Автоматика и телемеханика, № 10, 2023

© 2023 г. **И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru),**
И.А. ГАЛЯЕВ (ivan.galyaev@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРАМИАНОВ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МЕТРИК НЕПРЕРЫВНЫХ НЕУСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Рассматриваются детерминированные непрерывные конечномерные стационарные линейные динамические системы управления с многими входами и многими выходами. Предполагается, что матрица динамики может быть как устойчивая, так и неустойчивая, но ее собственные числа различны, не принадлежат мнимой оси и не являются зеркальным отображением друг друга относительно нуля плоскости собственных чисел. В рамках единой постановки рассмотрены задачи построения спектральных решений уравнений состояния и матриц грамианов управляемости этих систем, а также связанных с ними энергетических функционалов степени устойчивости и достижимости с целью оптимального размещения датчиков и исполнительных механизмов многосвязных систем управления и сложных сетей. Для решения перечисленных задач в статье использованы различные модели системы в пространстве состояний: общее представление, а также представление в различных канонических формах. Для вычисления спектральных разложений грамианов управляемости использованы псевдоганкелевые матрицы (матрицы Сяо). Предложены новые методы и разработаны алгоритмы вычисления грамианов управляемости и энергетических метрик линейных систем. Результаты исследований могут найти применение для оптимального размещения датчиков и исполнительных механизмов многосвязных систем управления, управления с минимальной энергией в сложных сетях различной природы.

Ключевые слова: спектральные разложения грамианов, энергетические функционалы, обратная матрица грамиана, устойчивость с учетом взаимодействия мод, уравнение Ляпунова, неустойчивые системы управления.

DOI: 10.31857/S0005231023100112, **EDN:** YCDMIQ

1. Введение

Мониторинг состояния объектов управления и управление демпфированием опасных колебаний являются важными направлениями исследований в различных областях промышленности (энергетика, машиностроение, авиация и космонавтика, робототехника). Новые технологии моделирования требуют развития инструментов аппроксимации математических моделей сложных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00673).

систем различной природы. При решении этих задач важную роль играют методы вычислений матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра и исследование структурных свойств решений этих уравнений [1–4]. Фундаментальными свойствами линейных динамических систем, связанных с решениями этих уравнений, являются управляемость, наблюдаемость и устойчивость. Важные результаты в этой области были получены для методов вычисления грамианов систем, модели которых представлены в канонических формах управляемости и наблюдаемости. Хорошо известны применение грамианов для построения упрощенных моделей динамических систем высокой размерности, для вычисления норм передаточных функций линейных и билинейных динамических систем [1, 2, 5–8]. Важную роль играют грамианы управляемости в вычислении отклонений выхода, вызванных гауссовыми случайными возмущениями. В последние годы возник интерес к развитию методов вычислений различных энергетических показателей для анализа устойчивости и степени управляемости и наблюдаемости этих систем. Такие показатели для линейных устойчивых систем и неустойчивых линейных систем были предложены в [1, 8–11]. Упрощенные модели для больших сетей на основе выходных грамианов управляемости, позволяющие вычислять энергетические показатели, были предложены в [12]. Метод сбалансированного отсечения на основе грамианов устойчивых и антиустойчивых систем был предложен в [13]. Важная задача оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств на основе различных энергетических функционалов, в том числе инвариантных эллипсоидов, и оценок степени управляемости была исследована в [14–18]. Важно отметить, что во всех этих работах использовался спектр матрицы динамики систем.

Б.Н. Петровым и его учениками на основе прямого метода Ляпунова были разработаны методы синтеза алгоритмов адаптации, гарантирующих устойчивость движения самонастраивающейся системы относительно движения ее эталонной модели [19, 20]. Им был разработан принцип координатно-параметрического управления, реализующий двукратную инвариантность в беспоисковых самонастраивающихся системах (БСНС). В теории БСНС использовалось понятие об обобщенном настраиваемом объекте, которое было основано на выделении структур специально сформированного основного контура и контура настраиваемого регулятора. Линеаризованные математические модели контуров включали координатные, параметрические и координатно-параметрические модели, в том числе параметрические обратные связи в контурах настройки регулятора. Эти модели сегодня названы билинейными динамическими моделями, которые используются в оптимизации, теории идентификации и адаптивного управления. Для вычисления грамианов этих систем были разработаны обобщенные уравнения Ляпунова и предложены спектральные методы их решения [2, 10, 11]. Несомненный вклад внесла школа Б.Н. Петрова в формирование теории управления, основанной на использовании структурных свойств эталонной модели, и в других областях теории управления, в частности в теории инвариантных систем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим непрерывную стационарную линейную динамическую систему MIMO LTI с простым спектром со многими входами и многими выходами

$$\Sigma_1\colon \begin{cases} \dot{x} = Ax\left(t\right) + Bu\left(t\right), \quad x(0) = 0, \\ y\left(t\right) = Cx\left(t\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^m$.

Если все собственные числа s_r матрицы A различны, то линейную систему можно привести к диагональному виду с помощью невырожденного преобразования координат

$$\begin{aligned} &x_d = Tx, \quad \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d, \\ &A_d = T^{-1}AT, \quad B_d = T^{-1}B, \quad C_d = CT, \quad Q_d = T^{-1}BB^{\mathrm{T}}(T^{-1})^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

или

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^* \\ \nu_2^* \\ \vdots \\ \nu_n^* \end{bmatrix} = T\Lambda T^{-1},$$

где матрица T^{-1} составлена из правых собственных векторов u_i, а матрица T — из левых собственных векторов ν_i^*, соответствующих собственному числу s_i.

Определение [21]. *Квадратную матрицу $Y = [y_{j\eta}]$ назовем матрицей Сяо (Zero plaid structure) такого вида:*

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_3 & 0 \\ -y_2 & 0 & y_3 & 0 & \ldots \\ 0 & -y_3 & 0 & \ldots & 0 \\ y_3 & 0 & \ldots & 0 & y_n \end{bmatrix},$$

ее элементы задаются с помощью элементов таблицы Рауса [21]

$$y_{j\eta} = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \;\; j + \eta = 2k+1, \quad k{=}1, \ldots, n; \\ y_n = \dfrac{1}{2R_{n,1}}, \\ \\ y_{n-l} = \dfrac{-\sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i R_{n-l,i+1} y_{n-l+i}}{R_{n-l,1}}, \\ \qquad \text{если} \;\; j + \eta {=}\ 2k, \quad k = 1, \ldots, n, \quad l = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

где $R_{i,j}$ — элемент таблицы Рауса для системы, находящийся на пересечении i строки и j столбца. В [11] *было получено спектральное разложение* *грамиана управляемости непрерывной линейной системы со многими входами и многими выходами на основе метода вычисления грамиана, предложенного в* [21, 22].

Т е о р е м а 1 [11, 21]. *Рассмотрим непрерывную линейную систему MIMO LTI вида* (2.1). *Предположим, что система устойчива и все корни ее характеристического уравнения различны. Тогда матрицы ее грамиана управляемости являются матрицами Сяо, диагональные элементы которых определяются в виде*

$$p_{11} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2s_k \prod_{\rho=1,\rho\neq k}^{n} \left(s_k^2 - s_\rho^2\right)},$$

$$p_{22} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^1 (s_k)^2}{2s_k \prod_{\rho=1,\rho\neq k}^{n} \left(s_k^2 - s_\rho^2\right)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p_{nn} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} (s_k)^{2(n-1)}}{2s_k \prod_{\rho=1,\rho\neq k}^{n} \left(s_k^2 - s_\rho^2\right)}.$$

Элементы побочных диагоналей матриц грамианов определяются в виде

$$p_{j\eta} = (-1)^{\frac{j-\eta}{2}} p_{ll}, \quad j+\eta = 2l, \quad l = \overline{1,n}.$$

Остальные элементы матрицы грамиана равны нулю.

С л е д с т в и е 1. Рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную линейную динамическую систему MIMO LTI с простым спектром со многими входами и многими выходами вида (2.1). Тогда ее грамиан управляемости является матрицей вида [11]

$$P_c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} P_{cj,\eta},\ P_{cj,\eta} = \omega(n, s_k, j, \eta) A_j B B^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}}, \tag{2.2}$$

$$\omega\left(n, s_k, j, \eta\ \right) = \begin{cases} 0, \text{ если } j+\eta = 2k+1, \ \ k = 1, \ldots, n, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{2s_k \prod_{\rho=1,\rho\neq k}^{n} \left(s_k^2 - s_\rho^2\right)}, \text{ если } j+\eta = 2k, \ \ k = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Спектральные разложения (2.2) назовем разложениями грамиана в форме матриц Сяо. В разложении (2.2) появляется скалярная функция мультипликатора $\omega\left(n, s_k, j, \eta\right)$, которая определяет структуру матриц Адамара [21].

Преобразуем систему (2.1) в верхнюю блочно-диагональную форму Шура с унитарной матрицей преобразования U [23, 24].

$$\begin{gathered} x = Ux_{Sch}, \ \ \dot{x}_{Sch} = A_{Sch}x_{Sch} + B_{Sch}u, \ \ y_{Sch} = C_{Sch}x_{Sch}, \\ A_{Sch} = U^{\mathrm{T}}AU, \ \ B_{Sch} = U^{\mathrm{T}}B, \ \ C_{Sch} = CU, \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$A_{Sch} = \begin{bmatrix} A_{Sch11} & A_{Sch12} \\ 0 & A_{Sch22} \end{bmatrix}, \ \ B_{Sch} = \begin{bmatrix} B_{Sch1} \\ B_{Sch2} \end{bmatrix}, \ \ C_{Sch} = \begin{bmatrix} C_{Sch1} & C_{Sch2} \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы получить блочно-диагональное представление, необходимо преобразовать уравнения (2.3) таким образом, чтобы на месте блока A_{Sch12} оказалась нулевая матрица. Для этого необходимо выполнить второе преобразование

$$x_{Sch} = W_{bl}x_{bl}, \quad \dot{x_{bl}} = A_{bl}x_{bl} + B_{bl}u, \quad y_{bl} = C_{bl}x_{bl},$$
$$A_{bl} = W_{bl}^{-1}A_{Sch}W_{bl}, \quad B_{bl} = W_{bl}^{-1}B_{Sch}, \quad C_{bl} = C_{Sch}W_{bl}, \tag{2.4}$$

$$A_{bl} = \begin{bmatrix} A_{Sch11} & 0 \\ 0 & A_{Sch22} \end{bmatrix}, \quad B_{bl} = \begin{bmatrix} B_{bl1} \\ B_{bl2} \end{bmatrix}, \quad C_{bl} = \begin{bmatrix} C_{bl1} & C_{bl2} \end{bmatrix},$$
$$W_{bl} = \begin{bmatrix} I_r & S \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, W_{bl}^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & -S \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы на месте блока A_{Sch12} оказалась нулевая матрица, матрица S должна удовлетворять уравнению Сильвестра

$$-A_{Sch11}S + SA_{Sch22} + A_{Sch12} = 0. \tag{2.5}$$

Необходимым условием существования решения этого уравнения является следующее спектральное условие:

$$\lambda_s + \lambda_u \neq 0, \quad \forall s : s = \overline{1, r}, \forall u : u = \overline{r+1, n}.$$

Для того чтобы преобразовать систему (2.4) с блочно-диагональной матрицей в систему с диагональной матрицей, необходимо выполнить третье преобразование

$$x_{bl} = W_d x_d,$$

где W_d — матрица преобразования системы в блочно-диагональной форме, у которой диагональные блоки имеют верхне-треугольную форму

$$\dot{x_d} = A_d x_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d,$$
$$A_d = W_d^{-1}A_{bl}W_d, \quad B_d = W_d^{-1}B_{bl}, \quad C_d = C_{bl}W_d,$$

$$A_d = \begin{bmatrix} \Lambda_- & 0 \\ 0 & \Lambda_+ \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} B_{d1} \\ B_{d2} \end{bmatrix}, \quad C_d = \begin{bmatrix} C_{d1} & C_{d2} \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

где Λ_- и Λ_+ — диагональные матрицы, состоящие из отрицательных и положительных собственных чисел соответственно.

После первого преобразования имеем соотношение

$$P = UP_{Sch}U^{\mathrm{T}}. \tag{2.7}$$

После второго преобразования получим

$$P_{Sch} = TP_{bl}T^{\mathrm{T}},$$

или

$$P = T_2P_{bl}T_2^{\mathrm{T}}, \quad T_2 = UT. \tag{2.8}$$

После третьего преобразования с использованием (2.7), (2.8) получим

$$P = UT_3 P_d T_3^{\mathrm{T}}, \;\; T_3 = UTW_d.$$

Структурированное уравнение Ляпунова после второго преобразования имеет вид

$$A_{Sch11}P_1 + P_1 A_{Sch11}^{\mathrm{T}} = -B_1 B_1^{\mathrm{T}}, \tag{2.9}$$

$$A_{Sch22}P_2 + P_2 A_{Sch22}^{\mathrm{T}} = B_2 B_2^{\mathrm{T}}, \tag{2.10}$$

$$P_{cm} = T_2^{-1} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} T_2. \tag{2.11}$$

Матрица P_{cm} называется смешанным грамианом управляемости [13–17, 25]. Цель статьи — разработать метод и алгоритм вычисления спектральных разложений грамианов управлямости неустойчивых линейных систем на основе описанного выше метода вычисления указанных грамианов с использованием преобразования исходной системы в блочно-диагональную форму [13].

Многие приложения спектральных разложений грамианов связаны с энергетическими показателями структурных свойств управляемости, наблюдаемости и устойчивости. Рассмотрим задачу выбора и оптимизации мест размещения датчиков и исполнительных механизмов в сложных автоматических системах и сложных сетях [18, 26–28]. При решении этой задачи используются входная и выходная энергия системы, следы матриц грамиана управляемости и наблюдаемости и следы их обратных матриц, минимальные и максимальные собственные числа матриц грамианов. Другая задача состоит в оценивании меры управляемости динамической системы с использованием грамианов управляемости [25]. Эта мера определяется как минимальная входная энергия, требуемая для перемещения системы из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние.

Другая цель статьи — разработка метода и алгоритмов вычисления спектральных разложений энергетических метрик, относящихся к указанным выше задачам. Требуется найти спектральные разложения следующих энергетических метрик по простому (или парному) спектру матрицы динамики системы и матриц грамианов управляемости и наблюдаемости:

- метрика входной минимальной энергии системы [2, 18]

$$J_1 = E_{\min}\left(P_c\right),$$

- метрика выходной энергии системы [2, 3]

$$J_2 = E_{out},$$

- метрика следа матрицы грамиана [26, 27]

$$J_3 = \operatorname{tr}\left(P_c\right),$$

- метрика следа обратных матриц грамианов управляемости [2, 12, 18]

$$J_4 = \operatorname{tr}(P_c)^{-1},$$

- метрика степени достижимости

$$J_5 = \operatorname{tr}(P_{cm}),$$

где P_{cm} — смешанный грамиан управляемости [18, 25].

2.1. Основные результаты

Рассмотрим конечномерную линейную стационарную непрерывную систему с многими входами и многими выходами вида (2.1). Предположим, что спектр матрицы динамики содержит r устойчивых собственных чисел $\lambda_{i-} \in \mathbb{C}^-$ и $n-r$ неустойчивых собственных чисел $\lambda_{i+} \in \mathbb{C}^+$. Будем предполагать, что спектр не содержит собственных чисел, принадлежащих мнимой оси, а также выполнено общее условие

$$\lambda_{i-} + \lambda_{j+} \neq 0, \forall i : i = \overline{1, r}, \forall j : j = \overline{r+1, n}.$$

Последнее условие означает, что спектр не содержит собственных чисел, являющихся зеркальным отображением друг друга относительно нуля. Наиболее простым способом вычисления спектральных разложений грамианов в случае простого спектра матрицы динамики является приведение ее к диагональному виду [1, 11]. Если в спектре появляются неустойчивые собственные числа, это требует проведения нескольких структурных преобразований уравнений (2.1). Введем обозначения

$$B_{d11} B_{d11}^{\mathrm{T}} = [\beta_{d-\nu\eta}]_{[r\times r]},$$

$$B_{d22} B_{d22}^{\mathrm{T}} = [\beta_{d+\nu\eta}]_{[(n-r)\times(n-r)]}.$$

Теорема 2 [8]. *Рассмотрим конечномерную линейную стационарную непрерывную систему с многими входами и многими выходами вида* (2.1), *приведенную к диагональному виду* (2.6). *Предположим, что система имеет простой спектр, система неустойчива, а собственные числа ее матрицы динамики A не находятся на мнимой оси, но могут находиться в левой и/или правой полуплоскостях $\lambda_{i-} \in \mathbb{C}^-$, $i = r$; $\lambda_{i+} \in \mathbb{C}^+$, $i = n - r$.*
Кроме того, предположим, что выполнено условие

$$\lambda_i \neq -\lambda_j, \ \forall i, j : i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, n}.$$

Определим смешанный грамиан управляемости в виде

$$P_{cm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (Ij\omega - A)^{-1} B B^{\mathrm{T}} (-Ij\omega - A^{\mathrm{T}})^{-1} d\omega. \tag{2.12}$$

Следующие утверждения справедливы и эквивалентны.

- *Справедливы следующие сепарабельные спектральные разложения матриц решений уравнения* (2.9), (2.10), *соответствующих устойчивой и анти-устойчивой подсистемам.*

$$p_{c-}^{(\mu\nu)} = e_\mu^{\mathrm{T}} P_{c-} e_\nu, \quad \forall \mu, \nu = \overline{1, r},$$

$$p_{c-}^{(\mu\nu)} = \frac{-\beta_{\mu\nu-}}{\lambda_{\mu-} + \lambda_{\nu-}},$$

$$p_{c+}^{(\mu\nu)} = e_\mu^{\mathrm{T}} P_{c+} e_\nu, \quad \forall \mu, \nu = \overline{r+1, n},$$

$$p_{c+}^{(\mu\nu)} = \frac{\beta_{\mu\nu+}}{\lambda_{\mu+} + \lambda_{\nu+}};$$

- *Справедливы следующие сепарабельные спектральные разложения смешанного грамиана управляемости по парному и простому спектрам матрицы* A

$$P_{cm} = T_3^{-1} \left[P_- \oplus P_+ \right] T_3. \tag{2.13}$$

По парному спектру:

$$P_- = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{r} p_{c-}^{(\nu\mu)} \mathbb{1}_{\nu\mu}, \tag{2.14}$$

$$P_+ = \sum_{\nu=r+1}^{n} \sum_{\mu=r+1}^{n} p_{c+}^{(\nu\mu)} \mathbb{1}_{\nu\mu}.$$

По простому спектру:

$$P_- = \sum_{\nu=1}^{r} \boldsymbol{p}_{c-}^{(\nu)}, \quad \boldsymbol{p}_{c-}^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{r} \boldsymbol{p}_{c-}^{(\nu\mu)} \mathbb{1}_{\nu\mu}, \tag{2.15}$$

$$P_+ = \sum_{\nu=r+1}^{n} \boldsymbol{p}_{c+}^{(\nu)}, \quad \boldsymbol{p}_{c+}^{(\nu)} = \sum_{\mu=r+1}^{n} \boldsymbol{p}_{c+}^{(\nu\mu)} \mathbb{1}_{\nu\mu}.$$

Доказательство теоремы. Уравнения Ляпунова для диагонализованной системы в данном случае имеют вид

$$\Lambda P_{cm} + P_{cm} \Lambda^* = -Q_d = \left[-B_- B_-^{\mathrm{T}} \oplus B_+ B_+^{\mathrm{T}} \right].$$

Для диагонализованной системы это уравнение распадается на два уравнения для устойчивой и антиустойчивой подсистем

$$\Lambda_- P_{c-} + P_{c-} \Lambda_-^* = Q_{d-} = -B_- B_-^{\mathrm{T}},$$

$$\Lambda_+ P_{c+} + P_{c+} \Lambda_+^* = Q_{d+} = B_+ B_+^{\mathrm{T}}.$$

Интегральные формулы решений уравнений Ляпунова [8]:

$$P_{cm} = [P_{c-} \oplus P_{c+}],$$

$$P_{c-} = \int_0^\infty e^{\Lambda_- \tau} \, B_- B_-^{\mathrm{T}} e^{\Lambda_-^* \tau} d\tau, \quad P_{c+} = \int_{-\infty}^0 e^{\Lambda_+ \tau} \, B_+ B_+^{\mathrm{T}} e^{\Lambda_+^* \tau} d\tau. \tag{2.16}$$

Преобразуем второй интеграл в формуле (2.16), используя замену переменных $\tau = -t$:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\Lambda_+\tau}\ Q_{d+}e^{\Lambda_+\tau}d\tau = -\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\Lambda_+ t}\ Q_{d+}e^{-\Lambda_+^* t}dt.$$

При такой замене переменных неустойчивые собственные числа антиустойчивой подсистемы становятся устойчивыми собственными числами устойчивой подсистемы и вычисление вторых интегралов сводится к схеме вычисления первых интегралов (2.16). Отсюда следует

$$(-\Lambda_+)P_{c+} + P_{c+}(-\Lambda_+^*) = -B_+B_+^{\mathrm{T}}.$$

Матрица $[\Lambda_- \oplus (-\Lambda_+)]$ является гурвицевой. Спектральные разложения грамианов устойчивой подсистемы были ранее получены в [9]. Вначале получим спектральные разложения грамианов в (2.16), а затем получим спектральное разложение грамиана исходной системы согласно формуле преобразования грамиана управляемости для невырожденного преобразования состояний с матрицей T

$$P_{cm} = T[P_- \oplus P_+]\,T^{\mathrm{T}}. \tag{2.17}$$

Первый шаг спектральных разложений основан на преобразовании уравнений состояния устойчивой подсистемы в диагональную каноническую форму. В этом случае уравнения Ляпунова приобретают простой вид и элементы $p_{c-}^{(\mu\nu)}$ матрицы решения P_{c-} можно вычислить по формулам [9]

$$p_{c-}^{(\mu\nu)} = e_\mu^{\mathrm{T}} P_{c-} e_\nu,\ \forall \mu,\nu = \overline{1,r}, \tag{2.18}$$

где $e_\mu^{\mathrm{T}}, e_\nu$ — единичные векторы,

$$e_\mu^{\mathrm{T}} Q_{d-} e_\nu = \beta_{\mu\nu-},\ \forall \mu,\nu = \overline{1,r},$$

$$p_{c-}^{(\mu\nu)} = \frac{-\beta_{\mu\nu-}}{\lambda_{\mu-} + \lambda_{\nu-}}. \tag{2.19}$$

Поскольку с учетом замены переменных вычисление спектральных разложений матрицы решения P_{c+} сводится к рассмотрению подхода, предложенного для вычисления матрицы решения P_{c-}, представим конечные формулы вычисления спектральных разложений для этого случая.

Этот подход основан на преобразовании уравнений состояния антиустойчивой подсистемы в диагональную каноническую форму. В этом случае элементы $p_{c+}^{(\mu\nu)}$ матрицы решения P_{c+} вычисляются по формулам

$$p_{c+}^{(\mu\nu)} = e_\mu^{\mathrm{T}} P_{c+} e_\nu, \quad \forall \mu,\nu = \overline{r+1,n},$$

где $e_\mu^{\mathrm{T}}, e_\nu$ — единичные векторы,

$$e_\mu^{\mathrm{T}} Q_{d+} e_\nu = \beta_{\mu\nu+},$$

$$p_{c+}^{(\mu\nu)} = \frac{\beta_{\mu\nu+}}{\lambda_{\mu+} + \lambda_{\nu+}},\ \forall \mu,\nu = \overline{r+1,n}. \tag{2.20}$$

Доказательство справедливости спектральных разложений для антиустойчивой подсистемы полностью повторяет доказательство для устойчивой подсистемы. Доказательство справедливости спектральных разложений (2.13)–(2.15) следует из справедливости формулы (2.19) и преобразования анти-устойчивой подсистемы к виду устойчивой подсистемы, собственные числа которой являются зеркальным отображением собственных чисел первой подсистемы относительно мнимой оси. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. При выполнении условий теоремы смешанный грамиан положительно определен, поскольку матрица $[\Lambda_- \oplus (-\Lambda_+)]$ является гурвицевой. При этом след смешанного грамиана управляемости равен

$$J = \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_{d-ii}}{-2Re\ \lambda_i} + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\beta_{d+ii}}{2Re\ \lambda_i}. \tag{2.21}$$

Коэффициенты $\beta_{d-ii}, \beta_{d+ii}$ всегда положительны в силу формирования матриц правых частей уравнений Ляпунова. Отсюда следует, что диагональные члены матрицы смешанного грамиана положительны. Справедливы оценки

$$\max_i \beta_{d-ii}, \beta_{d+ii} = \beta_{ii} \max,$$
$$J \leqslant \frac{\beta_{ii}\max}{2\min\limits_i |Re\ \lambda_i|} n = \frac{\beta_{ii}\max}{\left(\frac{2\min\limits_i |Re\ \lambda_i|}{n}\right)}.$$

Таким образом, след смешанного грамиана прямо пропорционален максимальному значению диагонального элемента матрицы $\left[B_- B_-^{\mathrm{T}} \oplus B_+ B_+^{\mathrm{T}}\right]$ и обратно пропорционален удвоенному среднему значению модуля собственного числа спектра матрицы $[\Lambda_- \oplus (-\Lambda_+)]$, что подтверждает результаты исследований работы [28].

Иллюстративный пример. Рассмотрим задачу управления динамическим объектом с четырьмя входами и четырьмя выходами. Модель объекта управления можно описать уравнениями состояния вида

$$\Sigma_1 \colon \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax\,(t) + Bu\,(t)\,, \quad x\,(0) = 0, \\ y\,(t) = Cx\,(t)\,. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}33 & -2{,}67 & -4 & 1{,}33 \\ 21{,}17 & -23{,}33 & -30{,}2 & 1{,}5 \\ -14{,}67 & 14 & 17{,}83 & -1{,}17 \\ 2 & -1{,}33 & -1{,}83 & -2{,}17 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем систему в верхнюю блочно-диагональную форму Шура. В таком случае унитарная матрица преобразования выразится следующим образом:

$$U = \begin{bmatrix} 0{,}125 & 0{,}943 & -0{,}169 & -0{,}258 \\ 0{,}814 & -0{,}26 & -0{,}056 & -0{,}516 \\ -0{,}564 & -0{,}178 & -0{,}225 & -0{,}775 \\ 0{,}063 & -0{,}109 & -0{,}958 & 0{,}258 \end{bmatrix}.$$

Система же примет вид

$$A_{Sch} = \begin{bmatrix} 1 & 37{,}64 & 3{,}255 & 35{,}17 \\ 0 & -4 & -0{,}97 & -0{,}212 \\ 0 & 0 & -2 & 0{,}436 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_{Sch} = \begin{bmatrix} -1{,}25 \\ -0{,}137 \\ 1{,}465 \\ -5{,}939 \end{bmatrix}.$$

Следующее преобразование происходит таким образом, чтобы матрица A_{Sch12} стала нулевой. Подбираем матрицу преобразования W_{bl} так, чтобы матрица A_{bl} разделилась на два блока, устойчивую и неустойчивую подсистемы.

$$W_{bl} = \begin{bmatrix} 1 & -7{,}53 & 1{,}35 & -8{,}25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{bl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -0{,}97 & -0{,}21 \\ 0 & 0 & -2 & 0{,}436 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$B_{bl} = \begin{bmatrix} -53{,}2 \\ -0{,}14 \\ 1{,}47 \\ -5{,}94 \end{bmatrix}.$$

Проверим выполнение уравнения Сильвестра (2.5). Для удобства отображения транспонируем все составляющие уравнения

$$\begin{bmatrix} -7{,}529 \\ 1{,}35 \\ -8{,}25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -0{,}97 & -2 & 0 \\ -0{,}212 & 0{,}436 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7{,}529 \\ -1{,}35 \\ 8{,}25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 37{,}64 \\ 3{,}255 \\ 35{,}167 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для системы в этом случае смешанный грамиан задается уравнением (2.11)

$$P_{cm} = T_2^{-1} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} T_2.$$

$$P_{cm} = \begin{bmatrix} 5{,}32 & -5{,}32 & -7{,}98 & 2{,}66 \\ 0{,}94 & -0{,}26 & -0{,}18 & -0{,}11 \\ -0{,}17 & -0{,}056 & -0{,}23 & -0{,}96 \\ -0{,}26 & -0{,}52 & -0{,}78 & 0{,}26 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0067 & -0{,}057 & 0{,}18 \\ 0 & -0{,}057 & 0{,}52 & -1{,}72 \\ 0 & 0{,}18 & -1{,}72 & 5{,}88 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0{,}13 & 0 & 0 & -1{,}29 \\ 0{,}81 & -6{,}39 & 1{,}04 & -7{,}23 \\ -0{,}56 & 4{,}07 & -0{,}99 & 3{,}87 \\ 0{,}063 & -0{,}58 & -0{,}87 & -0{,}26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -203 & -132{,}5 & 11{,}3 \\ -203 & 1290 & -844 & 73 \\ -132{,}5 & -844 & -349 & -50{,}5 \\ 11{,}3 & 73 & -50{,}5 & 5{,}57 \end{bmatrix}.$$

Проверим корректность вычисления грамиана. Матрица третьего преобразования и сама система примут вид

$$W_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}44 & 0{,}19 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & -0{,}39 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} -53{,}2 \\ 0{,}57 \\ -1{,}25 \\ -6{,}6 \end{bmatrix}.$$

Тогда грамиан для диагонализированной системы станет равным

$$[P_{-} \oplus P_{+}] = \begin{bmatrix} 1417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}04 & -0{,}12 & -0{,}54 \\ 0 & -0{,}12 & 0{,}39 & 1{,}65 \\ 0 & -0{,}54 & 1{,}65 & 7{,}26 \end{bmatrix}.$$

Общее выражение смешанного грамиана после третьего преобразования запишется следующим образом:

$$P_{cm} = \begin{bmatrix} 5{,}32 & -5{,}32 & -7{,}98 & 2{,}66 \\ 0{,}86 & -0{,}29 & -0{,}29 & -0{,}57 \\ -0{,}31 & -0{,}31 & -0{,}63 & -0{,}94 \\ -0{,}29 & -0{,}57 & -0{,}86 & 0{,}29 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}041 & -0{,}12 & -0{,}54 \\ 0 & -0{,}12 & 0{,}39 & 1{,}65 \\ 0 & -0{,}54 & 1{,}65 & 7{,}26 \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} 0{,}125 & 0 & 0 & -1{,}16 \\ 0{,}81 & -6{,}39 & 3{,}73 & -8{,}13 \\ -0{,}56 & 4{,}07 & -2{,}66 & 4{,}65 \\ 0{,}063 & -0{,}58 & -0{,}53 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -203 & -132{,}5 & 11{,}3 \\ -203 & 1290 & -844 & 73 \\ -132{,}5 & -844 & -349 & -50{,}5 \\ 11{,}3 & 73 & -50{,}5 & 5{,}57 \end{bmatrix}.$$

Смешанные грамианы совпали. Проверим, выполняется ли критерий Сильвестра для грамиана устойчивой и антиустойчивой систем. Для этого надо, чтобы матрицы P_1 и P_2 были положительно определены. Для компактности запишем их в одну матрицу.

$$[P_1 \oplus P_2] = \begin{bmatrix} 1417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0067 & -0{,}057 & 0{,}18 \\ 0 & -0{,}057 & 0{,}52 & -1{,}72 \\ 0 & 0{,}18 & -1{,}72 & 5{,}88 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{P_1} = 1417, \quad \lambda_{P_2} = \begin{bmatrix} 0{,}0001 \\ 0{,}018 \\ 6{,}39 \end{bmatrix}.$$

Все собственные числа больше нуля. Критерий выполнен. Вычислим след по формуле (2.21)

$$J = \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_{d-ii}}{-2Re\ \lambda_i} + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\beta_{d+ii}}{2Re\ \lambda_i} = 0{,}0067 + 0{,}52 + 5{,}88 + 1417 \approx 1423.$$

Сравним значение следа спектра с оценкой

$$J = 1423 \leqslant \frac{2834}{\frac{2*1}{4}} = 5668.$$

Обратная величина среднего значения модулей собственных чисел матрицы динамики оценивает степень разброса действительных частей собственных чисел относительно мнимой оси. Чем меньше эта величина, тем выше ее влияние на след смешанного грамиана управляемости. Формула спектрального разложения следа позволяет при необходимости выполнить более тонкий анализ влияния распределения собственных чисел на энергетическую метрику степени достижимости [25, 27].

3. Спектральные разложения энергетических метрик грамианов управляемости и наблюдаемости

Рассмотрим применение полученных результатов для решения некоторых задач оценивания состояния и управления. Получим спектральные разложения энергетических метрик.

Теорема 3 [8]. *Рассмотрим конечномерную линейную стационарную непрерывную систему с многими входами и многими выходами вида* (2.1), *приведенную к диагональному виду* (2.6). *Предположим, что система имеет простой спектр, система полностью управляема и неустойчива, а собственные числа ее матрицы динамики A не находятся на мнимой оси, но могут находиться в левой и/или правой полуплоскостях*

$$\lambda_{i-} \in \mathbb{C}^-, \quad i = r; \quad \lambda_{i+} \in \mathbb{C}^+, \quad i = n - r.$$

Кроме того, предположим, что выполнено условие

$$\lambda_i \neq -\lambda_j, \ \forall i, j : i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,n}.$$

Справедливы и эквивалентны следующие спектральные разложения энергетических функционалов [18]*:*

$$J_1 = E_{\min}(\infty) = \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} (P_{cm})^{-1} \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left[\sum_{i=1}^{n} V_c^* |\sigma_i|^{-1} \mathbb{1}_{ii} U_c \right] \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}.$$

$$J_3 \ (\textit{для SISO LTI устойчивых систем}) = \operatorname{tr} \sum_{k=1}^{n} P_{c,k} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tr} P_{c,k} =$$
$$\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \dot{N}(s_k) N(-s_k)} - \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k^2}{\sum_{k=1}^{n} \dot{N}(s_k) N(-s_k)} + \ldots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^{n} \dot{N}(s_k) N(-s_k)} \right),$$

$$J_4 = \operatorname{tr} \sum_{i=1}^{n} (P_c)_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr} \, (P_c)_i^{-1} = \left[\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr} \left[V_c^* |\sigma_i|^{-1} \mathbb{1}_{ii} U_c \right] \right],$$

где $N(s)$ — характеристический полином системы (2.1).

Доказательство теоремы. Вернемся к устойчивым непрерывным MIMO LTI системам с простым спектром и заметим, что грамианы управляемости и наблюдаемости представляют собой симметричные комплекснозначные матрицы. В этом случае существуют их сингулярные разложения вида [1]

$$P_c = V_c \Lambda V_c^*,$$

где матрица V_c образована правыми сингулярными векторами матрицы P_c, а матрица Λ является диагональной матрицей вида

$$\Lambda = \operatorname{diag} \{ |\sigma_1| \, |\sigma_2| \ldots |\sigma_{\mathrm{n}}| \}.$$

Определим матрицы S и U в виде

$$S = \operatorname{diag}\left\{\operatorname{sgn}\sigma_1 \;\; \operatorname{sgn}\sigma_2 \; \ldots \; \operatorname{sgn}\sigma_{\mathrm{n}} \right\}, \; U_c = V_c S,$$
$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} +1, & \text{если} \;\; \sigma \geqslant 0 \\ -1, & \text{если} \;\; \sigma < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$P_c = U_c \Lambda V_c^*, \tag{3.1}$$

где матрица U_c образована левыми сингулярными векторами матрицы P_c. Поскольку Λ, U_c, V_c являются несингулярными матрицами, то

$$(P_c)^{-1} = (U_c)^{-1}\Lambda^{-1}(V_c^*)^{-1} = V_c^*\Lambda^{-1}U_c. \tag{3.2}$$

Так как матрица Λ диагональна, ее обратную матрицу можно представить в виде

$$\Lambda^{-1} = \left[|\sigma_1|^{-1}\mathbb{1}_{11} + |\sigma_2|^{-1}\mathbb{1}_{22} + \cdots + |\sigma_n|^{-1}\mathbb{1}_{nn}\right]. \tag{3.3}$$

Подставив (3.3) в (3.1), (3.2), получим следующие спектральные разложения обратных грамианов управляемости по простому спектру:

$$(P_c)^{-1} = (P_c)_1^{-1} + (P_c)_2^{-1} + \cdots + (P_c)_n^{-1},$$
$$(P_c)_1^{-1} = V_c^*|\sigma_1|^{-1}\mathbb{1}_{11}U_c, \; (P_c)_2^{-1} = V_c^*|\sigma_2|^{-1}\mathbb{1}_{22}U_c, \; \ldots, \; (P_c)_n^{-1} = V_c^*|\sigma_n|^{-1}\mathbb{1}_{nn}U_c.$$

Отсюда следуют следующие спектральные разложения энергетических функционалов [11]:

$$J_1 = E_{\min}(\infty) = \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}(P_c)^{-1}\begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\left[\sum_{i=1}^{n} V_c^*|\sigma_i|^{-1}1_{ii}U_c\right]\begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix},$$
$$J_2 = \operatorname{tr}\sum_{i=1}^{n}(P_c)_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{tr}\,(P_c)_i^{-1} = \left[\sum_{i=1}^{n}\operatorname{tr}\left[V_c^*|\sigma_i|^{-1}\mathbb{1}_{ii}U_c\right]\right],$$
$$J_3 \text{ (для SISO LTI систем)} = \operatorname{tr}\sum_{k=1}^{n}P_{c,k} = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{tr}P_{c,k} =$$
$$\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\dot{N}(s_k)\,N(-s_k)} - \frac{\sum_{k=1}^{n}s_k^2}{\sum_{k=1}^{n}\dot{N}(s_k)\,N(-s_k)} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (-1)^{n-1}\frac{\sum_{k=1}^{n}s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^{n}\dot{N}(s_k)\,N(-s_k)}\right),$$
$$J_5 = \operatorname{tr}\,(P_{cm}).$$

Теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4 [2]. *Рассмотрим конечномерную линейную стационарную непрерывную систему с многими входами и многими выходами общего вида* (2.1). *Предположим, что система имеет простой спектр, полностью управляема и устойчива. Тогда справедливы и эквивалентны следующие спектральные разложения энергетических функционалов входной и выходной энергии* $\hat{J}_1$ *и* $\hat{J}_2$ *по простому спектру грамиана управляемости:*

$$\hat{J}_1 = \sum_{i=1}^{n} x_0^T \left[V_c^* |\sigma_i|^{-1} 1_{ii} U_c \right] x_0, \tag{3.4}$$

или простому спектру матрицы динамики A*:*

$$\hat{J}_2 = \sum_{i=1}^{n} x_0^T \left[\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{\lambda_i^j (-\lambda_i)^\eta}{\dot{N}(\lambda_i) N(-\lambda_i)} A_j^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} C A_\eta \right] x_0. \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. В [2] доказано, что энергетические функционалы входной и выходной энергии $\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$ равны

$$\hat{J}_1 = \inf_{u,x} \int_{-\infty}^{0} \|u(t)\|^2 dt, \quad \hat{J}_2 = \int_{0}^{\infty} \|y(t), 0, \ x_0\|^2 dt.$$

В условиях теоремы они могут быть представлены в виде квадратичных форм

$$\hat{J}_1 = E_c(x_0) = x_0^{\mathrm{T}} P_c^{\#} x_0, \tag{3.6}$$

$$\hat{J}_2 = E_o(x_0) = x_0^{\mathrm{T}} P_o x_0, \tag{3.7}$$

где $P_c^{\#}$ — псевдоинверсия по Муру–Пенроузу матрицы грамиана управляемости, а P_o — матрица грамиана наблюдаемости. В условиях теоремы матрица грамиана управляемости является невырожденной матрицей, поэтому справедливо равенство

$$P_c^{\#} = P_c^{-1}.$$

Подставим спектральное разложение матрицы обратного грамиана в формулу (3.6), получим искомое спектральное разложение функционала входной энергии. В [11] было получено спектральное разложение грамиана наблюдаемости систем в форме псевдоганкелевых матриц Сяо [11, 22, 23]

$$P_o = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{\lambda_i^j (-\lambda_i)^\eta}{\dot{N}(\lambda_i) N(-\lambda_i)} A_j^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} C A_\eta.$$

Подставим спектральное разложение матрицы грамиана P_o (3.7), получим искомое спектральное разложение функционала выходной энергии. Теорема 4 доказана.

Функционалы $\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$ использовались в [10] для анализа степени устойчивости линейной системы на основе анализа аномалий квадрата H_2-нормы передаточной функции системы, обусловленных влиянием следующих слабоустойчивых мод:

- мод, близких началу координат,
- мод, близких мнимой оси,
- близких друг другу нескольких апериодических и колебательных мод.

В качестве основного инструмента анализа аномалий было предложено использовать асимптотические модели спектральных разложений функционалов J_1 и J_2 по простому и/или парному спектру матрицы динамики системы. Аналогичный подход можно распространить на анализ аномалий спектральных разложений метрик следов грамианов J_3 и J_4, а также на анализ степени достижимости линейной системы на основе аномалий спектральных разложений метрики смешанного грамиана J_5. Заметим, что спектральные разложения метрик зависят от собственных чисел матрицы динамики, которые привязаны к определенному узлу графа системы, что позволяет связать задачу оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств с определенными узлами на графе системы.

4. Заключение

Статья обобщает известные результаты декомпозиции грамианов для неустойчивых непрерывных линейных систем для вычисления их спектральных разложений наиболее простого случая разложений по парному спектру матрицы динамики. Большинство энергетических метрик, связанных с использованием грамианов, основано на вычислении спектра матриц динамики и мер минимальной энергии, требуемой для перехода системы из начальной в конечную точку. В работе показано, что спектральные разложения грамианов управляемости и их обратных грамианов позволяют в рамках единого подхода вычислить составляющие энергии, соответствующие характерным собственным числам матриц грамианов, которые определяют основной вклад в величину метрики достижимости и энергетической метрики устойчивости. Эти спектральные разложения представлены в виде формул, позволяющих анализировать влияние различных узлов графа системы на формирование энергетических метрик достижимости и устойчивости. Полученные результаты могут найти применение в задачах локализации и оптимального размещения датчиков и исполнительных механизмов на графе сложной многосвязной системы управления или в задачах размещения управляющих узлов на графе сложной социальной, транспортной, энергетической или биологической сети [25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM. Philadephia, 2005.
2. *Benner P., Damm T.* Lyapunov equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochastic Systems // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. P. 686–711.

3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Теория автоматического управления. Учеб. Пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
4. *Kailath T.* Linear Systems Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1980. 672 pp.
5. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20.
6. *Параев Ю.И., Перепелкин Е.А.* Линейные матричные уравнения в задачах анализа многосвязных динамических систем. Барнаул: Изд-во Алтайского ГТУ, 2000.
7. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во Н.Ф. Бочкаревой, 2006.
8. *Godunov S.K.* Modern Aspects of Linear Algebra / Trans. of Math. Monografs. V. 175. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1998.
9. *Yadykin I.B., Galyaev A.A.* On the methods for calculation of grammians and their use in analysis of linear dynamic systems Automation and Remote Control // Pleiades Publishing Ltd. V. 74. No. 2. P. 207–224.
10. *Ядыкин И.Б., Искаков А.Б.* Энергетический подход к анализу устойчивости линейных стационарных динамических систем // А и Т. 2016. № 12. С. 37–58.
11. *Yadykin I.B.* Spectral Decompositions of Gramians of Continuous Stationary Systems Given by Equations of State in Canonical Forms // Mathematics. 2022. V. 10. No. 13. 2339.
12. *Casadei G., Wit C., Zampieri S.* Model Reduction Based Approximation of the Output Controllability Gramian in Large-Scale Networks // IEEE Transactions on Control of Network Systems. 2020 V. 7. No. 4. P. 1778–1788. https://doi.org/10.1109/TCNS.2020.3000694
13. *Zhou K., Salomon G., Wu E.* Balanced realization and model reduction for unstable systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 1999. Vol. 9. No. 3. P. 183–198.
14. *Lee H., Park Y.* Degree of controllability for linear unstable systems // Journal of Vibration and Control. 2016. V. 22. No. 7. P. 1928–1934. https://doi.org/10.1177/1077546314545101
15. *Shaker H., Tahavori M.* Optimal sensor and actuator location for unstable systems // Journal of Vibration and Control. 2013. V. 19. No. 12. P. 1915–1920. https://doi.org/10.1177/1077546312451302
16. *Wal M., Jager B.* A review of methods for input/output selection // Automatica. 2001. V. 37. No. 4. P. 487–510. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(00)00181-3
17. *Birk W., Medvedev A.* A note on gramian-based interaction measures // 2003 European Control Conference (ECC). Cambridge, UK, 2003. P. 2625–2630. https://doi.org/10.23919/ECC.2003.7086437.
18. *Mehr F.* A Determination of Design of Optimal Actuator Location Based on Control Energy. London/Publisher: City, University of London, 2018.
19. *Петров Б.Н.* Избранные труды Т. 1. Теория автоматического управления. М: Наука, 1983. С. 432 (163–178, 223–227 (двукратная), 294–323).
20. *Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д.* Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. М: Наука, 1980. 243 с.
21. *Xiao C.S., Feng Z.M., Shan X.M.* On the Solution of the Continuous-Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms // IEE Proc. 1992. V. 139. No. 3. P. 286–290. https://doi.org/10.1049/ip-d.1992.0038

22. *Hauksdottir A., Sigurdsson S.* The continuous closed form controllability Gramian and its inverse // 2009 American Control Conference Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA June 10–12, 2009. P. 5345–5351.
https://doi.org/978-1-4244-4524-0/09

23. *Hsu C., Hou D.* Reducing Unstable Linear Control Systems via Real Schur Transformation // Electronics Letters. 1991. V. 27. No. 11.
https://doi.org/10.1049/el:19910614

24. *Safonov M., Chiang G.* A schur method for balanced-truncation model reduction // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 7. P. 729–733.
https://doi.org/10.1109/9.29399

25. *Lindmark G., Altafini C.* Minimum energy control for complex networks // Scientific Reports. 2018. V. 8. No. 3188. P. 1–14. https://doi.org/10.1038/s41598-018-21398-7

26. *Dilip A.* The Controllability Gramian, the Hadamard Product, and the Optimal Actuator/Leader and Sensor Selection Problem // Nature Physics. 2019. V. 3. No. 4. P. 883–888. https://doi.org/10.1109/LCSYS.2019.2919278

27. *Pasqualetti F., Zampieri S., Bullo F.* Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks // IEEE Transactions on Control of Network Systems. 2014. V. 1. No. 1. P. 40–52. https://doi.org/10.1109/ACC.2014.6858621

28. *Hac A., Liu L.* Sensor and actuator location in motion control of flexible structures // Journal of Sound and Vibration. 1993. V. 167. No. 2. P. 239–261.

29. *Faddeev D.K., Faddeeva V.N.* Computational Methods of Linear Algebra. Freeman: San-Francisco, CA, USA, 2016.

30. *Hanson B., Peeters R.* A Faddeev Sequence Method for solving Lyapunov and Sylvester Equations // Linear Algebra and its Applications. 1996. V. 241–243. P. 401–430.

31. *Nagar S., Singh S.* An algorithmic approach for system decomposition and balanced realized model reduction // Journal of the Franklin Institute. 2004. V. 341. No. 7. P. 615–630. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2004.07.005

32. Robust Control Tool Box, Mathworks, Version 2. 1997.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глумовым.

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 15.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023