работоспособности ребра l_{i_k} .

Отметим, что в третьем уравнении $P(l_{i_k}) = 0$, поскольку ребра не участвуют в формировании события a_i .

Таким образом, вероятность связности графа равна

$$P(S) = 1 - \sum_{i=1}^{s'} \prod_{k=1}^{g_i} \left(1 - \prod_{i_k \in b_{i,k}} p_{i_k} \right) \prod_{i_{g_i+1} \in b_{i,g_i+1}} p_{i_{g_i+1}}.$$

Выражение для расчета вероятности связности на основе матрицы \mathbf{Y} независимых событий удобно также получить сначала в скалярном виде, а затем перейти к матричному. Так, для отдельных групп событий соответствующие вероятности имеют форму:

$$P(a_{i,k}) = 1 - \prod_{j=1}^l z_j,$$

$$\text{где } z_j = \begin{cases} p_j, & y_{j,i} = k, \\ 1, & y_{j,i} \neq k, \end{cases} \quad k = 1, \dots, g_i,$$

$$P(a_{i,g_i+1}) = \prod_{j=1}^l z_j,$$

$$\text{где } z_j = \begin{cases} p_j, & y_{j,i} = 0, \\ 1, & y_{j,i} \neq 0. \end{cases}$$

В матричном виде возможно представить вычисление вероятностей как операции над векторами и матрицами

$$P(a_{i,k}) = 1 - \left| \text{dg} \left\{ \text{sign} \left[\left(\mathbf{Y}^{(i)} - k \mathbf{1}_l \right) \odot \left(\mathbf{Y}^{(i)} - k \mathbf{1}_l \right) \right] \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p} \right\} \right|,$$

$$k = 1, \dots, g_i,$$

$$P(a_{i,g_i+1}) = \left| \text{dg} \left[\text{sign} \left(\mathbf{Y}^{(i)} \odot \mathbf{Y}^{(i)} \right) \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p} \right] \right|,$$

где $|\mathbf{X}|$ – определитель (детерминант) квадратной матрицы \mathbf{X} ;

$\text{dg}(\mathbf{x})$ – оператор диагонализации вектора \mathbf{x} , преобразующий вектор \mathbf{x} в диагональную квадратную матрицу, элементы главной диагонали которой равны соответствующим элементам исходного вектора \mathbf{x} ;

$$\mathbf{1}_l = \left. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\} l \text{ – вектор размером } l, \text{ составленный из всех единиц;}$$

\odot – произведение Адамара;

$\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=1,\dots,l}$ – вектор вероятностей работоспособности ребер.

Отметим, что определитель диагонализированного вектора $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1,\dots,l}$ равен произведению его элементов, т.е.

$$|\text{dg}(\mathbf{x})| = \prod_{i=1}^l x_i.$$

Таким образом, вероятность связности графа на основе деревьев равна

$$(7) \quad P(S) = 1 - \sum_{i=1}^{s'} \left| \text{dg} \left[\text{sign} \left(\mathbf{Y}^{(i)} \odot \mathbf{Y}^{(i)} \right) \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p} \right] \right| \times \\ \times \prod_{k=1}^{\max(\mathbf{Y}^{(i)})} \left(1 - \left| \text{dg} \left\{ \text{sign} \left[\left(\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l \right) \odot \left(\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l \right) \right] \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p} \right\} \right| \right).$$

Если для расчета матрицы \mathbf{Y} независимых событий в качестве основы используется матрица \mathbf{W} сечений, то в выражении для вероятности связности необходимо заменить вектор \mathbf{p} вероятностей работоспособности ребер на вектор $(\mathbf{1}_l - \mathbf{p})$ вероятностей неработоспособности ребер, а также учесть сокращение единицы, стоящей в начале правой части выражения (8):

$$(8) \quad P(S) = \sum_{i=1}^{s'} \left| \text{dg} \left[\text{sign} \left(\mathbf{Y}^{(i)} \odot \mathbf{Y}^{(i)} \right) \odot \mathbf{p} + (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) \right] \right| \times \\ \times \prod_{k=1}^{\max(\mathbf{Y}^{(i)})} \left(1 - \left| \text{dg} \left\{ \text{sign} \left[\left(\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l \right) \odot \left(\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l \right) \right] \odot \mathbf{p} + (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) \right\} \right| \right).$$

Таким образом, в независимости от применяемого базиса в форме деревьев либо сечений вероятностная функция имеет один и тот же вид с точностью до вектора \mathbf{p} вероятностей работоспособности ребер и единицы.

4. Оценка вычислительной сложности

Оценка вычислительной сложности рассматриваемого метода проведена по аналогии с предложенным способом оценки эффективности (объема трудозатрат) метода двудольных графов [15], который в соответствии с оценками, приведенными в [1, 15], является наиболее эффективным из числа проанализированных. В данном случае вычислительная сложность измеряется в числе конъюнктивных форм, необходимых для представления события связности графа. Более рационально ее немного уточнить и говорить о количестве анализируемых элементарных конструкций (подграфов) в ходе процесса редукции исходного графа. Приводимая оценка рассматривается в [15] для графов регулярной структуры, а точнее полносвязных графов. Тогда число n_d конъюнктивных форм (элементарных конструкций) на полносвязных графах с v вершинами и $l = \frac{v(v-1)}{2}$ ребрами для метода двудольных графов [2, 15] равно

$$n_d = \sum_{i=0}^{v-3} C_{v-1}^i (2^{v-1-i} - 2),$$

где C_{v-1}^i – число сочетаний из $v - 1$ элементов по i [42].

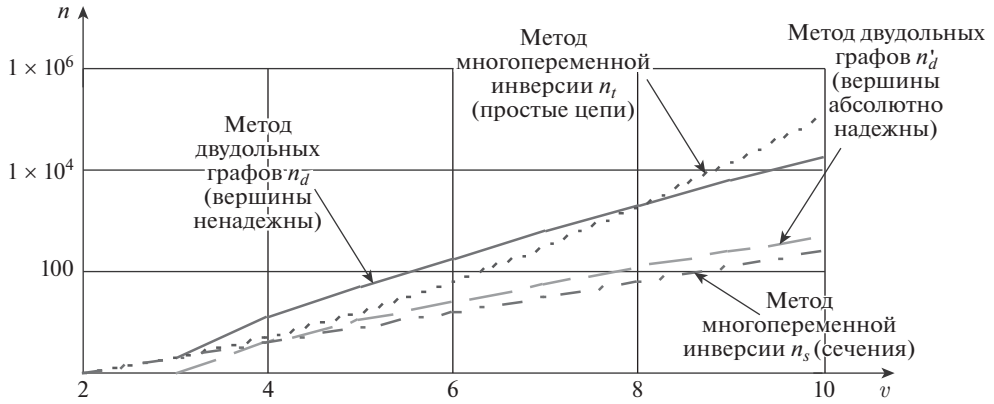


Рис. 1. Зависимости числа n анализируемых элементарных конструкций (конъюнкций) от количества v вершин полносвязного графа.

Приведенный в работе метод многопеременной инверсии MVI для случая двухполюсных сетей оперирует с элементарными конструкциями, порождающими конъюнктивные формы, в виде простых цепей, количество n_t которых определяется как сумма числа размещений [42] по всем неполосным вершинам

$$n_t = \sum_{i=0}^{v-2} \frac{(v-2)!}{(v-2-i)!}.$$

Отметим, что в данных вариантах элементарные конструкции учитывают также ненадежность вершин. Причем на количество простых цепей абсолютная надежность вершин никоим образом не влияет.

В случае же учета абсолютной надежности вершин количество элементарных конструкций для метода двудольных графов [15] существенно сокращается:

$$n'_d = \sum_{i=0}^{v-3} C_{v-1}^i = 2^{v-1} - v.$$

С другой стороны, метод многопеременной инверсии MVI может использовать в качестве элементарных конструкций двухполюсные сечения, количество которых соответствует сумме числа декартовых произведений [3] вершинных неполосных сечений графа

$$n_s = \sum_{i=0}^{v-2} C_{v-2}^i = 2^{v-2}.$$

Еще раз подчеркнем, что в данном случае все вершины считаются абсолютно надежными.

На рис. 1 приведены зависимости числа n анализируемых элементарных конструкций (конъюнкций) от количества v вершин полносвязного графа. Их

анализ показывает наличие выигрыша в вычислительной сложности метода многопеременной инверсии MVI по сравнению с методом двудольных графов лишь для полностью связанных графов с количеством вершин, меньшим восьми. Однако при использовании сечений и абсолютно надежных вершинах многопеременная инверсия демонстрирует выигрыш

$$\frac{n'_d}{n_s} = 2 - 2^{2-v},$$

стремящийся к двум при росте количества вершин.

5. Пример анализа вероятности связности для мостикового графа

Рассмотрим реализацию предложенных процедур на примере мостикового графа $G(4, 5)$ (рис. 2) и определим его вероятность связности. Источник и сток на рисунке отмечены квадратами: $v_s = 1$, $v_t = 4$. Матрица смежностей графа данной сети задается формулой

$$(9) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Путей (простых цепей) в мостиковом графе всего четыре: 1 — {1, 4}, 2 — {2, 5}, 3 — {1, 3, 5}, 4 — {2, 3, 4}. Тогда матрица путей есть

$$(10) \quad \mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

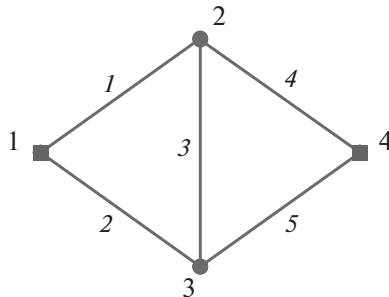


Рис. 2. Мостиковый двухполюсный граф.

и матрица независимых событий —

$$(11) \quad \mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Двухполюсных сечений в мостиковом графе тоже четыре: 1 — {1, 2}, 2 — {4, 5}, 3 — {1, 3, 5}, 4 — {2, 3, 4}. Тогда матрица двухполюсных сечений равна

$$(12) \quad \mathbf{W}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

матрица независимых событий несвязности —

$$(13) \quad \mathbf{Y}_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вероятности работоспособности ребер одинаковы: $P(l_j) = p = 0,9$, $j = 1, \dots, j$.

Вектор вероятностей работоспособности ребер составлен из одинаковых элементов

$$\mathbf{p} = p\mathbf{1}_l = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (11) слагаемых в выражении (7) всего четыре, т.е. $s' = 4$. Тогда вероятность связности графа G равна

$$\begin{aligned} P(S) &= 1 - [0,1^2 + 0,9 \cdot 0,1^2 \cdot (1 - 0,9^2) + 0,9 \cdot 0,1^2 + 0,9^2 \cdot 0,1^3] = \\ &= 1 - (0,01 + 0,00171 + 0,009 + 0,00081) = 0,97848. \end{aligned}$$

Аналогично получается результат на основе матрицы независимых событий несвязности (13). В выражении (8) слагаемых также оказывается всего четыре, т.е. $s' = 4$. Тогда вероятность связности графа G будет

$$\begin{aligned} P(S) &= 0,9^2 + 0,1 \cdot 0,9^2 \cdot (1 - 0,1^2) + 0,1 \cdot 0,9^2 + 0,1^2 \cdot 0,9^3 = \\ &= 0,81 + 0,08019 + 0,081 + 0,00729 = 0,97848. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, результаты оказались идентичными.

6. Пример анализа вероятности связности для магистральной сети юга России

Кабельная структура магистральной сети юга России (рис. 3) доступна на официальном сайте Международного союза электросвязи [43]. На рис. 3 также представлен пронумерованный эквивалентный граф $G(12, 21)$, для которого при расчетах предполагается абсолютная надежность вершин. Вероятность же работоспособности ребер согласно ГОСТ [13] трактуется как коэффициент готовности, определяемый конструктивными особенностями среды распространения и их организующих технических средств [44].

Каждая линия связи двунаправленная и соединяет два оптических линейных терминала, установленных на смежных узлах [45]. Коэффициент неготовности оптического кабеля определяется на основе числа внезапных отказов в среднем на один километр на интервале 10^9 часов и равен 570 FIT (Failure in Time) [46], где один FIT — это один отказ за 10^9 часов. Следует также учесть ошибку оценки длины линии только на основе географических координат по топографической карте. Для этого необходимо использовать коэффициент искривления линий, соответствующий 2,2 [47], отражающий, во сколько раз реальная длина линий связи между двумя пунктами сети отличается от прямой. Тогда исходя из среднего времени восстановления (24 ч) коэффициент неготовности оптического кабеля произвольной длины d равен

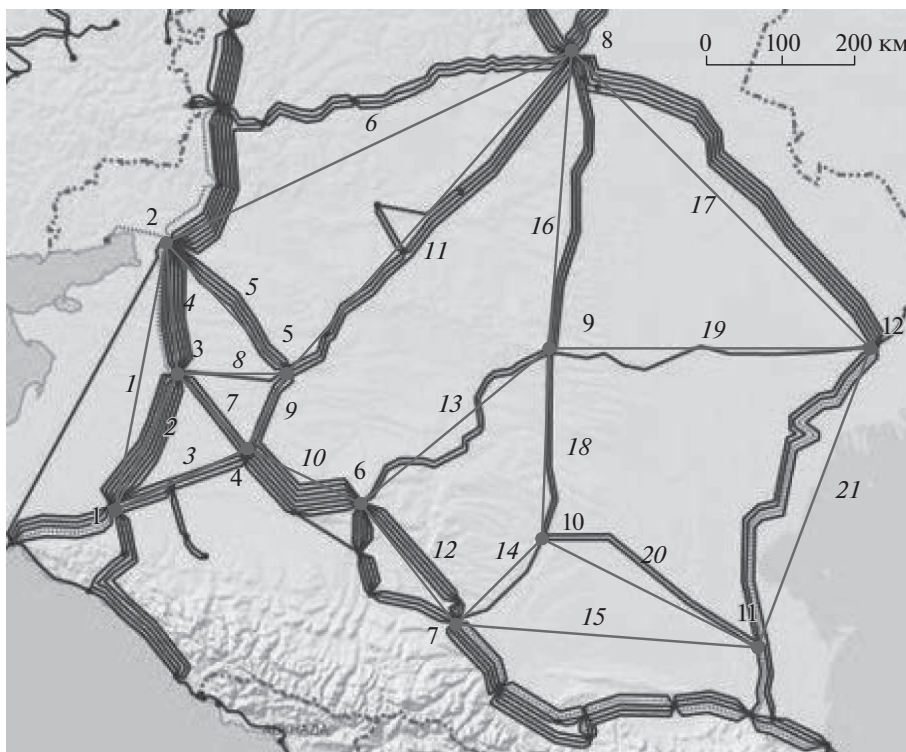


Рис. 3. Кабельная структура магистральной сети юга России.

$570 \cdot 10^{-9} \cdot 24 \cdot d \cdot 2,2 = 3,01 \cdot 10^{-5} \cdot d$ [45, 48]. Коэффициент неготовности оптического терминала — $5,12 \cdot 10^{-7}$ [45, 49]. Естественно, что линия связи работоспособна в случае готовности всех составляющих ее элементов. В результате коэффициент готовности p отдельных линий связи вычисляется на основе протяженности d , рассчитанной на основе географических координат по топографической карте:

$$p = (1 - 3,01 \cdot 10^{-5} \cdot d)(1 - 5,12 \cdot 10^{-7})^2.$$

Отметим, что коэффициент готовности подобной линии связи протяженностью один километр составляет 0,99996888, а стокилометровой — 0,99698938.

Источник и сток на рис. 3 отмечены квадратами: $v_s = 1$, $v_t = 12$.

Данная двухполюсная сеть содержит двести три простые цепи ($s' = 203$) и сто девять сечений ($s' = 109$). Алгоритм поиска простых цепей реализован на основе процедуры поиска в ширину и отбора соответствий по стокам [50]: первоначально синтезируется множество цепей от источника ко всем возможным вершинам, а затем отбираются из полученного множества только те цепи, стоки которых совпадают с заданным стоком. Алгоритм для перечисления сечений базируется на методе, использующем в качестве основы матрицу связностей и предполагающем последовательный перебор всех сочетаний вершинных сечений начиная с истока и стока [39]. Данный способ приводит к включению в общий состав сечений неминимальных, что потребовало введения дополнительной процедуры проверки добавляемого сечения на безызбыточность.

Результаты расчетов коэффициента готовности сети для обоих вариантов совпали: $p = 0,99999489$.

7. Заключение

В работе представлен набор независимых событий (связности и несвязности графа, моделирующего телекоммуникационную сеть), содержащих лишь однократное включение простых событий работоспособности отдельного ребра в форме матрицы, каждый элемент которой соответствует определенному ребру события, а значения задаются по принципу принадлежности к определенной группе. Получены аналитические выражения вероятностной функции, демонстрирующие идентичность общей формы в независимости от применяемого базиса в форме деревьев либо сечений с точностью до вектора вероятностей работоспособности ребер и единицы. На примере продемонстрирована возможность анализа надежности телекоммуникационной сети на основе предложенных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филлин Б.П. Методы анализа структурной надежности сетей связи. М.: Радио и связь, 1988. 208 с.

2. *Филин Б.П.* Об аналитическом методе приближенного вычисления надежности сложных систем // А и Т. 1982. № 11. С. 159–170.
3. *Chaturvedi S.K.* Network Reliability Measures and Evaluation. Scrivener Publishing LLC. 2016. 237 p.
4. *Нетес В.А.* Выбор показателей надежности сетей доступа // Первая миля. 2019. № 8. С. 52–55. <https://doi.org/10.22184/2070-8963.2019.85.8.52.55>
5. ГОСТ Р 27.102-2021. Надежность в технике. Надежность объекта. Термины и определения. Введ. 2022-01-01. 46 с.
6. IEC 60050-192:2019. International electrotechnical vocabulary. Part 192: Dependability.
7. <https://electropedia.org/iev/iev.nsf/index?openform&part=192>
8. ГОСТ 27.002-2015. Надежность в технике. Термины и определения. Введ. 2017-03-01. 16 с.
9. ГОСТ Р 27.101-2021. Надежность в технике. Надежность выполнения задания и управление непрерывностью деятельности. Термины и определения. Введ. 2022-01-01. 28 с.
10. *Нетес В.А.* Новый международный терминологический стандарт по надежности // Надежность. 2016. № 3. С. 54–58. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2016-16-3-54-58>
11. ГОСТ Р 27.018-2021. Надежность в технике. Методы оценки и обеспечения надежности коммуникационной сети. Введ. 2021-10-08. 35 с.
12. IEC 62673:2013. Methodology for communication network dependability assessment and assurance.
13. ГОСТ Р 53111–2008. Устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Требования и методы проверки. – Введ. 2008–12–18. М.: Стандартинформ, 2009. 16 с.
14. IEC 61907:2009. Communication network dependability engineering.
15. *Дудник Б.Я., Овчаренко В.Ф., Орлов В.К. и др.* Надежность и живучесть систем связи / Под ред. Дудника Б.Я. М.: Радио и связь, 1984.
16. *Нетес В.А.* О нормативных требованиях к живучести сетей электросвязи // Вестник связи. 2023. № 1. С. 2–4.
17. *Батенков К.А.* Анализ и синтез структур сетей связи методом перебора состояний // Вестн. СПб. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 18:3 (2022), 300-315. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.301>
18. *Рябинин И.А.* Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем / И.А. Рябинин, Г.Н. Черкесов. М.: Радио и связь, 1981.
19. *Батенков К.А., Батенков А.А.* Анализ и синтез структур сетей связи по детерминированным показателям устойчивости // Труды СПИИРАН. 2018. № 3. С. 128–159.
20. *Анфёров М.А.* Алгоритм поиска подкритических путей на сетевых графиках // Russ. Technol. J. 2023. No. 11(1). P. 60–69. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-1-60-69>
21. *Won J.-M., Karray F.* Cumulative update of all-terminal reliability for faster feasibility decision // IEEE Trans. Reliability. 2010. V. 59. No. 3. P. 551–562.
22. *Rodionov A., Migov D., Rodionov O.* Improvements in the efficiency of cumulative updating of all terminal network reliability // IEEE Trans. Reliability. 2012. V. 61. No. 2. P. 460–465.

23. *Martinez S.P., Calvino B.O., Rocco S.C.M.* All-terminal reliability evaluation through a Monte Carlo simulation based on an MPI implementation // European Safety and Reliability Conference: Advances in Safety, Reliability and Risk Management (PSAM 2011/ESREL 2012). Helsinki, 2012. P. 1–6.
24. *Silva J., Gomes T., Tipper D., Martins L., Kounev V.* An Effective Algorithm for Computing All-terminal Reliability Bounds // *Networks*. 2015. No. 66. P. 282–295. <https://doi.org/10.1002/net.21634>
25. *Davila-Frias A., Yodo N., Le T., Yadav O.P.* A deep neural network and Bayesian method based framework for all-terminal network reliability estimation considering degradation // *Reliability Engineering & System Safety*, 229 (2023), 305–311. <https://doi.org/10.1016/j.res.2022.108881>
26. *Li Sh., Wang J., He Sh.* Connectivity probability evaluation of a large-scale highway bridge network using network decomposition // *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 236, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.res.2023.109191>
27. *Alkaff A., Qomarudin M.N., Bilfaqih Yu.* Network reliability analysis: matrix-exponential approach // *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 212, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.res.2021.107591>
28. *Yeh W.-Ch.* A quick BAT for evaluating the reliability of binary-state networks // *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 216, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.res.2021.107917>
29. *Родионов А.С.* Можно ли добиться дальнейшего ускорения расчета характеристик связности случайного графа? // *Проблемы информатики*. 2022. № 4. С. 39–52. <https://doi.org/10.24412/2073-0667-2022-4-39-52>
30. *Abraham J.A.* An improved algorithm for network reliability // *IEEE Trans Reliab R-28* (1979), 58–61.
31. *Locks M.O.* A minimizing algorithm for sum of disjoint products // *IEEE Trans Reliab R-36* (1987), 445–453.
32. *Wilson J.M.* An improved minimizing algorithm for sum of disjoint products // *IEEE Trans Reliab* 39 (1990), 42–45.
33. *Beichelt F., Spross L.* An improved Abraham-method for generating disjoint sums // *IEEE Trans Reliab R-36* (1987), 70–74.
34. *Beichelt F., Spross L.* Comment on “An improved Abraham-method for generating disjoint sums” // *IEEE Trans Reliab* 38 (1989), 422–424.
35. *Heidtmann K.D.* Smaller sums of disjoint products by subproduct inversion // *IEEE Trans Reliab* 38 (1989), 305–311.
36. *Gomes T., Craveirinha J.* An alternative method for calculating the probability of an union of events, $\lambda\mu 13$ – ESREL 2002, Eur Conference System Dependability Saf, Dec Making Risk Manageme, Lyon, France, Vol. 2, 19–21 March 2002, pp. 426–430.
37. *Батенков К.А.* Точные и граничные оценки вероятностей связности сетей связи на основе метода полного перебора типовых состояний // *Труды СПИИРАН*. 2019. Т. 18. № 5. С. 1093–1118.
38. *Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б.* Вероятность связности телекоммуникационной сети на основе приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий // *Информационно-управляющие системы*. 2021. № 6. С. 53–63. <https://doi.org/10.31799/1684-8853-2021-6-53-63>

39. Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Формирование сечений телекоммуникационных сетей для анализа их устойчивости с различными мерами связности // Информатика и автоматизация. 2021. № 2 (20). С. 371–406. <https://doi.org/10.15622/ia.2021.20.2.5>
40. Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Анализ вероятности связности телекоммуникационной сети на основе инверсий ее состояний // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. <https://doi.org/10.17223/19988605/59/10>
41. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
42. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., исправленной. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1986.
43. <https://bbmaps.itu.int/bbmaps/>
44. Rec. G.911. Parameters and calculation methodologies for reliability and availability of fibre optic systems (Previously SSITT Recommendation). 1997-04. ITU-T. 39 p.
45. Ионикова Е.П., Шувалов В.П. Анализ методов обеспечения показателей надежности сетей PON и LR-PON. Часть I // Вестник Иркут. гос. техн. ун-та. 2018. Т. 22. № 1. С. 69–88. <https://dx.doi.org/10.21285/1814-3520-2018-1-69-88>
46. Шувалов В.П., Зеленцов Б.П., Квиткова И.Г. Модель надежности оптоволоконка в условиях деградации // Вестник СибГУТИ. 2022. № 3. С. 11–14.
47. Спиридонов Ю.С., Тамм Ю.А., БухВинер Н.Ф. Использование коэффициента искривления оптоволоконных линий при проектировании инфокоммуникационных сетей мегаполиса // Проектирование и технология электронных средств. 2017. № 2. <https://doi.org/10.55648/1998-6920-2022-16-3-56-61>
48. Chen J., Wosinska L., Mas Machuca C., Jaeger M. Cost vs. reliability performance study of fiber access network architectures // IEEE Commun. Magazine. 2010. V. 48. No. 2. P. 56–65. <https://doi.org/10.1109/MCOM.2010.5402664>
49. Wosinska L., Chen J. How much to pay for protection in fiber access networks: Cost and reliability tradeoff // IEEE 3rd International Symposium on Advanced Networks and Telecommunication Systems (ANTS). New Delhi, India. 2009. P. 1–3. <https://doi.org/10.1109/ANTS.2009.5409852>
50. Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Методы формирования множеств состояний телекоммуникационных сетей для различных мер связности // Труды СПИИРАН. 2020. № 3 (19). С. 644–673.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 21.07.2021

После доработки 08.06.2023

Принята к публикации 20.07.2023

Стохастические системы

© 2023 г. С.Н. СТЕПАНОВ, д-р техн. наук (s.n.stepanov@mtuci.ru),
М.С. СТЕПАНОВ, канд. техн. наук (m.s.stepanov@mtuci.ru)
(Московский технический университет связи и информатики)

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК СОВМЕСТНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРАФИКА РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ И ЭЛАСТИЧНОГО ТРАФИКА ДАННЫХ В МУЛЬТИСЕРВИСНЫХ УЗЛАХ ДОСТУПА

Построена и исследована математическая модель совместного обслуживания приоритетного трафика реального времени и эластичного трафика данных в мультисервисных узлах доступа. Приведены определения показателей качества совместного обслуживания поступающих запросов на информационное обслуживание. Сформирована система уравнений статистического равновесия и рассмотрено ее использование для вычисления точных значений введенных характеристик. Предложен метод приближенного расчета характеристик, основанный на построении системы упрощенных уравнений равновесия. Установлено, что полученные оценки показателей обслуживания заявок являются асимптотически точными в области больших и малых потерь. Показано использование разработанного метода для решения задачи оценки объема трафика, выгружаемого в ситуации перегрузки на другие узлы доступа или в другие диапазоны частот, с целью достижения заданных показателей QoS и задачи планирования необходимого по нагрузке объема ресурса передачи информации мультисервисного узла доступа.

Ключевые слова: мультисервисный трафик, трафик реального времени, эластичный трафик, рекурсивные алгоритмы, асимптотически точные характеристики, выгрузка избыточного трафика, планирование ресурса передачи.

DOI: 10.31857/S0005231023110065, EDN: OPBUYE

1. Введение

Развитие сетей связи идет по пути расширения числа сервисов. Набор услуг, получаемых абонентом, и их качество не должны зависеть от того, где пребывает абонент, как и с какой скоростью он передвигается и какие при этом применяются технологии доступа и пересылки информации. Это положение следует из тенденций развития телекоммуникационного рынка и закреплено в рекомендациях Международного союза электросвязи [1–6]. Понятно, что каждый вид услуг, будь то передача речи, видео или данных, имеет свои особенности, которые следует учитывать при исследовании условий

их совместного предоставления. В простейшем случае сервисы различаются только по величине требуемого ресурса передачи информации. В более сложных ситуациях необходимо учитывать детали формирования входных потоков заявок, условия доступа в сеть, наличие приоритета и возможности перераспределения ресурса в процессе обслуживания и т.д. Рассмотренные особенности функционирования действующих и перспективных систем связи анализируются в семействе так называемых мультисервисных моделей. Они имеют большое значение для практических приложений и являются предметом интенсивных исследований специалистов в области связи [4–10].

Важнейшим сегментом мультисервисной сети как фиксированной, так и подвижной связи является узел доступа, осуществляющий функцию концентрации абонентского трафика. Информационные потоки, попадающие в узлы доступа, можно разделить на две категории: трафик сервисов реального времени и трафик сервисов передачи эластичных данных. Передача трафика сервисов реального времени происходит с предварительным резервированием ресурса, который сохраняется на все время обслуживания заявки [1–3, 6]. Качество обслуживания характеризуется долей потерянных заявок и средним объемом занятого ресурса. Для пересылки эластичного трафика выделяется минимальный гарантированный ресурс, а также весь или часть ресурса, оставшегося свободным от пропуска трафика сервисов реального времени [8–11]. Качество обслуживания эластичных данных оценивается средним временем передачи файла и средней величиной получаемой пропускной способности узла доступа.

Обычно предполагается, что трафик реального времени имеет преимущество в занятии ресурса перед трафиком данных. Оно выражается в уменьшении скорости передачи эластичных данных до заранее заданного минимального значения, если выполнение этой процедуры способствует приему заявки на сервис реального времени. При появлении свободного ресурса скорость передачи данных возрастает. Перераспределение ресурса происходит в моменты времени, определяемые используемым механизмом адаптации скорости пересылки информации к условиям обслуживания заявок. Обычно это моменты поступления заявок и моменты окончания их обслуживания. Назовем подобную процедуру распределения динамической [7, 8, 10]. Пример ее реализации показан на рис. 1.

Анализируемый способ разделения ресурса позволяет значительно повысить его загрузку. Этот эффект особенно важен для сетей сотовой подвижной связи из-за ограниченности диапазона радиочастот, выделяемых для образования радиоканалов. По оценкам экспертов выигрыш может составить до нескольких десятков процентов от общего объема используемого ресурса. Отмеченный эффект получен в результате использования процедур управления трафиком, которые ускоряют передачу эластичных данных в ситуациях, когда уменьшается число пользователей услуг связи, находящихся на обслуживании. В сетях мобильной связи динамическое распределение ресурса выполняется диспетчером пакетов (англ., packet scheduler) и происходит под

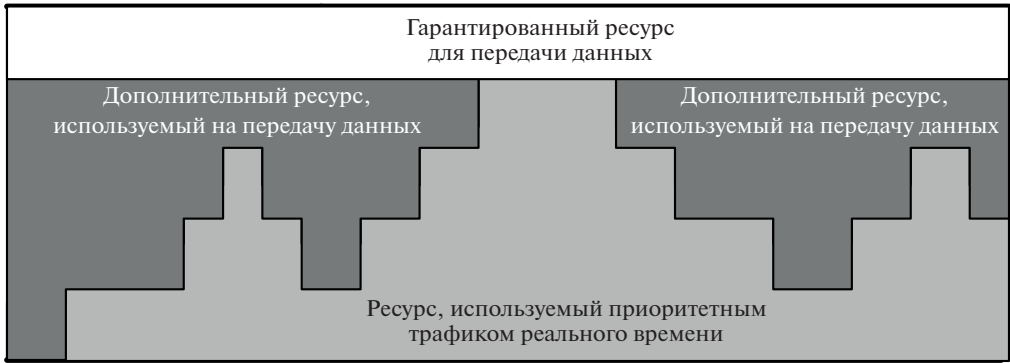


Рис. 1. Распределение пропускной способности узла доступа при совместной передаче приоритетного трафика сервисов реального времени и эластичных данных.

контролем программно-аппаратного комплекса RRM (англ., Radio Resource Management). Управляющие решения комплекса принимаются на основе информации о состоянии канала, числе и типах заявок, находящихся на обслуживании, уровне помех и т.д. [12–15].

Актуальность проблематики привлекла к ней внимание специалистов разной профессиональной подготовки, которая меняется от инженеров, занимающихся проектированием и эксплуатацией систем связи, до математиков. Давая общую характеристику опубликованным работам, следует отметить, что большинство исследований представляют из себя инженерные разработки, основанные на результатах имитационного моделирования и натурных экспериментов [1–3]. Теоретический анализ особенностей совместного обслуживания трафика сервисов реального времени и эластичных данных обычно заканчивается построением математической модели, определением характеристик качества обслуживания заявок и реализацией численных алгоритмов их оценки, основанных на решении системы уравнений равновесия каким-либо стандартным методом линейной алгебры [4, 5, 7–10, 13, 15, 16].

Для практических приложений, в частности для настройки процедур динамического распределения ресурса, необходимо построить несложные в реализации приближенные процедуры, имеющие приемлемую точность. К сожалению, таких методов в опубликованных работах представлено мало. Можно только упомянуть исследования [11, 14]. Особую важность имеют приближенные алгоритмы, которые

- основаны на общих принципах и могут легко обобщаться на другие модели формирования входных потоков заявок и процедуры распределения ресурса;
- имеют хорошую точность для значений входных параметров, которые соответствуют практическим приложениям, в частности для значений малых потерь, где происходит решение задачи планирования необходимого по нагрузке объема ресурса передачи информации, и для значений больших потерь, где решается задача оценки объема трафика, выгружаемого

на другие узлы доступа или в другие диапазоны частот, с целью достижения заданных показателей QoS;

- построены с использованием простых в реализации аналитических выражений и рекурсивных процедур.

Решению этих задач и посвящена данная работа. В разделе 2 рассмотрено математическое описание анализируемой модели узла доступа, на примере которой будут сформулированы принципы приближенной оценки характеристик качества совместного обслуживания трафика сервисов реального времени и эластичного трафика данных. В разделе 3 построена система уравнений равновесия и предложен алгоритм ее численного решения. Полученные результаты далее используются для оценки погрешности приближенных методов. В разделах 4 и 5 сформулированы принципы построения приближенных методов оценки характеристик рассматриваемой модели узла доступа и численно исследована их погрешность, в частности показано, что оценки являются асимптотически точными в области больших и малых потерь. В разделе 6 обсуждаются возможность использования модели для решения задачи определения объема выгружаемого трафика и задачи планирования необходимого объема ресурса. В последнем разделе сформулированы выводы по результатам выполненного исследования.

Новизна полученных результатов заключается в следующем:

- Сформулированы методы построения приближенных процедур оценки характеристик совместного обслуживания приоритетного трафика сервисов реального времени и эластичного трафика данных. Предлагаемые расчетные процедуры основаны на использовании системы упрощенных уравнений равновесия.
- Установлено, что полученные оценки характеристик являются асимптотически точными в области больших и малых потерь.
- Показано, что идеи, положенные в основу приближенных методов, носят общий характер и могут легко обобщаться на другие модели формирования входных потоков заявок и процедуры распределения ресурса.

2. Математическое описание модели

Обозначим через C пропускную способность мультисервисного узла доступа, создаваемую используемым стандартом фиксированной или беспроводной связи и выраженную в бит/с. Узел доступа обслуживает n пуассоновских потоков заявок на передачу трафика сервисов реального времени и один пуассоновский поток заявок на передачу эластичных данных. Заявки k -го потока на передачу трафика реального времени поступают с интенсивностью λ_k , требуют зарезервировать пропускную способность в объеме c_k бит/с на все время обслуживания, имеющее экспоненциальное распределение с параметром μ_k , $k = 1, \dots, n$. Заявки на передачу эластичных данных (файлов) поступают с интенсивностью λ_d . Объем файла имеет экспоненциальное распределение со средним значением F , выраженным в битах.

Введем понятие виртуального канала, который применим для численной оценки величины ресурса передачи информации, предоставляемой пользователям. Обозначим через c скорость передачи информации одного канала, выраженную в бит/с. Переход к виртуальным каналам упрощает моделирование процесса занятия ресурса заявками. Чем меньше значение c , тем точнее аппроксимация скоростей передачи. Однако в этой ситуации растет число состояний модели. Выбор величины c зависит от постановки задачи, например можно использовать такие выражения: $c = \min(c_1, \dots, c_n)$ или $c = \text{НОД}(c_1, \dots, c_n)$. В первом случае аппроксимация требований к битовой скорости более грубая, чем во втором. Общее число v имеющихся виртуальных каналов и число b_k виртуальных каналов, требуемых для обслуживания заявки k -го потока, находятся из соотношений:

$$v = \left\lfloor \frac{C}{c} \right\rfloor, \quad b_k = \left\lceil \frac{c_k}{c} \right\rceil.$$

Обслуживание эластичных данных происходит в соответствии с положениями дисциплины Processor Sharing. Рассмотрим реализацию этой процедуры. Для простоты предположим, что минимальный объем пропускной способности, который может быть использован для передачи файла, равен одному виртуальному каналу. Обозначим через μ_d параметр экспоненциального распределения времени передачи файла одним каналом. Пусть i число виртуальных каналов, занятых на обслуживание трафика реального времени, а $d > 0$ — число файлов, находящихся на передаче. Для их обслуживания используются $(v - i)$ каналов. Пусть $s = \lfloor \frac{v-i}{d} \rfloor$. Свободные каналы делятся между d файлами по следующему правилу. Для обслуживания каждого из $(v - i - sd)$ файлов используется $(s + 1)$ каналов, а для обслуживания каждого из оставшихся $((s + 1)d - (v - i))$ файлов используется s каналов. В результате выполнения этой процедуры все $(v - i)$ каналов заняты. Нетрудно показать, что в рассматриваемой ситуации время до окончания передачи одного из d файлов имеет экспоненциальное распределение с параметром $(v - i)\mu_d$.

Поступившая заявка на передачу трафика реального времени имеет приоритет в занятии ресурса, уменьшая при необходимости пропускную способность, используемую одним файлом, до одного канала. Пусть $i_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ — число заявок k -го потока на передачу трафика сервисов реального времени, находящихся в момент времени t на обслуживании, а $d(t)$ — число файлов, обслуживаемых в момент времени t . Динамика изменения числа обслуживаемых заявок описывается марковским процессом $r(t) = (i_1(t), \dots, i_n(t), d(t))$, определенным на конечном пространстве состояний S , куда входят состояния (i_1, \dots, i_n, d) , с компонентами

$$(1) \quad \begin{aligned} i_1 = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{v}{b_1} \right\rfloor; \quad \dots \quad i_n = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{v - i_1 b_1 - \dots - i_{n-1} b_{n-1}}{b_n} \right\rfloor; \\ d = 0, 1, \dots, v - i_1 b_1 - \dots - i_n b_n. \end{aligned}$$

Качество обслуживания заявок k -го потока на передачу трафика сервисов реального времени определяется значениями доли потерянных заявок π_k и средним числом занятых виртуальных каналов m_k . Величина последней характеристики дает возможность рассчитать среднее число заявок k -го потока, находящихся на обслуживании, $y_k = m_k/b_k$ и занимаемую ими среднюю величину пропускной способности узла доступа $z_k = m_k c$. Обозначим через z_r среднюю величину пропускной способности узла, занимаемую трафиком реального времени $z_r = \sum_{k=1}^n z_k$. Качество обслуживания заявок на передачу эластичных файлов определяется значениями доли потерянных файлов π_d , средним числом занятых виртуальных каналов m_d , средним числом файлов, находящихся на обслуживании, y_d , средней величиной используемой пропускной способности узла доступа $z_d = m_d c$, средним временем передачи файла h_d , средним битрейтом, используемым для передачи файла c_d , средним числом виртуальных каналов b , используемых для передачи файла.

Введенные показатели можно определить и рассчитать, используя значения стационарных вероятностей $p(i_1, \dots, i_n, d)$ состояний $(i_1, \dots, i_n, d) \in S$. Обозначим для состояния (i_1, \dots, i_n, d) через i число виртуальных каналов, занятых на обслуживание трафика реального времени $i = i_1 b_1 + \dots + i_n b_n$. Приведем расчетные выражения

$$\begin{aligned}
 \pi_k &= \sum_{\{(i_1, \dots, i_n, d) \in S \mid i+d+b_k > v\}} p(i_1, \dots, i_n, d); \\
 m_k &= \sum_{(i_1, \dots, i_n, d) \in S} p(i_1, \dots, i_n, d) i_k b_k; \quad k = 1, \dots, n; \\
 \pi_d &= \sum_{\{(i_1, \dots, i_n, d) \in S \mid i+d+1 > v\}} p(i_1, \dots, i_n, d); \\
 m_d &= \sum_{\{(i_1, \dots, i_n, d) \in S \mid d > 0\}} p(i_1, \dots, i_n, d) (v - i); \\
 y_d &= \sum_{(i_1, \dots, i_n, d) \in S} p(i_1, \dots, i_n, d) d; \\
 h_d &= \frac{y_d}{\lambda_d (1 - \pi_d)}; \quad c_d = \frac{F}{h_d}; \quad b = \frac{m_d}{y_d}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

3. Система уравнений статистического равновесия

Для оценки характеристик, заданных выражениями (2), необходимо найти значения $p(i_1, \dots, i_n, d) \in S^1$. Для этого достаточно построить и решить систему уравнений статистического равновесия, связывающую ненормированные

¹ Будем использовать строчные буквы для обозначения нормированных значений вероятностей состояний и характеристик и прописные буквы для обозначения их ненормированных значений.

вероятности модели. Она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & P(i_1, \dots, i_n, d) \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\lambda_k I(i + d + b_k \leq v) + i_k \mu_k \right) + \right. \\
 & \left. + \lambda_d I(i + d + 1 \leq v) + (v - i) \mu_d I(d > 0) \right\} = \\
 & = \sum_{k=1}^n P(i_1, \dots, i_k - 1, \dots, i_n, d) \lambda_k I(i_k > 0) + P(i_1, \dots, i_n, d - 1) \lambda_d I(d > 0) + \\
 & + \sum_{k=1}^n P(i_1, \dots, i_k + 1, \dots, i_n, d) (i_k + 1) \mu_k I(i + d + b_k \leq v) + \\
 & + P(i_1, \dots, i_n, d + 1) (v - i) \mu_d I(i + d + 1 \leq v), \quad (i_1, \dots, i_n, d) \in S.
 \end{aligned}$$

Здесь и далее $I(\cdot)$ — индикаторная функция, определяемая соотношением

$$(4) \quad I(\cdot) = \begin{cases} 1, & \text{если выполнено условие, сформулированное} \\ & \text{в скобках,} \\ 0, & \text{если это условие не выполнено.} \end{cases}$$

Полученные в результате решения системы (3) ненормированные значения вероятностей $P(i_1, \dots, i_n, d)$ необходимо нормировать.

Система уравнений (3) не обладает какими-либо специальными свойствами, которые обеспечивают рекурсивную оценку стационарных вероятностей. По этой причине для решения (3) используются стандартные методы линейной алгебры. Исходя из опыта решения подобных систем, для оценки вероятностей состояний рекомендуется использовать итерационный алгоритм Гаусса–Зейделя. Применение данного подхода позволяет рассчитывать стационарные вероятности для моделей систем связи с числом состояний до нескольких миллионов. Стандартная реализация рекурсии Гаусса–Зейделя для решения (3) не обладает гарантированной сходимостью, но в большинстве случаев она имеет место. Сходимость исследуется косвенными методами на основе анализа близости последовательных приближений и выполнения известных теоретических соотношений, связывающих величины характеристик исследуемой модели системы связи. К таким соотношениям относится формула Литтла. Детали реализации данного подхода можно найти в [10, 17–19]. Для обеспечения сходимости достаточно в (3) одну из неизвестных положить равной единице, убрать соответствующее уравнение (3) и перейти к решению неоднородной системы линейных уравнений. После проделанных преобразований рекурсия Гаусса–Зейделя всегда сходится (из-за наличия слабого диагонального преобладания), но требует для своей реализации существенно большего числа итераций.

Алгоритм Гаусса–Зейделя будет далее использоваться для оценки погрешности построенного в разделе 4 приближенного метода вычисления характе-

ристик качества совместного обслуживания поступающих заявок исследуемой модели узла. Достаточно обоснованные приближенные методы играют основную роль в разработке инженерных методик, направленных на решение задач оценки максимально достаточной нагрузки и минимально необходимого объема ресурса передачи информации мультисервисного узла доступа. Формулировке, анализу и примерам использования приближенных методов расчета характеристик построенной модели узла доступа будут посвящены последующие разделы работы.

4. Оценка характеристик с использованием упрощенных уравнений равновесия

Принцип упрощенных уравнений равновесия был впервые сформулирован и использован при построении границ урезанных пространств состояний, обеспечивающих заданную погрешность вычисления характеристик моделей с учетом эффекта повторных вызовов [20, 21]. Идея метода заключается в формировании системы соотношений для приближенного расчета стационарных вероятностей состояний модели исходя из требования о соблюдении для них локальных законов сохранения, которые для исследуемой модели выполняются в отдельных макросостояниях, выбираемых в соответствии со структурой используемого пространства состояний и физическим смыслом отдельных компонент состояния.

Для построенной модели к таким макросостояниям отнесем (i) , где объединены все состояния модели с числом занятых виртуальных каналов, равным i , $i = 0, 1, \dots, v$, и (d) , где объединены все состояния модели с числом передаваемых файлов, равным d , $d = 0, 1, \dots, v$. Действуя аналогичным образом, введем также макросостояние (i, d) и определим стационарную вероятность этого состояния из выражения

$$p(i, d) = \sum_{\{(i_1, \dots, i_n, d) \in S \mid i_1 b_1 + \dots + i_n b_n = i\}} p(i_1, \dots, i_n, d),$$

$$i = 0, 1, \dots, v; \quad d = 0, 1, \dots, v - i.$$

Если известны значения $p(i, d)$, то можно рассчитать величины характеристик, заданных выражениями (2). Для этого достаточно воспользоваться соотношениями

$$(5) \quad \pi_k = \sum_{i=0}^v \sum_{d=0}^{v-i} p(i, d) I(i + d + b_k > v); \quad m_k = \frac{\lambda_k}{\mu_k} (1 - \pi_k) b_k;$$

$$\pi_d = \sum_{i=0}^v \sum_{d=0}^{v-i} p(i, d) I(i + d + 1 > v); \quad m_d = \sum_{i=0}^v \sum_{d=1}^{v-i} p(i, d) (v - i);$$

$$y_d = \sum_{i=0}^v \sum_{d=1}^{v-i} p(i, d) d.$$

Остальные характеристики обслуживания эластичного трафика определяются из выражений (2).

Получим вид локальных законов сохранения для макросостояний (i) , (d) , которые далее будут использоваться для приближенной оценки $p(i, d)$. Начнем с макросостояния (d) . Приравняв интенсивности выхода $r(t)$ из (d) к интенсивности перехода в макросостояние (d) , получаем систему соотношений следующего вида:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \left(P(0, d) + P(1, d) + \dots + P(v - d - 1, d) \right) \lambda_d + \\
 & + \left(P(0, d)v + P(1, d)(v - 1) + \dots + P(v - d, d)d \right) \mu_d I(d > 0) = \\
 & = \left(P(0, d - 1) + P(1, d - 1) + \dots + P(v - d, d - 1) \right) \lambda_d I(d > 0) + \\
 & + \left(P(0, d + 1)v + P(1, d + 1)(v - 1) + \dots + P(v - d - 1, d + 1)(d + 1) \right) \mu_d, \\
 & \quad d = 0, 1, \dots, v - 1.
 \end{aligned}$$

Рассмотрев (6) последовательно при $d = 0, 1, \dots, v - 1$ и выполнив несложные алгебраические преобразования, приводим (6) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \left(P(0, d) + P(1, d) + \dots + P(v - d - 1, d) \right) \lambda_d = \\
 & = \left(P(0, d + 1)v + P(1, d + 1)(v - 1) + \dots + P(v - d - 1, d + 1)(d + 1) \right) \mu_d, \\
 & \quad d = 0, 1, \dots, v - 1.
 \end{aligned}$$

Теперь получим вид локальных законов сохранения для макросостояния (i) . Приравняв интенсивности выхода $r(t)$ из (i) к интенсивности перехода в макросостояние (i) , получаем систему соотношений следующего вида:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \sum_{\{(i_1, \dots, i_n, d) \in S \mid i_1 b_1 + \dots + i_n b_n = i\}} \sum_{k=0}^n \left(P(i_1, \dots, i_k - 1, \dots, i_n, d) \lambda_k I(i_k > 0) + \right. \\
 & \left. + P(i_1, \dots, i_k + 1, \dots, i_n, d) (i_k + 1) \mu_k I(i + b_k + d \leq v) \right) = \\
 & = \sum_{\{(i_1, \dots, i_n, d) \in S \mid i_1 b_1 + \dots + i_n b_n = i\}} \sum_{k=0}^n \left(P(i_1, \dots, i_n, d) \lambda_k I(i + b_k + d \leq v) + \right. \\
 & \left. + P(i_1, \dots, i_n, d) i_k \mu_k I(i_k > 0) \right), \quad i = 0, 1, \dots, v.
 \end{aligned}$$

Перейдем к построению системы упрощенных уравнений равновесия, которую далее будем использовать для приближенного вычисления характеристик исследуемой модели узла доступа. Обозначим через $\hat{P}(i_1, \dots, i_n, d)$, $(i_1, \dots, i_n, d) \in S$ получаемые при этом оценки вероятностей стационарных

состояний модели. Сохраним для оценок введенных характеристик (2), вероятностей $P(i, d)$ и т.д., получаемых с использованием $\hat{P}(i_1, \dots, i_n, d)$, ранее введенные обозначения, только добавим в их запись символ $\hat{\cdot}$. Величины $\hat{P}(i_1, \dots, i_n, d)$ находятся из требования о выполнении для $\hat{P}(i_1, \dots, i_n, d)$ локального закона сохранения (6)

$$(9) \quad \left(\hat{P}(0, d) + \hat{P}(1, d) + \dots + \hat{P}(v - d - 1, d) \right) \lambda_d = \\ = \hat{P}(0, d + 1) v \mu_d + \hat{P}(1, d + 1) (v - 1) \mu_d + \dots + \hat{P}(v - d - 1, d + 1) (d + 1) \mu_d, \\ d = 0, 1, \dots, v - 1,$$

и соотношений

$$(10) \quad \hat{P}(i_1, \dots, i_n, d) i_k = \hat{P}(i_1, \dots, i_k - 1, \dots, i_n, d) I(i_k > 1) a_k, \\ (i_1, \dots, i_n, d) \in S, \quad a_k = \frac{\lambda_k}{\mu_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Выражения (10) по форме совпадают с соотношениями детального баланса при формировании и обслуживании заявок на передачу трафика сервисов реального времени в мультисервисной модели Эрланга [7, 10, 22, 23]. Они определяют приближенный характер получаемых оценок, поскольку для исходной модели они не выполняются.

Воспользовавшись равенствами (10), можно показать, что для $\hat{P}(i_1, \dots, i_n, d)$ выполняется локальный закон сохранения (8), т.е. справедливы соотношения

$$(11) \quad \sum_{\{(i_1, \dots, i_n, d) \in S \mid i_1 b_1 + \dots + i_n b_n = i\}} \sum_{k=1}^n \hat{P}(i_1, \dots, i_k - 1, \dots, i_n, d) \lambda_k I(i_k > 0) + \\ + \hat{P}(i_1, \dots, i_k + 1, \dots, i_n, d) (i_k + 1) \mu_k I(i + b_k + d \leq v) = \\ = \sum_{\{(i_1, \dots, i_n, d) \in S \mid i_1 b_1 + \dots + i_n b_n = i\}} \sum_{k=1}^n \hat{P}(i_1, \dots, i_n, d) \lambda_k I(i + b_k + d \leq v) + \\ + \hat{P}(i_1, \dots, i_n, d) i_k \mu_k I(i_k \geq v), \quad i = 0, 1, \dots, v.$$

Далее покажем, что соотношения (9), (10) позволяют единственным образом определить значения $\hat{P}(i_1, \dots, i_n, d)$, $(i_1, \dots, i_n, d) \in S$, а с ними и введенные оценки показателей совместного обслуживания заявок в исследуемой модели узла доступа. Таким образом, оценки стационарных вероятностей $\hat{P}(i_1, \dots, i_n, d)$, $(i_1, \dots, i_n, d) \in S$, также как и их точные значения $P(i_1, \dots, i_n, d)$, $(i_1, \dots, i_n, d) \in S$ удовлетворяют одинаковым по форме локальным законам сохранения (7), (8) и (9), (11), что позволяет ожидать хорошую точность оценивания. Исходя из вероятностной интерпретации (9), (10), назовем эти соотношения системой упрощенных уравнений равновесия.

Построим рекурсивный алгоритм вычисления значений $\hat{P}(i, d)$ при фиксированном d . Введем вспомогательную характеристику

$$\hat{Y}_k(i, d) = \sum_{\{(i_1, \dots, i_n, d) \in S \mid i_1 b_1 + \dots + i_n b_n = i\}} \hat{P}(i_1, \dots, i_n, d) i_k, \\ i = 0, 1, \dots, v; \quad d = 0, 1, \dots, v - i.$$

Просуммировав (10) по всем $(i_1, \dots, i_n, d) \in S$, удовлетворяющим условию $i_1 b_1 + \dots + i_n b_n = i$, получаем равенство

$$(12) \quad \hat{Y}_k(i, d) = \hat{P}(i - b_k, d) a_k I(i \geq b_k).$$

Умножим (12) на b_k и просуммируем по $k = 1, 2, \dots, n$. Переставив слева порядок суммирования, получаем рекурсивное соотношение, связывающее последовательные значения $\hat{P}(i, d)$,

$$(13) \quad \sum_{\{(i_1, \dots, i_n, d) \in S \mid i_1 b_1 + \dots + i_n b_n = i\}} \hat{P}(i_1, \dots, i_n, d) \sum_{k=1}^n i_k b_k = \hat{P}(i, d) i = \\ = \sum_{k=1}^n a_k b_k \hat{P}(i - b_k, d) I(i \geq b_k), \quad d = 0, 1, \dots, v - 1; \quad i = 1, \dots, v - d.$$

Соотношения (7) и (13) позволяют построить рекурсивный алгоритм оценки значений $\hat{P}(i, d)$, $d = 0, 1, \dots, v$; $i = 1, \dots, v - d$. Перечислим последовательность действий при его реализации.

1. Положим $d = 0$, а значение $\hat{P}(0, 0) = 1$.
2. Выразим значения $\hat{P}(i, 0)$, $i = 1, \dots, v$, через $\hat{P}(0, 0)$, используя соотношение (13) при $d = 0$

$$\hat{P}(i, 0) = \frac{1}{i} \times \sum_{k=1}^n \hat{P}(i - b_k, 0) I(i \geq b_k)$$

и последовательно увеличивая i от 1 до v . При фиксированном i значения оценок $\hat{P}(i - b_k, 0)$, $k = 1, \dots, n$, либо уже представлены через $\hat{P}(0, 0)$ (для $i - b_k \geq 0$), либо равны 0 (для $i - b_k < 0$).

3. Положим $d = 1$, а значение $\hat{P}(0, 1) = x$.
4. Выразим значения $\hat{P}(i, 1)$, $i = 1, \dots, v - 1$, через x , используя соотношение (13) при $d = 1$

$$\hat{P}(i, 1) = \frac{1}{i} \times \sum_{k=1}^n \hat{P}(i - b_k, 1) I(i \geq b_k)$$

и последовательно увеличивая i от 1 до $v - 1$.

5. Положим в (9) $d = 0$. Получаем соотношение

$$(14) \quad \left(\hat{P}(0,0) + \hat{P}(1,0) + \dots + \hat{P}(v-1,0) \right) \lambda_d = \\ = \hat{P}(0,1)v\mu_d + \hat{P}(1,1)(v-1)\mu_d + \dots + \hat{P}(v-1,1)\mu_d,$$

которое позволяет выразить значение x через $\hat{P}(0,0)$. Воспользовавшись полученным соотношением и результатами п. 4, получаем выражения для $\hat{P}(i,1)$, $i = 0, 1, \dots, v-1$, через $\hat{P}(0,0)$.

6. Далее положим $d = 2, 3, \dots, v$ и, реализовав последовательность действий, сформулированных в перечисленных выше этапах реализации алгоритма, находим выражения для $\hat{P}(i,d)$, $d = 0, 1, \dots, v$; $i = 1, \dots, v-d$ через $\hat{P}(0,0)$.
7. Находим выражение через $\hat{P}(0,0)$ для нормировочной константы

$$N = \sum_{d=0}^v \sum_{i=0}^{v-d} \hat{P}(i,d).$$

8. Определяем нормированные значения оценок вероятностей $\hat{p}(i,d)$:

$$\hat{p}(i,d) = \frac{\hat{P}(i,d)}{N}, \quad d = 0, 1, \dots, v; \quad i = 1, \dots, v-d.$$

9. Используя $\hat{p}(i,d)$ и выражения (5), находим величины оценок характеристик совместного обслуживания заявок в исследуемой модели мультисервисного узла доступа.

На рис. 2 стрелками отмечена последовательность вычисления $\hat{p}(i,d)$ с помощью построенного алгоритма для $v = 5$.

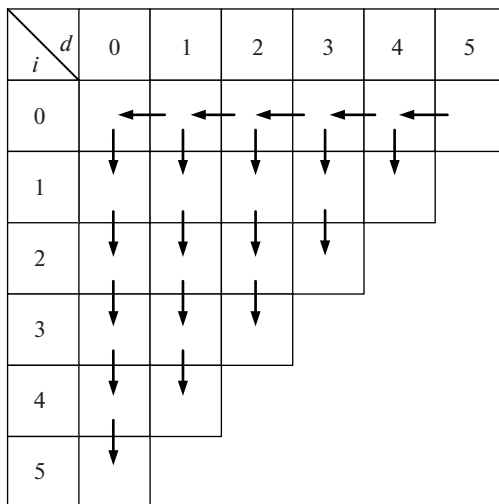


Рис. 2. Последовательность реализации алгоритма для $v = 5$.

С вычислительной точки зрения реализация построенного алгоритма не вызывает никаких затруднений. Трудоемкость процедуры сравнима с многократным использованием рекурсивного алгоритма оценки характеристик мультисервисной модели Эрланга [7, 10, 22, 23]. Сравним объемы вычислений при оценке характеристик модели методом Гаусса–Зейделя и построенным приближенным алгоритмом. На каждом шаге итерационного метода решения (3) определяются приближенные значения вероятностей всех состояний модели $(i_1, \dots, i_n, d) \in S$, принадлежащих пространству S , заданному соотношениями (1). В результате применения приближенного метода находятся оценки вероятностей $P(i, d)$ для состояний $(i, d) \in \hat{S}$, где $i = 0, 1, \dots, v$; $d = 0, 1, \dots, v - i$ (см. рис. 2) и расчеты выполняются только один раз. Отсюда следует примерная оценка эффективности разработанного метода. Объем вычислений по сравнению с итерационным методом уменьшается в число раз, равное числу итераций в реализации метода Гаусса–Зейделя, умноженному на отношение числа состояний в пространстве S к числу состояний в пространстве \hat{S} . В зависимости от параметров модели и условий счета эта величина может существенно превзойти несколько тысяч раз.

5. Погрешность оценки характеристик узла доступа

Проведем численное исследование точности приближенного метода оценки характеристик узла доступа, построенного в предыдущем разделе. Выберем следующие значения входных параметров: $C = 100$ Мбит/с; $n = 2$; $c_1 = 2$ Мбит/с; $c_2 = 5$ Мбит/с. Исходя из принятых допущений, получаем структурные параметры модели: $c = 1$ Мбит/с; $v = 100$ виртуальных каналов (в.к.); $b_1 = 2$ в.к.; $b_2 = 5$ в.к. Предположим, что $F = 80$ Мбит. Среднее время передачи файла с использованием одного канала равно 80 с. При проведении вычислений это время будет принято за единицу. Отсюда $\mu_d = 1$. Для сервисов реального времени параметры времени обслуживания выберем из выражений $\mu_1 = 0,5$ и $\mu_2 = 0,5$.

Введем параметр ρ , который будем использовать для оценки потенциальной загрузки одного виртуального канала. Определим ρ из выражения

$$(15) \quad \rho = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \frac{\lambda_d}{\mu_d}}{v}.$$

Для эластичных данных потенциальную загрузку ресурса рассчитываем из условия об использовании для передачи файла одного канала². Будем предполагать, что все три потока заявок создают одинаковую потенциальную загрузку ресурса. Отсюда следуют выражения для оценки интенсивностей поступающих заявок:

$$(16) \quad \lambda_1 = \frac{v\rho\mu_1}{3b_1}; \quad \lambda_2 = \frac{v\rho\mu_2}{3b_2}; \quad \lambda_d = \frac{v\rho\mu_d}{3}.$$

² Наихудший сценарий обслуживания эластичных данных.

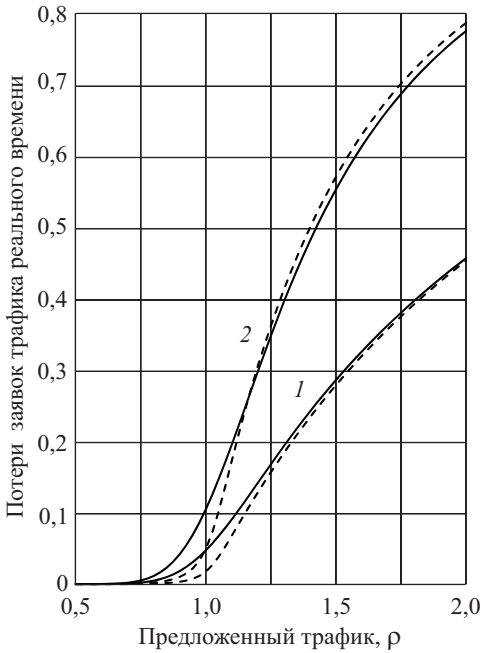


Рис. 3. Погрешность оценки доли потерянных заявок на обслуживание трафика сервисов реального времени.

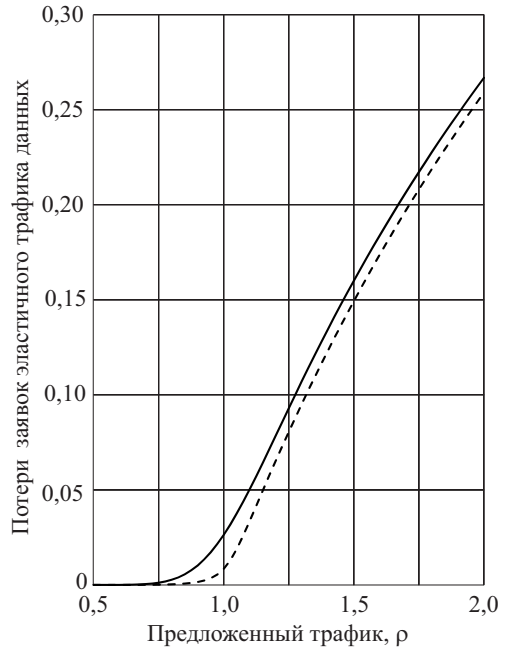


Рис. 4. Погрешность оценки доли потерянных заявок на обслуживание эластичных данных.

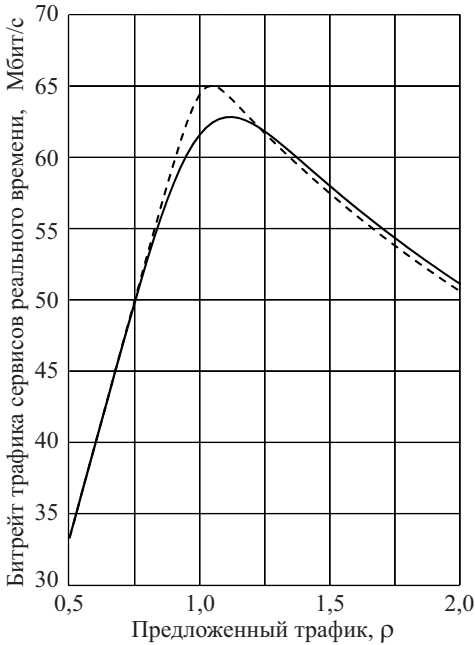


Рис. 5. Погрешность оценки среднего значения битрейта, использованного на обслуживание трафика сервисов реального времени.

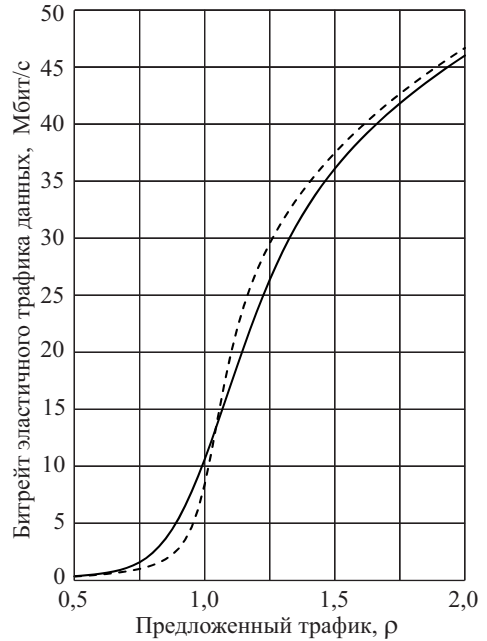


Рис. 6. Погрешность оценки среднего значения битрейта, использованного на обслуживание эластичных данных.

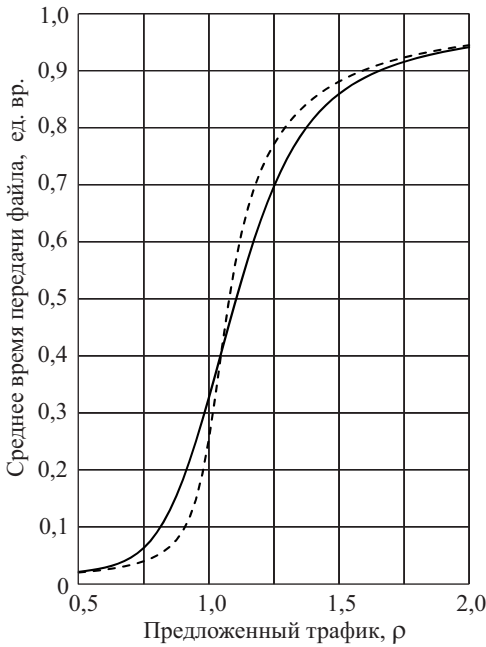


Рис. 7. Погрешность оценки среднего времени передачи файла.

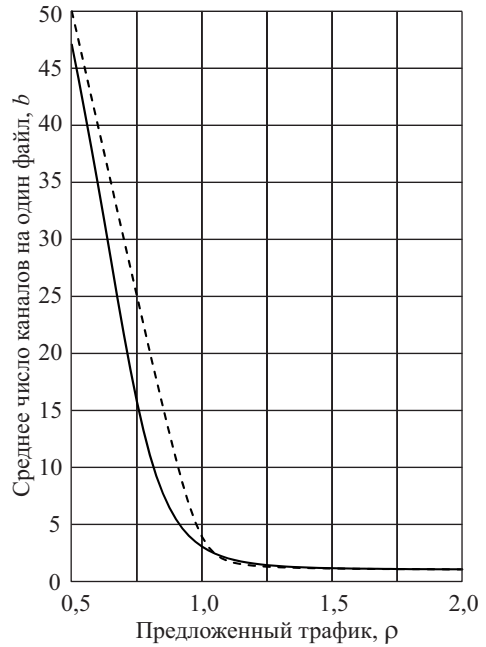


Рис. 8. Погрешность оценки среднего каналов, использованных на передачу одного файла.

Для выбранных значений входных параметров на рис. 3–8 показана зависимость точного и приближенного расчета основных характеристик модели от изменения ρ потенциальной загрузки виртуального канала. Точные значения характеристик получены из решения системы уравнений равновесия (3) итерационным методом Гаусса–Зейделя и использования определений (2). Приближенные величины находились из соотношений (5) после подстановки в них вместо $p(i, d)$ оценок $\hat{p}(i, d)$, полученных в результате реализации рекурсивного алгоритма, основанного на использовании упрощенных уравнений равновесия (9), (10) (см. раздел 4). Соответствующие кривые обозначены пунктиром. Цифра у кривой обозначает номер потока заявок сервисов реального времени. На рис. 3–4 оценивалась погрешность вычисления доли потерянных заявок на обслуживание трафика сервисов реального времени (рис. 3) и доли потерянных заявок на обслуживание эластичных данных (рис. 4). На рис. 5–6 оценивалась погрешность вычисления среднего значения битрейта, использованного на обслуживание трафика сервисов реального времени (рис. 5), и среднего значения битрейта, использованного на обслуживание эластичных данных (рис. 6). На рис. 7–8 оценивалась погрешность вычисления среднего времени передачи файла (рис. 7) и среднего каналов, использованных на передачу одного файла (рис. 8).

Из анализа численных данных следует, что полученные оценки обладают следующими свойствами.

1. Они имеют хорошую точность, которая возрастает при малой и большой нагрузке. Далее эти результаты будут исследованы более подробно.

2. С увеличением нагрузки на канал величины анализируемых характеристик увеличиваются за исключением среднего значения битрейта, используемого на обслуживание трафика сервисов реального времени (см. рис. 5). Это свойство объясняется тем, что с ростом ρ эластичные данные все чаще используют для передачи файла один канал, вытесняя тем самым из обслуживания трафик сервисов реального времени, требующий больших значений числа каналов.
3. Как правило, полученные приближенные значения характеристик при малой нагрузке дают оценку снизу для характеристик исследуемой модели узла доступа, а при большой нагрузке — оценку сверху.

Как было отмечено ранее, точность оценок характеристик возрастает в области больших и малых потерь. Приведем численные данные, подтверждающие этот вывод. В табл. 1 и 2 показаны величины характеристик качества обслуживания трафика сервисов реального времени и эластичных данных для модели узла доступа со значениями входных параметров, использованными при расчете кривых, показанных на рис. 3–8 и перечисленных в начале

Таблица 1. Точная и приближенная оценки характеристик модели узла доступа в условиях большой нагрузки

| ρ | π_2 | | π_d | | h_d | | z_r | | z_d | |
|--------|---------|--------|---------|--------|--------|--------|-------|--------|-------|--------|
| | Точно | Прибл. | Точно | Прибл. | Точно | Прибл. | Точно | Прибл. | Точно | Прибл. |
| 1,00 | 0,1051 | 0,0496 | 0,0264 | 0,0085 | 0,3270 | 0,2546 | 61,58 | 64,42 | 10,61 | 8,41 |
| 1,25 | 0,3484 | 0,3624 | 0,0930 | 0,0806 | 0,6972 | 0,7713 | 61,81 | 61,68 | 26,34 | 29,54 |
| 1,50 | 0,5538 | 0,5716 | 0,1600 | 0,1493 | 0,8594 | 0,8811 | 57,99 | 57,46 | 36,09 | 37,47 |
| 1,75 | 0,6877 | 0,7021 | 0,2173 | 0,2081 | 0,9157 | 0,9233 | 54,33 | 53,80 | 41,81 | 42,65 |
| 2,00 | 0,7760 | 0,7873 | 0,2668 | 0,2591 | 0,9414 | 0,9449 | 51,12 | 50,60 | 46,01 | 46,67 |
| 2,50 | 0,8778 | 0,8848 | 0,3493 | 0,3437 | 0,9649 | 0,9661 | 45,77 | 45,30 | 52,32 | 52,84 |
| 3,00 | 0,9290 | 0,9334 | 0,4154 | 0,4112 | 0,9756 | 0,9762 | 41,53 | 41,12 | 57,03 | 57,47 |
| 4,00 | 0,9723 | 0,9742 | 0,5147 | 0,5122 | 0,9853 | 0,9855 | 35,28 | 34,96 | 63,76 | 64,09 |
| 5,00 | 0,9875 | 0,9884 | 0,5853 | 0,5838 | 0,9897 | 0,9898 | 30,88 | 30,63 | 68,39 | 68,66 |
| 7,50 | 0,9974 | 0,9975 | 0,6956 | 0,6951 | 0,9942 | 0,9943 | 23,90 | 23,76 | 75,65 | 75,80 |

Таблица 2. Точная и приближенная оценки характеристик качества обслуживания эластичного трафика в условиях малой нагрузки

| ρ | h_d | | z_r | | z_d | | b | |
|--------|---------|---------|-------|--------|---------|---------|--------|--------|
| | Точно | Прибл. | Точно | Прибл. | Точно | Прибл. | Точно | Прибл. |
| 0,500 | 0,02124 | 0,02000 | 33,33 | 33,33 | 0,35401 | 0,33333 | 47,078 | 50,000 |
| 0,400 | 0,01717 | 0,01666 | 26,66 | 26,66 | 0,22899 | 0,22222 | 58,225 | 60,000 |
| 0,300 | 0,01451 | 0,01428 | 20,00 | 20,00 | 0,14512 | 0,14285 | 68,908 | 70,000 |
| 0,200 | 0,01259 | 0,01250 | 13,33 | 13,33 | 0,08398 | 0,08333 | 79,378 | 80,000 |
| 0,150 | 0,01182 | 0,01176 | 10,00 | 10,00 | 0,05912 | 0,05882 | 84,565 | 85,000 |
| 0,100 | 0,01114 | 0,01111 | 6,666 | 6,666 | 0,03714 | 0,03703 | 89,728 | 90,000 |
| 0,075 | 0,01083 | 0,01081 | 5,000 | 5,000 | 0,02708 | 0,02702 | 92,302 | 92,500 |
| 0,050 | 0,01054 | 0,01052 | 3,333 | 3,333 | 0,01756 | 0,01754 | 94,871 | 95,000 |
| 0,025 | 0,01026 | 0,01025 | 1,666 | 1,666 | 0,00855 | 0,00854 | 97,437 | 97,500 |

данного раздела. Приведенные численные данные подтверждают асимптотические свойства оценок. Погрешность оценок быстро уменьшается с увеличением ρ (табл. 1) и с его уменьшением (табл. 2). В области больших потерь асимптотические свойства проявляют себя для всех характеристик, перечисленных в (2). В области малых потерь — только для характеристик передачи эластичных данных.

Приведенные численные данные показали, что разработанный метод имеет хорошую точность для величин входных параметров, которые соответствуют практическим приложениям, в частности для значений малых потерь, где происходит решение задачи планирования необходимого по нагрузке объема ресурса передачи информации, и для значений больших потерь, где решается задача оценки объема трафика, выгружаемого на другие узлы доступа или в другие диапазоны частот, с целью достижения заданных показателей QoS. Приведем примеры решения сформулированных задач.

6. Практическое использование полученных результатов

Оценка требуемого ресурса узла доступа для заданной нагрузки и максимально допустимой нагрузки для заданной величины ресурса являются близкими задачами и решаются методом перебора. В первом случае начиная с некоего начального значения увеличивается пропускная способность узла доступа, пока не будет достигнут требуемый результат по качеству обслуживания, во втором — в ситуации перегрузки с этой же целью уменьшается входной поток заявок. Начнем с решения второй задачи.

Изменим в исследуемой модели мультисервисного узла доступа описание процедуры формирования входного потока. Предположим, что узел доступа обслуживает пуассоновский поток заявок интенсивности λ , разделенных на $n + 1$ сервисных категорий. Первые n категорий представляют из себя заявки на передачу трафика сервисов реального времени. Последняя ($n + 1$)-я категория — это заявки на передачу эластичного трафика данных. Примем, что $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_d$. С вероятностью $p_k = \frac{\lambda_k}{\lambda}$, $k = 1, \dots, n$ заявка принадлежит k -й категории, требует c_k бит/с, $k = 1, \dots, n$ и занимает ресурс случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром μ_k . С вероятностью $p_d = \frac{\lambda_d}{\lambda}$ заявка принадлежит категории эластичного трафика и обслуживается по соответствующим правилам, введенным при описании исходной модели узла (см. раздел 2). Понятно, что рассмотренное изменение процедуры формирования входного потока не изменило математическое описание исследуемой модели узла доступа.

Предположим, что имеющийся или запланированный трафик приводит к перегрузке передаточных возможностей узла доступа. С хорошей точностью эту ситуацию можно отследить, используя метод оценки характеристик качества обслуживания заявок, основанный на использовании упрощенных уравнений равновесия (см. раздел 4 и табл. 1). Допустим, что в сложившейся ситуации нельзя просто увеличить пропускную способность узла доступа. С возникшими трудностями можно справиться, перенаправив (говорят так-

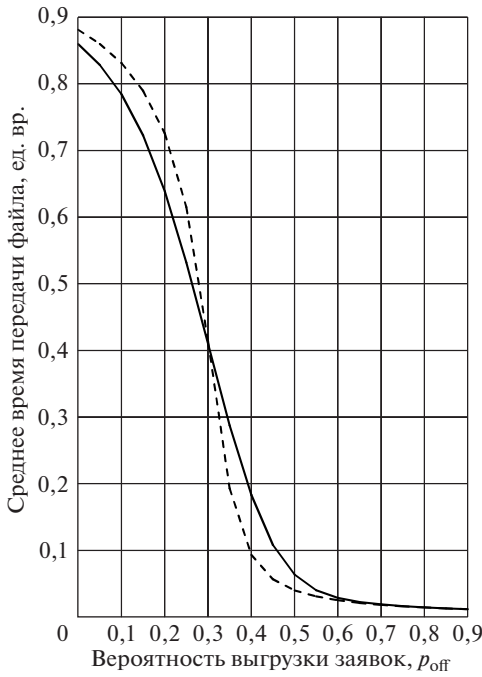


Рис. 9. Зависимость оценки среднего времени передачи файла от p_{off} .

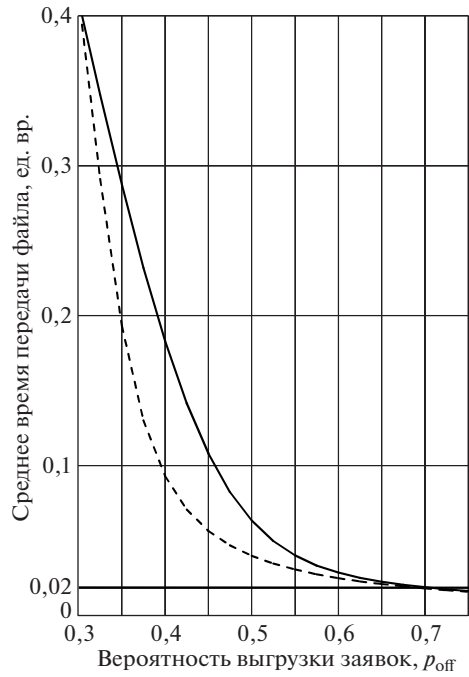


Рис. 10. Оценка доли выгружаемого трафика для обеспечения заданных показателей QoS.

же выгрузив) какую-то часть входного потока на другие узлы доступа с тем, чтобы характеристики качества обслуживания оставшейся части трафика на имеющемся ресурсе не превышали нормативных значений [24]. Обозначим через p_{off} вероятность выгрузки поступившей заявки.

Формальная постановка задачи выглядит следующим образом. Необходимо определить величину p_{off} , которая обеспечивает заданный уровень качества обслуживания оставшихся заявок в форме выполнения неравенств

$$(17) \quad \pi = \max(\pi_1, \dots, \pi_n, \pi_d) < \pi^{\text{norm}}, \quad h_d < h_d^{\text{norm}}.$$

Здесь π^{norm} и h_d^{norm} — требуемые по условиям соглашения об обслуживании величины соответственно максимальных потерь заявок и среднего времени передачи эластичных данных.

Рассмотрим модель узла доступа для значений входных параметров, использованных при расчете содержания табл. 1. Величины характеристик обслуживания заявок при $\rho = 1,5$ говорят о том, что узел находится в состоянии перегрузки и надо уменьшать поступающий поток заявок. Возьмем следующие значения нормативных показателей: $\pi^{\text{norm}} = 0,01$, $h_d^{\text{norm}} = 0,2$.

Задачу оценки вероятности выгрузки решим в два этапа. Вначале найдем величину p_{off} , которая обеспечивает выполнение неравенства (17) для среднего времени передачи файла. Отметим, что выбор $h_d^{\text{norm}} = 0,2$ означает, что

среднее время передачи файла выбирается в 50 раз меньшим, чем среднее время передачи файла на одном канале, и составляет 1,6 с. На рис. 9 показано изменение h_d с увеличением p_{off} в диапазоне от 0 до 0,9. Приводятся точное значение характеристики, найденное в результате решения системы уравнений равновесия (3) итерационным методом Гаусса–Зейделя, и ее оценка, найденная с использованием упрощенных уравнений равновесия (кривая выделена пунктиром). Отметим, что начальное и конечное значения диапазона изменения p_{off} принадлежат области, где используемые оценки характеристик являются асимптотически точными. Это обуславливает высокую точность вычисления характеристик исходной модели, свидетельством чего являются кривые, приведенные на рис. 9. Более детально решение задачи определения p_{off} показано на рис. 10, где установлено, что $p_{\text{off}} \approx 0,7$.

Вторая часть вычисления доли выгружаемого трафика заключается в необходимости выполнения неравенства $\pi \leq 0,01$. Чтобы установить этот факт, построим верхнюю оценку для π , предположив, что эластичные файлы передаются только с использованием одного канала. Это означает, что все заявки, поступающие в узел доступа, обслуживаются по правилам трафика сервисов реального времени. В данной ситуации величины характеристик можно рассчитать с использованием рекурсии, построенной для мультисервисной модели Эрланга [7, 10, 22, 23]. Полученные результаты подтверждают выполнение неравенства $\pi \leq 0,01$. Таким образом, решение задачи достигнуто для вероятности выгрузки $p_{\text{off}} \approx 0,7$. Аналогичным образом решается задача в ситуации, когда выгрузке подвергается только трафик сервисов реального времени или только эластичный трафик.

Оценка требуемого ресурса узла доступа для заданной нагрузки решается такой же последовательностью, поэтому эту часть исследования опустим.

7. Заключение

Разработана и исследована математическая модель совместного обслуживания трафика реального времени и эластичного трафика данных в мультисервисном узле доступа. Поступление заявок всех сервисных категорий подчиняется пуассоновскому закону, длительности обслуживания заявок на передачу трафика реального времени имеют экспоненциальное распределение, как и объемы передаваемых эластичных данных. Обслуживание эластичных данных происходит в соответствии с положениями дисциплины Processor Sharing. Поступившая заявка на передачу трафика реального времени имеет приоритет в занятии ресурса, уменьшая при необходимости пропускную способность, используемую одним файлом, до заранее заданного минимального значения. Построен марковский процесс, описывающий изменение состояний модели. Приведены определения показателей качества совместного обслуживания поступающих запросов на информационное обслуживание. Сформирована система уравнений статистического равновесия и рассмотрено ее использование для оценки введенных характеристик. Предложен метод приближенной оценки характеристик, основанный на построении системы упрощен-

ных уравнений равновесия. Показано использование разработанных методов для решения задачи оценки объема трафика, выгружаемого в ситуации перегрузки на другие узлы доступа или в другие диапазоны частот, с целью достижения заданных показателей QoS и задачи планирования необходимого по нагрузке объема ресурса передачи информации мультисервисного узла доступа. Полученные результаты также применимы к анализу пропускной способности узлов концентрации абонентской нагрузки в системах спутниковой связи [25], дата-центрах [26], в справочно-информационных центрах [21].

Отметим положительные характеристики разработанного приближенного метода.

- Формирование упрощенных уравнений равновесия основано на использовании локальных законов сохранения, которые выполняются в отдельных макросостояниях модели, выбираемых в соответствии со структурой используемого пространства состояний и физическим смыслом отдельных компонент состояния. Тем самым можно утверждать, что данный подход основан на общих принципах функционирования моделей систем связи, описываемых марковскими процессами, что дает возможность обобщать полученные результаты на другие модели формирования входных потоков заявок и процедуры распределения ресурса, в частности на модели с групповым поступлением заявок и ожиданием.
- Полученные оценки характеристик качества обслуживания поступающих заявок имеют хорошую точность для значений входных параметров, которые соответствуют практическим приложениям, в частности, для значений малых потерь, где происходит решение задачи планирования необходимого по нагрузке объема ресурса передачи информации, и для значений больших потерь, где решается задача оценки объема трафика, выгружаемого на другие узлы доступа или в другие диапазоны частот, с целью достижения заданных показателей QoS.
- Используемые в процессе реализации метода вычислительные алгоритмы основаны на использовании простых рекурсивных процедур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Study on scenarios and requirements for next generation access technologies. 3GPP Technical Report (TR) 138.913 version 15.0.0 Release 15. 2018.
2. Network Slice Selection Services. 3GPP Technical Specification (TS) 129.531 version 15.5.0. Release 15. 2019.
3. *Evans J., Filsfils C.* Deploying IP and MPLS QOS for multiservice networks. Theory and Practice. Morgan Kaufmann Publishers. Elsevier, 2007. 456 p.
4. *Ross K.W.* Multiservice loss models for broadband telecommunication networks. London: Springer, 1995. 343 p.
5. *Iversen V.B.* Teletraffic Engineering and Network Planning. Technical University of Denmark, May 2010. 370 p.
6. Broadband network traffic. Performance evaluation and design of broadband multiservice networks. Final report of action COST 242 / James Roberts (ed). Lecture notes in computer sciences. Springer, 1996. 584 p.

7. *Степанов С.Н.* Основы телетрафика мультисервисных сетей. М.: Эко – Трендз, 2010. 392 с.
8. *Bonald T., Feuillet M.* Network Performance Analysis. United Kingdom, London, Wiley, 2011. 253 p.
9. *Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E.* Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks // Autom. Control Comput. Sci. 2013. V. 47. No. 2. P. 62–69.
10. *Степанов С.Н.* Теория телетрафика: концепции, модели, приложения. М.: Горячая линия – Телеком, 2015. 868 с.
11. *Степанов С.Н., Степанов М.С.* Планирование ресурса передачи при совместном обслуживании мультисервисного трафика реального времени и эластичного трафика данных // АиТ. 2017. № 11. С. 79–93.
Stepanov S.N., Stepanov M.S. Planning Transmission Resource at Joint Servicing of the Multiservice Real Time and Elastic Data Traffics // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 11. P. 2004–2015.
12. *Shorgin S., Samouylov K., Gaidamaka Y., Chukarin A., Buturlin I., Begishev V.* Modeling Radio Resource Allocation Scheme with Fixed Transmission Zones for Multiservice M2M Communications in Wireless IoT Infrastructure // Lecture Notes Comput. Sci., Springer, Cham. 2015. V. 9012. P. 473–483.
13. *Begishev V., Petrov V., Samouylov A., Moltchanov D., Andreev S., Koucheryavy Y., Samouylov K.* Resource Allocation and Sharing for Heterogeneous Data Collection over Conventional 3GPP LTE and Emerging NB-IoT Technologies // Comput. Communicat. 2018. V. 120. No. 2. P. 93–101.
14. *Naumov V., Gaidamaka Yu., Yarkina N., Samouylov K.* Matrix and Analytical Methods for Performance Analysis of Telecommunication Systems. Springer Nature, Switzerland, 2021.
15. *Kallos G.A., Vassilakis V.G., Moscholios I.D., Logothetis M.D.* Performance modelling of W-CDMA networks supporting elastic and adaptive traffic // Proc. of 4 Int. Working Conference on Performance Modelling and Evaluation of Heterogeneous Networks (HET-NETs '06), Ilkley, 2006.
16. *Gudkova I.A., Samouylov K.E.* Modelling a radio admission control scheme for video telephony service in wireless networks // Lecture Notes Comput. Sci. 2012. V. 7469. P. 208–215.
17. *Bonald T., Virtamo J.* A recursive formula for multirate systems with elastic traffic // IEEE Communicat. Lett. 2005. V. 9. No. 8. P. 753–755.
18. *Степанов С.Н., Степанов М.С.* Планирование ресурса передачи информации соединительных линий мультисервисных иерархических сетей доступа // АиТ. 2018. № 8. С. 66–80.
Stepanov S.N., Stepanov M.S. Planning the Resource of Information Transmission for Connection Lines of Multiservice Hierarchical Access Networks. Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 8. P. 1422–1433.
19. *Степанов С.Н., Степанов М.С.* Эффективный алгоритм оценки требуемого объема ресурса беспроводных систем связи при совместном обслуживании гетерогенного трафика устройств интернета вещей // АиТ. 2019. № 11. С. 108–126.
Stepanov S.N., Stepanov M.S. Efficient Algorithm for Evaluating the Required Volume of Resource in Wireless Communication Systems under Joint Servicing of

- Heterogeneous Traffic for the Internet of Things // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 2017–2032.
20. *Степанов С.Н., Степанов М.С.* Методы оценки необходимого объема ресурса мультисервисных узлов доступа // АИТ. 2020. № 12. С. 129–152.
Stepanov S.N., Stepanov M.S. Methods for Estimating the Required Volume of Resource for Multiservice Access Nodes // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 12. P. 2244–2261.
 21. *Stepanov S.N.* Markov models with retrials: The calculation of stationary performance measures based on the concept of truncation // Math. Comput. Model. 1999. No. 30. P. 207–228.
 22. *Stepanov S., Stepanov M.* Estimation of the Performance Measures of a Group of Servers Taking into Account Blocking and Call Repetition before and after Server Occupation // Mathematics. 2021. V. 9. No. 21. 2811. P. 1–24.
<https://doi.org/10.3390/math9212811>
 23. *Fortet R., Grandjean Ch.* Congestion in a Loss System When Some Calls Want Several Devices Simultaneously // Electr. Communicat. 1964. V. 39. No. 4. P. 513–526.
 24. *Kaufman J.S.* Blocking in a shared resource environment // IEEE Transact. Communicat. 1981. V. 29. No. 1. P. 1474–1481.
 25. *Chen J., Chang Z., Guo X., Li R., Han Z.* Hamalainen, T. Resource Allocation and Computation Offloading for Multi-Access Edge Computing With Fronthaul and Backhaul Constraints // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2021. V. 70. No. 8. P. 8037–8049.
 26. *Stepanov S.N., Andrabai U.M., Stepanov M.S., Ndayikunda J.* Reservation Based Joint Servicing of Real Time and Batched Traffic in Inter Satellite Link // Proc. of 2020 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. Moscow. Russia. 2020. P. 1–5.
<https://doi.org/10.1109/IEEECONF48371.2020.9078542>
 27. *Volkov A.O., Korobkina A.V., Stepanov S.N.* Development of Model and Algorithms for Servicing Real-Time and Data Traffic in a Cloud Computing System // Proc. of 2022 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. Moscow. Russia. P. 1–6. 2022.
<https://doi.org/10.1109/IEEECONF53456.2022.9744289>

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 19.07.2023

После доработки 29.08.2023

Принята к публикации 04.09.2023

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2023 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АДАПТИВНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ СОСТОЯНИЙ И ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕПАРАМЕТРИЗАЦИЕЙ¹

Рассматривается проблема восстановления состояний для класса линейных систем с постоянными неизвестными параметрами и перепараметризацией при действии внешних возмущений, формируемых известным генератором с неизвестными начальными условиями. Предлагается расширенный адаптивный наблюдатель состояний, в отличие от существующих подходов позволяющий решать задачи оценивания состояний и возмущений для систем, не представленных в канонической наблюдаемой форме. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы в рамках математического моделирования.

Ключевые слова: оценивание, идентификация, адаптивный наблюдатель, исчезающее возмущение, сходимое, перепараметризация.

DOI: 10.31857/S0005231023110077, EDN: OPGNVN

1. Введение

Одной из задач теории автоматического управления является восстановление неизмеряемых состояний полностью наблюдаемых линейных систем:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= C^T x(t) \end{aligned}$$

с неизвестными матрицами $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^n$.

Для ее решения в отечественной и зарубежной литературе предложены различные наблюдатели, основанные на технике инвариантных эллипсоидов [1], методах сильной обратной связи [2, 3], разделения движений по темпам [3, 4] и теории параметрической идентификации [5, 6].

В отличие от других подходов наблюдатели, построенные на основе методов теории идентификации [5, 6], реализуют алгоритмы параметрической

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД.1787.2022.4).

адаптации и поэтому обычно требуют меньшего объема априорной информации о параметрах системы. Однако, начиная с базовых решений [7–10], класс систем, подходящих для синтеза адаптивных наблюдателей, традиционно ограничивается моделями в канонической форме наблюдаемости:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_0 \xi(t) + \psi_a y(t) + \psi_b u(t) = A_a \xi(t) + \psi_b u(t), \\ y(t) &= C_0^T \xi(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} & I_{n-1} \\ 0_n & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}, \quad A_a = \begin{bmatrix} \psi_a & I_{n-1} \\ & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}, \\ \psi_a &= \begin{bmatrix} -a_{n-1} \\ -a_{n-2} \\ \vdots \\ -a_0 \end{bmatrix}, \quad \psi_b = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где ψ_a и ψ_b – параметры характеристических полиномов линейного оператора

$$W_{uy}(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

и связаны с матрицами модели (1.1) через матрицу подобия T :

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \psi_a &= T A T^{-1} C_0, \quad \psi_b = T B, \quad C_0^T = C^T T^{-1}, \\ \mathcal{O}_n &= \mathcal{O} [0_{1 \times (n-1)} \quad 1]^T, \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}^{-1} = \begin{bmatrix} C & A^T C & \dots & (A^{n-1})^T C \end{bmatrix}^T, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} A^{n-1} \mathcal{O}_n & A^{n-2} \mathcal{O}_n & \dots & \mathcal{O}_n \end{bmatrix}.$$

Дело в том, что по измеряемому управлению $u(t)$ и выходу $y(t)$ однозначно идентифицируемы параметры только данной формы пространства состояний [5, с. 269]. Состояния $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ модели (1.2) являются виртуальными и связаны с физическими координатами объекта $x(t) \in \mathbb{R}^n$ через неособое преобразование $\xi(t) = T x(t)$.

Поэтому оценки $\hat{\xi}(t)$, формируемые классическими адаптивными наблюдателями состояний [5, 6] в форме $(\hat{\psi}_a(t), \hat{\psi}_b(t))$ – оценки параметров (1.3), L – матрица коррекции, а конкретные виды функций $f_a(\cdot)$, $f_b(\cdot)$, $f_v(\cdot)$ определены в [5, 6]):

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}(t) &= A_0 \hat{\xi}(t) + \hat{\psi}_a(t) y(t) + \hat{\psi}_b(t) u(t) + L(\hat{y}(t) - y(t)) + v(t), \\ \hat{y}(t) &= C_0^T \hat{\xi}(t), \\ \dot{\hat{\psi}}_a(t) &= f_a(u, y, \hat{y}, \hat{\psi}_a), \\ \dot{\hat{\psi}}_b(t) &= f_b(u, y, \hat{y}, \hat{\psi}_b), \\ \text{Re} \{ \lambda_i(A_0 + L C^T) \} &< 0, \\ v(t) &= f_v(u, y, \hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b) \quad \text{или} \quad v(t) = 0_n, \end{aligned}$$

не только не совпадают с $x(t)$, но и оказываются бесполезными, например, для использования в задачах диагностики отказов, мониторинга и регистрации неизмеряемых переменных технологических процессов, построения и онлайн настройки цифровых двойников и решения других прикладных задач.

Решение данной проблемы заключается в идентификации вместе с параметрами ψ_a и ψ_b матрицы линейного подобия T . Для одного специального класса линейных систем в [7] предложен алгоритм, формирующий оценку $\hat{T}(t)$ на основе оценок $\hat{\psi}_a(t)$ и $\hat{\psi}_b(t)$. В общем случае отображение $\hat{T}(t) = f_T(\hat{\psi}_a(t), \hat{\psi}_b(t))$ может быть вырожденным при определенных значениях оценок $\hat{\psi}_a(t), \hat{\psi}_b(t)$ (см. раздел VIII из [7]). В более поздних работах [10–12], посвященных развитию методов синтеза адаптивных наблюдателей (и даже в базовых книгах по адаптивным наблюдателям линейных систем [5, 6]), насколько известно авторам, проблема оценивания с помощью адаптивных наблюдателей физических состояний $x(t)$ и идентификации матрицы линейного подобия T более не затрагивалась.

В недавней работе [13] вместо идентификации матрицы линейного подобия предложен новый подход к адаптивному восстановлению физических состояний линейных систем. Предлагается перепараметризовать матрицы системы (1.1) относительно некоторых физических параметров $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ (такое переобозначение всегда возможно, если модель (1.1) получена непосредственно на основании законов математической физики — Кирхгофа, Эйлера–Лагранжа и пр.):

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) = \Phi^T(x, u)\Theta_{AB}(\theta), \\ y(t) &= C^T x(t), \end{aligned}$$

и с помощью переобозначений $\psi_a := \psi_a(\theta)$, $\psi_b := \psi_b(\theta)$ также учесть зависимость параметров модели (1.1) от θ .

Учет перепараметризации позволяет связать матрицы моделей (1.1) и (1.2) не через преобразование подобия, а через некоторые новые функциональные преобразования вида $(\theta = \mathcal{F}(\psi_{ab})$ — обратная функция, $\mathcal{L}_{ab} \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 2n}$ — матрица, задающая некоторое линейное преобразование, обеспечивающее $\dim\{\psi_{ab}\} = \dim\{\theta\}$)

$$\begin{aligned} \Theta_{AB}(\theta) &= (\Theta_{AB} \circ \mathcal{F})(\psi_{ab}), \\ \psi_{ab}(\theta) &= \mathcal{L}_{ab} \begin{bmatrix} \psi_a(\theta) \\ \psi_b(\theta) \end{bmatrix}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \end{aligned}$$

что открывает широкие возможности для проектирования адаптивных наблюдателей физических состояний $x(t)$.

В [13] показано, что при выполнении условия

$$(1.6) \quad \det^2 \{ \nabla_\theta \psi_{ab}(\theta) \} > 0, \quad \psi_{ab}(\theta) = \mathcal{L}_{ab} \begin{bmatrix} \psi_a(\theta) \\ \psi_b(\theta) \end{bmatrix}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

существования обратной функции $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$, а также полиномиальной зависимости $\psi_{ab}(\theta)$ и $\Theta_{AB}(\theta)$ от θ оказывается возможно без идентификации параметров $\psi_{ab}(\theta)$ и θ исключительно по измеряемым сигналам $y(t), u(t)$ и известному вектору C получить регрессионные уравнения (где $\mathcal{Y}_{AB}(t), \mathcal{Y}_L(t), \mathcal{M}_{AB}(t), \mathcal{M}_L(t)$ – измеряемые сигналы)

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{AB}(t) &= \mathcal{M}_{AB}(t)\Theta_{AB}(\theta), \\ \mathcal{Y}_L(t) &= \mathcal{M}_L(t)L(\theta)\end{aligned}$$

и, как следствие, реализовать адаптивный наблюдатель состояний системы (1.5) в следующей форме:

$$(1.7) \quad \begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \Phi^T(\hat{x}, u)\hat{\Theta}_{AB}(t) - \hat{L}(t)(\hat{y}(t) - y(t)), \\ \dot{\hat{\Theta}}_{AB}(t) &= f_{\Theta_{AB}}(\mathcal{Y}_{AB}, \mathcal{M}_{AB}, \hat{\Theta}_{AB}), \\ \dot{\hat{L}}(t) &= f_L(\mathcal{Y}_L, \mathcal{M}_L, \hat{L}),\end{aligned}$$

где $\hat{L}(t)$ – оценка матрицы $L(\theta)$ такой, что $A(\theta) - L(\theta)C^T$ – гурвицева.

Другими словами, благодаря связи $\Theta_{AB}(\theta)$ и $\psi_{ab}(\theta)$, через физические параметры θ при выполнении условия (1.6) в соответствии с [13] оказывается возможно идентифицировать $\Theta_{AB}(\theta), L(\theta)$, причем без непосредственной идентификации θ или $\psi_{ab}(\theta)$. В отличие от (1.4) наблюдатель (1.7) позволяет формировать оценки физических координат $x(t)$, а в отличие от [7] – применим для более широкого класса систем и не требует выполнения промежуточной идентификации параметров $\psi_{ab}(\theta)$.

Целью данной работы является расширение результатов [13] на класс линейных систем с перепараметризацией при действии на уравнение состояний внешних возмущений, формируемых известным генератором с неизвестными начальными условиями.

Основные определения

Определение неоднородного отображения, условия постоянного возбуждения регрессора и свойство фильтрации Крейссельмейера [10], приведенные ниже, будут использованы в данной работе².

Определение 1. Отображение $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\mathcal{F}} \times m_{\mathcal{F}}}$ неоднородно с порядком $\ell_{\mathcal{F}} \geq 1$, если существуют $\Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{F}} \times n_{\mathcal{F}}}, \Xi_{\mathcal{F}}(\omega) = \overline{\Xi}_{\mathcal{F}}(\omega)\omega(t) \in \mathbb{R}^{\Delta_{\mathcal{F}} \times n_\theta}$ и отображение $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^{\Delta_{\mathcal{F}}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\mathcal{F}} \times m_{\mathcal{F}}}$ такие, что для любых $\omega(t) \in \mathbb{R}$ и $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ разрешимо функциональное уравнение

$$(1.8) \quad \Pi_{\mathcal{F}}(\omega)\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\Xi_{\mathcal{F}}(\omega)\theta),$$

так что

$$\begin{aligned}\det\{\Pi_{\mathcal{F}}(\omega)\} &\geq \omega^{\ell_{\mathcal{F}}}(t), \\ \Xi_{\mathcal{F}ij}(\omega) &= c_{ij}\omega^{\ell_{ij}}(t), \quad \overline{\Xi}_{\mathcal{F}ij}(\omega) = c_{ij}\omega^{\ell_{ij}-1}(t), \\ c_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad \ell_{ij} \geq 1.\end{aligned}$$

² Для сокращения записи зависимость от θ или t далее может опускаться.

Например, $\mathcal{F}(\theta) = \text{col}\{\theta_1\theta_2, \theta_1\}$ с $\Pi_{\mathcal{F}}(\omega) = \text{diag}\{\omega^2, \omega\}$, $\Xi_{\mathcal{F}}(\omega) = \text{diag}\{\omega, \omega\}$ неоднородно с порядком $\ell_{\mathcal{F}} = 3$.

Основное свойство $\Xi_{\mathcal{F}}(\omega)\theta = \bar{\Xi}_{\mathcal{F}}(\omega)\omega(t)\theta$ из определения 1 позволяет с помощью известной функции $\mathcal{Y}_{\theta}(t) = \omega(t)\theta$ параметризовать линейное регрессионное уравнение относительно $\mathcal{F}(\theta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{F}}(\omega)\mathcal{F}(\theta) &= \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{F}}(\omega)\mathcal{Y}_{\theta}), \\ \begin{bmatrix} \omega^2(t) & 0 \\ 0 & \omega(t) \end{bmatrix} \mathcal{F}(\theta) &= \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{1\theta}(t)\mathcal{Y}_{2\theta}(t) \\ \mathcal{Y}_{1\theta}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Элементы отображения $\mathcal{F}(\theta)$ удовлетворяют определению 1, если они представляют собой многочлены или мономы от θ , а также некоторые из иррациональных функций.

О п р е д е л е н и е 2. Регрессор $\bar{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^n$ возбуждается постоянно ($\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$), если $\exists T > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $\forall t \geq t_0 \geq 0$ верно неравенство

$$(1.9) \quad \int_t^{t+T} \bar{\varphi}(\tau)\bar{\varphi}^T(\tau) d\tau \geq \alpha I_n,$$

где $\alpha > 0$ – степень возбуждения, I_n – единичная матрица.

Для определителя состояний устойчивого ($l > 0$) динамического фильтра

$$\dot{\varphi}(t) = -l\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)\bar{\varphi}^T(t), \quad \varphi(t_0) = 0_{n \times n},$$

верно следующее

Утверждение 1. а) Если $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$, тогда для всех $t \geq t_0 + T$ выполняется неравенство

$$(1.10) \quad \Delta(t) = \det\{\varphi(t)\} \geq \alpha^n e^{-nlT} = \Delta_{\min} > 0.$$

б) Если существует $t_e \in [t_0, \infty)$, такое что для всех $t \geq t_e$ верно (1.10), то $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$.

Доказательство утверждения 1 получено в [14].

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующий класс SISO-систем с перепараметризацией при действии ограниченного внешнего возмущения:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) + D(\theta)\delta(t) = \Phi^T(x, u, \delta)\Theta_{AB}(\theta), \\ y(t) &= C^T x(t), \quad x(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^T(x, u, \delta) &= [I_n \otimes x^T(t) \quad I_n \otimes u^T(t) \quad I_n \otimes \delta^T(t)] \mathcal{D}_{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n_{\Theta}}, \\ \Theta_{AB}(\theta) &= \mathcal{L}_{\Phi}[\text{vec}^T(A^T(\theta)) \quad B^T(\theta) \quad D^T(\theta)]^T \in \mathbb{R}^{n_{\Theta}}, \end{aligned}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ – физические состояния системы с неизвестными начальными условиями x_0 , $\delta(t)$ – внешнее ограниченное возмущение, $\Theta_{AB} \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$, $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ – неизвестные векторы, такие что $n_\Theta \geq n_\theta$, $\mathcal{D}_\Phi \in \mathbb{R}^{(n^2+2n) \times n_\Theta}$, $\mathcal{L}_\Phi \in \mathbb{R}^{n_\Theta \times (n^2+2n)}$ – известные матрицы, вектор $C \in \mathbb{R}^n$ и отображение $\Theta_{AB} : \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\Theta}$ известны. Для измерения доступны только управление $u(t) \in \mathbb{R}$ и выход $y(t) \in \mathbb{R}$.

Относительно управления и возмущения принимаются выполненными следующие допущения.

Допущение 1. Управление $u(t)$ для всех $t \geq t_0$ гарантирует существование и ограниченность всех траекторий системы (2.1).

Допущение 2. Возмущение $\delta(t)$ непрерывно и формируется устойчивым генератором с постоянными параметрами:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_\delta(t) &= \mathcal{A}_\delta x_\delta(t), \quad x_\delta(t_0) = x_{\delta 0}, \\ \delta(t) &= h_\delta^\top x_\delta(t), \end{aligned}$$

где $x_\delta(t) \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ – состояния генератора с неизвестными начальными условиями $x_{\delta 0}$, $h_\delta \in \mathbb{R}^{n_\delta}$, $\mathcal{A}_\delta(t) \in \mathbb{R}^{n_\delta \times n_\delta}$ – известные вектор и матрица, составляющие наблюдаемую пару $(h_\delta^\top, \mathcal{A}_\delta)$.

На основе двойственности задач наблюдения и управления, а также следуя результатам теории обобщенного модального синтеза [15, 16], выдвинем допущение о выполнении условий существования вектора $L(\theta) \in \mathbb{R}^n$, приводящего алгебраический спектр $\sigma\{\cdot\}$ матрицы $A^\top(\theta) - CL^\top(\theta)$ к желаемому.

Допущение 3. Пара $(A^\top(\theta), C)$ управляема, существует и известна матрица состояний $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ модального генератора

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= \Gamma \chi(t), \\ v(t) &= B^\top(\theta) \chi(t) \end{aligned}$$

такая, что пара $(B^\top(\theta), \Gamma)$ наблюдаема и $\sigma\{A(\theta)\} \cap \sigma\{\Gamma\} = 0$.

Выполнение допущений 1–3 позволяет ввести наблюдатель состояний и возмущений:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \Phi^\top \left(\hat{x}, u, \hat{\delta} \right) \hat{\Theta}_{AB}(t) - \hat{L}(t) (\hat{y}(t) - y(t)), \\ \hat{\delta}(t) &= h_\delta^\top \Phi_\delta(t) \hat{x}_{\delta 0}(t), \\ \dot{\Phi}_\delta(t) &= \mathcal{A}_\delta \Phi_\delta(t), \quad \Phi_\delta(t_0) = I_{n_\delta}. \end{aligned}$$

Требуется дополнить наблюдатель (2.4) законами идентификации, обеспечивающими выполнение предельных равенств

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t)\| &= 0 \text{ (exp)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\delta}(t)\| = 0 \text{ (exp)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\kappa}(t)\| = 0 \text{ (exp)}, \\ \tilde{\kappa}(t) &= [\tilde{x}_{\delta 0}^\top(t) \quad \tilde{\Theta}_{AB}^\top(t) \quad \tilde{L}^\top(t)]^\top, \end{aligned}$$

где $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ — ошибка восстановления состояния системы (2.1), $\tilde{\delta}(t) = \hat{\delta}(t) - \delta(t)$ — ошибка восстановления возмущения, $\tilde{\Theta}_{AB}(t) = \hat{\Theta}_{AB}(t) - \Theta_{AB}(\theta)$ — ошибка оценки параметров системы (2.1), $\tilde{x}_{\delta 0}(t) = \hat{x}_{\delta 0}(t) - x_{\delta 0}$ — ошибка оценки начальных условий генератора (2.2), $\tilde{L}(t) = \hat{L}(t) - L(\theta)$ — ошибка оценки $L(\theta)$.

Замечание 1. Допущения 1 и 3 являются стандартными соответственно в задачах адаптивного наблюдения [10–12] и модального синтеза [15, 16]. Допущение 2 ограничивает класс допустимых внешних возмущений.

3. Предпосылки и предварительные преобразования

Прежде чем представить решение задачи (2.5), исследуем идентифицируемость неизвестных параметров κ по измерениям $y(t)$ и $u(t)$. Для этого с помощью преобразований (1.3) представим систему (2.1) в форме (1.2):

$$(3.1) \quad \dot{\xi}(t) = A_0 \xi(t) + \psi_a(\theta) y(t) + \psi_b(\theta) u(t) + \psi_d(\theta) \delta(t),$$

$$(3.2) \quad y(t) = C^T x(t) = C_0^T \xi(t), \quad \xi(t_0) = T x_0 = \xi_0,$$

где $\psi_d(\theta) = TD(\theta)$, $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ — виртуальные неизмеряемые координаты состояния канонической наблюдаемой формы пространства состояний, вектор $C_0 \in \mathbb{R}^n$ и отображения $\psi_a, \psi_b, \psi_d: \mathbb{R}^{n\theta} \rightarrow \mathbb{R}^n$ известны.

Для неизвестных параметров $\eta(\theta) = \text{col}\{\psi_a(\theta), \psi_b(\theta)\}$ уравнения (3.1) при выполнении допущений 1 и 2 оказывается возможно выполнить следующую параметризацию.

Лемма 1. *Неизвестные параметры $\eta(\theta)$ удовлетворяют линейной регрессионной модели³*

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{Y}(t) &= \Delta(t) \eta(\theta) + \epsilon(t), \\ \mathcal{Y}(t) &= k(t) \cdot \text{adj}\{\varphi(t)\} q(t), \quad \Delta(t) = k(t) \cdot \det\{\varphi(t)\}, \end{aligned}$$

где

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \dot{q}(t) &= -k_2 q(t) + \bar{\varphi}_f(t)(\bar{q}(t) - k_1 \bar{q}_f(t) - \beta^T(F_f(t) + l y_f(t))), \quad q(t_0) = 0_{2n}, \\ \dot{\varphi}(t) &= -k_2 \varphi(t) + \bar{\varphi}_f(t) \bar{\varphi}_f^T(t), \quad \varphi(t_0) = 0_{2n \times 2n}, \end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{q}}_f(t) &= -k_1 \bar{q}_f(t) + \bar{q}(t), \quad \bar{q}_f(t_0) = 0, \\ \dot{\bar{\varphi}}_f(t) &= -k_1 \bar{\varphi}_f(t) + \bar{\varphi}(t), \quad \bar{\varphi}_f(t_0) = 0_{2n}, \\ \dot{F}_f(t) &= -k_1 F_f(t) + F(t), \quad F_f(t_0) = 0_{n\delta}, \\ \dot{y}_f(t) &= -k_1 y_f(t) + y(t), \quad y_f(t_0) = 0, \end{aligned}$$

³ Без потери общности далее экспоненциально затухающее слагаемое $\epsilon(t)$ не учитывается.

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad \bar{q}(t) &= y(t) - C_0^T z(t), \quad \bar{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}^T(t)C_0 + N^T(t)\beta \\ \dot{P}^T(t)C_0 + H^T(t)\beta \end{bmatrix}, \\
\dot{z}(t) &= A_K z(t) + Ky(t), \quad z(t_0) = 0_n, \\
\dot{\Omega}(t) &= A_K \Omega(t) + I_n y(t), \quad \Omega(t_0) = 0_{n \times n}, \\
\dot{P}(t) &= A_K P(t) + I_n u(t), \quad P(t_0) = 0_{n \times n}, \\
\dot{F}(t) &= GF(t) + Gly(t) - lC_0^T \dot{z}(t), \quad F(t_0) = 0_{n_\delta}, \\
\dot{H}(t) &= GH(t) - lC_0^T \dot{P}(t), \quad H(t_0) = 0_{n_\delta \times n}, \\
\dot{N}(t) &= GN(t) - lC_0^T \dot{\Omega}(t), \quad N(t_0) = 0_{n_\delta \times n},
\end{aligned}$$

и при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ для всех $t \geq t_0 + T$ выполняется $\Delta_{\max} \geq \Delta(t) \geq \Delta_{\min} > 0$.

Здесь $\epsilon(t)$ – экспоненциально затухающее слагаемое, $k(t) \geq k_{\min} > 0$ – коэффициент усиления (может быть нестационарным), $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ – постоянные фильтров, $A_K = A_0 - KC_0^T$, G – устойчивые матрицы соответствующих размерностей, вектор $l \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ такой, что пара (G, l) управляема, а G выбрана из условия $\sigma\{\mathcal{A}_\delta\} \cap \sigma\{G\} = 0$, параметр $\beta \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ задается решением системы уравнений

$$\begin{aligned}
M_\delta \mathcal{A}_\delta - GM_\delta &= l\bar{h}_\delta^T, \quad \bar{h}_\delta^T = h_\delta^T \mathcal{A}_\delta, \\
\beta &= \bar{h}_\delta^T M_\delta^{-1}.
\end{aligned}$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

В общем случае поставленная цель (2.5) недостижима, поскольку по измеряемым сигналам $u(t)$, $y(t)$ на основании параметризации (3.3) при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ идентифицируемы [5] только параметры ψ_a , ψ_b характеристических полиномов передаточной функции $W_{uy}(s) = C^T(sI_n - A(\theta))^{-1}B(\theta)$. Однако в важном для приложений частном случае и в соответствии с постановкой задачи параметры Θ_{AB} , ψ_d , L известным образом нелинейно зависят от физических параметров θ . В свою очередь, параметры ψ_a , ψ_b характеристических полиномов передаточной функции $W_{uy}(s)$ тоже нелинейно зависят от θ . Поэтому при выполнении условия

$$(3.7) \quad \det^2 \{\nabla_\theta \psi_{ab}(\theta)\} > 0, \quad \psi_{ab}(\theta) = \mathcal{L}_{ab} \eta(\theta) \in \mathbb{R}^{n_\theta},$$

по теореме об обратной функции [17] существует обратное преобразование $\theta = \mathcal{F}(\psi_{ab})$, а значит, становится возможно: *i*) рассчитать параметры системы Θ_{AB} и наблюдателя L по параметрам ψ_{ab} , *ii*) построить оценки $\hat{x}_{\delta 0}(t)$ начальных условий генератора (2.2), *iii*) реализовать адаптивный наблюдатель (2.4), формирующий оценки $\hat{x}(t)$ и $\hat{\delta}(t)$.

В данной работе для разрешимости задачи восстановления неизмеряемых состояний $x(t)$ и внешнего возмущения $\delta(t)$ при выполнении условия (3.7) дополнительно выдвигаются следующие предположения относительно $\psi_{ab}(\theta)$, $\Theta_{AB}(\theta)$, и $\psi_d(\theta)$.

Предположение 1. Существуют неоднородные в терминах (1.8) отображения $\mathcal{G}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, $\mathcal{S}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$, такие что:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}(\psi_{ab}) &= \mathcal{G}(\psi_{ab}) \mathcal{F}(\psi_{ab}) = \mathcal{G}(\psi_{ab}) \theta, \\ \Pi_\theta(\omega) \mathcal{G}(\psi_{ab}) &= \mathcal{T}_\mathcal{G}(\Xi_\mathcal{G}(\omega) \psi_{ab}), \\ \Pi_\theta(\omega) \mathcal{S}(\psi_{ab}) &= \mathcal{T}_\mathcal{S}(\Xi_\mathcal{S}(\omega) \psi_{ab}), \end{aligned}$$

где $\Xi_\mathcal{G}(\omega) \in \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{G} \times n_\theta}$, $\Xi_\mathcal{S}(\omega) \in \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{S} \times n_\theta}$, $\det\{\Pi_\theta(\omega)\} \geq \omega^{\ell_\theta}(t)$, $\text{rank}\{\mathcal{G}(\psi_{ab})\} = n_\theta$, $\ell_\theta \geq 1$, $\mathcal{T}_\mathcal{G}: \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, $\mathcal{T}_\mathcal{S}: \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$ и все отображения известны.

Предположение 2. Существуют неоднородные в терминах (1.8) отображения $\mathcal{X}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, $\mathcal{Z}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$, такие что:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{Z}(\theta) &= \mathcal{X}(\theta) \Theta_{AB}(\theta), \\ \Pi_\Theta(\omega) \mathcal{X}(\theta) &= \mathcal{T}_\mathcal{X}(\Xi_\mathcal{X}(\omega) \theta), \\ \Pi_\Theta(\omega) \mathcal{Z}(\theta) &= \mathcal{T}_\mathcal{Z}(\Xi_\mathcal{Z}(\omega) \theta), \end{aligned}$$

где $\Xi_\mathcal{X}(\omega) \in \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{X} \times n_\theta}$, $\Xi_\mathcal{Z}(\omega) \in \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{Z} \times n_\theta}$, $\det\{\Pi_\Theta(\omega)\} \geq \omega^{\ell_\Theta}(t)$, $\text{rank}\{\mathcal{X}(\theta)\} = n_\Theta$, $\ell_\Theta \geq 1$, $\mathcal{T}_\mathcal{X}: \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\Theta \times n_\Theta}$, $\mathcal{T}_\mathcal{Z}: \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\Theta}$ и все отображения известны.

Предположение 3. Существуют неоднородные в терминах (1.8) отображения $\mathcal{W}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, такие что:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}(\theta) &= \mathcal{R}(\theta) \psi_d(\theta), \\ \Pi_{\psi_d}(\omega) \mathcal{R}(\theta) &= \mathcal{T}_\mathcal{R}(\Xi_\mathcal{R}(\omega) \theta), \\ \Pi_{\psi_d}(\omega) \mathcal{W}(\theta) &= \mathcal{T}_\mathcal{W}(\Xi_\mathcal{W}(\omega) \theta), \end{aligned}$$

где $\Xi_\mathcal{W}(\omega) \in \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{W} \times n_\theta}$, $\Xi_\mathcal{R}(\omega) \in \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{R} \times n_\theta}$, $\det\{\Pi_{\psi_d}(\omega)\} \geq \omega^{\ell_{\psi_d}}(t)$, $\text{rank}\{\mathcal{R}(\theta)\} = n$, $\ell_{\psi_d} \geq 1$, $\mathcal{T}_\mathcal{R}: \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{T}_\mathcal{W}: \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{W}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и все отображения известны.

Предположения 1–3 выполняются, если соответствующие отображения заданы с использованием элементарных алгебраических функций в полиномиальном виде. Например, для векторов $\Theta_{AB}(\theta) = \text{col}\left\{\theta_2^2 \theta_1^2 + (\theta_2 + \theta_1)^3, \theta_2\right\}$ и $\psi_{ab}(\theta) = \text{col}\left\{\theta_1 \theta_2 + \theta_2^2, \theta_2 + \theta_1\right\}$ преобразования соответственно из (3.9) и (3.8) примут вид

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_\mathcal{X}(\Xi_\mathcal{X}(\mathcal{M}_\theta) \theta) &= \begin{bmatrix} \mathcal{M}_\theta^4 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_\mathcal{Z}(\Xi_\mathcal{Z}(\mathcal{M}_\theta) \theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_\theta^4 \theta_2^2 \theta_1^2 + \mathcal{M}_\theta^4 (\theta_2 + \theta_1)^3 \\ \mathcal{M}_\theta \theta_2 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{S}(\psi_{ab}) &= \begin{bmatrix} \psi_{1ab} \\ \psi_{2ab}^2 - \psi_{1ab} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}(\psi_{ab}) = \begin{bmatrix} \psi_{2ab} & 0 \\ 0 & \psi_{2ab} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{T}_\mathcal{G}(\Xi_\mathcal{G}(\Delta) \psi_{ab}) &= \begin{bmatrix} \Delta \psi_{2ab} & 0 \\ 0 & \Delta^2 \psi_{2ab} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_\mathcal{S}(\Xi_\mathcal{S}(\Delta) \psi_{ab}) = \begin{bmatrix} \psi_{1ab} \Delta \\ \Delta^2 \psi_{2ab}^2 - \Delta^2 \psi_{1ab} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Основной смысл предположений 1–3 состоит в возможности в силу свойства $\Xi_{(\cdot)}(\omega) = \bar{\Xi}_{(\cdot)}(\omega)\omega(t)$ параметризации линейных регрессионных уравнений относительно неизвестных параметров θ , $\Theta_{AB}(\theta)$, $\psi_d(\theta)$ с помощью измеряемых сигналов $\mathcal{Y}_{ab}(t) = \mathcal{L}_{ab}\mathcal{Y}(t) = \Delta(t)\psi_{ab}(\theta)$ и $\mathcal{Y}_\theta(t) = \mathcal{M}_\theta(t)\theta$ соответственно.

Например, (3.11) может быть переписано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_Z(\bar{\Xi}_Z(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta) &= \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{2\theta}^2\mathcal{Y}_{1\theta}^2 + \mathcal{M}_\theta(\mathcal{Y}_{2\theta} + \mathcal{Y}_{1\theta})^3 \\ \mathcal{Y}_{2\theta} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) &= \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{2ab} & 0 \\ 0 & \Delta\mathcal{Y}_{2ab} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_S(\bar{\Xi}_S(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{1ab} \\ \mathcal{Y}_{2ab} - \Delta\mathcal{Y}_{1ab} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а значит, для прямого измерения доступны линейные регрессионные уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_Z(\bar{\Xi}_Z(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta) &= \mathcal{T}_X(\bar{\Xi}_X(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta)\Theta_{AB}(\theta), \\ \mathcal{T}_S(\bar{\Xi}_S(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) &= \mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\theta, \end{aligned}$$

где сигналы $\mathcal{Y}_\theta(t)$ и $\mathcal{M}_\theta(t)$ вычислены по второму уравнению следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\theta(t) &= \text{adj}\{\mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\}\mathcal{T}_S(\bar{\Xi}_S(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}), \\ \mathcal{M}_\theta(t) &= \det\{\mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\}. \end{aligned}$$

Требование (3.7) и предположения 1–3 хотя и ограничительны с математической точки зрения, но являются практико-ориентированными и выполняются для большого числа моделей реальных технических систем.

4. Основной результат

Будем считать выполненными условия разрешимости (3.7)–(3.10) и запишем уравнения в отклонениях между (2.4) и (2.1), $\hat{\delta}(t)$ и $\delta(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\hat{\Theta}_{AB}(t) - \hat{L}(t)\tilde{y}(t) - \Phi^T(x, u, \delta)\Theta_{AB} = \\ &= \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\hat{\Theta}_{AB}(t) - \hat{L}(t)\tilde{y}(t) - \Phi^T(x, u, \delta)\Theta_{AB} \pm \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\Theta_{AB} = \\ &= \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\tilde{\Theta}_{AB}(t) - \hat{L}(t)\tilde{y}(t) - \Phi^T(x, u, \delta)\Theta_{AB} + \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\Theta_{AB} = \\ (4.1) \quad &= A(\theta)\tilde{x}(t) + D(\theta)\tilde{\delta}(t) + \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\tilde{\Theta}_{AB}(t) - \hat{L}(t)\tilde{y}(t) \pm L(\theta)\tilde{y}(t) = \\ &= A_m\tilde{x}(t) + D(\theta)h_\delta^T\Phi_\delta(t)\tilde{x}_{\delta 0}(t) + \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\tilde{\Theta}_{AB}(t) - \tilde{L}(t)\tilde{y}(t) = \\ &= A_m\tilde{x}(t) + \phi^T(t)\tilde{\kappa}(t), \\ \tilde{\delta}(t) &= h_\delta^T\Phi_\delta(t)\hat{x}_{\delta 0} - h_\delta^T\Phi_\delta(t)x_{\delta 0} = h_\delta^T\Phi_\delta(t)\tilde{x}_{\delta 0}(t), \end{aligned}$$

где

$$\phi^T(t) = \left[D(\theta) h_\delta^T \Phi_\delta(t) \quad \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta}) \quad -\tilde{y}(t)I_n \right]$$

и $A_m = A(\theta) - L(\theta)C^T$ – гурвицева по допущению 3 матрица.

Для достижение цели (2.5) в соответствии с уравнениями (4.1) требуется построить закон идентификации, гарантирующий экспоненциальную сходимость к нулю ошибки $\tilde{\kappa}(t)$ и экспоненциальную устойчивость положения равновесия ошибки наблюдения $\tilde{x}(t)$. Таким образом, задача восстановления возмущения $\delta(t)$ и неизмеряемых состояний $x(t)$ системы (2.1) сводится к задаче параметрической идентификации. Задача параметрической идентификации, в свою очередь, может быть разрешена при выполнении предпосылок (3.7)–(3.10). Чтобы построить закон идентификации, гарантирующий достижение цели (2.5), на основании выдвинутых предположений 1–3 и результатов леммы 1 сначала выполним параметризацию статического регрессионного уравнения относительно κ .

Лемма 2. Вектор неизвестных параметров κ удовлетворяет линейному регрессионному уравнению

$$\mathcal{Y}_\kappa(t) = \mathcal{M}_\kappa(t)\kappa,$$

$$(4.2) \quad \mathcal{Y}_\kappa(t) = \text{adj} \left\{ \text{blkdiag} \left\{ \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)I_{n_\delta}, \mathcal{M}_{AB}(t)I_{n_\Theta}, \mathcal{M}_L(t)I_n \right\} \right\} \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{x_{\delta 0}}(t) \\ \mathcal{Y}_{AB}(t) \\ \mathcal{Y}_L(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M}_\kappa(t) = \det \left\{ \text{blkdiag} \left\{ \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)I_{n_\delta}, \mathcal{M}_{AB}(t)I_{n_\Theta}, \mathcal{M}_L(t)I_n \right\} \right\},$$

где:

1) регрессионная функция $\mathcal{Y}_{AB}(t) = \mathcal{M}_{AB}(t)\Theta(\theta)$ с учетом вспомогательных вычислений

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\theta(t) &= \text{adj} \left\{ \mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) \right\} \mathcal{T}_S(\bar{\Xi}_S(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}), \\ \mathcal{M}_\theta(t) &= \det \left\{ \mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) \right\} \end{aligned}$$

определена следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{AB}(t) &= \text{adj} \left\{ \mathcal{T}_X(\bar{\Xi}_X(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta) \right\} \mathcal{T}_Z(\bar{\Xi}_Z(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta), \\ \mathcal{M}_{AB}(t) &= \det \left\{ \mathcal{T}_X(\bar{\Xi}_X(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta) \right\}. \end{aligned}$$

2) регрессионная функция $\mathcal{Y}_L(t) = \mathcal{M}_L(t)L(\theta)$ вычислена по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_L(t) &= \text{adj} \left\{ \mathcal{T}_P(\bar{\Xi}_P(\mathcal{M}_{AB})\mathcal{Y}_{AB}) \right\} \mathcal{T}_Q(\bar{\Xi}_Q(\mathcal{M}_{AB})\mathcal{Y}_{AB}), \\ \mathcal{M}_L(t) &= \det \left\{ \mathcal{T}_P(\bar{\Xi}_P(\mathcal{M}_{AB})\mathcal{Y}_{AB}) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_P(\bar{\Xi}_P(\mathcal{M}_{AB})\mathcal{Y}_{AB}) &= \text{vec}^{-1} \left\{ \mathcal{M}_{AB} \text{adj} \left\{ I_n \otimes \text{vec}^{-1} \left(\mathcal{L}_{A^T} \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathcal{M}_{AB} \Gamma^T \otimes I_n \right\} \text{vec} \left(C(\mathcal{L}_B \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB})^T \right) \right\}^T, \\ \mathcal{T}_Q(\bar{\Xi}_Q(\mathcal{M}_{AB})\mathcal{Y}_{AB}) &= \end{aligned}$$

$$= \det \left\{ I_n \otimes \text{vec}^{-1} \left(\mathcal{L}_{A^T} \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB} \right) - \mathcal{M}_{AB} \Gamma^T \otimes I_n \right\} \mathcal{L}_B \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}.$$

3) регрессионная функция $\mathcal{Y}_{x_{\delta 0}}(t) = \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)x_{\delta 0}$ с учетом выражений

$$\begin{aligned} p(t) &= \Delta(t)\bar{q}(t) - C_0^T \Omega(t) \mathcal{L}_a \mathcal{Y}(t) - C_0^T P(t) \mathcal{L}_b \mathcal{Y}(t), \\ \mathcal{Y}_{\psi_d}(t) &= \text{adj} \{ \mathcal{T}_{\mathcal{R}} (\bar{\Xi}_{\mathcal{R}} (\mathcal{M}_{\theta}) \mathcal{Y}_{\theta}) \} \mathcal{T}_{\mathcal{W}} (\bar{\Xi}_{\mathcal{W}} (\mathcal{M}_{\theta}) \mathcal{Y}_{\theta}), \\ \mathcal{M}_{\psi_d}(t) &= \det \{ \mathcal{T}_{\mathcal{R}} (\bar{\Xi}_{\mathcal{R}} (\mathcal{M}_{\theta}) \mathcal{Y}_{\theta}) \} \end{aligned}$$

и фильтраций

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= A_K V(t) + (h_{\delta}^T \Phi_{\delta}(t) \otimes I_n), \quad V(t_0) = 0_{n \times n n_{\delta}}, \\ \dot{p}_f(t) &= -k_2 \varphi(t) + \Delta(t) (I_{n_{\delta}} \otimes \mathcal{Y}_{\psi_d}(t))^T V^T(t) C_0 \mathcal{M}_{\psi_d}(t) p(t), \quad p_f(t_0) = 0_{n_{\delta}}, \\ \dot{V}_f(t) &= -k_2 V_f(t) + \Delta^2(t) (I_{n_{\delta}} \otimes \mathcal{Y}_{\psi_d}(t))^T V^T(t) C_0 \times \\ &\quad \times C_0^T V(t) (I_{n_{\delta}} \otimes \mathcal{Y}_{\psi_d}(t)), \quad V_f(t_0) = 0_{n_{\delta} \times n_{\delta}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

задана следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{x_{\delta 0}}(t) &= \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)x_{\delta 0}, \\ \mathcal{Y}_{x_{\delta 0}}(t) &= \text{adj} \{ V_f(t) \} p_f(t), \quad \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t) = \det \{ V_f(t) \}, \end{aligned}$$

а при выполнении условий $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$, $(h_{\delta}^T \Phi_{\delta}(t) \otimes I_n) \in \text{PE}$ для всех $t \geq t_0 + T$ верно неравенство $|\mathcal{M}_{\kappa}(t)| \geq \underline{\mathcal{M}}_{\kappa} > 0$.

Доказательство леммы 3 и определения матриц \mathcal{L}_{AT} , \mathcal{L}_B , \mathcal{L}_a , \mathcal{L}_b приведены в Приложении.

Имея регрессионное уравнение (4.2) со скалярным регрессором $\mathcal{M}_{\kappa}(t)$, отделенным от нуля для всех $t \geq t_0 + T$, с использованием результатов [13, 18] возможно построить закон идентификации, обеспечивающий достижение цели (2.5).

Теорема 1. Пусть известен вектор $D_{\max} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\|D(\theta)\| \leq \|D_{\max}\|$, тогда при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$, $(h_{\delta}^T \Phi_{\delta}(t) \otimes I_n) \in \text{PE}$ и $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$ закон оценки

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\kappa}}(t) &= \dot{\tilde{\kappa}}(t) = -\gamma(t) \mathcal{M}_{\kappa}(t) (\mathcal{M}_{\kappa}(t) \hat{\kappa}(t) - \mathcal{Y}_{\kappa}(t)) = -\gamma(t) \mathcal{M}_{\kappa}^2(t) \tilde{\kappa}(t), \\ \gamma(t) &:= \begin{cases} 0, & \text{если } \Delta(t) < \rho \in [\Delta_{\min}; \Delta_{\max}], \\ \frac{\gamma_0 \lambda_{\max} (\phi_{\max}(t) \phi_{\max}^T(t)) + \gamma_1}{\mathcal{M}_{\kappa}^2(t)} & \text{иначе,} \end{cases} \\ \phi_{\max}^T(t) &= \begin{bmatrix} D_{\max} h_{\delta}^T \Phi_{\delta}(t) & \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta}) & -\tilde{y}(t) I_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

обеспечивает следующие свойства:

- 1) $\forall t \geq t_0 [\tilde{x}^T(t) \quad \tilde{\kappa}^T(t)]^T \in L_\infty$;
- 2) $\forall t \geq t_0 + T$ ошибка $[\tilde{x}^T(t) \quad \tilde{\kappa}^T(t)]^T$ экспоненциально сходится к нулю со скоростью, минимальное значение которой прямо пропорционально $\gamma_1 > 0$.

Доказательство первой части теоремы осуществляется аналогично доказательству второй части теоремы 1 из [18], доказательство второй части теоремы с точностью до обозначений совпадает с доказательством теоремы 1 из [13].

Из результатов теоремы в силу ограниченности $h_\delta^T \Phi_\delta(t)$ следует экспоненциальная сходимость ошибки $\tilde{\delta}(t)$, что вместе с экспоненциальной сходимостью $[\tilde{x}^T(t) \quad \tilde{\kappa}^T(t)]^T$ свидетельствует о достижении поставленной цели (2.5).

Замечание 2. Результаты леммы 2 описывают процедуру преобразования регрессионного уравнения (3.3) со скалярным регрессором относительно параметров числителя и знаменателя передаточной функции $W_{uy}(s)$ в новое уравнение (4.2) относительно параметров наблюдателя (2.4). При таком пересчете операции деления на зависящие от времени сигналы не используются, идентификация промежуточных параметров $\eta(\theta)$, $\psi_{ab}(\theta)$ или θ не выполняется, а $\mathcal{Y}_\kappa(t)$ и $\mathcal{M}_\kappa(t)$ рассчитываются исключительно с помощью сигналов $\mathcal{Y}(t)$ и $\Delta(t)$, измеряемых в соответствии с результатами леммы 1.

Замечание 3. Условия экспоненциальной устойчивости из теоремы консервативны. На практике знание $D_{\max} \in \mathbb{R}^n$ и ρ , как и реализация процедуры вычисления собственного числа $\lambda_{\max}(\phi_{\max}(t)\phi_{\max}^T(t))$ не требуются, а цель (2.5) может быть достигнута при использовании любого достаточно большого постоянного коэффициента $\gamma \geq \left(\gamma_{\min} \sim \frac{1}{\mathcal{M}_\kappa^2(t)}\right) > 0$, мажорирующего $\lambda_{\max}(\phi_{\max}(t)\phi_{\max}^T(t))$.

5. Обсуждение результатов

В этом разделе приведем четыре дополнительных технических комментария к результатам, полученным в работе.

Комментарий 1. В соответствии с оценкой снизу из (П.48) регрессор $\mathcal{M}_\kappa(t)$ пропорционален степенной функции $\Delta^{\ell_\theta \ell_\psi n_\theta + \ell_\theta \ell_\psi n(n^3 + n) + n_\delta^2(2\ell_\theta \ell_\psi d + 2)}(t)$. Поэтому при $\Delta(t) \ll 1$ или $\Delta(t) \gg 1$ возможна вычислительная ликвидация возбуждения регрессора в соответствующей программной реализации:

$$\Delta(t) \ll 1 \Rightarrow \mathcal{M}_\kappa(t) \rightarrow 0 \text{ или } \Delta(t) \gg 1 \Rightarrow \mathcal{M}_\kappa(t) \rightarrow \infty,$$

т.е. $\mathcal{M}_\kappa(t)$ может быть настолько малым или большим числом, что является непригодными для машинного счета ввиду ограниченной разрядности регистров процессора (например, в Matlab/Simulink числа менее 10^{-309} и более 10^{309} считаются равными соответственно нулю и бесконечности).

Эта проблема не имеет отношения к теоретическим результатам работы, а связана исключительно с несовершенством существующих вычислительных устройств. Для предотвращения вычислительной ликвидации возбуждения регрессора следует выбирать нестационарный амплитудный модулятор $k(t)$ в соответствии с методом нормализации возбуждения регрессора:

$$(5.1) \quad k(t) \sim \frac{1}{\Delta(t)} \quad \text{или} \quad k(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta(t) < \rho \in [\Delta_{\min}; \Delta_{\max}], \\ \frac{1}{\Delta(t)} & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\quad \text{или} \quad k(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } t < t_e \in [t_0; \infty), \\ \frac{1}{\Delta(t)} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Более того, при реализации параметризации (4.2) на практике желательно выполнять умножение на амплитудный модулятор, аналогичный (5.1), после каждого умножения на союзную матрицу $\text{adj}\{\cdot\}$. Подробней проблема вычислительной ликвидации возбуждения регрессора обсуждалась в разделе 3.3 работы [18].

Комментарий 2. Существующие методы идентификации с ослабленными требованиями к возбуждению регрессора не позволяют гарантировать параметрическую сходимость при наличии в параметризованном регрессионном уравнении даже экспоненциально затухающего возмущения [19].

Для решения этой проблемы в [20] предложено использовать интегральную фильтрацию с периодическим сбросом на заданном интервале времени. Метод [20] позволяет итеративно уменьшать оценку сверху на значение установившейся параметрической ошибки.

Альтернативный подход состоит в расширении задачи идентификации путем параметризации экспоненциально затухающего возмущения в виде линейной регрессии с измеряемым регрессором и неизвестными параметрами — неизменяемыми начальными условиями [11–13]. Этот подход позволяет обеспечить экспоненциальную сходимость параметрической ошибки к нулю при выполнении ослабленных требований к возбуждению регрессора, но применим только для возмущений, допускающих приведение к линейной регрессионной модели. Экспоненциально затухающее возмущение $\epsilon(t)$ из (3.3) не допускает такого представления.

Поэтому в этой работе в отличие от результатов [11–13] для достижения поставленной цели (2.5) вместо ослабленных условий требуется выполнение более строгого условия неисчезающего возбуждения регрессора (1.9), при выполнении которого допустимо не использовать фильтры с памятью из [11–13] и гарантировать экспоненциальную сходимость параметрической ошибки даже при наличии в используемой параметризации экспоненциально затухающего возмущения.

Ослабить требование постоянного возбуждения регрессора представляется возможным, используя вместо (3.4) следующий фильтр:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \dot{q}(t) &= \int_{t_\epsilon}^t e^{-k_2\tau} \bar{\varphi}_f(\tau) (\bar{q}(\tau) - k_1 \bar{q}_f(\tau) - \beta^T (F_f(\tau) + l y_f(\tau))) d\tau, \quad q(t_\epsilon) = 0_{2n}, \\ \dot{\varphi}(t) &= \int_{t_\epsilon}^t e^{-k_2\tau} \bar{\varphi}_f(\tau) \bar{\varphi}_f^T(\tau) d\tau, \quad \varphi(t_\epsilon) = 0_{2n \times 2n}, \end{aligned}$$

где $t_\epsilon \gg t_0$ — известный момент времени начала фильтрации.

Если момент времени t_ϵ подобран из условия выполнения в (П.26) для всех $t \geq t_\epsilon$ условия $\varepsilon(t) = o(\varphi(t)\eta(\theta))$, а на интервале $[t_\epsilon, t_e]$ выполняется условие конечного возбуждения регрессора, то удастся обеспечить достижение поставленной цели (2.5) при ослабленном требовании к возбуждению регрессора. Подробней свойства расширенного наблюдателя при использовании параметризации с фильтрацией (5.2) изучены в [21].

Комментарий 3. Согласно теореме 1 предложенный наблюдатель (2.4) + (4.4) обеспечивает сходимость ошибки оценивания состояний к нулю только при выполнении условий постоянного возбуждения $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ и $(h_\delta^T \Phi_\delta(t) \otimes I_n) \in \text{PE}$. Поскольку сигнал $h_\delta^T \Phi_\delta(t) \otimes I_n$ известен для всех $t \in [t_0, \infty)$, то условие $(h_\delta^T \Phi_\delta(t) \otimes I_n) \in \text{PE}$ может быть проверено оффлайн — до непосредственной реализации наблюдателя. Условие $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$, строго говоря, непроверяемо как оффлайн, так и онлайн, поскольку зависит от всех предыдущих и будущих значений регрессора $\bar{\varphi}(t)$. Обычно выполнение условия постоянного возбуждения регрессора в параметризациях вида (П.25) линейных систем связывают с ограничением управления системы в классе частотно богатых функций [5, 6], т.е. функций, содержащих в разложении Фурье достаточное число гармоник. Для используемой в этой работе параметризации (П.25), (3.4), к сожалению, на данном этапе, затруднительно указать точное число гармоник, которое должно содержать управление для выполнения условия $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$. Это является одним из основных недостатков предлагаемого решения и существенно понижает его практическое значение.

Однако на основании импликации из утверждения 1

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Leftrightarrow \exists t \geq t_\epsilon \in [t_0, \infty) \Delta(t) \geq \Delta_{\text{LB}} > 0$$

можно порекомендовать дополнить предлагаемый наблюдатель следующей эвристической процедурой поиска управления, доставляющего $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$

Инициализация. Задать $k = 1$ и $m = 1$.

Шаг 1. Выбрать

$$(5.3) \quad u(t) = u_b(t) + \sum_{i=1}^m a_i \sin(\omega_i t),$$

где $u_b(t)$ – стабилизирующая компонента управления, например P -регулятор, a_i – произвольная амплитуда i -й гармоники, а частоты $\omega_i(t)$ такие, что $\omega_i \neq \omega_j$ для всех $i \neq j$.

Шаг 2. Подать на систему $u(t)$ и вычислить величину $\Delta(t)$ на $[t_{k-1}, t_k]$, где $t_k - t_{k-1}$ – достаточно большое число.

Шаг 3. Если существует $\Delta_{LB} > 0$ такое, что $\Delta(t) \geq \Delta_{LB}$ для всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$, то согласно утверждению 1 верно

$$(5.4) \quad \int_t^{t+T} \bar{\varphi}(\tau) \bar{\varphi}^T(\tau) d\tau \geq \alpha I_n$$

для всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Предположим, что результат, полученный на $[t_{k-1}, t_k]$, можно интерполировать на всю ось времени $[t_0, \infty)$, тогда на основании утверждения 1 найдено управление, доставляющее выполнение условия $\bar{\varphi}(t) \in PE$.

Если не существует $\Delta_{LB} > 0$ такого, что $\Delta(t) \geq \Delta_{LB}$ для всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$, то установить $m = m + 1$ и $k = k + 1$, вернуться на шаг 1.

Суть приведенного алгоритма состоит в последовательном увеличении числа гармоник в сигнале управления до тех пор, пока на достаточно большом интервале времени скалярный регрессор $\Delta(t)$ не будет отделен от нуля. Если предположить, что существует m_{\max} такое, что при $m = m_{\max}$ управление (5.3) обеспечивает выполнение условия $\bar{\varphi}(t) \in PE$, то можно утверждать, что данный алгоритм за конечное число итераций m_{\max} позволяет сформировать управление, обеспечивающее выполнение условия $\bar{\varphi}(t) \in PE$. Отметим, что приведенная процедура является нестрогой, поскольку построена в существенном предположении, что выполнение условия (5.4) на достаточно большом интервале времени позволяет сделать вывод о выполнении условия (5.4) на всей оси времени. Вообще говоря, такой вывод сделать нельзя. Однако в практических задачах упомянутое упрощение допустимо, а описанная процедура может быть работоспособной.

Комментарий 4. Если дополнительно к требованиям допущений 1–3 в расширенной системе

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= (A_e(\theta) + A_\delta) x_e(t) + B_e u(t) = \Phi^T(x_e, u) \Theta_{AB}(\theta) + A_\delta x_e(t), \\ y(t) &= C_e^T x_e(t), \quad x_e(t_0) = [x_0 \quad x_{\delta 0}]^T, \end{aligned}$$

$$A_e(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) & D(\theta) h_\delta^T \\ 0_{n_\delta \times n} & 0_{n_\delta \times n_\delta} \end{bmatrix}, \quad A_\delta = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n_\delta} \\ 0_{n_\delta \times n} & \mathcal{A}_\delta \end{bmatrix},$$

$$B_e(\theta) = \begin{bmatrix} B(\theta) \\ 0_{n_\delta} \end{bmatrix}, \quad x_e(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_\delta(t) \end{bmatrix}, \quad C_e = \begin{bmatrix} C \\ 0_{n_\delta} \end{bmatrix},$$

$$\Phi^T(x_e, u) = [I_{n+n_\delta} \otimes x_e^T(t) \quad I_{n+n_\delta} \otimes u^T(t)] \mathcal{D}_\Phi \in \mathbb{R}^{(n+n_\delta) \times n_\Theta},$$

$$\Theta_{AB}(\theta) = \mathcal{L}_\Phi [\text{vec}^T(A_e^T(\theta)) \quad B_e^T(\theta)]^T \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$$

пара (C_e^T, A_e) наблюдаема, то расширенный наблюдатель в форме

$$(5.6) \quad \dot{\hat{x}}_e(t) = \Phi^T(\hat{x}_e, u) \hat{\Theta}_{AB}(t) + A_\delta \hat{x}_\delta(t) - \hat{L}_e(t)(\hat{y}(t) - y(t)),$$

дополненный только законами идентификации $\Theta_{AB}(\theta)$ и $L_e(\theta)$, не требует параметризации (4.3) регрессионного уравнения $\mathcal{Y}_{x_{\delta 0}}(t) = \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)x_{\delta 0}$, идентификации начальных условий $x_{\delta 0}$ генератора (2.2) и при выполнении условия (1.9) при использовании (3.4) или конечного возбуждения при использовании (5.2) обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибок $\tilde{x}(t)$, $\tilde{\delta}(t)$. В (5.5) $\hat{L}_e(t)$ является оценкой вектора $L_e(\theta) \in \mathbb{R}^{n+n_\delta}$, доставляющего желаемый алгебраический спектр матрице $A_e(\theta) + A_\delta$. Параметризация линейного регрессионного уравнения относительно $L_e(\theta)$ осуществляется аналогично параметризации $\mathcal{Y}_L(t) = \mathcal{M}_L(t)L(\theta)$, но только в пространстве $n + n_\delta$. Более подробно свойства альтернативной версии расширенного наблюдателя изложены в [21].

6. Математическое моделирование

В среде Matlab/Simulink выполним моделирование предложенного адаптивного наблюдателя. Моделирование будем проводить, используя численное интегрирование методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации $\tau_s = 10^{-4}$ секунды.

В качестве примера рассмотрим двухмассовую упругую механическую систему, приведенную на рис. 1.

Здесь $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ – жесткости пружин, $d > 0$ – коэффициент демпфирования, $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ – приведенные массы тел.

Математическая модель рассматриваемой системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$(6.1) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\theta_1(\theta_2 + \theta_3) & -2\theta_1\theta_4 & \theta_1\theta_3 & \theta_1\theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \theta_5\theta_3 & \theta_5\theta_4 & -\theta_3\theta_5 & -2\theta_4\theta_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_5 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta,$$

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0]x,$$

где $\theta = \text{col}\{m_1^{-1}, c_0, c_1, d, m_2^{-1}\}$,

$$\Theta(\theta) = \text{col}\{1, \theta_1(\theta_2 + \theta_3), \theta_1\theta_4, \theta_1\theta_3, \theta_3\theta_5, \theta_4\theta_5, \theta_1, \theta_5\}.$$

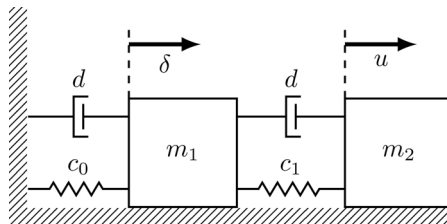


Рис. 1. Двухмассовая упругая механическая система.

В канонической наблюдаемой форме (3.1) параметры системы (6.1) определены следующим образом:

$$(6.2) \quad \psi_a(\theta) = \begin{bmatrix} -2\theta_4(\theta_1 + \theta_5) \\ -\theta_1(3\theta_5\theta_4^2 + \theta_2 + \theta_3) - \theta_3\theta_5 \\ -2\theta_1\theta_4\theta_5(\theta_2 + \theta_3) \\ -\theta_1\theta_2\theta_3\theta_5 \end{bmatrix}, \quad \psi_b(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_5 \\ 2\theta_1\theta_4\theta_5 \\ \theta_1\theta_5(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix},$$

$$\psi_d(\theta) = [0 \ 0 \ \theta_1\theta_4\theta_5 \ \theta_1\theta_3\theta_5]^T,$$

откуда следует выполнение условия (3.7) для

$$\psi_{ab}(\theta) = \begin{bmatrix} -2\theta_4(\theta_1 + \theta_5) \\ -\theta_1(3\theta_5\theta_4^2 + \theta_2 + \theta_3) - \theta_3\theta_5 \\ \theta_1\theta_5(\theta_2 + \theta_3) \\ 2\theta_1\theta_4\theta_5 \\ \theta_5 \end{bmatrix}.$$

Выполним параметризацию регрессионного уравнения (4.2) с помощью преобразований, введенных в предположениях 1–3 и лемме 2.

Шаг 1. Параметризация $\mathcal{Y}_\theta(t) = \mathcal{M}_\theta(t)\theta$. Разрешив относительно θ систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\psi_{ab}(\theta) = \begin{bmatrix} -2\theta_4(\theta_1 + \theta_5) \\ -\theta_1(3\theta_5\theta_4^2 + \theta_2 + \theta_3) - \theta_3\theta_5 \\ \theta_1\theta_5(\theta_2 + \theta_3) \\ 2\theta_1\theta_4\theta_5 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1ab} \\ \psi_{2ab} \\ \psi_{3ab} \\ \psi_{4ab} \\ \psi_{5ab} \end{bmatrix},$$

получаем преобразования $\mathcal{S}(\psi_{ab})$ и $\mathcal{G}(\psi_{ab})$ из (3.10):

$$\mathcal{S}(\psi_{ab}) = \begin{bmatrix} \psi_{4ab}\psi_{5ab} \\ \psi_{3ab}\psi_{5ab}(-\psi_{4ab} - \psi_{1ab}\psi_{5ab}) + \\ + \psi_{4ab}((\psi_{2ab}\psi_{5ab} + \psi_{3ab})\psi_{5ab} + \frac{3}{4}\psi_{4ab}(-\psi_{4ab} - \psi_{1ab}\psi_{5ab})) \\ (\psi_{2ab}\psi_{5ab} + \psi_{3ab})\psi_{5ab} + \frac{3}{4}\psi_{4ab}(-\psi_{4ab} - \psi_{1ab}\psi_{5ab}) \\ -\psi_{4ab} - \psi_{1ab}\psi_{5ab} \\ \psi_{5ab}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}(\psi_{ab}) = \text{diag} \begin{bmatrix} -\psi_{4ab} - \psi_{1ab}\psi_{5ab} \\ \psi_{4ab}\psi_{5ab}^3 \\ -\psi_{5ab}^3 \\ 2\psi_{5ab}^2 \\ \psi_{5ab} \end{bmatrix}.$$

Тогда преобразования $\mathcal{T}_S (\overline{\Xi}_S (\Delta) \mathcal{Y}_{ab})$, $\mathcal{T}_G (\overline{\Xi}_G (\Delta) \mathcal{Y}_{ab})$ задаются следующим образом:

$$\mathcal{T}_S (\overline{\Xi}_S (\Delta) \mathcal{Y}_{ab}) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{4ab} \mathcal{Y}_{5ab} \\ \mathcal{Y}_{3ab} \mathcal{Y}_{5ab} (-\Delta \mathcal{Y}_{4ab} - \mathcal{Y}_{1ab} \mathcal{Y}_{5ab}) + \\ + \mathcal{Y}_{4ab} ((\mathcal{Y}_{2ab} \mathcal{Y}_{5ab} + \Delta \mathcal{Y}_{3ab}) \mathcal{Y}_{5ab} + \frac{3}{4} \Delta \mathcal{Y}_{4ab} (-\Delta \mathcal{Y}_{4ab} - \mathcal{Y}_{1ab} \mathcal{Y}_{5ab})) \\ (\mathcal{Y}_{2ab} \mathcal{Y}_{5ab} + \Delta \mathcal{Y}_{3ab}) \mathcal{Y}_{5ab} + \frac{3}{4} \mathcal{Y}_{4ab} (-\Delta \mathcal{Y}_{4ab} - \mathcal{Y}_{1ab} \mathcal{Y}_{5ab}) \\ -\Delta \mathcal{Y}_{4ab} - \mathcal{Y}_{1ab} \mathcal{Y}_{5ab} \\ \mathcal{Y}_{5ab}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{T}_G (\overline{\Xi}_G (\Delta) \mathcal{Y}_{ab}) = \text{diag} \begin{bmatrix} -\Delta \mathcal{Y}_{4ab} - \mathcal{Y}_{1ab} \mathcal{Y}_{5ab} \\ \mathcal{Y}_{4ab} \mathcal{Y}_{5ab}^3 \\ -\mathcal{Y}_{5ab}^3 \\ 2\mathcal{Y}_{5ab}^2 \\ \Delta \mathcal{Y}_{5ab} \end{bmatrix},$$

что позволяет вычислить $\mathcal{Y}_\theta(t)$ и $\mathcal{M}_\theta(t)$.

Шаг 2. Пользуясь полученным на предыдущем шаге выражением $\mathcal{Y}_\theta(t) = \mathcal{M}_\theta(t)\theta$, составляем преобразования

$$\mathcal{T}_Z (\overline{\Xi}_Z (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) = \text{col} \{ \mathcal{M}_\theta, \mathcal{Y}_{1\theta} (\mathcal{Y}_{2\theta} + \mathcal{Y}_{3\theta}), \mathcal{Y}_{1\theta} \mathcal{Y}_{4\theta}, \mathcal{Y}_{1\theta} \mathcal{Y}_{3\theta}, \mathcal{Y}_{3\theta} \mathcal{Y}_{5\theta}, \mathcal{Y}_{4\theta} \mathcal{Y}_{5\theta}, \mathcal{Y}_{1\theta}, \mathcal{Y}_{5\theta} \},$$

$$\mathcal{T}_X (\overline{\Xi}_X (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) = \text{blkdiag} \{ \mathcal{M}_\theta, \mathcal{M}_\theta^2 I_5, \mathcal{M}_\theta, \mathcal{M}_\theta \},$$

что позволяет вычислить $\mathcal{Y}_{AB}(t)$ и $\mathcal{M}_{AB}(t)$.

Шаг 3. Имея уравнение $\mathcal{Y}_{AB}(t) = \mathcal{M}_{AB}(t)\Theta_{AB}(\theta)$, с помощью формул из второй части леммы 2 можем вычислить $\mathcal{Y}_L(t)$ и $\mathcal{M}_L(t)$.

Шаг 4. Пользуясь полученным на первом шаге выражением $\mathcal{Y}_\theta(t) = \mathcal{M}_\theta(t)\theta$, составляем преобразования:

$$\mathcal{T}_W (\overline{\Xi}_W (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) = \text{col} \{ 0, 0, \mathcal{Y}_{1\theta} \mathcal{Y}_{4\theta} \mathcal{Y}_{5\theta}, \mathcal{Y}_{1\theta} \mathcal{Y}_{3\theta} \mathcal{Y}_{5\theta} \},$$

$$\mathcal{T}_R (\overline{\Xi}_R (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) = \text{diag} \{ \mathcal{M}_\theta, \mathcal{M}_\theta, \mathcal{M}_\theta^3, \mathcal{M}_\theta^3 \},$$

что по формулам из третьей части леммы 2 позволяет вычислить $\mathcal{Y}_{\psi_d}(t)$, $\mathcal{M}_{\psi_d}(t)$ и $\mathcal{Y}_{x_{\delta_0}}(t)$, $\mathcal{M}_{x_{\delta_0}}(t)$.

Теперь, имея $\mathcal{Y}_{AB}(t)$, $\mathcal{Y}_L(t)$, $\mathcal{Y}_{x_{\delta_0}}(t)$, можем составить уравнение (4.2) с измеряемыми функцией $\mathcal{Y}_\kappa(t)$ и регрессором $\mathcal{M}_\kappa(t)$, а также реализовать наблюдатель (2.4) и закон идентификации (4.4).

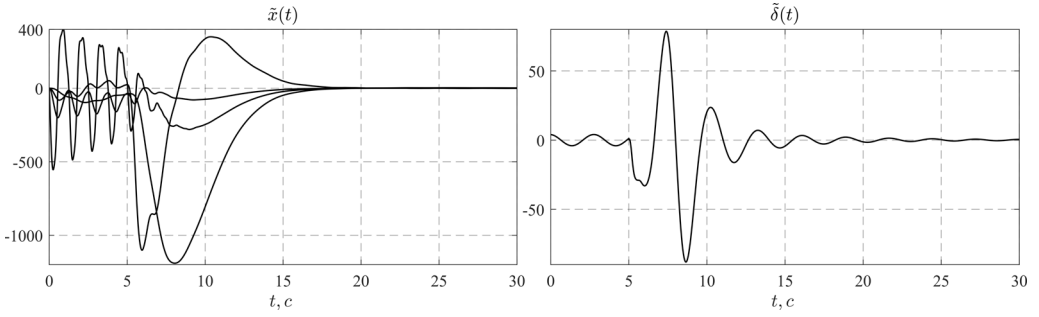


Рис. 2. Временные диаграммы по $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{\delta}(t)$.

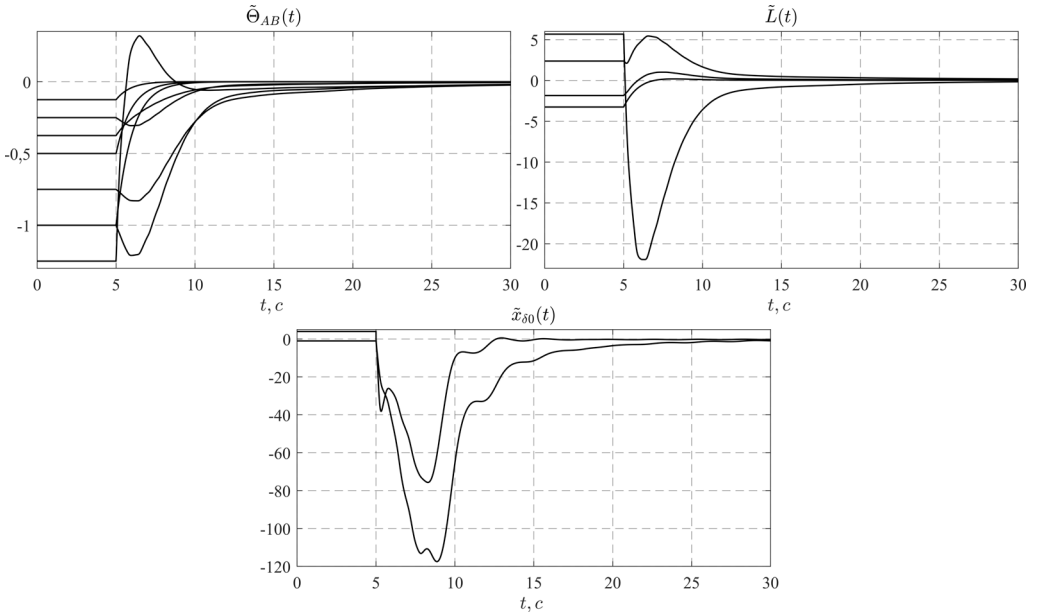


Рис. 3. Временные диаграммы по $\tilde{\Theta}_{AB}(t)$, $\tilde{L}(t)$, $\tilde{x}_{\delta 0}(t)$.

Неизвестные параметры системы (6.1), параметры генератора возмущения (2.2) и модальной модели (2.3) установим следующим образом:

$$(6.3) \quad \theta = [1 \ 0,5 \ 0,75 \ 0,25 \ 0,5]^T, \quad x_0 = [0 \ 0 \ -1 \ 0]^T, \quad x_{\delta 0} = [-4 \ 1]^T, \\ \mathcal{A}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_\delta^T = [1 \ 0], \quad \sigma\{\Gamma\} = [-1 \ -1 \ -1 \ -1]^T.$$

Управление $u(t)$ будем формировать по П-закону с экспериментально подобранным заданием, обеспечивающим $\bar{\varphi}(t) \in PE$:

$$(6.4) \quad u(t) = 50(r(t) - y(t)), \\ r(t) = 25 \sin(10t) + 25 \sin(20t) + 100 \cos(0,1t).$$

Параметры фильтров (3.4)–(3.6), (4.3) и закона настройки (4.4) установим в соответствии с выражением

$$\det \{sI_4 - A_K\} = (s + 1)^4, \quad G = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad l = [1 \quad 2]^T,$$

$$(6.5) \quad \beta = [15 \quad -5,5]^T, \quad k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t < 5 \\ \Delta^{-1}(t), & \text{если } t \geq 5, \end{cases} \quad k_1 = 25, \quad k_2 = 0,1,$$

$$\rho = 10^{-4}, \quad \gamma_0 = 10^{-9}, \quad \gamma_1 = 1.$$

На рис. 2 представлены временные диаграммы по ошибкам восстановления координат состояний $\tilde{x}(t)$ и внешнего возмущения $\tilde{\delta}(t)$.

Выбросы по $\tilde{x}(t)$ на отрезке [5, 15] объясняются прежде всего замыканием обратной связью $\tilde{L}(t)(\hat{y}(t) - y(t))$ уравнения в отклонениях (4.1) с ненулевыми начальными условиями [22]. Выбросы по $\tilde{\delta}(t)$ объясняются влиянием возмущения $\epsilon(t)$ на переходные процессы по $\tilde{x}_{\delta 0}(t)$.

На рис. 3 приведены графики изменения параметрических ошибок $\tilde{\Theta}_{AB}(t)$, $\tilde{L}(t)$ и $\tilde{x}_{\delta 0}(t)$.

Колебания в полученных переходных процессах по параметрическим ошибкам $\tilde{\Theta}_{AB}(t)$, $\tilde{L}(t)$, $\tilde{x}_{\delta 0}(t)$ вызваны влиянием экспоненциально затухающего возмущения $\epsilon(t)$ из параметризации (3.3). В целом результаты моделирования свидетельствуют о достижении поставленной цели (2.5).

7. Заключение

Разработан адаптивный наблюдатель состояний и возмущений линейных систем с перепараметризацией. Решение при выполнении условия исчезающего возбуждения регрессора (частотном богатстве управления/задания) обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибок восстановления состояний системы и внешнего возмущения, формируемого известным генератором с неизвестными начальными условиями. В отличие от ближайших аналогов [10–12] предложенный наблюдатель позволяет восстанавливать не виртуальные, а физические координаты системы в произвольной форме пространства состояний.

Целью дальнейших исследований может являться:

- применение разработанного наблюдателя в задачах управления по динамической обратной связи;
- ослабление условия (1.9) путем замены (3.3) на параметризацию, не содержащую $\epsilon(t)$ (предварительный результат в этом направлении получен в комментарии 2 и работе [21]);
- расширении полученных результатов на системы с новыми, возможно нелинейными, моделями внешних возмущений;
- учет возмущений, аддитивно действующих непосредственно на измеряемый выход $y(t)$;

— следуя подходу [12], уменьшение всплесков ошибок в переходном процессе путем формирования оценок состояний $x(t)$ с помощью алгебраического, а не дифференциального уравнения (предварительный результат в этом направлении для систем без возмущений получен в [23]).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Параметризация (3.3) получена объединением результатов [12, 24] с процедурой динамического расширения и смешивания [14, 19]. Доказательство леммы 1 выведено на основе результатов леммы 1 и теоремы 2 из [24]. Для облегчения понимания принятых обозначений и обеспечения вложенности результатов работы далее приведем доказательство леммы в соответствии с доказательством, изложенным в [24]. В отличие от результатов из [24] в данной работе по допущению 2 параметр β известен, что позволяет избавиться от перепараметризации в (3.3) (см. (П.23)).

Шаг 1. Рассмотрим ошибку:

$$(П.1) \quad \tilde{\xi}(t) = \xi(t) - z(t) - \Omega(t)\psi_a(\theta) - P(t)\psi_b(\theta).$$

Запишем производную (П.1):

$$(П.2) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}(t) &= A_0\xi(t) + \psi_a(\theta)y(t) + \psi_b(\theta)u(t) + \psi_d(\theta)\delta(t) - A_Kz(t) - \\ &- Ky(t) - (A_K\Omega(t) + I_n y(t))\psi_a(\theta) - (A_KP(t) + I_n u(t))\psi_b(\theta) = \\ &= A_0\xi(t) - A_Kz(t) - Ky(t) - A_K\Omega(t)\psi_a(\theta) - A_KP(t)\psi_b(\theta) + \psi_d(\theta)\delta(t) = \\ &= A_K\tilde{\xi}(t) + \psi_d(\theta)\delta(t). \end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (П.2) примет вид

$$(П.3) \quad \tilde{\xi}(t) = e^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) + \bar{\delta}(t),$$

где внешнее возмущение $\bar{\delta}(t)$ описывается системой уравнений

$$(П.4) \quad \begin{cases} \dot{\bar{\delta}}(t) = A_K\bar{\delta}(t) + \psi_d(\theta)\delta(t), \\ v_f(t) = C_0^T\bar{\delta}(t). \end{cases}$$

Подставив (П.3) в (П.1), можем записать:

$$(П.5) \quad \begin{aligned} e^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) + \bar{\delta}(t) &= \xi(t) - z(t) - \Omega(t)\psi_a(\theta) - P(t)\psi_b(\theta), \\ &\Downarrow \\ \xi(t) &= e^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) + \bar{\delta}(t) + z(t) + \Omega(t)\psi_a(\theta) + P(t)\psi_b(\theta). \end{aligned}$$

Умножив (П.5) на C_0^T , получаем:

$$(П.6) \quad \begin{aligned} y(t) &= C_0^T\xi(t) = \\ &= C_0^Tz(t) + C_0^T\Omega(t)\psi_a(\theta) + C_0^TP(t)\psi_b(\theta) + v_f(t) + C_0^Te^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0). \end{aligned}$$

В силу уравнения (П.6) продифференцируем функцию $\bar{q} = y(t) - C_0^Tz(t)$:

$$(П.7) \quad \dot{\bar{q}}(t) = C_0^T\dot{\Omega}(t)\psi_a(\theta) + C_0^T\dot{P}(t)\psi_b(\theta) + \dot{v}_f(t) + C_0^TA_Ke^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0).$$

Шаг 2. Параметризуем составляющую $\dot{v}_f(t)$ уравнения (П.7) в виде линейной регрессионной функции с измеряемым регрессором. Для этого перепишем систему (П.4) в виде вход-выход:

$$(П.8) \quad v_f(t) = C_0^T (sI_n - A_K)^{-1} \psi_d(\theta) \delta(t) = W_f [\delta(t)].$$

Представим производную возмущения $\delta(t)$ в следующем виде:

$$(П.9) \quad \dot{\delta}(t) = h_\delta^T \mathcal{A}_\delta x_\delta(t) + \delta(t_0) D_\delta(t),$$

где $D_\delta(t)$ – функция Дирака.

Введем в рассмотрение виртуальную переменную $\delta_d(t) = h_\delta^T \mathcal{A}_\delta x_\delta(t)$. Тогда оказываются верны равенства

$$(П.10) \quad \begin{aligned} \dot{x}_\delta(t) &= \mathcal{A}_\delta x_\delta(t), \\ \delta_d(t) &= \bar{h}_\delta^T x_\delta(t), \quad \bar{h}_\delta^T = h_\delta^T \mathcal{A}_\delta. \end{aligned}$$

Продифференцировав (П.8) и подставив (П.9), (П.10), имеем:

$$(П.11) \quad \begin{aligned} \dot{v}_f &= sW_f [\delta(t)] = W_f [\dot{\delta}(t)] = \\ &= W_f [h_\delta^T \mathcal{A}_\delta x_\delta(t) + \delta(t_0) D_\delta(t)] = \underbrace{W_f [\delta_d(t)]}_{v_f(t)} + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)]. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу гурвицевости матрицы A_K для параметризации $\dot{v}_f(t)$ достаточно параметризовать составляющую $v_f(t)$. Для этого рассмотрим вспомогательную переменную $\zeta(t) = M_\delta x_\delta(t)$, где матрица линейного подобия M_δ является решением уравнения Сильвестра

$$(П.12) \quad M_\delta \mathcal{A}_\delta - G M_\delta = l \bar{h}_\delta^T,$$

которое имеет единственное решение [15, 16, 24], так как по допущению 2 пара $(h_\delta^T, \mathcal{A}_\delta)$ наблюдаема, а по условию леммы (G, l) управляема и $\sigma \{ \mathcal{A}_\delta \} \cap \sigma \{ G \} = 0$.

Дифференцируя $\zeta(t)$, получим:

$$(П.13) \quad \dot{\zeta}(t) = M_\delta \mathcal{A}_\delta x_\delta(t) = G M_\delta x_\delta(t) + l \bar{h}_\delta^T x_\delta(t) = G \zeta(t) + l \delta_d(t),$$

откуда в силу $x_\delta(t) = M_\delta^{-1} \zeta(t)$ следует

$$(П.14) \quad \delta_d(t) = \bar{h}_\delta^T M_\delta^{-1} \zeta = \beta^T \zeta, \quad \beta = \bar{h}_\delta^T M_\delta^{-1}.$$

С учетом выражения (П.14) можем переписать (П.11) в следующем виде:

$$(П.15) \quad \begin{aligned} \dot{v}_f(t) &= W_f [\beta^T \zeta(t)] + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] = \\ &= \beta^T W_f [\zeta(t)] + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] = \beta^T \zeta_w(t) + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)]. \end{aligned}$$

Вместо $\delta_d(t)$ пропустим через фильтр (П.13) сигнал $v_f(t)$:

$$(П.16) \quad \zeta_f(t) = (sI - G)^{-1} l [v_f(t)] + e^{G(t-t_0)} \zeta_f(t_0),$$

тогда с учетом $\zeta(t) = (sI - G)^{-1}l[\delta_d(t)] + e^{G(t-t_0)}\zeta(t_0)$ имеет место равенство:

$$\begin{aligned}
 \zeta_w(t) &= W_f[\zeta(t)] = W_f\left[(sI - G)^{-1}l[\delta_d(t)] + e^{G(t-t_0)}\zeta(t_0)\right] = \\
 &= (sI - G)^{-1}lW_f[\delta_d(t)] + W_f\left[e^{G(t-t_0)}\zeta(t_0)\right] = \\
 \text{(II.17)} \quad &= (sI - G)^{-1}lv_f + W_f\left[e^{G(t-t_0)}\zeta(t_0)\right] = \\
 &= \zeta_f(t) - e^{G(t-t_0)}\zeta_f(t_0) + W_f\left[e^{G(t-t_0)}\zeta(t_0)\right].
 \end{aligned}$$

Подставив выражение (II.17) в (II.15), имеем:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_f(t) &= \beta^T\zeta_f(t) - \beta^Te^{G(t-t_0)}\zeta_f(t_0) + \\
 \text{(II.18)} \quad &+ \beta^TW_f\left[e^{G(t-t_0)}\xi(t_0)\right] + W_f[\delta(t_0)D_\delta(t)].
 \end{aligned}$$

Введем наблюдатель состояний $\zeta_f(t)$ в следующем виде:

$$\text{(II.19)} \quad \hat{\zeta}_f(t) = F(t) + H(t)\psi_b(\theta) + N(t)\psi_a(\theta) + ly(t).$$

Дифференцируя ошибку $\tilde{\zeta}_f(t) = \zeta_f(t) - \hat{\zeta}_f(t)$, в силу уравнений (II.7), (II.11), (II.16), (II.19) имеем:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\zeta}}_f &= G\zeta_f(t) + lv_f(t) - GF(t) - Gly(t) + lC_0^T\dot{z}(t) - \\
 &- \left(GH(t) - lC_0^T\dot{P}(t)\right)\psi_b(\theta) - \left(GN(t) - lC_0^T\dot{\Omega}(t)\right)\psi_a(\theta) - \\
 &- lC_0^T\dot{z}(t) - lC_0^T\dot{\Omega}(t)\psi_a(\theta) - lC_0^T\dot{P}(t)\psi_b(\theta) - \\
 \text{(II.20)} \quad &- l(v_f(t) + W_f[\delta(t_0)D_\delta(t)]) - lC_0^TA_Ke^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) = \\
 &= G\zeta_f(t) - \underbrace{GF(t) - Gly(t) - GH(t)\psi_b(\theta) - GN(t)\psi_a(\theta)}_{G\hat{\zeta}_f(t)} - \\
 &- lW_f[\delta(t_0)D_\delta(t)] - lC_0^TA_Ke^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) = \\
 &= G\tilde{\zeta}_f - lC_0^TA_Ke^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) - lW_f[\delta(t_0)D_\delta(t)].
 \end{aligned}$$

Решим систему (II.20):

$$\begin{aligned}
 \text{(II.21)} \quad &\tilde{\zeta}_f(t) = \zeta_f(t) - \hat{\zeta}_f(t) = \\
 &= e^{G(t-t_0)}\tilde{\zeta}_f(t_0) - \mathfrak{H}\left[C_0^TA_Ke^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) + W_f[\delta(t_0)D_\delta(t)]\right],
 \end{aligned}$$

что позволяет переписать (П.18) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_f(t) &= \beta^T \hat{\zeta}_f(t) + \beta^T e^{G(t-t_0)} \tilde{\zeta}_f(t_0) - \\
 &\quad - \beta^T \mathfrak{H} \left[C_0^T A_K e^{A_K(t-t_0)} \tilde{\xi}(t_0) + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] \right] - \\
 &\quad - \beta^T e^{G(t-t_0)} \zeta_f(t_0) + \beta^T W_f \left[e^{G(t-t_0)} \xi(t_0) \right] + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] = \\
 (П.22) \quad &= \beta^T (F(t) + ly(t)) + \beta^T H(t) \psi_b(\theta) + \beta^T N(t) \psi_a(\theta) + \\
 &\quad + \beta^T e^{G(t-t_0)} \tilde{\zeta}_f(t_0) - \beta^T \mathfrak{H} \left[C_0^T A_K e^{A_K(t-t_0)} \tilde{\xi}(t_0) + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] \right] - \\
 &\quad - \beta^T e^{G(t-t_0)} \zeta_f(t_0) + \beta^T W_f \left[e^{G(t-t_0)} \xi(t_0) \right] + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)],
 \end{aligned}$$

где $\mathfrak{H}[\cdot] = (sI_{n_\delta} - G)^{-1} l[\cdot]$.

Подставив выражение (П.22) в (П.7) имеем:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}(t) &= C_0^T \dot{\Omega}(t) \psi_a(\theta) + C_0^T \dot{P}(t) \psi_b(\theta) + \\
 &\quad + \beta^T (F(t) + ly(t)) + \beta^T H(t) \psi_b(\theta) + \beta^T N(t) \psi_a(\theta) + \\
 (П.23) \quad &\quad + \beta^T e^{G(t-t_0)} \tilde{\zeta}_f(t_0) - \beta^T \mathfrak{H} \left[C_0^T A_K e^{A_K(t-t_0)} \tilde{\xi}(t_0) + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] \right] - \\
 &\quad - \beta^T e^{G(t-t_0)} \zeta_f(t_0) + \beta^T W_f \left[e^{G(t-t_0)} \xi(t_0) \right] + \\
 &\quad + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] + C_0^T A_K e^{A_K(t-t_0)} \tilde{\xi}(t_0) = \\
 &= \bar{\varphi}^T(t) \eta(\theta) + \beta^T (F(t) + ly(t)) + \bar{\varepsilon}(t),
 \end{aligned}$$

где $\bar{\varepsilon}(t)$ – агрегированные экспоненциально затухающие функции.

Шаг 3. Теперь с использованием процедуры динамического расширения и смешивания приведем регрессионное уравнение (П.23) к виду (3.3). Для этого, дифференцируя $\chi(t) = \bar{q}(t) - k_1 \bar{q}_f(t)$ в силу (П.23), (3.5), получим:

$$\begin{aligned}
 (П.24) \quad \dot{\chi}(t) &= \bar{\varphi}^T(t) \eta(\theta) + \beta^T (F(t) + ly(t)) + \bar{\varepsilon}(t) - k_1 (-k_1 \bar{q}_f(t) + \bar{q}(t)) = \\
 &= -k_1 \chi(t) + \bar{\varphi}^T(t) \eta(\theta) + \beta^T (F(t) + ly(t)) + \bar{\varepsilon}(t).
 \end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (П.24) позволяет записать:

$$\begin{aligned}
 (П.25) \quad \bar{q}(t) - k_1 \bar{q}_f(t) - \beta^T (F_f(t) + ly_f(t)) &= \\
 &= e^{-k_1(t-t_0)} \bar{q}(t_0) + \bar{\varphi}_f^T(t) \eta(\theta) + \bar{\varepsilon}_f(t),
 \end{aligned}$$

где $\dot{\bar{\varepsilon}}_f(t) = -k_1 \bar{\varepsilon}_f(t) + k_1 \bar{\varepsilon}(t)$, $\bar{\varepsilon}_f(t_0) = 0$.

Решение первого дифференциального уравнения из (3.4) в силу (П.25) удовлетворяет выражению

$$(П.26) \quad q(t) = \varphi(t) \eta(\theta) + \varepsilon(t),$$

где $\dot{\varepsilon}(t) = -k_2 \varepsilon(t) + \bar{\varphi}_f(t) (\bar{\varepsilon}_f(t) + e^{-k_1(t-t_0)} \bar{q}(t_0))$, $\varepsilon(t_0) = 0_{2n}$.

Умножив выражение (П.26) на $k(t)\text{adj}\{\varphi(t)\}$ и применив свойство

$$\text{adj}\{\varphi(t)\}\varphi(t) = \det\{\varphi(t)\}I_{2n},$$

имеем выражение (3.3) при $\epsilon(t) = k(t)\text{adj}\{\varphi(t)\}\epsilon(t)$.

В соответствии с леммой 6.8 из [6] при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ также верно $\bar{\varphi}_f(t) \in \text{PE}$. По утверждению 1 при $\bar{\varphi}_f(t) \in \text{PE}$ выполняется неравенство $\Delta(t) \geq \Delta_{\min} > 0$. Поскольку сигналы $y(t)$, $u(t)$ ограничены по допущению 1, то в силу устойчивости фильтров (3.4)–(3.6) для всех $t \geq t_0$ верно неравенство $\Delta_{\max} \geq \Delta(t)$. Откуда для всех $t \geq t_0 + T$ верно $\Delta_{\max} \geq \Delta(t) \geq \Delta_{\min} > 0$, что завершает доказательство леммы.

Доказательство леммы 2. В соответствии с определением 1 и предположением 1 в силу

$$\begin{aligned}\Xi_S(\Delta) &= \bar{\Xi}_S(\Delta)\Delta(t), \quad \Xi_G(\Delta) = \bar{\Xi}_G(\Delta)\Delta(t), \\ \mathcal{Y}_{ab}(t) &= \mathcal{L}_{ab}\mathcal{Y}(t) = \Delta(t)\mathcal{L}_{ab}\eta(\theta) = \Delta(t)\psi_{ab}(\theta), \\ \bar{\Xi}_S(\Delta)\Delta(t)\psi_{ab}(\theta) &= \bar{\Xi}_S(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}(t), \\ \bar{\Xi}_G(\Delta)\Delta(t)\psi_{ab}(\theta) &= \bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}(t)\end{aligned}$$

из (3.9) имеет место равенство

$$(П.27) \quad \mathcal{T}_S(\bar{\Xi}_S(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) = \mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\theta.$$

Тогда, домножив выражение (П.27) на $\text{adj}\{\mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\}$, имеем регрессионное уравнение

$$(П.28) \quad \mathcal{Y}_\theta(t) = \mathcal{M}_\theta(t)\theta,$$

пользуясь которым вместе с выражением (3.8), можем получить:

$$(П.29a) \quad \mathcal{T}_Z(\bar{\Xi}_Z(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta) = \mathcal{T}_X(\bar{\Xi}_X(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta)\Theta_{AB}(\theta),$$

$$(П.29b) \quad \mathcal{T}_W(\bar{\Xi}_W(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta) = \mathcal{T}_R(\bar{\Xi}_R(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta)\psi_d(\theta).$$

Умножив выражение (П.29a) на $\text{adj}\{\mathcal{T}_X(\bar{\Xi}_X(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta)\}$, получаем регрессионное уравнение $\mathcal{Y}_{AB}(t) = \mathcal{M}_{AB}(t)\Theta_{AB}(\theta)$.

Параметризуем уравнение относительно $L(\theta)$. При выполнении допущения 2 в соответствии с результатами теории обобщенного модального синтеза [15, 16] вектор $L(\theta)$ может быть определен решением системы

$$(П.30) \quad \begin{cases} A^T(\theta)M - M\Gamma = CB^T(\theta), \\ B^T(\theta) = L^T(\theta)M, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение [15, 16], так как по допущению 3 пара $(A^T(\theta), C)$ управляема, пара $(B^T(\theta), \Gamma)$ наблюдаема и $\sigma\{A^T(\theta)\} \cap \sigma\{\Gamma\} = 0$.

Векторизовав первое уравнение из (П.30), с учетом свойств $\text{vec}(AB) = (I \otimes A)\text{vec}(B) = (B^T \otimes I)\text{vec}(A)$ имеем:

$$(П.31) \quad (I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n)\text{vec}(M) = \text{vec}(CB^T(\theta)).$$

Так как уравнения (П.30), (П.31) имеют единственное решение, то

$$\det \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} \neq 0,$$

а значит, домножив (П.31) на союзную матрицу $\text{adj} \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\}$, можем записать:

$$(П.32) \quad \begin{aligned} & \det \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} \text{vec}(M) = \\ & = \text{adj} \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} \text{vec}(CB^T(\theta)). \end{aligned}$$

Выполним операцию, обратную векторизации ($\text{vec}^{-1}\{\cdot\}$), и подставим результат во второе уравнение системы (П.30):

$$(П.33) \quad \begin{aligned} & \underbrace{\det \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} B(\theta)}_{\mathcal{Q}(\Theta_{AB})} = \\ & = \underbrace{\text{vec}^{-1}\{\text{adj} \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} \text{vec}(CB^T(\theta))\}^T}_{\mathcal{P}(\Theta_{AB})} L(\theta), \end{aligned}$$

где $\det \{\mathcal{P}(\Theta_{AB})\} \neq 0$.

Введем равенства:

$$(П.34) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_{AB}(t)A^T(\theta) &= \text{vec}^{-1}(\mathcal{L}_{A^T} \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}(t)), \\ \mathcal{M}_{AB}(t)B^T(\theta) &= [\mathcal{L}_B \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}(t)]^T, \\ \mathcal{M}_{AB}(t)B(\theta) &= \mathcal{L}_B \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}(t). \end{aligned}$$

Умножив (П.33) на $\Pi_L(\mathcal{M}_{AB}) = \mathcal{M}_{AB}^{n^2+1} I_n$, воспользовавшись свойствами $c^n \det \{A\} = \det \{cA\}$, $c^{n-1} \text{adj} \{A\} = \text{adj} \{cA\}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и подставив (П.34), получим:

$$(П.35) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_\mathcal{P}(\Xi_\mathcal{P}(\mathcal{M}_{AB}) \Theta_{AB}) &= \Pi_L(\mathcal{M}_{AB}) \mathcal{P}(\Theta_{AB}) = \mathcal{M}_{AB}^{n^2+1} \mathcal{P}(\Theta_{AB}) = \\ &= \mathcal{M}_{AB}^{n^2+1} \text{vec}^{-1}\{\text{adj} \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} \text{vec}(CB^T(\theta))\}^T = \\ &= \text{vec}^{-1}\left\{ \mathcal{M}_{AB} \text{adj} \{I_n \otimes \text{vec}^{-1}(\mathcal{L}_{A^T} \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}) - \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{M}_{AB} \Gamma^T \otimes I_n\} \text{vec} \left(C(\mathcal{L}_B \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB})^T \right) \right\}^T, \\ \mathcal{T}_\mathcal{Q}(\Xi_\mathcal{Q}(\mathcal{M}_{AB}) \Theta_{AB}) &= \Pi_L(\mathcal{M}_{AB}) \mathcal{Q}(\Theta_{AB}) = \mathcal{M}_{AB}^{n^2+1} \mathcal{Q}(\Theta_{AB}) = \\ &= \mathcal{M}_{AB}^{n^2+1} \det \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} B(\theta) = \\ &= \det \{I_n \otimes \text{vec}^{-1}(\mathcal{L}_{A^T} \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}(t)) - \mathcal{M}_{AB}(t) \Gamma^T \otimes I_n\} (\mathcal{L}_B \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}(t)), \end{aligned}$$

где $\Xi_\mathcal{P}(\mathcal{M}_{AB}) = \Xi_\mathcal{Q}(\mathcal{M}_{AB}) = \mathcal{M}_{AB}(t)$.

На основании уравнений (П.33) и (П.35) можем записать регрессионное уравнение:

$$(П.36) \quad \mathcal{T}_\mathcal{Q}(\bar{\Xi}_\mathcal{Q}(\mathcal{M}_{AB}) \mathcal{Y}_{AB}) = \mathcal{T}_\mathcal{P}(\bar{\Xi}_\mathcal{P}(\mathcal{M}_{AB}) \mathcal{Y}_{AB}) L(\theta),$$

где $\bar{\Xi}_\mathcal{P}(\mathcal{M}_{AB}) = \bar{\Xi}_\mathcal{Q}(\mathcal{M}_{AB}) = 1$.

Умножив выражение (П.36) на $\text{adj} \{ \mathcal{T}_P (\overline{\Xi}_P (\mathcal{M}_{AB}) \mathcal{Y}_{AB}) \}$, имеем регрессионное уравнение $\mathcal{Y}_L(t) = \mathcal{M}_L(t)L(\theta)$.

Получим регрессионное уравнение относительно $x_{\delta 0}$. Используя свойства операции векторизации

$$\begin{aligned} \text{vec}(\psi_d(\theta)h_\delta^T \Phi_\delta(t)x_{\delta 0}) &= \underbrace{(x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta))}_{n \times n_\delta} \underbrace{\text{vec}(h_\delta^T \Phi_\delta)}_{n_\delta}, \\ \text{vec}((x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta)) \text{vec}(h_\delta^T \Phi_\delta(t))) &= \underbrace{(h_\delta^T \Phi_\delta(t) \otimes I_n)}_{n \times nn_\delta} \underbrace{\text{vec}(x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta))}_{nn_\delta}, \end{aligned}$$

выражение (3.1) возможно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_0 \xi(t) + \psi_a(\theta)y(t) + \psi_b(\theta)u(t) + \\ \text{(П.37)} \quad &+ (h_\delta^T \Phi_\delta(t) \otimes I_n) \text{vec}(x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta)). \end{aligned}$$

Зададим ошибку:

$$\text{(П.38)} \quad e(t) = \xi(t) - z(t) - \Omega(t)\psi_a(\theta) - P(t)\psi_b(\theta) - V(t)\text{vec}(x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta)).$$

Дифференцируя (П.38), аналогично (П.2) получаем $\dot{e}(t) = A_K e(t)$. Тогда, домножив (П.38) на C_0^T , можем записать:

$$\begin{aligned} \text{(П.39)} \quad \bar{q}(t) &= C_0^T e^{A_K(t-t_0)} e(t_0) + C_0^T \Omega(t)\psi_a(\theta) + \\ &+ C_0^T P(t)\psi_b(\theta) + C_0^T V(t)\text{vec}(x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta)). \end{aligned}$$

С помощью свойств

$$\begin{aligned} x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta) &= \psi_d(\theta)x_{\delta 0}, \\ \text{vec}(\psi_d(\theta)x_{\delta 0}) &= \underbrace{(I_{n_\delta} \otimes \psi_d(\theta))}_{nn_\delta \times n_\delta} x_{\delta 0} \end{aligned}$$

выражение (П.39) приводится к виду

$$\begin{aligned} \text{(П.40)} \quad \bar{q}(t) &= C_0^T e^{A_K(t-t_0)} e(t_0) + C_0^T \Omega(t)\psi_a(\theta) + \\ &+ C_0^T P(t)\psi_b(\theta) + C_0^T V(t)\text{vec}(x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta)). \end{aligned}$$

Для компенсации неизвестных слагаемых $C_0^T \Omega(t)\psi_a(\theta) + C_0^T P(t)\psi_b(\theta)$ введем вспомогательный сигнал

$$\begin{aligned} \text{(П.41)} \quad \bar{p}_e(t) &= \Delta(t)C_0^T \Omega(t)\psi_a(\theta) + \Delta(t)C_0^T P(t)\psi_b(\theta) = \\ &= C_0^T \Omega(t)\mathcal{L}_a \mathcal{Y}(t) + C_0^T P(t)\mathcal{L}_b \mathcal{Y}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a \mathcal{Y}(t) &= \mathcal{L}_a \Delta(t)\eta(\theta) = \Delta(t)\mathcal{L}_a \eta(\theta) = \Delta(t)\psi_a(\theta), \\ \mathcal{L}_b \mathcal{Y}(t) &= \Delta(t)\mathcal{L}_b \eta(\theta) = \Delta(t)\psi_b(\theta). \end{aligned}$$

Умножив (П.40) на $\Delta(t)$ и вычитая из полученного выражения (П.41), имеем:

$$\begin{aligned}
 (П.42) \quad p(t) &= \Delta(t)\bar{q}(t) - \bar{p}_e(t) = \\
 &= \Delta(t)C_0^T V(t) (I_{n_\delta} \otimes \psi_d(\theta)) x_{\delta 0} + \Delta(t)C_0^T e^{A_K(t-t_0)} e(t_0) = \\
 &= \Delta(t)C_0^T V(t) (I_{n_\delta} \otimes \psi_d(\theta)) x_{\delta 0} + \Delta(t)C_0^T e^{A_K(t-t_0)} e(t_0).
 \end{aligned}$$

Для получения возможности косвенной реализации множителя $\psi_d(\theta)$ умножим выражение (П.29b) на $\text{adj} \{ \mathcal{T}_R (\bar{\Xi}_R (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) \}$:

$$\begin{aligned}
 (П.43) \quad \mathcal{Y}_{\psi_d}(t) &= \mathcal{M}_{\psi_d}(t)\psi_d(\theta), \\
 \mathcal{Y}_{\psi_d}(t) &= \text{adj} \{ \mathcal{T}_R (\bar{\Xi}_R (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) \} \mathcal{T}_W (\bar{\Xi}_W (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta), \\
 \mathcal{M}_{\psi_d}(t) &= \det \{ \mathcal{T}_R (\bar{\Xi}_R (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) \}.
 \end{aligned}$$

Умножение (П.42) на $\mathcal{M}_{\psi_d}(t)$ и подстановка (П.43) позволяют получить:

$$\begin{aligned}
 (П.44) \quad \mathcal{M}_{\psi_d}(t)p(t) &= \mathcal{M}_{\psi_d}(t)\Delta(t)C_0^T V(t) (I_{n_\delta} \otimes \psi_d(\theta)) x_{\delta 0} = \\
 &= \Delta(t)C_0^T V(t) (I_{n_\delta} \otimes \mathcal{Y}_{\psi_d}(t)) x_{\delta 0}.
 \end{aligned}$$

Пропустив (П.44) через фильтр (4.3) и умножив на $\text{adj} \{ V_f(t) \}$, имеем регрессионное уравнение $\mathcal{Y}_{x_{\delta 0}}(t) = \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)x_{\delta 0}$, что завершает доказательство возможности формирования уравнения (4.2) на основании измеряемых сигналов.

По доказанному в лемме 1 при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ для всех $t \geq t_0 + T$ верно $\Delta(t) \geq \Delta_{\min} > 0$, а по предположениям 1–3 и доказанным выражениям:

$$\begin{aligned}
 \det^2 \{ \mathcal{X}(\theta) \} &> 0, \quad \det^2 \{ \mathcal{R}(\theta) \} > 0, \\
 \det^2 \{ \mathcal{G}(\psi_{ab}) \} &> 0, \quad \det^2 \{ \mathcal{P}(\Theta_{AB}) \} > 0, \\
 \det \{ \Pi_\theta(\Delta) \} &\geq \Delta^{\ell_\theta}(t), \quad \det \{ \Pi_\Theta(\mathcal{M}_\theta) \} \geq \mathcal{M}_\theta^{\ell_\Theta}(t), \\
 \det \{ \Pi_{\psi_d}(\mathcal{M}_\theta) \} &\geq \mathcal{M}_\theta^{\ell_{\psi_d}}(t), \quad \det \{ \Pi_L(\mathcal{M}_{AB}) \} \geq \mathcal{M}_{AB}^{n^3+n}(t)
 \end{aligned}$$

следует выполнение для всех $t \geq t_0 + T$ следующих неравенств при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}_\theta(t)| &= |\det \{ \mathcal{T}_G (\bar{\Xi}_G (\Delta) \mathcal{Y}_{ab}) \}| = |\det \{ \Pi_\theta(\Delta) \} \det \{ \mathcal{G}(\psi_{ab}) \}| \geq \\
 &\geq |\det \{ \mathcal{G}(\psi_{ab}) \}| \Delta_{\min}^{\ell_\theta} = \underline{\mathcal{M}}_\theta > 0, \\
 |\mathcal{M}_{AB}(t)| &= |\det \{ \mathcal{T}_X (\bar{\Xi}_X (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) \}| = |\det \{ \Pi_\Theta(\mathcal{M}_\theta) \} \det \{ \mathcal{X}(\theta) \}| \geq \\
 &\geq |\det^{\ell_\Theta} \{ \mathcal{G}(\psi_{ab}) \}| |\det \{ \mathcal{X}(\theta) \}| \Delta_{\min}^{\ell_\Theta \ell_\Theta} = \underline{\mathcal{M}}_{AB} > 0, \\
 |\mathcal{M}_{\psi_d}(t)| &= \det \{ \mathcal{T}_R (\bar{\Xi}_R (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) \} = |\det \{ \Pi_{\psi_d}(\mathcal{M}_\theta) \} \det \{ \mathcal{R}(\theta) \}| \geq \\
 &\geq |\det^{\ell_{\psi_d}} \{ \mathcal{G}(\psi_{ab}) \}| |\det \{ \mathcal{R}(\theta) \}| \Delta_{\min}^{\ell_\theta \ell_{\psi_d}} = \underline{\mathcal{M}}_{\psi_d} > 0, \\
 |\mathcal{M}_L(t)| &= |\det \{ \mathcal{T}_P (\bar{\Xi}_P (\mathcal{M}_{AB}) \mathcal{Y}_{AB}) \}| = |\det \{ \Pi_L(\mathcal{M}_{AB}) \} \det \{ \mathcal{P}(\Theta_{AB}) \}| \geq \\
 &\geq |\det \{ \mathcal{P}(\Theta_{AB}) \}| \mathcal{M}_{AB}^{n^3+n} \geq |\det \{ \mathcal{P}(\Theta_{AB}) \}| \underline{\mathcal{M}}_{AB}^{n^3+n} = \underline{\mathcal{M}}_L > 0.
 \end{aligned}$$

Чтобы оценить регрессор $\mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)$, сначала получим оценку снизу на решение дифференциального уравнения для $V_f(t)$ при $\overline{\varphi}(t) \in \text{PE}$ и $(h_{\delta}^T \Phi_{\delta}(t) \otimes I_n) \in \text{PE}$:

$$\begin{aligned}
V_f(t) &= \int_{t_0}^t e^{-k_2(t-\tau)} \Delta^2(\tau) (I_{n_{\delta}} \otimes \mathcal{Y}_{\psi_d}(\tau))^T V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) (I_{n_{\delta}} \otimes \mathcal{Y}_{\psi_d}(\tau)) d\tau = \\
&= (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))^T \int_{t_0}^t e^{-k_2(t-\tau)} \mathcal{M}_{\psi_d}^2(\tau) \Delta^2(\tau) V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta)) \geq \\
&\geq \underline{\mathcal{M}_{\psi_d}^2} \Delta_{\min}^2 (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))^T \int_{t_0}^t e^{-k_2(t-\tau)} V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta)) \geq \\
&\geq \underline{\mathcal{M}_{\psi_d}^2} \Delta_{\min}^2 (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))^T \left[\int_{t_0}^{t-\overline{k}T} e^{-k_2(t-\tau)} V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{\overline{k}} \int_{t-kT}^{t-kT+T} e^{-k_2(t-\tau)} V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau \right] (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta)) \geq \\
&\geq \underline{\mathcal{M}_{\psi_d}^2} \Delta_{\min}^2 e^{-k_2 t} (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))^T \sum_{k=1}^{\overline{k}} \int_{t-kT}^{t-kT+T} e^{k_2 \tau} V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta)) \geq \\
&\geq \underline{\mathcal{M}_{\psi_d}^2} \Delta_{\min}^2 (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))^T \sum_{k=1}^{\overline{k}} e^{-k_2 k T} \int_{t-kT}^{t-kT+T} V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta)),
\end{aligned}$$

где $\overline{k} \geq k \geq 1$ – целые числа.

В соответствии с леммой 6.8 из [6] при $(h_{\delta}^T \Phi_{\delta}(t) \otimes I_n) \in \text{PE}$ выполняется неравенство

$$(II.45) \quad \int_t^{t+T} V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau \geq \alpha I_{nn_{\delta}},$$

а пользуясь свойствами кронекеровского произведения, имеем равенство:

$$\begin{aligned}
(I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))^T \underbrace{(I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))}_{nn_{\delta} \times n_{\delta}} &= (I_{n_{\delta}}^T \otimes \psi_d^T(\theta)) (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta)) = \\
(II.46) \quad &= I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d^T(\theta) \psi_d(\theta) = \underbrace{\psi_d^T(\theta) \psi_d(\theta)}_{>0} I_{n_{\delta}}.
\end{aligned}$$

Тогда для всех $t \geq t_0 + T$ верно неравенство:

$$(П.47) \quad V_f(t) \geq \underbrace{\mathcal{M}_{\psi_d}^2 \Delta_{\min}^2 \alpha \sum_{k=1}^{\bar{k}} e^{-k_2 k T} \psi_d^T(\theta) \psi_d(\theta) I_{n_\delta}}_{>0} \geq \sqrt[n_{\bar{k}}]{\mathcal{M}_{x_{\delta 0}}} I_{n_\delta},$$

откуда для всех $t \geq t_0 + T$ имеем $\mathcal{M}_{x_{\delta 0}} \geq \underline{\mathcal{M}}_{x_{\delta 0}} > 0$, что позволяет получить:

$$(П.48) \quad \begin{aligned} \forall t \geq t_0 + T \quad |\mathcal{M}_\kappa(t)| &= |\mathcal{M}_{AB}^{n_\Theta}(t) \mathcal{M}_L^n(t) \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}^{n_\delta}(t)| \geq \\ &\geq \underline{\mathcal{M}}_{AB}^{n_\Theta} \underline{\mathcal{M}}_L^n \underline{\mathcal{M}}_{x_{\delta 0}}^{n_\delta} = \underline{\mathcal{M}}_\kappa > 0. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 3 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // *АиТ.* 2011. № 11. С. 9–59.
Khlebnikov M.V., Polyak B.T., Kuntsevich V.M. Optimization of linear systems subject to bounded exogenous disturbances: The invariant ellipsoid technique // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 11. P. 2227–2275.
2. *Khalil H.K., Praly L.* High-gain observers in nonlinear feedback control // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 2014. V. 24. No. 6. P. 993–1015.
3. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006.
4. *Shtessel Y., Edwards C., Fridman L., Levant A.* Sliding mode control and observation. New York: Springer New York, 2014.
5. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. N.Y.: Dover, 2013.
6. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Courier Corporation, 2012.
7. *Carroll R., Lindorff D.* An adaptive observer for single-input single-output linear systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1973. V. 18. No. 5. P. 428–435.
8. *Kudva P., Narendra K.S.* Synthesis of an adaptive observer using Lyapunov's direct method // *Int. J. Control.* 1973. V. 18. No. 6. P. 1201–1210.
9. *Luders G., Narendra K.S.* Stable adaptive schemes for state estimation and identification of linear systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1974. V. 19. No. 6. P. 841–847.
10. *Kreisselmeier G.* Adaptive observers with exponential rate of convergence // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1977. V. 22. No. 1. P. 2–8.
11. *Katiyar A., Roy S.B., Bhasin S.* Initial Excitation Based Robust Adaptive Observer for MIMO LTI Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2022.
12. *Bobtsov A., Pyrkin A., Vedyakov A., Vediakova A., Aranovskiy S.* A Modification of Generalized Parameter-Based Adaptive Observer for Linear Systems with Relaxed Excitation Conditions // *IFAC PapersOnLine.* 2022. V. 55. No. 12. P. 324–329.
13. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Exponentially Stable Adaptive Observation for Systems Parameterized by Unknown Physical Parameters // *arXiv preprint arXiv:2212.08405.* 2022. P. 1–6.

14. *Aranovskiy S., Ushirobira R., Korotina M., Vedyakov A.* On preserving-excitation properties of Kreisselmeiers regressor extension scheme // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2022. P. 1–6.
15. *Bhattacharyya S.P., De Souza E.* Pole assignment via Sylvester’s equation // *Syst. Control Lett.* 1982. V. 1, No. 4. P. 261–263.
16. *Dudarenko N.A., Slita O.V., Ushakov A.V.* Algebraic conditions of generalized modal control // *IFAC Proc. Volumes.* 2012. V. 45. No. 13. P. 150–155.
17. *Poznyak A.S.* Advanced mathematical tools for automatic control engineers, Elsevier Science, 2009.
18. *Глушченко А.И., Ласточкин К.А., Петров В.А.* Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть I. Объекты с постоянными параметрами // *АиТ.* 2022. № 4. С. 62–99.
Glushchenko A.I., Lastochkin K.A., Petrov V.A. Exponentially stable adaptive control. Part I. Time-invariant plants // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 4. P. 548–578.
19. *Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D.* On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes // *Ann. Rev. Control.* 2020. V. 50. P. 278–293.
20. *Katiyar A., Basu Roy S., Bhasin S.* Finite excitation based robust adaptive observer for MIMO LTI systems // *Int. J. Adaptive Control Signal Proc.* 2022. V. 36. No. 2. P. 180–197.
21. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Extended Adaptive Observer for Linear Systems with Overparametrization // *Proceedings of 2023 31st Mediterranean Conference on Control and Automation (MED).* Limassol: IEEE, 2023. P. 789–794.
22. *Polyak B.T., Smirnov G.* Large deviations for non-zero initial conditions in linear systems // *Automatica.* 2016. V. 74. P. 297–307.
23. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Parameter Estimation-Based Observer for Linear Systems with Polynomial Overparametrization // *Proceedings of 2023 31st Mediterranean Conference on Control and Automation (MED).* Limassol: IEEE, 2023. P. 795–799.
24. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений II. Объекты с неизвестными параметрами // *АиТ.* 2004. № 11. С. 40–48.
Nikiforov V.O. Observers of external deterministic disturbances. II. Objects with unknown parameters // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 11. P. 1724–1732.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 23.01.2023

После доработки 23.08.2023

Принята к публикации 04.09.2023

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2023 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИЕЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. ЧАСТЬ III. ОБЪЕКТЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹

Предлагается адаптивная система управления по вектору состояний классом линейных систем в канонической управляемой форме с переменными неизвестными параметрами, описываемыми известными нестационарными генераторами с неизвестными начальными условиями. Решение гарантирует глобальную экспоненциальную устойчивость замкнутой системы при конечном возбуждении регрессора, а также не требует априорной информации о знаке коэффициента усиления. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы в рамках математического моделирования.

Ключевые слова: адаптивное управление, переменные параметры, параметрическая ошибка, конечное возбуждение, идентификация, экспоненциальная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231023110089, EDN: OOHZIG

1. Введение

Классические алгоритмы адаптивного беспоискового управления при постоянных неизвестных параметрах объекта гарантируют асимптотическую устойчивость ошибки слежения (разницы между регулируемыми координатами и координатами эталонной модели) [1]. Однако в приложениях реальные физические системы часто описываются моделями с переменными параметрами. В этих условиях стандартные решения встречают сложности, связанные с необходимостью компенсации в производной функции Ляпунова слагаемого, пропорционального скорости изменения неизвестных параметров [1, с. 552].

Если неизвестные переменные параметры экспоненциально сходятся к постоянному значению, то асимптотическая устойчивость ошибки слежения со-

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД.1787.2022.4).

храняется [2, с. 339]. При произвольном изменении неизвестных параметров и выполнении ограничительного условия не исчезающего возбуждения регрессора базовые решения гарантируют ограниченность всех сигналов и сходимость ошибки слежения в ограниченную область. Если упомянутое условие не выполняется, то применение робастных модификаций базовых законов позволяет обеспечить аналогичные свойства замкнутой системы [1, 2].

Рассмотрим основные существующие подходы к улучшению свойств базовых решений.

В [3, 4] предлагается метод «заморозки переменных — *congelation of variables*», позволяющий заменить задачу оценки переменных неизвестных параметров задачей оценки их постоянного математического ожидания. Оценка сверху на величину дисперсии параметров считается известной, а управление строится с применением статического нелинейного демпфирования. В этой схеме закон адаптации компенсирует влияние математического ожидания неизвестных параметров, а нелинейный демпфер обеспечивает подавление влияния дисперсии. Решение обеспечивает асимптотическую устойчивость ошибки слежения и ограниченность всех сигналов замкнутой системы. Недостатком описанного метода является использование в управлении степенных функций от координат объекта (регрессора) [5, с. 222–223]. В качестве еще одного недостатка метода заморозки переменных выделяют [6] невозможность компенсации параметрической неопределенности вида $\theta(t)\varphi(x(t))$ с $\varphi(0) \neq 0$.

В [7–9] предложен подход, основанный на использовании комбинированных законов адаптации, в которых настройка параметров осуществляется с использованием ошибки слежения и ошибки предсказания. По сравнению с базовыми решениями [1, 2] комбинированные законы при тех же допущениях (выполнение условия не исчезающего возбуждения регрессора или применение робастных модификаций) обеспечивают сходимость ошибки слежения в область меньшего размера. В отличие от метода заморозки переменных [3, 4] асимптотическая устойчивость не достигается. Подробный обзор некоторых комбинированных законов идентификации переменных параметров приведен во введении [10].

Также стоит отметить исследования [11–15]. В [11] предлагается простая схема настройки среднегеометрического корня замкнутой системы, гарантирующая асимптотическую устойчивость ошибки слежения. Недостатком решения является необходимость знания коэффициента усиления объекта. В [12] разработан закон адаптации с астатизмом первого порядка, расширяющий применимость базовых законов настройки на класс систем с линейным изменением неизвестных параметров. В [13–15] предлагается схема робастного управления нестационарными линейными системами в форме вход-выход. Ограничением подхода является необходимость знания знака высокочастотного коэффициента усиления объекта и оценок сверху на все неизвестные переменные параметры системы.

Рассмотренные подходы [3–15], не используют априорную информацию о функциональном характере изменения неизвестных параметров системы. Однако, как известно [16], учет такой информации может существенно улучшить свойства замкнутой системы. Недавно в [17, 18] был предложен основанный на параметрической идентификации наблюдатель состояний нестационарных систем. Параметры системы описываются известными нестационарными генераторами с неизвестными начальными условиями. Задача оценки состояний системы приводится к задаче идентификации начальных условий генераторов и объекта. При выполнении условия конечного возбуждения регрессора (наблюдаемости системы на конечном интервале) гарантируется экспоненциальная или финитная сходимости параметрической ошибки и ошибки наблюдения.

На основе результатов [17, 18] в этой работе предлагается свести задачу управления к задаче оценки начальных условий генераторов параметров системы.

Рассматривается класс линейных полностью управляемых систем с переменными параметрами, описываемыми известными нестационарными генераторами с неизвестными начальными условиями. Разница между идеальным и формируемым управлением представляется в виде линейного регрессионного уравнения с неизвестным регрессором относительно неизвестных начальных условий генераторов. Затем по измеряемым состояниям и управлению в соответствии с результатами [18] строится измеримое регрессионное уравнение со скалярным невырожденным регрессором относительно начальных условий генераторов. По полученной регрессии с использованием результатов первой части [19] вводится закон настройки, в отличие от [3–15] при конечном возбуждении регрессора гарантирующий экспоненциальную сходимость ошибки слежения к нулю.

Предложенное расширение результатов первой части [19] на класс систем с переменными параметрами, кроме конечного возбуждения регрессора, дополнительно требует:

- знания оценок снизу и сверху на модуль коэффициента усиления объекта;
- постоянства знака коэффициента усиления;
- использования проекционного оператора, предотвращающего деление на ноль в управлении.

По сравнению с [3–11, 13–15] предложенный подход требует знания матриц состояний и выхода нестационарных генераторов, а значит и физической природы процессов, вызывающих изменения параметров системы.

Основные определения

При доказательстве теорем и утверждений будут использованы определение конечного возбуждения регрессора и следствие из леммы Калмана–Якубовича–Попова [1, 2].

Определение 1. Регрессор $\omega(t)$ возбуждается конечно $\omega(t) \in FE$ на отрезке $[t_r^+; t_e]$, если существуют $t_r^+ \geq 0$, $t_e > t_r^+$ и α такие, что верно неравенство

$$(1.1) \quad \int_{t_r^+}^{t_e} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I_{n \times n},$$

где $\alpha > 0$ — степень возбуждения, $I_{n \times n}$ — единичная матрица.

Следствие 1. Для любой матрицы $D > 0$ управляемой пары (A, B) с $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, гурвицевой матрицей $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ существуют матрицы $P = P^T > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и число $\mu > 0$ такие, что

$$(1.2) \quad \begin{aligned} A^T P + PA &= -QQ^T - \mu P, & PB &= QK, \\ K^T K &= D + D^T. \end{aligned}$$

2. Постановка задачи

Рассмотрим класс непрерывных линейных систем с переменными параметрами²:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \forall t \geq t_0^+ \quad \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & x(t_0^+) &= x_0, \\ A(t) &= A_0 + e_1 \vartheta^T(t), & B(t) &= e_1 \beta(t), \\ A_0 &= \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{n-1} \\ 0_{1 \times n} & \end{bmatrix}, & e_1 &= \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — координаты состояния с неизвестными начальными условиями x_0 , $u(t) \in \mathbb{R}$ — управляющее воздействие, $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — известная матрица состояний, $B(t) \in \mathbb{R}^n$, $\vartheta(t) \in \mathbb{R}^n$ — неизвестные векторы, t_0^+ — известный начальный момент времени. Пара $(A(t), B(t))$ полностью управляема для всех $t \geq t_0^+$ в смысле критерия [20].

Относительно неизвестных переменных параметров системы (2.1) принимаются следующие допущения.

Допущение 1. Векторы $\vartheta(t)$, $B(t)$ ограничены, непрерывны и формируются нестационарными генераторами³:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \dot{x}_\vartheta(t) = \mathcal{A}_\vartheta(t)x_\vartheta(t), & x_\vartheta(t_0^+) = x_{\vartheta_0}, \\ \vartheta(t) = h_\vartheta x_\vartheta(t), \\ \dot{x}_B(t) = \mathcal{A}_B(t)x_B(t), & x_B(t_0^+) = x_{B_0}, \\ B(t) = h_B x_B(t), \end{cases}$$

² Результаты могут быть обобщены на МИМО системы в случае, если известна конкретная структура матриц $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

³ Матрицы $\mathcal{A}_\vartheta(t)$, $\mathcal{A}_B(t)$ в общем случае могут нелинейно зависеть от состояний системы $x(t)$.

где $x_{\vartheta}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\vartheta}}$, $x_B(t) \in \mathbb{R}^{n_B}$ — координаты генераторов с неизвестными начальными условиями $x_{\vartheta}(t_0^+)$, $x_B(t_0^+)$, $h_{\vartheta} \in \mathbb{R}^{n_{\vartheta} \times n_{\vartheta}}$, $h_B \in \mathbb{R}^{n_B \times n_B}$; $\mathcal{A}_{\vartheta}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\vartheta} \times n_{\vartheta}}$, $\mathcal{A}_B(t) \in \mathbb{R}^{n_B \times n_B}$ — известные векторы и матрицы.

Допущение 2. Для $|\beta(t)|$ известны оценки снизу $\beta_{\min} > 0$ и сверху $\beta_{\max} > \beta_{\min}$.

Допущение 3. Коэффициент усиления $\beta(t)$ имеет постоянный, но неизвестный знак ($\text{sgn}(\beta(t)) = \text{const}$).

Требуемое качество управления в замкнутой управлением $u(t)$ системе (2.1) зададим эталонной моделью с постоянными параметрами:

$$(2.3) \quad \forall t \geq t_0^+ \quad \dot{x}_{ref}(t) = A_{ref}x_{ref}(t) + B_{ref}r(t), \quad x_{ref}(t_0^+) = x_{0ref},$$

где $x_{ref}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор координат состояния эталонной модели с известными начальными условиями x_{0ref} ; $r(t) \in \mathbb{R}$ — сигнал задания; $A_{ref} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — гурвицева матрица состояний эталонной модели; $B_{ref} \in \mathbb{R}^n$ — вектор коэффициентов усиления эталонной модели.

Для объекта (2.1) и эталонной модели (2.3) при управляемости пары $(A(t), B(t))$ и выполнении допущения 3 возможно предположить выполнение условия идеального отслеживания.

Допущение 4. Существуют матрица $K_x(t) = A_{ref} - A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и вектор $K_r(t) = [B^T(t)B(t)]^{-1}B^T(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ такие, что верно

$$(2.4) \quad A(t) + B(t)K_r(t)K_x(t) = A_{ref}, \quad B(t)K_r(t)B_{ref} = B_{ref}.$$

С учетом допущения 2 уравнение в отклонениях между уравнением объекта (2.1) и эталонной модели (2.3) имеет вид

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{ref}(t) &= A_{ref}e_{ref}(t) + B(t)u(t) - (A_{ref} - A(t))x(t) - B_{ref}r(t) = \\ &= A_{ref}e_{ref}(t) + B(t)(u(t) - u^*(t)), \end{aligned}$$

где $e_{ref}(t) = x(t) - x_{ref}(t)$, $u^*(t) = K_r(t)(K_x(t)x(t) + B_{ref}r(t))$.

Требуется построить закон управления $u(t)$, гарантирующий достижение цели экспоненциального регулирования:

$$(2.6) \quad \Phi(t) \in \text{FE} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{ref}(t)\| = 0 \text{ (exp)},$$

где $\Phi(t)$ — некоторый обобщенный вектор измеримых сигналов.

Замечание 1. Допущение 1 из общего класса линейных систем с переменными параметрами выделяет группу систем, для которых в работе ставится и решается задача экспоненциального регулирования (2.6). В предложенном решении задачи используется информация о $\beta_{\max} > \beta_{\min} > 0$, что требует принятия допущения 2. Математическое моделирование показывает возможность выбора $\beta_{\max} \rightarrow \infty$, $\beta_{\min} \rightarrow 0$, что несколько ослабляет строгость этого требования. Допущение 3 гарантирует непрерывность коэффициентов $K_x(t)$, $K_r(t)$ управления $u^*(t)$. Допущение 4 накладывает тре-

бование структурного соответствия матриц эталонной модели (2.3) матрицам объекта (2.1).

Замечание 2. Системы (2.1) с согласованной параметрической неопределенностью (2.4) часто встречаются на практике. Например, уравнения динамики углов Эйлера твердого тела при допущении его симметричности описываются звеном второго порядка с согласованной неопределенностью. Другим хорошим примером задачи управления при согласованных неопределенностях является регулирование координат манипулятора в формализме Эйлера–Лагранжа.

3. Основной результат

В разделе 3.1 поставленную задачу экспоненциального регулирования (2.6) сведем к задаче идентификации начальных условий x_{B_0}, x_{ϑ_0} . В разделе 3.2 из измеримых сигналов составим регрессионное уравнение относительно x_{B_0}, x_{ϑ_0} и введем закон идентификации, доставляющий выполнение цели (2.6).

3.1. Параметризация управления

Запишем управление $u^*(t)$ через измеримые состояния объекта (2.1), (2.2) и неизвестные параметры x_{B_0}, x_{ϑ_0} . Для этого получим решения уравнений (2.2):

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} \vartheta(t) &= h_{\vartheta} \Phi_{\vartheta}(t) x_{\vartheta_0}, \\ B(t) &= h_B \Phi_B(t) x_{B_0}, \end{aligned}$$

где при выполнении допущений 2 и 3 выполняется неравенство

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} 0 < \beta_{\min}^2 &\leq x_{B_0}^T G(t) x_{B_0} \leq \lambda_{\max}(G(t)) \|x_{B_0}\|^2, \\ G(t) &= \Phi_B^T(t) h_B^T h_B \Phi_B(t), \end{aligned}$$

а фундаментальные матрицы $\Phi_{\vartheta}(t)$ и $\Phi_B(t)$ измеримы и определены уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{\vartheta}(t) &= \mathcal{A}_{\vartheta}(t) \Phi_{\vartheta}(t), & \Phi_{\vartheta}(t_0^+) &= I_{n_{\vartheta}}, \\ \dot{\Phi}_B(t) &= \mathcal{A}_B(t) \Phi_B(t), & \Phi_B(t_0^+) &= I_{n_B}. \end{aligned}$$

С учетом (2.4) и (3.1.1) можем переписать уравнение идеального управления $u^*(t)$ в требуемом виде

$$(3.1.3) \quad \begin{aligned} u^*(t) &= K_r(t) (K_x(t)x(t) + B_{ref}r(t)) = \\ &= \frac{x_{B_0}^T \Phi_B^T(t) h_B^T}{x_{B_0}^T \Phi_B^T(t) h_B^T h_B \Phi_B(t) x_{B_0}} \left((A_{ref} - A_0)x(t) - e_1 \vartheta^T(t)x(t) + B_{ref}r(t) \right) = \\ &= \frac{x_{B_0}^T \Phi_B^T(t) h_B^T}{F(t)} e_1 \left(e_1^T (A_{ref} - A_0)x(t) - x_{\vartheta_0}^T \Phi_{\vartheta}^T(t) h_{\vartheta}^T x(t) + e_1^T B_{ref}r(t) \right), \end{aligned}$$

где $F(t) = x_{B_0}^T G(t) x_{B_0} > 0$.

Поскольку в соответствии с описанием системы (2.5) параметры x_{B_0} и x_{ϑ_0} неизвестны, то выражение (3.1.3) мотивирует использование управления с настраиваемыми параметрами:

$$(3.1.4) \quad u(t) = \frac{\hat{x}_{B_0}^T(t)\Phi_B^T(t)h_B^T}{\hat{F}(t)} e_1 \left(e_1^T (A_{ref} - A_0) x(t) - \hat{x}_{\vartheta_0}^T(t)\Phi_{\vartheta}^T(t)h_{\vartheta}^T x(t) + e_1^T B_{ref} r(t) \right),$$

где $\hat{F}(t) = \hat{x}_{B_0}^T(t)G(t)\hat{x}_{B_0}(t)$.

Утверждение 1. Ошибка $u(t) - u^(t)$ между формируемым (3.1.4) и идеальным управлением (3.1.3) имеет вид*

$$(3.1.5) \quad u(t) - u^*(t) = \tilde{\theta}^T(t)\omega(t),$$

где $\tilde{\theta}(t) = [\tilde{x}_{\vartheta_0}^T(t) \ \tilde{x}_{B_0}^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_{\vartheta}+n_B}$ — параметрическая ошибка, $\omega(t) \in \mathbb{R}^{n_{\vartheta}+n_B}$ — неизмеримый регрессор.

Доказательство утверждения 1 и функциональное определение регрессора $\omega(t)$ приведены в Приложении.

Подставив (3.1.5) в (2.5), имеем:

$$(3.1.6) \quad \dot{e}_{ref}(t) = A_{ref}e_{ref}(t) + B(t)\tilde{\theta}^T(t)\omega(t).$$

Тогда в соответствии с результатами первой части работы требуется определить преобразования

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \mathcal{F}_1(t, x(t), u(t), \Phi_{\vartheta}(t), \Phi_B(t)), \quad z(t) = \mathcal{F}_2(x(t)), \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= \mathcal{G}(\Phi(t), z(t)), \end{aligned}$$

совместно гарантирующие достижение цели экспоненциального регулирования в расширенном пространстве ошибок:

$$(3.1.7) \quad \Phi(t) \in FE \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| = 0 \quad (\exp),$$

где $\xi(t) = [e_{ref}^T(t) \ \tilde{\theta}^T(t)]^T$ — обобщенная ошибка слежения.

3.2. Синтез адаптера

Получим регрессионное уравнение относительно неизвестных постоянных параметров x_{B_0} и x_{ϑ_0} идеального закона управления (3.1.3). Результат такой параметризации представим в виде утверждения.

Утверждение 2. На основании состояний набора фильтров ($A_K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — гурвицева матрица)

$$(3.2.1) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_K \hat{x}(t) - A_K x(t), \quad \hat{x}(t_0^+) = 0_n, \\ \dot{\varphi}(t) &= A_K \varphi(t) + e_1 x^T(t) h_{\vartheta} \Phi_{\vartheta}(t), \quad \varphi(t_0^+) = 0_{n \times n_{\vartheta}}, \\ \dot{\psi}(t) &= A_K \psi(t) + h_B \Phi_B(t) u(t), \quad \psi(t_0^+) = 0_{n \times n_B}, \\ \dot{v}(t) &= A_K v(t) + A_0 x(t), \quad v(t_0^+) = 0_n, \end{aligned} \quad A_K = \begin{bmatrix} K \in \mathbb{R}^n & I_{(n-1) \times (n-1)} \\ & 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix},$$

процедур нормализации

$$(3.2.2) \quad z(t) := \frac{e_1^T (x(t) - \bar{x}(t) - v(t))}{1 + \Phi^T(t)\Phi(t)} \quad \Psi^T(t) := \frac{\Phi^T(t)}{1 + \Phi^T(t)\Phi(t)},$$

$$\Phi^T(t) := \left[e_1^T e^{A_K(t-t_0^+)} \quad e_1^T \varphi(t) \quad e_1^T \psi(t) \right],$$

динамического расширения

$$(3.2.3a) \quad \dot{\Delta}(t) = e^{-\sigma(t-t_0^+)} \Psi(t) \Psi^T(t), \quad \Delta(t_0^+) = 0_{(n_\vartheta+n_B+n) \times (n_\vartheta+n_B+n)},$$

$$(3.2.3b) \quad \dot{y}(t) = e^{-\sigma(t-t_0^+)} \Psi(t) z(t), \quad y(t_0^+) = 0_{(n_\vartheta+n_B+n)}$$

и смешивания

$$(3.2.3c) \quad Y(t) := \text{adj} \{ \Delta(t) \} y(t), \quad \Omega(t) := \det \{ \Delta(t) \}$$

имеем регрессионное уравнение относительно параметров x_{B_0} и x_{ϑ_0} :

$$(3.2.4) \quad \Upsilon(t) := \mathfrak{L} Y(t) = \Omega(\Phi(t)) \theta, \quad \mathfrak{L} = \left[0_{(n_\vartheta+n_B) \times n} \quad I_{(n_\vartheta+n_B) \times (n_\vartheta+n_B)} \right],$$

где если $\Phi(t) \in \text{FE}$, то $\forall t \geq t_e$ верно неравенство $\Omega_{UB}(t) \geq \Omega(t) \geq \Omega_{LB} > 0$.

Доказательство утверждения 2 приведено в Приложении.

По уравнению (3.2.4) в соответствии с результатами теоремы 1 из [19] при измеримом $\omega(t)$ возможно ввести закон настройки, гарантирующий достижение цели (3.1.7). В следующей теореме опишем закон настройки, решающий задачу (3.1.7) при неизмеримом $\omega(t)$.

Теорема 1. Пусть выполнены допущения 1–4 и $\Phi(t) \in \text{FE}$, тогда закон настройки

$$(3.2.5) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma(t)\Omega(t) \left(\Omega(t)\hat{\theta}(t) - \Upsilon(t) \right) = -\gamma(t)\Omega^2(t)\tilde{\theta}(t), \quad \hat{\theta}(t_0^+) = \hat{\theta}_0,$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Omega(t) < \rho \in (0; \Omega_{LB}], \\ \frac{\gamma_0 \lambda_{\max}(\hat{\omega}(t)\hat{\omega}^T(t)) + \gamma_1}{\Omega^2(t)} & \text{иначе} \end{cases}$$

при выборе $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 \geq 0$ гарантирует:

- 1) $\left| \tilde{\theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\theta}_i(t_b) \right| \quad \forall t_a \geq t_b$;
- 2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{sgn}(V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) = \text{sgn}(V_1^T(t)x_{B_0}) \\ |V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)| > |V_1^T(t)x_{B_0}| \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{F}(t) > 0$;
- 3) $\forall t \geq t_0^+$ ограниченность $\xi(t) \in L_\infty$;
- 4) экспоненциальную сходимость $\xi(t)$ к нулю для всех $t \geq t_e$.

Доказательство теоремы и определение величин $V_1(t)$, $\hat{\omega}(t)$ приведены в Приложении.

При невыполнении условий второго пункта теоремы в управлении (3.1.4) возможно деление на ноль. Поэтому на практике закон управления (3.1.4) следует дополнить проекционным оператором:

$$(3.2.6) \quad u(t) = \frac{\hat{x}_{B_0}^T(t)\Phi_B^T(t)h_B^T}{\hat{F}_{\text{prj}}(t)}e_1 \times \\ \times (e_1^T(A_{ref} - A_0)x(t) - \hat{x}_{\vartheta_0}^T(t)\Phi_{\vartheta}^T(t)h_{\vartheta}^T x(t) + e_1^T B_{ref}r(t)), \\ \hat{F}_{\text{prj}}(t) := \begin{cases} \hat{x}_{B_0}^T(t)G(t)\hat{x}_{B_0}(t), & \text{если } \hat{x}_{B_0}^T(t)G(t)\hat{x}_{B_0}(t) > \beta_{\min}^2 > 0, \\ \beta_{\min}^2 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предложенные преобразования $\mathcal{F}_1(\cdot)$ и $\mathcal{F}_2(\cdot)$ описываются выражениями (3.2.1), (3.2.2), а преобразование $\mathcal{G}(\cdot)$ — соответственно (3.2.3)–(3.2.5). В целом разработанная адаптивная система управления состоит из закона управления (3.1.4), процедур обработки измеримых сигналов (3.2.1)–(3.2.4) и закона адаптации (3.2.5). Фильтрация (3.2.1) позволяет по измеримым сигналам $x(t)$, $u(t)$, $\Phi_{\vartheta}(t)$, $\Phi_B(t)$ построить статическое регрессионное уравнение относительно неизвестных параметров x_{B_0} , x_{ϑ_0} , x_0 . Нормализация (3.2.2) гарантирует ограниченность регрессора $\Psi(t)$, что по доказанному в утверждении 1 из [19] достаточно для ограниченности сверху $\Omega(t)$. Процедуры расширения и смешивания (3.2.3) позволяют перейти от векторного регрессора $\Psi(t)$ сначала к матричному $\Delta(t)$, а затем и к скалярному $\Omega(t)$. Деление в законе настройки (3.2.5) на $\Omega^2(t)$ является безопасной операцией в силу $\Omega(t) \geq \Omega_{LB} > 0$ и при правильном выборе параметра ρ позволяет обеспечить заданное величиной $\gamma_0\lambda_{\max}(\hat{\omega}(t)\hat{\omega}^T(t)) + \gamma_1$ значение скорости сходимости параметрической ошибки $\hat{\theta}(t)$ к нулю.

Согласно результатам теоремы предложенная система, в отличие от большинства известных подходов [3–15] к управлению линейными системами с переменными параметрами, обеспечивает экспоненциальное регулирование (2.6).

Замечание 3. Использование проекционного оператора (3.2.6) является классическим и хорошо известным приемом для устранения сингулярности в схемах адаптивного управления (см., например, [1, с. 400]). При выполнении условий второго пункта теоремы выбор $\beta_{\min} \rightarrow 0$ обеспечивает отсутствие переключений в (3.2.6). В противном случае выбор $\beta_{\min} \rightarrow 0$ гарантирует конечное число переключений.

Замечание 4. На интервале $[t_0^+; t_e]$ или при $\Phi(t) \notin \text{FE}$ контур настройки (3.2.5) параметров управления (3.1.4) разомкнут, а при произвольном выборе начальных условий $\hat{\theta}(t_0^+)$ качество управления может быть произвольно плохим вплоть до потери устойчивости. Поэтому на практике при использовании предложенной адаптивной системы:

i) выбор начальных условий $\hat{\theta}(t_0^+)$ должен осуществляться с применением техник робастного управления таким образом, чтобы было априорно известно об асимптотической устойчивости системы

$$\dot{x}(t) = \left(A(t) + B(t)\hat{K}_r(t)\hat{K}_x(t) \right) x(t) \text{ при } \dot{\hat{\theta}}(t) \equiv 0 \text{ для всех } t \geq t_0^+,$$

ii) закон управления (3.1.4) должен быть снабжен дополнительной робастной составляющей, гарантирующей ограниченность ошибки $\xi(t)$ и удовлетворительное качество управления.

Например, а) при известном $\text{sgn}(\beta(t))$ и оценках β_{\min} , β_{\max} можно использовать закон управления

$$u(t) = \{(3.1.4), (3.2.6)\} - \gamma_3 \text{sgn}(\beta(t)) e_{ref}(t) P e_1 \hat{w}(t) \hat{w}^T(t), \quad \gamma_3 > 0$$

(см. лемму 2.2 из [5]), б) при неизвестном $\text{sgn}(\beta(t))$, но известных оценках β_{\min} , β_{\max} можно воспользоваться управлением с демпфером и функцией Нуссбаума [21]:

$$u(t) = \{(3.1.4), (3.2.6)\} - \gamma_3 N(w(t)) e_{ref}^T(t) P e_1 \hat{w}(t) \hat{w}^T(t), \quad \gamma_3 > 0,$$

$$N(w(t)) = w^2(t) \cos(w(t)),$$

$$\dot{w}(t) = \gamma_3 \gamma_4 e_{ref}^T(t) P e_1 e_1^T P e_{ref}(t) \hat{w}(t) \hat{w}^T(t), \quad \gamma_4 > 0.$$

4. Численное моделирование

В среде Matlab/Simulink выполним моделирование предложенной адаптивной системы управления при выполнении и нарушении условий второго пункта теоремы. Моделирование будем проводить, используя численное интегрирование явным методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации $\tau_s = 10^{-4}$ с.

$$4.1. \text{sgn}(V_1^T(t) \hat{x}_{B_0}(t_0^+)) = \text{sgn}(V_1^T(t) x_{B_0})$$

$$u |V_1^T(t) \hat{x}_{B_0}(t_0^+)| > |V_1^T(t) x_{B_0}|$$

Матрицы объекта управления (2.1) для всех $t \geq 0$ зададим следующим образом:

$$(4.1.1) \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 \sin(a_2 t) & a_4 e^{a_3 t} + a_5 (1 - e^{a_3 t}) \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \cos(b_2 t) + b_4 e^{b_3 t} + b_5 \end{bmatrix}, \quad x(t_0^+) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $a_2 = 1$, $a_3 = b_3 = -0,25$, $b_2 = \sqrt{12}$ — известные постоянные, $a_1 = -10$, $a_4 = 1$, $a_5 = 7$, $b_1 = 0,25$, $b_4 = -2$, $b_5 = -4$ — неизвестные постоянные.

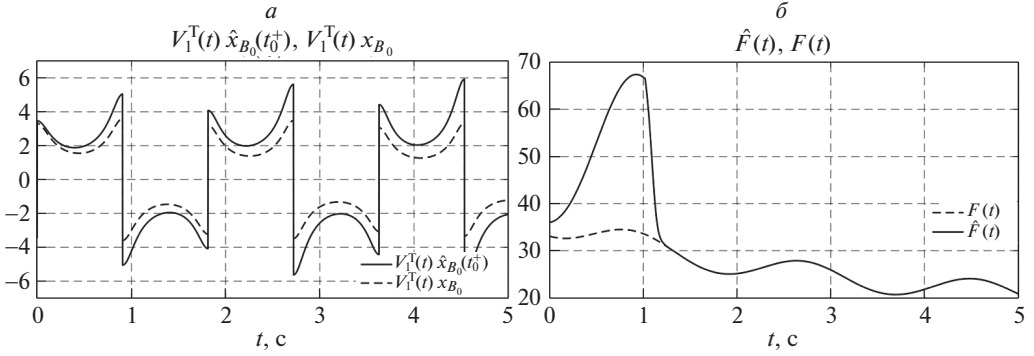


Рис. 1. Переходные процессы по $V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)$ и $V_1^T(t)x_{B_0}$ — а, $\hat{F}(t)$ и $F(t)$ — б.

Тогда матрицы и начальные условия генераторов (2.2) примут вид:

$$(4.1.2) \quad \mathcal{A}_\vartheta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_{\vartheta_0} = \begin{bmatrix} -a_1 a_2 \\ 0 \\ a_4 - a_5 \\ a_5 \end{bmatrix}, \quad h_\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}, \quad x_{B_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_5 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad h_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы эталонной модели (2.3), параметры фильтров (3.2.1), (3.2.3) и некоторые параметры закона настройки (3.2.5) установим следующим образом:

$$(4.1.3) \quad A_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_{ref} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad A_K = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma = 5,$$

$$\rho = 10^{-62}, \quad \beta_{\min} = 0,1, \quad \beta_{\max} = 10, \quad \gamma_0 = 10^{-8}, \quad \gamma_1 = 0,$$

$$\hat{\theta}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -8 \ 1]^T.$$

Прежде всего проверим выполнение в эксперименте требований второй части теоремы. На рис. 1 представлено сравнение функций $V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)$ и $V_1^T(t)x_{B_0}$, и $\hat{F}(t)$ с $F(t)$.

Разрывы на рис. 1 вызваны изменением направления собственного вектора $V_1(t)$ (переходом элементов матрицы $G(t)$ через ноль). Из рис. 1,а следует, что сделанный выбор начальных условий (4.1.3) гарантирует в проводимом эксперименте выполнение условий второго пункта теоремы. Совместно рис. 1,а и 1,б подтверждают импликацию

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sgn}(V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) = \text{sgn}(V_1^T(t)x_{B_0}) \\ |V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)| > |V_1^T(t)x_{B_0}| \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{F}(t) > 0.$$

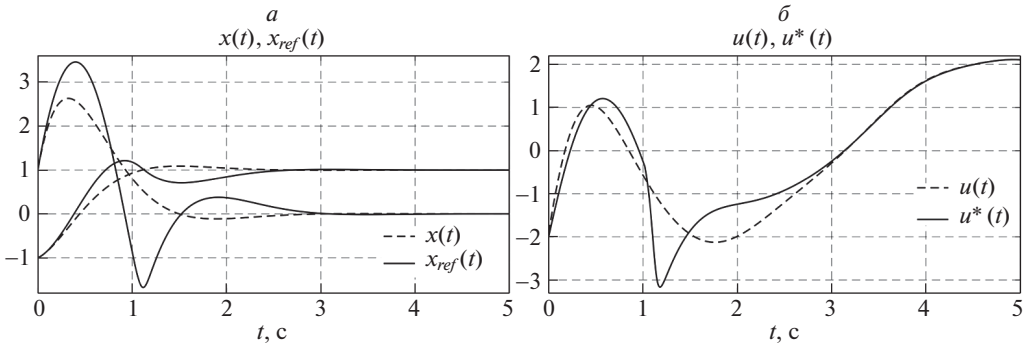


Рис. 2. Переходные процессы по $x(t)$ и $x_{ref}(t)$ — а, $u^*(t)$ и $u(t)$ — б.

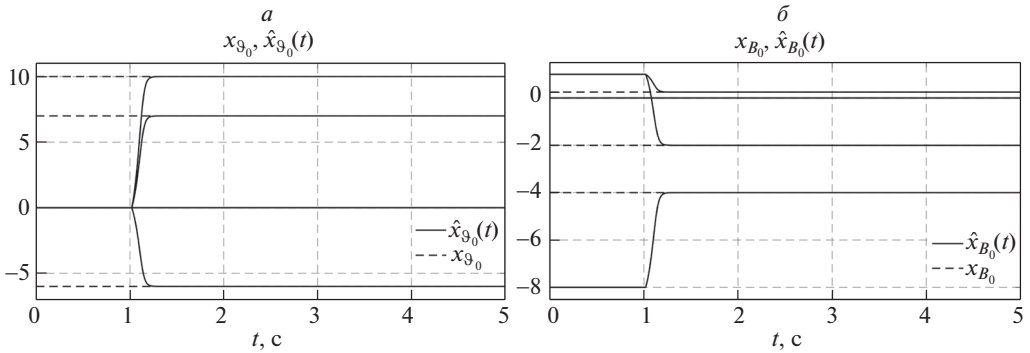


Рис. 3. Переходные процессы по x_{ϑ_0} и $\hat{x}_{\vartheta_0}(t)$ — а, x_{B_0} и $\hat{x}_{B_0}(t)$ — б.

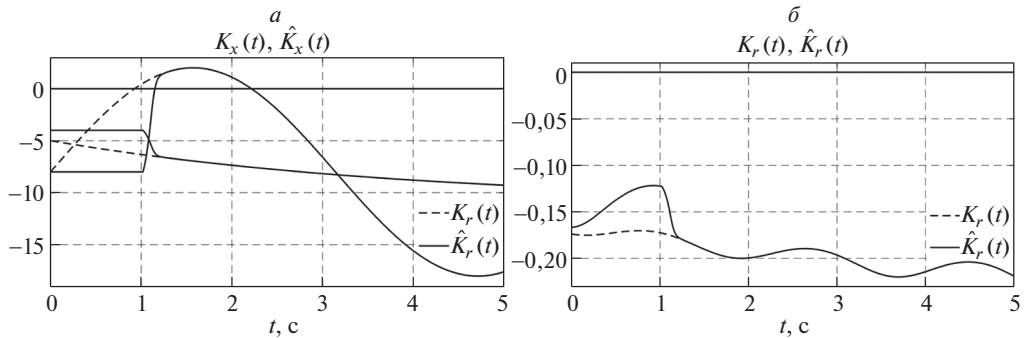


Рис. 4. Переходные процессы по $\hat{K}_x(t)$ и $K_x(t)$ — а, $\hat{K}_r(t)$ и $K_r(t)$ — б.

Удостоверившись в выполнении условия $\hat{F}(t) > 0$, продолжим моделирование адаптивной системы. На рис. 2,а приведено сравнение координат состояния эталонной модели $x_{ref}(t)$ (при $x_{0ref} = x_0$) и координат объекта управления $x(t)$, а на рис. 2,б идеального $u^*(t)$ и настраиваемого $u(t)$ управлений.

На рис. 3,а приведены сравнения параметров x_{ϑ_0} и $\hat{x}_{\vartheta_0}(t)$, на рис. 3,б — x_{B_0} и $\hat{x}_{B_0}(t)$.

На рис. 4 приведены сравнения параметров $K_x(t)$, $K_r(t)$ и их оценок $\hat{K}_x(t)$, $\hat{K}_r(t)$, рассчитанных с помощью $\hat{x}_{\vartheta_0}(t)$, $\hat{x}_{B_0}(t)$.

Результаты моделирования подтверждают теоретические выводы, полученные в теореме 1. Действительно, при $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 \geq 0$ предложенная адаптивная система гарантирует достижение поставленной цели (2.6).

Переходные процессы, представленные на рис. 2–4, подтверждают отмеченный в замечании 3 недостаток предложенной системы. На интервале $[0; 1]$ система управления функционирует с разомкнутым контуром адаптации (3.2.5), что приводит к осцилляциям по $x(t)$.

$$4.2. \operatorname{sgn}(V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) \neq \operatorname{sgn}(V_1^T(t)x_{B_0})$$

Рассмотрим тот же объект управления (4.1.1), (4.1.2) при тех же параметрах (4.1.3) эталонной модели (2.3), фильтров (3.2.1), (3.2.3), закона настройки (3.2.5), но при более реалистичном для практики сценарии $\operatorname{sgn}(V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) \neq \operatorname{sgn}(V_1^T(t)x_{B_0})$. Будем использовать модифицированный закон управления (3.2.6) и в соответствии с результатами первой серии экспериментов установим $\gamma_0 = 10^{-10}$, $\gamma_1 = 10$ и $\beta_{\min} = 1$, $\rho = 10^{-81}$, $\hat{\theta}_0 = [0 \ -8 \ -2 \ -2 \ 0 \ 1 \ -8 \ 1]^T$.

На рис. 5 представлено сравнение функций $V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)$ и $V_1^T(t)x_{B_0}$, а также $\hat{F}(t)$, $\hat{F}_{\text{прj}}(t)$ с $F(t)$.

Разрывы на рис. 5 вызваны изменением направления собственного вектора $V_1(t)$ (переходом элементов матрицы $G(t)$ через ноль). Из рис. 5,а следует, что сделанный выбор начальных условий доставляет выполнение условия $\operatorname{sgn}(V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) \neq \operatorname{sgn}(V_1^T(t)x_{B_0})$. Рисунок 5,б демонстрирует работу проекционного оператора (3.2.6). Совместно рис. 5,а и 5,б подтверждают импликацию

$$\operatorname{sgn}(V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) \neq \operatorname{sgn}(V_1^T(t)x_{B_0}) \Rightarrow \hat{F}(t) \geq 0.$$

На рис. 6 приведено сравнение координат эталонной модели $x_{ref}(t)$ (при $x_{0ref} = x_0$) и координат объекта управления $x(t)$, а также параметров $K_x(t)$, $K_r(t)$ и оценок $\hat{K}_x(t)$, $\hat{K}_r(t)$.

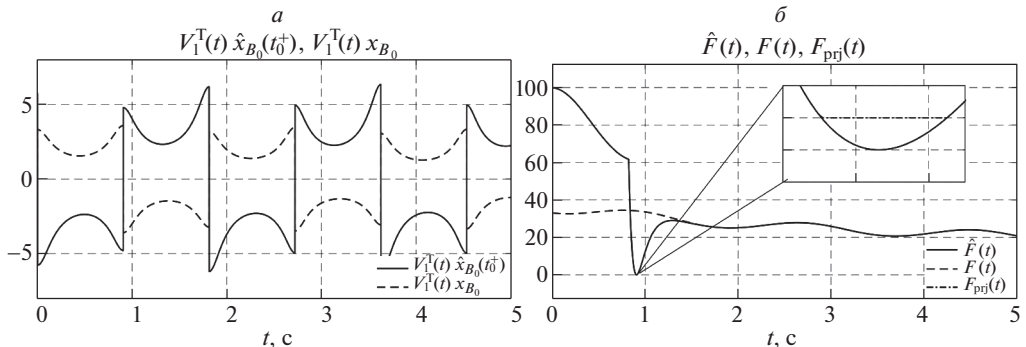


Рис. 5. Переходные процессы по $\hat{\Theta}_0^i(t)$ и $\Theta_0^i(t)$ — а, $\hat{F}(t)$, $\hat{F}_{\text{прj}}(t)$ и $F(t)$ — б.

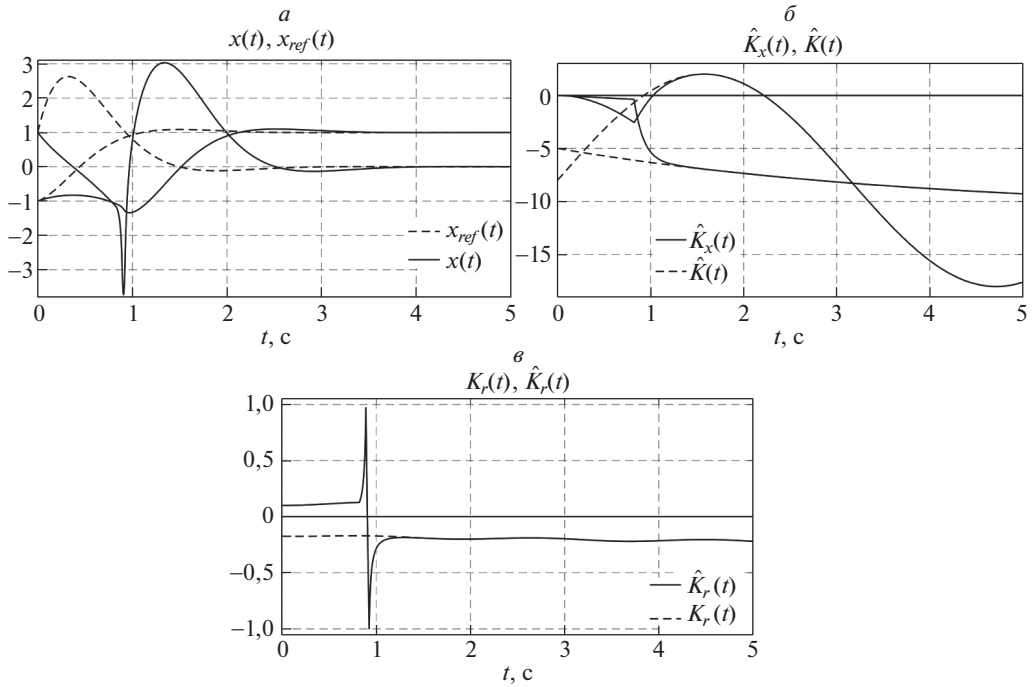


Рис. 6. Сравнение: $x(t)$ и $x_{ref}(t)$ — а, $K_x(t)$ и $\hat{K}_x(t)$ — б, $K_r(t)$ и $\hat{K}_r(t)$ — в.

Результаты эксперимента подтверждают способность настраиваемого закона управления (3.2.6) эффективно противостоять возможному делению на ноль при $\text{sgn}(V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) \neq \text{sgn}(V_1^T(t)x_{B_0})$.

Проведенные эксперименты полностью подтвердили теоретические выводы, сделанные в теореме 1, замечаниях 3 и 4.

5. Заключение

Результаты первой части работы распространены на класс линейных систем с переменными неизвестными параметрами, описываемыми известными нестационарными генераторами с неизвестными начальными условиями.

Для этого класса систем предложено управление, решающее задачу отслеживания траекторий стационарной эталонной модели нестационарным объектом. Такое управление вычисляется по измеримым сигналам и неизвестным начальным условиям генераторов параметров системы. Для идентификации начальных условий генераторов предложен закон идентификации, гарантирующий экспоненциальную устойчивость ошибки слежения $e_{ref}(t)$ при конечном возбуждении регрессора. Решение не требует знания знаков коэффициента усиления, но требует оценок на его модуль.

Результат имеет общий с [19, 22] недостаток, а именно требует выполнения условия конечного возбуждения регрессора даже для обеспечения ограничен-

ности ошибки слежения. В замечании 4 приведены некоторые способы решения этой проблемы для систем с одним входом. Для систем с несколькими входами обеспечение ограниченности без знания знака элементов матрицы усиления является открытой проблемой.

Целью дальнейших исследований может являться распространение результатов на а) задачи управления по выходу системами с переменными параметрами, б) задачи управления при нарушении условий согласованности, в) системы с несколькими входами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \hat{v}(t) &= h_{\vartheta} \Phi_{\vartheta}(t) \hat{x}_{\vartheta_0}(t), \\
 \hat{B}(t) &= h_B \Phi_B(t) \hat{x}_{B_0}(t), \\
 v(t) &= e_1^T (A_{ref} - A_0) x(t) + e_1^T B_{ref} r(t).
 \end{aligned}
 \tag{П.1}$$

С учетом (П.1) разница $u(t) - u^*(t)$ имеет вид (для краткости зависимости от времени временно опущены):

$$\begin{aligned}
 u - u^* &= \frac{\hat{B}^T}{\hat{F}} e_1 (v - \hat{v}^T x) - \frac{B^T}{F} e_1 (v - \vartheta^T x) \pm \\
 \pm \frac{B^T}{F} e_1 (v - \hat{v}^T x) &= -\frac{B^T e_1}{F} \tilde{v}^T x + \left(\frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F}} - \frac{B^T e_1}{F} \right) (v - \hat{v}^T x).
 \end{aligned}
 \tag{П.2}$$

Приведем разность $\frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F}} - \frac{B^T e_1}{F}$ к виду с линейной зависимостью относительно \tilde{B} и \tilde{F} :

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F}} - \frac{B^T e_1}{F} &= \frac{\hat{B}^T e_1 F \pm \hat{B}^T e_1 \hat{F} - B^T e_1 \hat{F}}{\hat{F} F} = \\
 &= \frac{-\hat{B}^T e_1 (\hat{F} - F) + (\hat{B}^T - B^T) e_1 \hat{F}}{\hat{F} F} = \\
 &= \frac{-\hat{B}^T e_1 \tilde{F} + \tilde{B}^T e_1 \hat{F}}{\hat{F} F} = \frac{-\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} \tilde{F} + \frac{\tilde{B}^T e_1}{\hat{F}}.
 \end{aligned}
 \tag{П.3}$$

Рассмотрим ошибку \tilde{F} отдельно:

$$\begin{aligned}
 \tilde{F} &= \hat{B}^T \hat{B} - B^T B + B^T \hat{B} - B^T \hat{B} = \\
 &= (\hat{B}^T - B^T) \hat{B} + B^T (\hat{B} - B) = \tilde{B}^T \hat{B} + B^T \tilde{B}.
 \end{aligned}
 \tag{П.4}$$

Подстановка выражений (П.4), (П.3) в (П.2) позволяет получить:

$$\begin{aligned}
 u - u^* &= -\frac{B^T e_1}{F} \tilde{\vartheta}^T x - \left(\frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} \tilde{B}^T \hat{B} + \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} B^T \tilde{B} - \tilde{B}^T \frac{e_1}{F} \right) (v - \hat{\vartheta}^T x) = \\
 &= -\frac{B^T e_1}{F} x^T \tilde{\vartheta} - \left(\frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} \hat{B}^T + \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} B^T - \frac{e_1^T}{F} \right) (v - \hat{\vartheta}^T x) \tilde{B} = \\
 (\text{П.5}) \quad &= -\frac{B^T e_1}{F} x^T h_{\vartheta} \Phi_{\vartheta} \tilde{x}_{\vartheta_0} - \\
 &- \left(\frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} \hat{B}^T + \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} B^T - \frac{e_1^T}{F} \right) (v - \hat{\vartheta}^T x) h_B \Phi_B \tilde{x}_{B_0} = \tilde{\theta}^T \omega,
 \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\theta} = [\tilde{x}_{\vartheta_0}^T \quad \tilde{x}_{B_0}^T]^T, \quad \omega = \begin{bmatrix} -\left(\frac{B^T e_1}{F} x^T h_{\vartheta} \Phi_{\vartheta} \right)^T \\ -\Phi_B^T h_B^T \left[\left(\frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} \hat{B}^T + \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} B^T - \frac{e_1^T}{F} \right) (v - \hat{\vartheta}^T x) \right]^T \end{bmatrix},$$

что завершает доказательство утверждения 1.

Доказательство утверждения 2. Введем в рассмотрение ошибку $\chi(t) = x(t) - \bar{x}(t)$. Дифференцируя $\chi(t)$ по времени, получим:

$$\begin{aligned}
 \dot{\chi}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = \\
 &= A(t)x(t) + B(t)u(t) - A_K \bar{x}(t) + A_K x(t) = \\
 (\text{П.6}) \quad &= A_K (x(t) - \bar{x}(t)) + A(t)x(t) + B(t)u(t) = \\
 &= A_K \chi(t) + A_0 x(t) + e_1 x^T(t) \vartheta(t) + B(t)u(t) = \\
 &= A_K \chi(t) + A_0 x(t) + e_1 x^T(t) h_{\vartheta} \Phi_{\vartheta}(t) x_{\vartheta_0} + h_B \Phi_B(t) u(t) x_{B_0}.
 \end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (П.6) с учетом домножения на e_1^T имеет вид:

$$\begin{aligned}
 e_1^T [\chi(t) - v(t)] &= e_1^T [x(t) - \bar{x}(t) - v(t)] = \\
 &= e_1^T e^{A_K(t-t_0^+)} x(t_0^+) + e_1^T \varphi(t) x_{\vartheta_0} + e_1^T \psi(t) x_{B_0} = \\
 (\text{П.7}) \quad &= e_1^T e^{A_K(t-t_0^+)} x_0 + e_1^T \varphi(t) x_{\vartheta_0} + e_1^T \psi(t) x_{B_0} = \\
 &= \begin{bmatrix} e_1^T e^{A_K(t-t_0^+)} & e_1^T \varphi(t) & e_1^T \psi(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{\vartheta_0} \\ x_{B_0} \end{bmatrix} := \Phi^T(t) \eta.
 \end{aligned}$$

Применив к регрессионному уравнению (П.7) процедуры нормализации (3.2.2), динамического расширения (3.2.3а), (3.2.3б) и смешивания (3.2.3с), пользуясь свойством $\text{adj} \{ \Delta(t) \} \Delta(t) = \det \{ \Delta(t) \} I_{(n_\vartheta+n_B+n) \times (n_\vartheta+n_B+n)}$, имеем измеримое регрессионное уравнение (3.2.4).

Доказательство выполнения для всех $t \geq t_e$ неравенства $\Omega_{UB}(t) \geq \Omega(t) \geq \Omega_{LB} > 0$ при выполнении условия $\Phi(t) \in \text{FE}$ было получено в утверждении 4 из [23].

Доказательство теоремы 1. Доказательство первой части теоремы совпадает с доказательством первой части теоремы из [19].

В целях доказательства второй части теоремы выполним собственное разложение матрицы $G(t)$:

$$\begin{aligned} \forall t \geq t_0^+ \quad F(t) &= x_{B_0}^T V(t) \Lambda(t) V^T(t) x_{B_0} = \\ &= x_{B_0}^T V_1(t) \Lambda_1(t) V_1^T(t) x_{B_0} = \Theta^T(t) \Lambda_1(t) \Theta(t), \\ V(t) &= [V_1(t) \quad V_2(t)], \quad \Lambda(t) = \begin{bmatrix} \Lambda_1(t) & 0_{r_G(t) \times \bar{r}_G(t)} \\ 0_{\bar{r}_G(t) \times r_G(t)} & 0_{\bar{r}_G(t)} \end{bmatrix}, \\ \Lambda_1(t) &= \text{diag} \{ \lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_{r_G(t)}(t) \}, \quad \lambda_{\min}(\Lambda_1(t)) > 0, \end{aligned}$$

где $V_1(t) \in \mathbb{R}^{n_B \times r_G(t)}$, $V_2(t) \in \mathbb{R}^{n_B \times \bar{r}_G(t)}$, $\Lambda(t) \in \mathbb{R}^{n_B \times n_B}$, $r_G(t) = \text{rank} \{ G(t) \}$, $\bar{r}_G(t) = n_B - r_G(t)$.

На основании введенного разложения запишем оценку снизу на функцию $\hat{F}(t)$:

$$\begin{aligned} \forall t \geq t_0^+ \quad \hat{F}(t) &= \hat{B}^T(t) \hat{B}(t) = \hat{x}_{B_0}^T(t) V_1(t) \Lambda_1(t) V_1^T(t) \hat{x}_{B_0}(t) = \\ \text{(П.8)} \quad &= \hat{\Theta}^T(t) \Lambda_1(t) \hat{\Theta}(t) \geq \lambda_{\min}(\Lambda_1(t)) \left\| \hat{\Theta}(t) \right\|^2 > 0. \end{aligned}$$

На основании выражения (П.8) для $\hat{F}(t) > 0$ необходимо и достаточно удовлетворить неравенство

$$\begin{aligned} \forall t \geq t_0^+ \quad \left\| \hat{\Theta}(t) \right\|^2 &= \sum_{i=1}^{r_G(t)} \left(\hat{\Theta}_i(t) \right)^2 \neq 0, \\ \text{(П.9)} \quad &\updownarrow \\ \forall i \in \overline{1, r_G(t)} \quad \left| \hat{\Theta}_i(t) \right| &\neq 0, \end{aligned}$$

где $\hat{\Theta}^i(t)$ — i -й элемент вектора $\hat{\Theta}(t) \in \mathbb{R}^{r_G(t)}$.

Получим для всех $t \geq t_0^+$ функциональное определение оценки $\hat{\Theta}_i(t)$. Для этого решим дифференциальное уравнение (3.2.5)

$$\text{(П.10)} \quad \forall t \geq t_0^+ \quad \tilde{x}_{B_0}(t) = \phi(t, t_0^+) \tilde{x}_{B_0}(t_0^+),$$

умножим (П.10) на $V_1^T(t)$ и прибавим $\Theta(t)$ к левой и правой частям произведения:

$$(П.11) \quad \begin{aligned} V_1^T \tilde{x}_{B_0}(t) + \Theta(t) &= \hat{\Theta}(t) = \phi(t, t_0^+) V_1^T(t) \tilde{x}_{B_0}(t_0^+) + \Theta(t), \\ &\quad \updownarrow \\ \hat{\Theta}_i(t) &= \phi(t, t_0^+) \tilde{\Theta}_i^0(t) + \Theta_i(t), \end{aligned}$$

где $\phi(t, t_0^+) = e^{-\beta_{\max} \int_{t_0^+}^t \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } t < t_e, \\ \gamma_0 \lambda_{\max}(\dot{\omega}(\tau) \dot{\omega}^T(\tau)) + \gamma_1 \text{ иначе} \end{array} \right. d\tau}$, $\tilde{\Theta}_i^0(t) = \hat{\Theta}_i^0(t) - \Theta_i(t)$, $\hat{\Theta}_i^0(t)$ — i -й элемент вектора $V_1^T \hat{x}_{B_0}(t_0^+)$.

Тогда (П.9) выполняется, если верно

$$(П.12) \quad \begin{aligned} \hat{\Theta}_i(t) = \phi(t, t_0^+) \tilde{\Theta}_i^0(t) + \Theta_i(t) \neq 0 &\Rightarrow \phi(t, t_0^+) \tilde{\Theta}_i^0(t) \neq -\Theta_i(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{\text{sgn}(\phi(t, t_0^+))}_{=1} \neq \text{sgn}\left(\frac{-\Theta_i(t)}{\tilde{\Theta}_i^0(t)}\right) &= \text{sgn}\left(\frac{-\Theta_i(t)}{\hat{\Theta}_i^0(t) - \Theta_i(t)}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{sgn}(\hat{\Theta}_i^0(t) - \Theta_i(t)) \neq -\text{sgn}(\Theta_i(t)) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \text{sgn}(\hat{\Theta}_i^0(t)) = \text{sgn}(\Theta_i(t)) \right\} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ |\hat{\Theta}_i^0(t)| > |\Theta_i(t)| \right\} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \text{sgn}(V_1^T(t) \hat{x}_{B_0}(t_0^+)) = \text{sgn}(V_1^T(t) x_{B_0}) \right\} & \\ \Rightarrow \left\{ |V_1^T(t) \hat{x}_{B_0}(t_0^+)| > |V_1^T(t) x_{B_0}| \right\}, & \end{aligned}$$

что подтверждает справедливость второй части теоремы.

Перейдем к доказательству третьей и четвертой частей теоремы. Согласно следствию из леммы Калмана–Якубовича–Попова для пары $(A_{ref}, I_{n \times n})$, любой постоянной матрицы $D > 0$ найдутся матрицы $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и постоянная $\mu > 0$, такие что существует решение системы уравнений

$$(П.13) \quad \begin{aligned} A_{ref}^T P + P A_{ref} &= -Q Q^T - \mu P, \quad P I_{n \times n} = Q K, \\ K^T K &= D + D^T, \end{aligned}$$

или эквивалентного в частном случае $D = 0,5k^2 I_{n \times n}$, $K = k^2 I_{n \times n}$, $k = 1$ уравнения Риккати

$$(П.14) \quad A_{ref}^T P + P A_{ref} + P P^T + \mu P = 0.$$

Для анализа устойчивости введем следующую квадратичную форму:

$$(II.15) \quad \begin{aligned} V &= \xi^T H \xi = \gamma_0 e_{ref}^T P e_{ref} + \frac{\beta_{\max}^2}{2} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}, \\ H &= \text{blockdiag} \left\{ \gamma_0 P, \quad \frac{\beta_{\max}^2}{2} I_{(n_\vartheta + n_B) \times (n_\vartheta + n_B)} \right\}, \\ \underbrace{\lambda_{\min}(H)}_{\lambda_m} \|\xi\|^2 &\leq V(\|\xi\|) \leq \underbrace{\lambda_{\max}(H)}_{\lambda_M} \|\xi\|^2, \end{aligned}$$

где матрица P соответствует решению системы (II.13) при $K = k^2 I_{n \times n}$, $D = 0,5k^2 I_{n \times n}$, $k = 1$ или эквивалентному уравнению Риккати (II.14).

Производная квадратичной формы (II.15) в силу уравнений (3.1.6) и (3.2.5) имеет вид

$$(II.16) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= \gamma_0 \left[e_{ref}^T (A_{ref}^T P + P A_{ref}) e_{ref} + 2\tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T P B \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} = \\ &= \gamma_0 \left[-\mu e_{ref}^T P e_{ref} - e_{ref}^T Q Q^T e_{ref} + 2\tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T P I_{n \times n} B \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} = \\ &= \gamma_0 \left[-\mu e_{ref}^T P e_{ref} - e_{ref}^T Q Q^T e_{ref} + 2\tilde{\theta}^T \omega B^T Q^T e_{ref} \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Дополнив выражение (II.16) до полного квадрата, получим:

$$(II.17) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= \gamma_0 \left[-\mu e_{ref}^T P e_{ref} - e_{ref}^T Q Q^T e_{ref} + 2e_{ref}^T Q B \omega^T \tilde{\theta} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm 2\tilde{\theta}^T \omega B^T B \omega^T \tilde{\theta} \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} = \\ &= \gamma_0 \left[-\mu e_{ref}^T P e_{ref} - \left(e_{ref}^T Q - B \omega^T \tilde{\theta} \right)^2 + \tilde{\theta}^T \omega B^T B \omega^T \tilde{\theta} \right] - \\ &\quad - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} \leq \\ &\leq \gamma_0 \left[-\mu e_{ref}^T P e_{ref} + \tilde{\theta}^T \omega F \omega^T \tilde{\theta} \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим две ситуации $t < t_e$ и $t \geq t_e$. В первой ситуации, в наиболее консервативном случае, согласно утверждению 1 верно $\Omega(t) = 0$ и $\|\tilde{\theta}(t)\| = \|\tilde{\theta}(t_0^+)\|$.

Тогда для любого $t < t_e$ можем переписать уравнение (II.17) в виде

$$(II.18) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu \gamma_0 e_{ref}^T P e_{ref} + \gamma_0 \tilde{\theta}^T(t_0^+) \omega F \omega^T \tilde{\theta}(t_0^+) \pm \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \leq \\ &\leq -\mu \gamma_0 e_{ref}^T P e_{ref} - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} + \gamma_0 \tilde{\theta}^T(t_0^+) \omega F \omega^T \tilde{\theta}(t_0^+) + \\ &\quad + \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T(t_0^+) \tilde{\theta}(t_0^+). \end{aligned}$$

Введем понятие максимального собственного числа матрицы $\omega(t)B^T(t)B(t)\omega^T(t)$ на интервале времени $[0; t_e]$:

$$(II.19) \quad \delta = \sup_{\forall t < t_e} \max \lambda_{\max}(\omega(t)B^T(t)B(t)\omega^T(t)).$$

Функция $F(t)$ ограничена по допущению 2, скорость изменения регрессора $\omega(t)$ при выполнении допущения 1 не превосходит экспоненциальной, а поэтому верно $\delta \in L_\infty$.

С учетом (П.19) уравнение (П.18) для $t < t_e$ может быть переписано в виде

$$(П.20) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu\gamma_0\lambda_{\min}(P)\|e_{ref}\|^2 - \beta_{\max}^2\|\tilde{\theta}\|^2 + (\gamma_0\delta + \beta_{\max}^2)\|\tilde{\theta}(t_0^+)\|^2 \leq \\ &\leq -\eta_1 V + r_B, \end{aligned}$$

где $\eta_1 = \min\left\{\frac{\mu\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}; 2\right\}$, $r_B = (\gamma_0\delta + \beta_{\max}^2)\|\tilde{\theta}(t_0^+)\|^2$.

Решив дифференциальное уравнение (П.20), имеем:

$$(П.21) \quad \forall t < t_e: V(t) \leq e^{-\eta_1(t-t_0^+)}V(t_0^+) + \frac{r_B}{\eta_1}.$$

Учитывая $\lambda_m\|\xi(t)\|^2 \leq V(t)$ и $V(t_0^+) \leq \lambda_M\|\xi(t_0^+)\|^2$, из (П.21) имеем оценку для всех $t < t_e$ на вектор обобщенной ошибки слежения:

$$(П.22) \quad \|\xi(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}e^{-\eta_1(t-t_0^+)}\|\xi(t_0^+)\|^2 + \frac{r_B}{\lambda_m\eta_1}} \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}\|\xi(t_0^+)\|^2 + \frac{r_B}{\lambda_m\eta_1}}.$$

Откуда следует ограниченность $\xi(t)$ для всех $t < t_e$.

Для второй ситуации, учитывая справедливость по утверждению 1 для всех $t \geq t_e$ неравенства $0 < \Omega_{LB} \leq \Omega(t) \leq \Omega_{UB}$ и определение коэффициента усиления γ , из (П.18) для $t \geq t_e$ получим:

$$(П.23) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu\gamma_0e_{ref}^T P e_{ref} + \gamma_0\tilde{\theta}^T \omega F \omega^T \tilde{\theta} - \\ &- \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \frac{(\gamma_0\lambda_{\max}(\hat{\omega}\hat{\omega}^T) + \gamma_1)\Omega^2}{\Omega^2} \tilde{\theta} = \\ &= -\mu\gamma_0e_{ref}^T P e_{ref} + \gamma_0\tilde{\theta}^T \omega F \omega^T \tilde{\theta} - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T [\gamma_0\lambda_{\max}(\hat{\omega}\hat{\omega}^T) + \gamma_1] \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Определим регрессор $\hat{\omega}(t)$ следующим образом:

$$\hat{\omega}(t) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}^2}x^T h_\vartheta \Phi_\vartheta\right)^T \\ -\Phi_B^T h_B^T \left[\left(\frac{\hat{B}^T e_1}{\beta_{\min}^2 \hat{F} e_1^T e_1} \hat{B}^T + \frac{\hat{B}^T e_1}{\beta_{\min}^2 \hat{F} e_1^T e_1} \beta_{\max} e_1^T - \frac{e_1^T}{\beta_{\min}^2 e_1^T e_1} \right) (v - \hat{\vartheta}^T x) \right]^T \end{bmatrix}.$$

Учтем справедливость для любого $\omega(t)$ неравенства

$$(П.24) \quad \begin{aligned} &\gamma_0\tilde{\theta}^T \omega F \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \gamma_0 \beta_{\max}^2 \lambda_{\max}(\hat{\omega}\hat{\omega}^T) \tilde{\theta} = \\ &= \tilde{\theta}^T \underbrace{(\gamma_0 \omega F \omega^T - \gamma_0 \beta_{\max}^2 \lambda_{\max}(\hat{\omega}\hat{\omega}^T) I_{(n_\vartheta+n_B) \times (n_\vartheta+n_B)})}_{\leq -\kappa I_{(n_\vartheta+n_B) \times (n_\vartheta+n_B)}} \tilde{\theta} \leq 0 \end{aligned}$$

и перепишем (П.23) в виде

$$(П.25) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\gamma_0 \mu e_{ref}^T P e_{ref} - \tilde{\theta}^T (\kappa + \beta_{\max}^2 \gamma_1) \tilde{\theta} \leq \\ &\leq -\mu \gamma_0 \lambda_{\min}(P) \|e_{ref}\|^2 - (\kappa + \beta_{\max}^2 \gamma_1) \|\tilde{\theta}\|^2 \leq -\eta_2 V, \end{aligned}$$

где $\eta_2 = \min \left\{ \frac{\mu \lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}; 2 \left(\frac{\kappa}{\beta_{\max}^2} + \gamma_1 \right) \right\}$.

Решив неравенство (П.25), для $t \geq t_e$ имеем $V(t) \leq e^{-\eta_2(t-t_e)} V(t_e)$.

Учитывая $\lambda_m \|\xi(t)\|^2 \leq V(t)$, $V(t_e) \leq \lambda_M \|\xi(t_e)\|^2$ и выражение (П.22), получим для $t \geq t_e$ оценку на вектор обобщенной ошибки слежения:

$$(П.26) \quad \|\xi(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m} e^{-\eta_2(t-t_e)} \|\xi(t_e)\|^2} \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m} \left(\frac{\lambda_M}{\lambda_m} \|\xi(t_0^+)\|^2 + \frac{r_B}{\lambda_m \eta_1} \right)}.$$

Откуда вместе с (П.22) следует $\xi(t) \in L_\infty$ и экспоненциальная сходимость для всех $t \geq t_e$ ошибки $\xi(t)$ к нулю со скоростью, прямо пропорциональной параметрам γ_0 , γ_1 , что и требовалось доказать в третьем и четвертом пунктах теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. N.Y.: Dover, 2013.
2. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Courier Corporation, 2012.
3. *Chen K., Astolfi A.* Adaptive control for systems with time-varying parameters // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 66. No. 5. P. 1986–2001.
4. *Chen K., Astolfi A.* Identification-based Adaptive Control for Systems with Time-varying Parameters // 2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2021. P. 1083–1088.
5. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V.* Nonlinear and Adaptive Control Design. New York, USA: Wiley, 1995.
6. *Patil O.S., Sun R., Bhasin S., Dixon W.E.* Adaptive Control of Time-Varying Parameter Systems with Asymptotic Tracking // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. Vol. 67. No. 9. P. 1–7.
7. *Na J., Xing Y., Costa-Castello R.* Adaptive estimation of time-varying parameters with application to roto-magnet plant // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. 2018. Vol. 51. No. 2. P. 731–741.
8. *Hu Y., Wu J., Zeng C.* Robust adaptive identification of linear time-varying systems under relaxed excitation conditions // IEEE Access. 2020. Vol. 8. No. 1. P. 8268–8274.
9. *Goel R., Roy S.B.* Composite Adaptive Control for Time-varying Systems with Dual Adaptation // arXiv preprint arXiv:2206.01700. 2022. P. 1–6.
10. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Robust Time-Varying Parameters Estimation Based on I-DREM Procedure // IFAC-PapersOnLine. 2022. Vol. 55. No. 12. P. 91–96.

11. *Герасимов Д.Н., Лызлова М.В., Никифоров В.О.* Простые алгоритмы адаптивного и робастного управления классом линейных объектов с переменными параметрами // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2015. Т. 58. № 5. С. 351–361.
12. *Мирошник И.В., Никифоров В.О.* Алгоритм адаптации с астатизмом второго порядка // АиТ. 1995. № 7. С. 99–107.
13. *Цыкунов А.М.* Робастное управление многомерными нестационарными линейными объектами // АиТ. 2009. № 2. С. 109–121.
14. *Цыкунов А.М.* Алгоритм робастного управления нестационарным линейным объектом с компенсацией возмущения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 33–40.
15. *Фуртат И.Б., Цыкунов А.М.* Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // Проблемы управления. 2008. № 5. С. 2–7.
16. *Nikiforov V.O., Gerasimov D.N.* Adaptive Regulation: Reference Tracking and Disturbance Rejection. Springer-Verlag, 2022.
17. *Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Isidori A.* An adaptive observer for uncertain linear time-varying systems with unknown additive perturbations // Automatica. 2023. Vol. 147. P. 110677.
18. *Bobtsov A., Ortega R., Yi B., Nikolaev N.* Adaptive state estimation of state-affine systems with unknown time-varying parameters // Int. J. Control. 2022. Vol. 95. № 9. С. 2460–2472.
19. *Глущенко А.И., Ласточкин К.А., Петров В.А.* Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть I. Объекты с постоянными параметрами // АиТ. 2022. № 4. С. 62–99.
Glushchenko A., Lastochkin K., Petrov V. Exponentially Stable Adaptive Control. Part I. Time-Invariant Plants // Autom. Remote Control. 2022. Vol. 83. No. 4. P. 548–578.
20. *Leiva H., Sigmund S.* A necessary algebraic condition for controllability and observability of linear time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48. No. 12. P. 2229–2232.
21. *Nussbaum R.D.* Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control // Syst. Control Lett. 1983. Vol. 3. No. 5. P. 243–246.
22. *Глущенко А.И., Ласточкин К.А.* Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть II. Объекты с кусочно-постоянными параметрами // АиТ. 2023. № 3. С. 65–105.
Glushchenko A., Lastochkin K. Exponentially Stable Adaptive Control. Part II. Switched Systems // Autom. Remote Control. 2023. Vol. 84. No. 3. P. 285–316.
23. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Unknown Piecewise Constant Parameters Identification with Exponential Rate of Convergence // Int. J. Adapt. Control Signal Proc. 2023. Vol. 37. No. 1. P. 315–346.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.

Поступила в редакцию 20.10.2022

После доработки 07.03.2023

Принята к публикации 31.05.2023

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

- Жирабок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., Шумский А.Е., Ким Чхун Ир.** Интервальные наблюдатели для непрерывных систем с параметрическими неопределенностями 3
- Щеглова А.А.** Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений с параметрической неопределенностью 17

Нелинейные системы

- Куликов Д.А.** Бифуркации паттернов в нелокальном уравнении эрозии 36
- Фуртат И.Б.** Плотностные системы. Анализ и управление 55

Стохастические системы

- Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б.** Анализ вероятности связности телекоммуникационной сети на основе матрицы независимых событий 77
- Степанов С.Н., Степанов М.С.** Приближенный метод оценки характеристик совместного обслуживания трафика реального времени и эластичного трафика данных в мультисервисных узлах доступа 93

Робастное, адаптивное и сетевое управление

- Глуценко А.И., Ласточкин К.А.** Адаптивный наблюдатель состояний и возмущений линейных систем с перепараметризацией 115
- Глуценко А.И., Ласточкин К.А.** Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Ч. III 147

C O N T E N T S

Linear Systems

- Zhirabok A., Zuev A., Filaretov V., Shumsky A., Kim Chung Il.** Interval Observers for Continuous-Time Systems with Parametric Uncertainties 3
- Shcheglova A.A.** Robust Stability of Differential-Algebraic Equations under Parametric Uncertainty 17

Nonlinear Systems

- Kulikov D.A.** Pattern Bifurcations in the Nonlocal Erosion Equation 36
- Furtat I.B.** Density Systems: Analysis and Control 55

Stochastic Systems

- Batenkov A.A.**, **Batenkov K.A.**, **Fokin A.B.** Telecommunication Network Connectivity Probability Analysis Based on Independent Events Matrix 77
- Stepanov S.N., Stepanov M.S.** Approximate Method for Evaluation of Characteristics of Joint Service of Real-Time Traffic and Elastic Data Traffic in Multi-Service Access Nodes 93

Robust, Adaptive and Network Control

- Glushchenko A.I., Lastochkin K.A.** Adaptive Observer of State and Disturbances for Linear Overparameterized Systems 115
- Glushchenko A.I., Lastochkin K.A.** Exponentially Stable Adaptive Control. Part III. Time-Varying Plants 147