

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2023 г. А.А. БЕЛОВ, д-р физ.-мат. наук (a.a.belov@inbox.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА РОБАСТНОГО КАЧЕСТВА ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛИТОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ОТНОШЕНИЮ К СЛУЧАЙНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ¹

Рассматриваются дискретные линейные политопические системы, находящиеся под влиянием случайных коррелированных стационарных возмущений. Предложены новые численные методы оценки анизотропийной нормы политопической системы с помощью линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: политопические неопределенности, ЛМН, средняя анизотропия, случайные процессы, анализ.

DOI: 10.31857/S0005231023100124, EDN: YCLFCQ

1. Введение

Математические модели объектов управления строятся на основе известных физических законов, а также измеряемых характеристик объекта управления. Технологические допуски и ошибки измерения в объекте управления могут привести к несоответствию математической модели и реального объекта управления. В некоторых случаях это несоответствие является важным и может привести как к потере качества процессов в системе управления, так и к потере устойчивости замкнутой системы. Таким образом, возникают задачи анализа и управления системами с учетом неточных знаний о параметрах их математических моделей, называемые задачами робастного анализа и управления.

В зависимости от исходных предположений на вид неопределенностей системы управления в литературе существуют различные подходы к анализу ее робастных свойств. Одной из популярных форм описания неопределенностей в линейных системах является политопическая неопределенность. Эта неопределенность характеризуется тем, что неизвестные параметры системы лежат на заданном симплексе. Если система с политопической неопределенностью является стационарной, то в литературе ее называют политопической системой. Для дискретных линейных систем известно множество методов проверки робастной устойчивости системы [1–4]. Работы [1–3] посвящены исследованию устойчивости систем с политопическими стационарными и нестационарными неопределенностями с использованием параметрических

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00306, <https://rscf.ru/project/23-21-00306/>).

функций Ляпунова. В [4] приводятся результаты робастного анализа политопических систем с использованием аппарата линейных матричных неравенств. Результаты приведены в форме непараметрических матричных неравенств.

Наряду с вопросами исследования робастной устойчивости систем с неопределенностями одним из важных аспектов анализа систем управления является способность подавлять внешние возмущения. Так, в литературе известны методы анализа качества подавления внешних возмущений в терминах \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -норм [5]. Если предположить, что на вход системы поступают коррелированные случайные возмущения, то для анализа качества его подавления системой можно применить анизотропийный подход [6–8]. Особенностью анизотропийного подхода является исследование качества работы системы при воздействии на нее коррелированных стационарных случайных возмущений с известным уровнем средней анизотропии. Методы анизотропийного анализа и синтеза в политопических системах изучались в [9–11]. В [9] была представлена параметрическая версия анизотропийной частотной теоремы, в [10] был получен один из результатов непараметрического численного анализа анизотропийного качества, а [11] посвящена решению задачи синтеза анизотропийного регулятора по состоянию с заданным расположением полюсов замкнутой системы.

В настоящей работе предложены численные методы решения задачи анизотропийного анализа для политопических систем на основе линейных матричных неравенств. Все эти методы получены на основе использования параметрической анизотропийной частотной теоремы. Проводится анализ степени консерватизма полученных условий, а также даны оценки на их вычислительную сложность.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему с реализацией в пространстве состояний в виде

$$(1) \quad x(k+1) = A(\Theta)x(k) + B_w(\Theta)w(k),$$

$$(2) \quad y(k) = C(\Theta)x(k) + D_w(\Theta)w(k),$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее случайное возмущение с нулевым средним и ограниченной средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$ ($a \geq 0$), $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — выход системы.

Матрицы $A(\Theta)$, $B_w(\Theta)$, $C(\Theta)$, $D_w(\Theta)$ определяются из выражений

$$(3) \quad \begin{aligned} A(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i A_i, & B_w(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i B_{wi}, \\ C(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i C_i, & D_w(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i D_{wi}, \end{aligned}$$

где матрицы A_i , B_{wi} , C_i , D_{wi} являются известными постоянными матрицами соответствующих размерностей, а вектор неопределенных параметров Θ

удовлетворяет соотношениям

$$(4) \quad \sum_{i=1}^r \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad \theta_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = \overline{1, r}.$$

Средняя анизотропия характеризует меру отличия гауссовской случайной последовательности от гауссовского белого шума с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей (будем называть его стандартным) в терминах относительной энтропии и может быть вычислена по формуле

$$(5) \quad \overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \frac{m S_w(\omega)}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Trace } S_w(\lambda) d\lambda} d\omega,$$

где $S_w(\omega)$ — спектральная плотность последовательности $W = \{w(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Таким образом, параметр $a \geq 0$ определяет множество всех гауссовских сигналов, чья мера отличия от стандартного гауссовского белого шума, определяемого выражением (5), не превышает величины a . Следует отметить, что функционал средней анизотропии является неотрицательным и обращается в ноль, если W является стандартным гауссовским белым шумом [8].

Обозначим множество всех параметров Θ , удовлетворяющих (3) и (4), через Ω и рассмотрим отображение $Y = F_{\Theta} W$, определяемое выражениями (1)–(2).

Определение 1. Анизотропийной нормой политопической системы (1)–(4) будем называть норму оператора F_{Θ} , определяемую выражением

$$(6) \quad \|F_{\Theta}\|_a = \sup_{\Theta \in \Omega} \sup_{W: A(W) \leq a} \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}},$$

$$\|W\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \mathbf{E}|w(k)|^2} - \text{мощностная норма сигнала } W.$$

Одним из наиболее важных свойств анизотропийной нормы является то, что она лежит между масштабированной \mathcal{H}_2 -нормой и \mathcal{H}_{∞} -нормой, т.е. [8]

$$\frac{\|F_{\Theta}\|_2^2}{m} \leq \|F_{\Theta}\|_a^2 \leq \|F_{\Theta}\|_{\infty}^2.$$

Это значит, что варьируя величину средней анизотропии a от 0 до ∞ , можно сужать или расширять множество случайных сигналов, подбирая тем самым наиболее благоприятную полосу пропускания и запасы устойчивости системы в диапазоне между \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_{∞} -нормами.

В задаче робастного анизотропийного анализа политопических систем необходимо получить условия для проверки робастной устойчивости и ограниченности анизотропийной нормы разомкнутой системы (1)–(2) для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ и заданного числа $\gamma > 0$. То есть задачу анализа можно сформулировать следующим образом.

Задача 1. Для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ входного случайного возмущения $w(k)$ и заданного числа $\gamma > 0$ проверить:

- 1) *является ли система робастно устойчивой;*
- 2) *выполняется ли условие*

$$\|F_{\Theta}\|_a < \gamma.$$

Ниже приведем известные результаты, которые необходимы для дальнейшего изложения. Рассмотрим систему с точно заданными параметрами, в которой размерности всех векторов и матриц совпадают с размерностями в системе (1)–(2):

$$(7) \quad x(k+1) = Ax(k) + B_w w(k),$$

$$(8) \quad y(k) = Cx(k) + D_w w(k).$$

Приведем формулировку анизотропийной частотной теоремы в терминах ЛМН [13].

Лемма 1. Система (7)–(8) является устойчивой и ее анизотропийная норма для заданного уровня средней анизотропии входного случайного сигнала $a \geq 0$ ограничена сверху числом $\gamma > 0$, если найдутся такие матрицы $X > 0$, $Y > 0$, $\Phi > 0$ и число $\mu > \gamma^2$, для которых справедливы соотношения:

$$(9) \quad \mu - (e^{-2a} \det \Phi)^{1/q} < \gamma^2,$$

$$(10) \quad \begin{bmatrix} \Phi - \mu I_m & \star & \star \\ B_w & -Y & \star \\ D_w & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(11) \quad \begin{bmatrix} -X & \star & \star & \star \\ 0 & -\mu I_m & \star & \star \\ A & B_w & -Y & \star \\ C & D_w & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(12) \quad XY = I_n.$$

3. Решение задачи

3.1. Параметрическая анизотропийная частотная теорема

Сформулируем параметрические условия для анизотропийного анализа политопической системы (1)–(2), на основе которых будут получены основные результаты данной статьи.

Теорема 1. Система (1)–(2) является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма не превышает заданного числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$, если существуют такие матрицы

$P(\Theta) > 0$, $\Psi(\Theta) > 0$, невырожденные матрицы $G_1(\Theta)$, $G_2(\Theta)$ и число $\eta > \gamma^2$, для которых справедливы матричные неравенства:

$$(13) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi(\Theta))^{1/m} < \gamma^2,$$

$$(14) \quad \begin{bmatrix} \Psi(\Theta) - \eta I_m & \star & \star \\ G_1(\Theta)B_w(\Theta) & L_1(\Theta) & \star \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(15) \quad \begin{bmatrix} -P(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_2(\Theta)A(\Theta) & G_2(\Theta)B_w(\Theta) & L_2(\Theta) & \star \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

где $L_1(\Theta) = -G_1(\Theta) - G_1^T(\Theta) + P(\Theta)$ и $L_2(\Theta) = -G_2(\Theta) - G_2^T(\Theta) + P(\Theta)$, для любого значения $\Theta \in \Omega$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Условия теоремы 1 зависят явно от параметра Θ . Существование каких-либо параметрических матриц $\Psi(\Theta)$, $P(\Theta)$, $G_1(\Theta)$ и $G_2(\Theta)$, которые удовлетворяют всем условиям теоремы 1, позволит проверить робастную устойчивость системы, а также установить факт ограниченности ее анизотропийной нормы числом γ для известного уровня средней анизотропии $a > 0$ входного возмущения W . В настоящее время не существует какого-либо формального метода для определения точного вида матрицы $P(\Theta)$ как функции от вектора параметров Θ . Такая функция $P(\Theta)$ в научной литературе носит название параметрической матрицы Ляпунова [1, 2, 4]. Подобное утверждение справедливо и для остальных параметрических матриц. К сожалению, такая параметрическая зависимость может существенным образом усложнить методику анализа исходной системы. Уменьшить вычислительную сложность алгоритма можно, вводя дополнительные ограничения, например используя различные аппроксимации для матриц $\Psi(\Theta)$, $P(\Theta)$, $G_1(\Theta)$ и $G_2(\Theta)$. Такой подход, с одной стороны, позволяет избавиться от явного вхождения вектора параметров Θ в матричные неравенства, но, с другой стороны, вносит некоторый консерватизм. Ниже представим несколько методов непараметрического анизотропийного анализа политописической системы (1)–(2) в зависимости от различных аппроксимаций.

3.2. Непараметрические вариации частотной теоремы

Пусть $\Psi(\Theta) = \Psi$, $G_1(\Theta) = G_1$, $G_2(\Theta) = G_2$, $P(\Theta) = P$. Тогда в выражениях (14)–(15) параметры θ_i можно явно вынести за скобки. Откуда напрямую следует следующий результат.

Теорема 2. Система (1)–(2) является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма не превышает заданного числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$, если существуют такие матрицы

$P > 0$, $\Psi > 0$, невырожденные матрицы G_1 , G_2 и число $\eta > \gamma^2$, для которых справедливы матричные неравенства:

$$(16) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$(17) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_1 B_{wi} & L_1 & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(18) \quad \begin{bmatrix} -P & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_2 A_i & G_2 B_{wi} & L_2 & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

где $L_1 = -G_1 - G_1^T + P$, $L_2 = -G_2 - G_2^T + P$ и $i = \overline{1, r}$.

Доказательство теоремы является тривиальным и не приводится в статье. Теорема 2 представляет собой наиболее простое и консервативное решение задачи 1.

Воспользуемся линейной аппроксимацией для параметрической матрицы Ляпунова и некоторых вспомогательных переменных. Справедлива следующая

Теорема 3. Система (1)–(2) является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма строго меньше числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ и всех возможных неопределенностей, удовлетворяющих (3)–(4), если существуют такие матрицы $P_i > 0$, $\Psi > 0$, невырожденные матрицы G_{1i} , G_{2i} и число $\eta > \gamma^2$, при которых справедливы следующие матричные неравенства:

$$(19) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$(20) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1i} B_{wi} & -G_{1i} - G_{1i}^T + P_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(21) \quad \begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i} A_i & G_{2i} B_{wi} & -G_{2i} - G_{2i}^T + P_i & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(22) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1i} B_{wj} & -G_{1i} - G_{1i}^T + P_i & \star \\ D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1j} B_{wi} & -G_{1j} - G_{1j}^T + P_j & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(23) \quad \begin{aligned} & \begin{bmatrix} -P_i & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ G_{2i}A_j & G_{2i}B_{wj} & -G_{2i} - G_{2i}^T + P_i & * \\ C_j & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} -P_j & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ G_{2j}A_i & G_{2j}B_{wi} & -G_{2j} - G_{2j}^T + P_j & * \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \end{aligned}$$

где $i, j = \overline{1, r}$, $i < j$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Полученные в теореме 3 условия не зависят от вектора параметров Θ и позволяют оценить анизотропийную норму политопической системы с помощью проверки выполнения $2r + r(r - 1) + 1$ неравенства. Число неравенств, а также переменных можно снизить, повысив консерватизм оценки с учетом того факта, что $\Phi(\Theta) = P^{-1}(\Theta)$. Сформулируем теорему.

Теорема 4. Система (1)–(2) является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма строго меньше числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ и всех возможных неопределенностей, удовлетворяющих (3)–(4), если существуют такие матрицы $\Phi_i > 0$, $\Psi > 0$, невырожденные матрицы G_i и число $\eta > \gamma^2$, при которых справедливы следующие матричные неравенства:

$$(24) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$(25) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & * & * \\ B_{wi} & -\Phi_i & * \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(26) \quad \begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + \Phi_i & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ A_i G_i & B_{wi} & -\Phi_i & * \\ C_i G_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(27) \quad \begin{aligned} & \begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + \Phi_i & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ A_j G_i & B_{wj} & -\Phi_i & * \\ C_j G_i & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} -G_j - G_j^T + \Phi_j & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ A_i G_j & B_{wi} & -\Phi_j & * \\ C_i G_j & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \end{aligned}$$

где $i, j = \overline{1, r}$, $i < j$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Таблица 1. Оценка вычислительной сложности методов анализа

Метод	Число неравенств	Число переменных	Число неизвестных параметров
Теорема 2	$2r + 2$	6	$1 + \frac{m^2 + m}{2} + \frac{5n^2 + n}{2}$
Теорема 3	$2r + r(r - 1) + 2$	$2 + 3r$	$1 + \frac{m^2 + m}{2} + r \frac{5n^2 + n}{2}$
Теорема 4	$2r + \frac{r(r - 1)}{2} + 2$	$2 + 2r$	$1 + \frac{m^2 + m}{2} + r \frac{3n^2 + n}{2}$

Полученные в теореме 4 условия позволяют оценить анизотропийную норму политопической системы, проверив выполнение $2r + \frac{r(r-1)}{2} + 2$ неравенств. Данные о вычислительной сложности использования каждой из сформулированных выше теорем приводятся в табл. 1.

Для оценки анизотропийной нормы системы (1)–(2) можно решить задачу минимизации переменной γ на множестве выпуклых ограничений, задаваемых рассмотренными выше теоремами.

К сожалению, аналитические методы не позволяют оценить степень консерватизма полученных в теоремах 3 и 4. Оценить степень консерватизма условий можно только для конкретных примеров численными методами. Эти методы можно разработать на основе теоремы 1. Рассмотрим сеточный метод анализа политопических систем с использованием теоремы 1. Алгоритм может быть представлен в следующем виде.

Алгоритм 1 (Сеточный метод)

Шаг 1. Задаем уровень средней анизотропии $a \geq 0$ и шаг сетки h . Задаем множество Ω , лежащее внутри единичного куба из \mathbb{R}^{r-1} и состоящее из множества точек — узлов сетки. Фиксируем параметр Θ , назначая первые $(r - 1)$ компонент координатами точки из множества Ω , а последнюю вычисляем по формуле

$$\theta_r = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i = 1.$$

Шаг 2. Задаем $k = 1$.

Шаг 3. Пока $k \leq N$, выбираем элемент множества Ω_k , фиксируем матрицы системы $A_k = \sum_{i=1}^r \theta_i A_i$, $B_k = \sum_{i=1}^r \theta_i B_{wi}$, $C_k = \sum_{i=1}^r \theta_i C_{zi}$, $D_k = \sum_{i=1}^r \theta_i D_{zwi}$.

Шаг 4. Для фиксированных значений A_k, B_k, C_k, D_k решается оптимизационная задача:

$$\gamma_k^2 = \min \gamma^2$$

на множестве переменных $\{\eta, \gamma^2, P, \Psi, G_1, G_2\}$, удовлетворяющих неравенствам (9)–(11).

Шаг 5. Если система матричных неравенств неразрешима на шаге 4, то система является неустойчивой при данных значениях параметров, а алгоритм останавливается. Если решение найдено, то вычисляется значение $\gamma_* = \max\{\gamma_k, \gamma_{k-1}\}$, Если $k < N$, то $k = k + 1$, возвращаемся на шаг 4. Если $k = N$, то переходим на шаг 6.

Шаг 6. Верхняя граница анизотропийной нормы определяется как γ_* .

К одному из недостатков такого метода следует отнести то, что достаточно крупный шаг сетки не позволит с удовлетворительной точностью оценить анизотропийную норму и дать ответ об устойчивости системы. Поэтому рекомендуется сначала проверить систему на робастную устойчивость одним из существующих методов.

4. Численный пример

В следующем примере оценим степень консерватизма методов оценки анизотропийной нормы политопической системы, сформулированных в теоремах 2–4.

Пример 1. Пусть система задается следующими матрицами:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,7 \\ 0,5 & -0,3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,5 & -0,7 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 \\ -0,5 & -0,5 \end{bmatrix},$$

$$B_{w1} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}, \quad B_{w2} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_{w3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = [1 \ 0], \quad C_3 = [1 \ 0,3], \quad D_{w1} = 0, \quad D_{w2} = 0,1, \quad D_{w3} = -0,1.$$

Заметим, что данная система является устойчивой при всех возможных значениях параметров Θ . Для оценки степени консерватизма методов, предложенных в теоремах 2–4, воспользуемся сеточным методом анализа системы с шагом сетки $h = 0,01$. На рис. 1–3 представлены результаты минимизации величины γ в различных узлах сетки. При вычислении нормы использовалась теорема 1 для выбранных числовых значений вектора параметров Θ в различных узлах сетки.

Как видно из графиков, двойной супремум (6) для различных уровней средней анизотропии a достигается в точках Θ , не совпадающих друг с другом. Изменение нормы происходит плавно и без скачков. Проверка условий устойчивости и попытка оценить анизотропийную норму с помощью теоремы 2 приводит к неразрешимой задаче, поэтому численные результаты приведены только для теорем 3 и 4. Результаты численных экспериментов по вычислению анизотропийной нормы приведены в табл. 2.

Условия теоремы 2 являются самыми консервативными, что привело к неразрешимой задаче. Теоремы 3 и 4 позволяют численно оценить анизотропийную норму заданной системы с помощью линейных матричных неравенств. Как видно из табл. 2, условия теоремы 4 дают более консервативные результаты. Несмотря на это, асимптотика анизотропийной нормы для приведенных численно реализуемых методов сохраняется при существенно меньшей вычислительной сложности. Таким образом, данные методы можно использовать для оценки анизотропийного качества политопических систем.

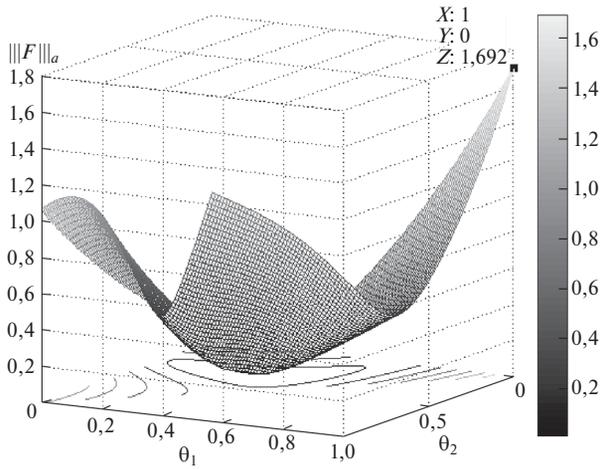


Рис. 1. Зависимость минимального значения γ от параметров Θ при $a = 0$.

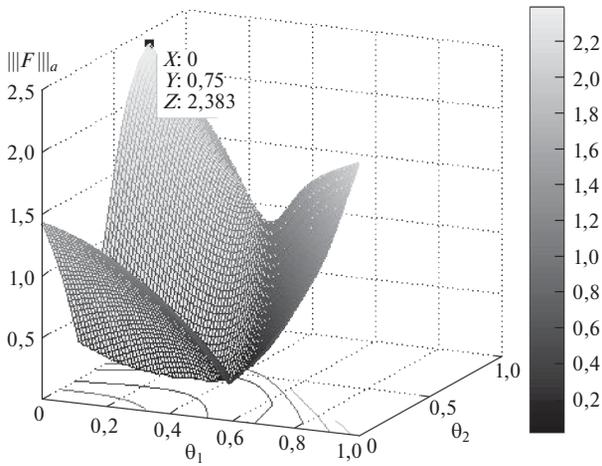


Рис. 2. Зависимость минимального значения γ от параметров Θ при $a = 0,5$.

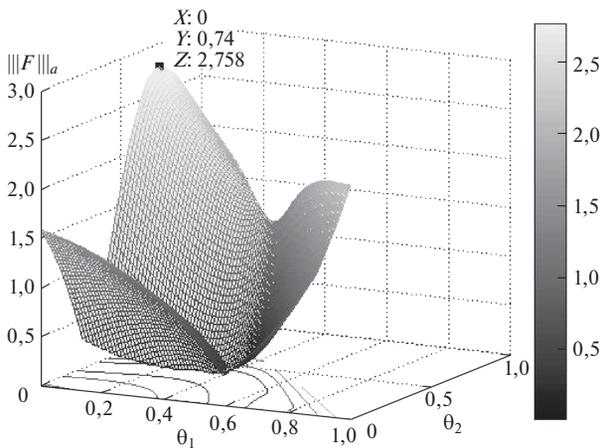


Рис. 3. Зависимость минимального значения γ от параметров Θ при $a = 1,5$.

Таблица 2. Результаты вычисления анизотропийной нормы в примере 1

Средняя анизотропия a	0	0,1	0,5	1	1,5	100
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 1	1,6921	1,9258	2,3825	2,6616	2,7564	2,8100
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 3	4,6495	6,2913	7,9585	8,6163	8,8423	8,9707
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 4	6,7304	8,1552	9,0582	9,3701	9,4742	9,5327

Таблица 3. Результаты вычисления анизотропийной нормы в примере 2

Средняя анизотропия a	0	0,1	0,3	0,7	1,5	10
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 2	0,0771	1,1699	1,9277	2,6854	3,3354	3,7838
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 3	0,0728	0,3581	0,5827	0,8088	1,0032	1,1375
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 4	0,0727	0,3579	0,5820	0,8083	1,0028	1,1366

Пример 2. Рассмотрим теперь математическую модель затухающих колебаний пружинного маятника:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t), \\ y(t) &= x_1(t) + D_w w(t). \end{aligned}$$

Здесь

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix},$$

где ω — собственная частота системы, ξ — коэффициент затухания, $x_1(t)$ — координата центра масс маятника, а $x_2(t)$ — скорость центра масс.

Возмущение $w(t) \in \mathbb{R}^2$ состоит из внешнего возмущающего воздействия, действующего на координату $x_1(t)$, и шума измерения. Тогда

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_w = [0 \ 0, 1].$$

Пусть также параметры системы имеют вид $\xi = 0,1$, $\omega \in [4,5; 5,2]$.

Исходная система непрерывного времени дискретизируется с помощью экстраполятора нулевого порядка как

$$(28) \quad A^d = e^{A^f h}, \quad B_w^d = \int_0^h e^{A^f(h-\tau)} B^w d\tau,$$

где h — шаг дискретизации.

Исходная непрерывная модель была дискретизована с шагом $h = 10^{-3}$ с. В результате были получены следующие параметры:

$$\begin{aligned} A_1^d &= \begin{bmatrix} 1 & 0,0010 \\ -0,0202 & 0,9991 \end{bmatrix}, \quad A_2^d = \begin{bmatrix} 1 & 0,0010 \\ -0,0270 & 0,9989 \end{bmatrix}, \\ B_{w1}^d &= 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,0101 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{w2}^d = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,0135 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 = C_2 &= [1 \ 0], \quad D_{w1} = D_{w2} = [0 \ 0,1]. \end{aligned}$$

Отметим, что исходная система является устойчивой. Результаты вычисления анизотропийной нормы для пружинного маятника сведены в табл. 3.

5. Заключение

В работе получены условия ограниченности a -анизотропийной нормы линейной политопической системы в терминах линейных матричных неравенств. Были рассмотрены различные варианты непараметрической оценки анизотропийной нормы, а также проведен анализ точности оценивания и вычислительной сложности данных методов. Условия являются выпуклыми и сформулированы в форме матричных неравенств, количество которых зависит от числа вершин политопа.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы состоит из двух частей. В первой части будут получены условия, при которых политопическая система (1)–(2) является робастно устойчивой, а ее \mathcal{H}_∞ -норма ограничена некоторым числом $\sqrt{\eta}$, т.е. $F_\Theta \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$. Во второй части доказательства получим условия ограниченности анизотропийной нормы для робастно устойчивой системы $F_\Theta \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$.

Рассмотрим параметрическую функцию в качестве кандидата на роль функции Ляпунова в виде

$$(П.1) \quad V(k) = x^T(k)P(\Theta)x(k), \quad P(\Theta) > 0.$$

Так как сначала требуется доказать устойчивость системы и ограниченность ее \mathcal{H}_∞ -нормы, то для упрощения выкладок и без снижения общности предположим, что $W = \{w(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{L}_2$. Разница между приращениями $V(k+1)$ и $V(k)$ определяется по формуле

$$(П.2) \quad V(k+1) - V(k) = x^T(k+1)P(\Theta)x(k+1) - x^T(k)P(\Theta)x(k).$$

Рассмотрим теперь выражение:

$$(П.3) \quad \begin{aligned} V(k+1) - V(k) + z^T(k)z(k) - \eta w^T(k)w(k) &= \\ &= \{ \text{подставим } x(k+1) = A(\Theta)x(k) + B_w(\Theta)w(k) \\ &\quad \text{и } z(k) = C(\Theta)x(k) + D_w(\Theta)w(k) \} = \\ &= [x^T(k) \quad w^T(k)] \left([A(\Theta) \quad B_w(\Theta)]^T P(\Theta) \times \right. \\ &\quad \times [A(\Theta) \quad B_w(\Theta)] + [C(\Theta) \quad D_w(\Theta)]^T [C(\Theta) \quad D_w(\Theta)] - \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} P(\Theta) & 0 \\ 0 & \eta I_m \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство

$$(П.4) \quad V(k+1) - V(k) + z^T(k)z(k) - \eta w^T(k)w(k) < 0$$

справедливо для всех $x(k)$ и $w(k)$, если

$$(П.5) \quad \begin{aligned} &[A(\Theta) \quad B_w(\Theta)]^T P(\Theta) [A(\Theta) \quad B_w(\Theta)] + \\ &+ [C(\Theta) \quad D_w(\Theta)]^T [C(\Theta) \quad D_w(\Theta)] - \begin{bmatrix} P(\Theta) & 0 \\ 0 & \eta I_m \end{bmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Преобразуем неравенство (П.5) к виду

$$(П.6) \quad \begin{bmatrix} -P(\Theta) & 0 \\ 0 & -\eta I_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A(\Theta) & B_w(\Theta) \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix}^T \times \\ \times \begin{bmatrix} -P(\Theta) & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\Theta) & B_w(\Theta) \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix} < 0,$$

где матрица $\begin{bmatrix} -P^{-1}(\Theta) & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix}$ является отрицательно определенной. Применяя к неравенству (П.6) лемму о дополнении Шура, имеем

$$(П.7) \quad \begin{bmatrix} -P(\Theta) & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ A(\Theta) & B_w(\Theta) & -P^{-1}(\Theta) & * \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0.$$

Выполнение неравенства (П.6) для ненулевого входного сигнала делает справедливым неравенства вида (П.4) для любого $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ и позволяет выполнить их суммирование от $k = 0$ до $k = \infty$. Откуда следует выполнение неравенства

$$(П.8) \quad V(\infty) - V(0) + \sum_{k=0}^{\infty} z^T(k)z(k) - \eta \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k) < 0.$$

Для нулевых начальных условий ($x(0) = 0$) $V(0) = 0$, предполагая, что $V(\infty) = 0$, неравенство (П.8) преобразуется к виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^T(k)z(k) < \eta \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k).$$

Таким образом,

$$(П.9) \quad \sup_{\Theta \in \Omega} \sup_{W \in \mathcal{L}_2} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} z^T(k)z(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)} < \eta.$$

Выполнение неравенства (П.7) гарантирует устойчивость разомкнутой системы (1)–(2) и ограниченность ее \mathcal{H}_∞ -нормы сверху числом $\sqrt{\eta}$.

На втором этапе необходимо найти условия, которые гарантируют ограниченность анизотропной нормы для уровня средней анизотропии входных возмущений $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$. Тогда условия ограниченности анизотропной нормы могут быть определены анизотропной частотной теоремы [12] в следующей форме:

$$(П.10) \quad -(\det(\Sigma(\Theta)))^{1/m} < -(1 - q\gamma^2)e^{2a/m},$$

$$(П.11) \quad \begin{bmatrix} A(\Theta)R(\Theta)A(\Theta) - R(\Theta) & A^T(\Theta)R(\Theta)B_w(\Theta) \\ B_w^T(\Theta)R(\Theta)A(\Theta) & B_w^T(\Theta)R(\Theta)B_w(\Theta) - I_m \end{bmatrix} + \\ + q \begin{bmatrix} C^T(\Theta) \\ D_w^T(\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix} < 0,$$

где $q \in (0, \min(\gamma^{-2}, \|F_\Theta\|_\infty^{-2}))$, а $\Sigma(\Theta)$ определяется из выражения

$$(II.12) \quad \Sigma(\Theta) = (I_m - B_w^T(\Theta)R(\Theta)B_w(\Theta) - qD_w^T(\Theta)D_w(\Theta)).$$

Неравенство (II.11) совпадает с неравенством (II.5) с учетом замены переменных $P(\Theta) = \eta R(\Theta)$ и $\eta = q^{-1}$. Таким образом, анизотропийная норма системы ограничена, если выполняются неравенства (II.7) и (II.11).

Рассмотрим подробнее неравенство (II.10). С учетом введенных обозначений оно может быть переписано в виде

$$(II.13) \quad \eta - (e^{-2a} \det(\eta I_m - B_w^T(\Theta)P(\Theta)B_w(\Theta) - D_w^T(\Theta)D_w(\Theta)))^{1/m} < \gamma^2.$$

Вводя новую переменную

$$\Psi(\Theta) < \eta I_m - B_w^T(\Theta)P(\Theta)B_w(\Theta) - D_w^T(\Theta)D_w(\Theta),$$

где $\Psi(\Theta) = \Psi(\Theta)^T > 0$ [13], убеждаемся, что неравенство (II.13) выполнено, если справедливы два следующих неравенства:

$$(II.14) \quad \eta - (e^{-2a} \det(\Psi(\Theta)))^{1/m} < \gamma^2,$$

$$(II.15) \quad \Psi(\Theta) < \eta I_m - B_w^T(\Theta)P(\Theta)B_w(\Theta) - D_w^T(\Theta)D_w(\Theta).$$

Перепишем (II.15) как

$$(II.16) \quad \Psi(\Theta) - \eta I_m - \begin{bmatrix} B_w^T(\Theta) & D_w^T(\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P(\Theta) & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w(\Theta) \\ D_w(\Theta) \end{bmatrix} < 0.$$

Применяя лемму о дополнении Шура к (II.16), получаем

$$(II.17) \quad \begin{bmatrix} \Psi(\Theta) - \eta I_m & B_w^T(\Theta) & D_w^T(\Theta) \\ B_w(\Theta) & -P^{-1}(\Theta) & 0 \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0.$$

Умножим неравенство (II.17) слева и справа на матрицу $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & G_1(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ и ее транспонированную, получим

$$(II.18) \quad \begin{bmatrix} \Psi(\Theta) - \eta I_m & \star & \star \\ G_1(\Theta)B_w(\Theta) & \Lambda_1(\Theta) & \star \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

где $\Lambda_1(\Theta) = -G_1(\Theta)P^{-1}(\Theta)G_1^T(\Theta)$.

Отметим, что для $P(\Theta) > 0$ из неравенства

$$-(G_1(\Theta) - P(\Theta))^T P^{-1}(\Theta)(G_1(\Theta) - P(\Theta)) \leq 0$$

следует, что

$$-G_1(\Theta)P^{-1}(\Theta)G_1^T(\Theta) \leq -G_1(\Theta) - G_1^T(\Theta) + P(\Theta).$$

Вводя обозначение $L_1(\Theta) = -G_1(\Theta) - G_1^T(\Theta) + P(\Theta)$ и заменяя $\Lambda_1(\Theta)$ на $L_1(\Theta)$ в неравенстве (П.18), получаем неравенство (14).

Избавимся от обращения матрицы $P(\Theta)$ в неравенстве (П.7). Для этого введем новую невырожденную матрицу $G_2(\Theta)$. Умножая слева и справа неравенство (П.7) на невырожденную матрицу

$$(П.19) \quad \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

и ее транспонированную соответственно, получим:

$$(П.20) \quad \begin{bmatrix} -P(\Theta) & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ G_2(\Theta)A(\Theta) & G_2(\Theta)B_w(\Theta) & \Lambda_2(\Theta) & * \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

где

$$(П.21) \quad \Lambda_2(\Theta) = -G_2(\Theta)P^{-1}(\Theta)G_2^T(\Theta).$$

Аналогично предыдущему случаю заменяем $\Lambda_2(\Theta)$ на выражение $L_2(\Theta) = -G_2(\Theta) - G_2^T(\Theta) + P(\Theta)$. В результате чего получим выражение (15).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Зададим матрицы $\Psi(\Theta)$, $G_1(\Theta)$, $G_2(\Theta)$ и $P(\Theta)$ в форме $\Psi(\Theta) = \Psi$, $G_1(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i G_{1i}$, $G_2(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i G_{2i}$, $P(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i P_i$. Перепишем неравенства (14) и (15) с учетом введенных допущений.

Следует заметить, что неравенства (14) и (15) содержат блоки из постоянных матриц, параметрических матриц и произведений двух параметрических матриц. С учетом введенной структуры параметрических переменных, а также принимая во внимание тот факт, что $(\sum_{i=1}^s \theta_i)^2 = 1$, постоянные матрицы могут быть записаны в форме

$$I_p = \left(\sum_{i=1}^s \theta_i \right)^2 I_p.$$

Параметрические матрицы могут быть переписаны в форме

$$\sum_{i=1}^r \theta_i A_i = \sum_{i=1}^r \theta_i \left(\sum_{j=1}^r \theta_j \right) A_i$$

в силу тождества $\sum_{j=1}^r \theta_j = 1$.

Выражения вида $G_1(\Theta)B_w(\Theta)$ записываются следующим образом:

$$G_1(\Theta)B_w(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i^2 (G_{1i}B_i) + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \theta_i \theta_j (G_{1i}B_{wj} + G_{1j}B_{wi}).$$

Применим приведенные выше преобразования ко всем элементам неравенств (14) и (15), получим :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \theta_i^2 \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -G_{1i} - G_{1i}^T + P_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \theta_i \theta_j \left(\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1i}B_{wj} & -G_{1i} - G_{1i}^T + P_i & \star \\ D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1j}B_{wi} & -G_{1j} - G_{1j}^T + P_j & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} \right) < 0, \\ & \sum_{i=1}^r \theta_i^2 \begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i}A_i & G_{2i}B_{wi} & -G_{2i} - G_{2i}^T + P_i & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \theta_i \theta_j \left(\begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i}A_j & G_{2i}B_{wj} & -G_{2i} - G_{2i}^T + P_i & \star \\ C_j & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} -P_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2j}A_i & G_{2j}B_{wi} & -G_{2j} - G_{2j}^T + P_j & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} \right) < 0. \end{aligned}$$

Так как $\theta_i \geq 0$, $i = \overline{1, r}$, то очевидно, что неравенства (13)–(15) выполняются, когда выполняются неравенства (19)–(23).

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим неравенства (П.7) и (П.17), полученные при доказательстве теоремы 1. Введем переменную $\Phi(\Theta) = P^{-1}(\Theta)$, а также зафиксируем параметр η и матрицу Ψ . Тогда неравенства (П.7) и (П.17) переписутся в следующем виде:

$$(П.22) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B_w^T(\Theta) & D_w^T(\Theta) \\ B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & 0 \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0$$

и

$$(П.23) \quad \begin{bmatrix} -\Phi^{-1}(\Theta) & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I_m & * & * \\ A(\Theta) & B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & * \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0.$$

Последнее неравенство содержит матрицу $\Phi^{-1}(\Theta)$. Чтобы избавиться от нее, умножим неравенство (П.23) слева и справа на матрицу

$$\begin{bmatrix} G^T(\Theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}$$

и ее транспонированную соответственно. В результате получаем:

$$(П.24) \quad \begin{bmatrix} \Lambda(\Theta) & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ A(\Theta)G(\Theta) & B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & * \\ C(\Theta)G(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

где $\Lambda(\Theta) = -G^T(\Theta)\Phi^{-1}(\Theta)G(\Theta)$.

Заметим, что $\Phi(\Theta) > 0$, поэтому из выполнения неравенства

$$-(G(\Theta) - \Phi(\Theta))^T \Phi^{-1}(\Theta) (G(\Theta) - \Phi(\Theta)) \leq 0$$

следует, что $-G^T(\Theta)\Phi^{-1}(\Theta)G(\Theta) \leq -G(\Theta) - G^T(\Theta) + \Phi(\Theta)$. Из последнего следует, что неравенство (П.24) справедливо, если справедливо неравенство (П.23).

Принимая во внимание выражения для параметрических неопределенностей (3)–(4), рассмотрим матрицу $\Phi(\Theta)$ в форме $\Phi(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i \Phi_i$. Тогда неравенства (П.22) и (П.24) запишутся в следующем виде:

$$(П.25) \quad \sum_{i=1}^r \theta_i \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & * & * \\ B_{wi} & -\Phi_i & * \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^r \theta_i^2 \begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_i & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i G_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\
(\text{П.26}) \quad & + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \theta_i \theta_j \left(\begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_j G_i & B_{wj} & -\Phi_i & \star \\ C_j G_i & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} -G_j - G_j^T + \Phi_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_j & B_{wi} & -\Phi_j & \star \\ C_i G_j & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} \right) < 0.
\end{aligned}$$

Следует заметить, что неравенство (П.26) можно получить, используя свойство (4) и учитывая, что $(\sum_{i=1}^r \theta_i)^2 = 1$. Очевидно, что из выполнения неравенств (25)–(27) автоматически следует выполнение неравенств (П.25) и (П.26), что завершает доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gahinet P., Apkarian P., Chilali M.* Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. 1996. V. 41. No. 3. P. 436–442.
2. *Daafouz J., Bernussou J.* Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties // Systems & Control Letters. 2001. V. 43. No. 5. P. 355–359.
3. *Peaucelle D., Arzelier D.* Robust performance analysis with LMI-based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions // IEEE Trans. Automat. Control. 2001. V. 46. P. 624–630.
4. *de Oliveira M.C., Bernussou J., Geromel J.C.* A new discrete-time robust stability condition // Systems & Control Letters. 1999. V. 37. No. 4. P. 261–265.
5. *Oliveira R.C.L.F., Peres P.L.D.* A convex optimization procedure to compute \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norms for uncertain linear systems in polytopic domains // Optim. Control Appl. Meth. 2008. V. 29. P. 295–312.
6. *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy of signals and the entropy of linear stationary systems // Doklady Math. 1995. V. 51. No. 3. P. 388–390.
7. *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // Proc. 13th IFAC World Congress (San-Francisco, USA). 1996. P. 179–184.
8. *Diamond P., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time-invariant control systems // Int. J. of Control. 2001. V. 74. No. 1. P. 28–42.
9. *Andrianova O.G., Belov A.A.* On Robust Performance Analysis of Linear Systems with Polytopic Uncertainties Affected by Random Disturbances // Proceedings of the 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland). 2019. P. 1–6.

10. *Belov A.A.* Random Disturbance Attenuation in Discrete-time Polytopic Systems: Performance Analysis and State-Feedback Control // Proceedings of the 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia). 2020. P. 633–637.
11. *Belov A.A.* Robust pole placement and random disturbance rejection for linear polytopic systems with application to grid-connected converters // European Journal of Control. 2022. V. 63. P. 116–125.
12. *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* Strict Anisotropic Norm Bounded Real Lemma in Terms of Matrix Inequalities // Doklady Math. 2011. V. 48. No. 3. P. 895–898.
13. *Чайковский М.М.* Синтез субоптимального анизотропного стохастического робастного управления методами выпуклой оптимизации. . . // Дисс. . . д-ра техн. наук. М.: 2012.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 16.05.2023

После доработки 19.07.2023

Принята к публикации 31.08.2023