

© 2023 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОДАВЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Предложен новый подход к задаче синтеза статического регулятора по состоянию или по выходу, оптимально подавляющего ограниченные внешние возмущения в линейной дискретной системе управления. Подход основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где одной из переменных является матрица обратной связи. Далее эта задача решается градиентным методом; его сходимость теоретически обосновывается для ряда важных частных случаев. Рассмотренный пример демонстрирует эффективность предложенной итерационной процедуры.

Ключевые слова: линейная дискретная система, внешние возмущения, обратная связь по выходу, обратная связь по состоянию, оптимизация, градиентный метод, метод Ньютона, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231023100094, EDN: YBXHZN

1. Введение

Рассмотрим линейную дискретную систему управления

$$(1) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Dw_k, \\ y_k &= Cx_k, \\ z_k &= C_1x_k, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с начальным состоянием x_0 , состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^l$, регулируемым выходом $z_k \in \mathbb{R}^r$, управлением $u_k \in \mathbb{R}^p$ и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:

$$(2) \quad |w_k| \leq 1 \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots$$

Задача о подавлении ограниченных внешних возмущений состоит в нахождении стабилизирующей обратной связи, минимизирующей величину $\max_k |z_k|$. В настоящей работе будем искать статическую линейную обратную связь по состоянию $u_k = Kx_k$ или по выходу $u_k = Ky_k$ (если она существует).

Точное решение этой задачи затруднительно; следуя подходу, предложенному в [1–3], будем искать субоптимальное решение этой задачи в терминах инвариантных эллипсоидов. При этом исходную задачу будем рассматривать

как задачу оптимизации, где одной из переменных является матрица обратной связи, а минимизируемая функция определяет критерий качества — величину эллипсоида, содержащего регулируемый выход системы. Такой подход восходит к работам [4, 5], посвященным проблеме линейно-квадратичного регулирования.

Настоящая работа является естественным продолжением статьи [6], в которой с тех же позиций рассматривается и решается задача подавления ограниченных внешних возмущений для линейной системы управления в непрерывном времени.

Структура статьи следующая. В разделе 2 обсуждается алгоритм решения задачи анализа (нахождения минимального ограничивающего эллипсоида для замкнутой системы). В разделе 3 задача синтеза регулятора записывается как задача невыпуклой матричной оптимизации, даются формулировка и обоснование итеративного алгоритма ее решения, а раздел 4 содержит демонстрационный пример.

2. Задача анализа

Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$(3) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k \end{aligned}$$

с устойчивой (шуровской) матрицей $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, начальным состоянием x_0 , состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, выходом $z_k \in \mathbb{R}^l$ и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению (2).

Напомним, что эллипсоид вида

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0$$

называется инвариантным для системы (3), если из условия $x_0 \in \mathcal{E}_x$ следует $x_k \in \mathcal{E}_x$ для всех моментов времени $k = 1, 2, \dots$. При этом, если \mathcal{E}_x — инвариантный эллипсоид с матрицей P , то выход z_k системы (3) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ принадлежит так называемому ограничивающему эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^l : z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1\},$$

а при $x_0 \notin \mathcal{E}_x$ будет стремиться к нему.

Задача анализа состоит в оценке степени влияния внешних возмущений на вектор выхода системы. В рамках предлагаемого подхода будем интересоваться минимальными эллипсоидами, содержащими выход системы; в качестве критерия минимальности эллипсоида обычно принимается величина $\text{tr} CPC^T$, равная сумме квадратов его полуосей. Имеет место следующий результат.

Теорема 1 [1, 3]. Пусть матрица A шуровская, $\rho = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$, а матрица $P(\alpha) \succ 0$, $\rho^2 < \alpha < 1$, удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha} APA^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0.$$

Тогда задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде для системы (3) сводится к минимизации одномерной функции

$$f(\alpha) = \text{tr} CP(\alpha)C^T$$

на интервале $\rho^2 < \alpha < 1$, и если α^* — точка минимума и x_0 удовлетворяет условию $x_0^T P^{-1}(\alpha^*) x_0 \leq 1$, то гарантируется оценка

$$|z_k| \leq \sqrt{f(\alpha^*)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В статье [7] было предложено применять метод Ньютона для решения оптимизационной задачи, сформулированной в теореме 1. А именно, зададимся начальным приближением $\rho^2(A) < \alpha_0 < 1$, например $\alpha_0 = (1 + \rho^2(A))/2$, и применим итерационный процесс

$$(4) \quad \alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)},$$

где

$$f'(\alpha) = \text{tr} Y \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} DD^T - \frac{1}{\alpha^2} APA^T \right),$$

$$f''(\alpha) = 2 \text{tr} Y \left(\frac{1}{(1-\alpha)^3} DD^T + \frac{1}{\alpha^3} A(P-X)A^T \right),$$

а P , Y и X — решения дискретных уравнений Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha} APA^T - P + \frac{1}{1-\alpha} DD^T = 0, \quad \frac{1}{\alpha} A^T Y A - Y + C^T C = 0$$

и

$$\frac{1}{\alpha} AXA^T - X + \frac{1}{(1-\alpha)^2} DD^T - \frac{1}{\alpha^2} APA^T = 0.$$

Следующая теорема гарантирует глобальную сходимость алгоритма; ее справедливость устанавливается аналогично сходному результату в [6].

Теорема 2. В методе (4) справедливы оценки

$$|\alpha_j - \alpha^*| \leq \frac{f''(\alpha_0)}{2^j f''(\alpha^*)} |\alpha_0 - \alpha^*|, \quad |\alpha_{j+1} - \alpha^*| \leq c |\alpha_j - \alpha^*|^2,$$

где $c > 0$ — некоторая константа.

3. Задача синтеза

Вернемся к системе (1) и будем далее предполагать, что матрицы D и C_1 — квадратные невырожденные.¹ Задача состоит в нахождении статической линейной обратной связи по выходу

$$u_k = Ky_k$$

¹ Это техническое предположение безусловно можно ослабить, но цель сейчас — получить наиболее простые и наглядные результаты.

(а в случае $C = I$ — обратную связь по состоянию), которая стабилизирует замкнутую систему (1) и подавляет воздействие внешних возмущений (2), минимизируя размер ограничивающего эллипсоида для регулируемого выхода z_k . В качестве критерия оптимальности примем величину

$$\text{tr } C_1 P C_1^T + \rho \|K\|_F^2,$$

первая компонента которой определяет размер ограничивающего эллипсоида, а вторая представляет собой штраф, позволяющий избежать появления больших значений матрицы регулятора (коэффициент $\rho > 0$ регулирует его важность).

С учетом теоремы 1 исходная задача сводится к матричной оптимизационной задаче

$$\min f(K, \alpha), \quad f(K, \alpha) = \text{tr } C_1 P C_1^T + \rho \|K\|_F^2,$$

при ограничении

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha} (A + BKC)P(A + BKC)^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0$$

относительно матричных переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и скалярного параметра $0 < \alpha < 1$.

Как было показано в разделе 2, минимизацию по параметру α можно проводить достаточно эффективно (нужно лишь матрицу A заменить на $A + BKC$), поэтому займемся минимизацией функции

$$f(K) = \min_{\alpha} f(K, \alpha).$$

Сделаем следующее предположение.

Предположение. Известен стабилизирующий регулятор K_0 , т.е. такой, что матрица $A + BK_0C$ шуровская.

Отметим, что функция $f(K)$ определена и положительна на множестве \mathcal{S} стабилизирующих регуляторов. Множество \mathcal{S} ее определения может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими; здесь ситуация полностью аналогична непрерывному случаю (см. [6]).

Лемма 1. Функция $f(K)$ коэрцитивна на множестве \mathcal{S} стабилизирующих регуляторов (т.е. стремится к бесконечности на его границе), причем

$$(6) \quad f(K) \geq \frac{1}{1 - \rho^2(A + BKC)} \frac{\lambda_{\min}(CC^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A + BKC)} \|D\|_F^2,$$

$$f(K) \geq \rho \|K\|^2.$$

Следствие 1. Множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{K \in \mathcal{S} : f(K) \leq f(K_0)\}$$

ограничено для любого регулятора $K_0 \in \mathcal{S}$.

С другой стороны, у функции $f(K)$ на множестве \mathcal{S}_0 существует точка минимума (как у непрерывной функции на компактном множестве), но множество \mathcal{S}_0 не имеет общих точек с границей \mathcal{S} в силу (6). Далее будет показано, что $f(K)$ дифференцируема на \mathcal{S}_0 , следовательно, справедлив следующий результат.

Следствие 2. Существует точка минимума K_ на множестве \mathcal{S} , и в ней градиент обращается в нуль.*

Свойства градиента и гессиана функции $f(K, \alpha)$ устанавливаются следующими двумя леммами.

Лемма 2. Функция $f(K, \alpha)$ определена и дифференцируема на множестве \mathcal{S} стабилизирующих регуляторов K и для $\rho^2(A + BKC) < \alpha < 1$. При этом

$$(7) \quad \frac{1}{2} \nabla_K f(K, \alpha) = \rho K + \frac{1}{\alpha} B^T Y (A + BKC) P C^T,$$

$$\nabla_\alpha f(K, \alpha) = \text{tr} Y \left(\frac{1}{(1 - \alpha)^2} D D^T - \frac{1}{\alpha^2} (A + BKC) P (A + BKC)^T \right),$$

где матрицы P и Y — решения дискретных уравнений Ляпунова

$$(8) \quad \frac{1}{\alpha} (A + BKC) P (A + BKC)^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0$$

и

$$(9) \quad \frac{1}{\alpha} (A + BKC)^T Y (A + BKC) - Y + C_1^T C_1 = 0.$$

Минимум функции $f(K, \alpha)$ достигается во внутренней точке множества $\mathcal{S} \times (\rho^2(A + BKC), 1)$ и определяется условиями

$$\nabla_K f(K, \alpha) = \nabla_\alpha f(K, \alpha) = 0.$$

При этом $f(K, \alpha)$ как функция от α строго выпукла на интервале $\rho^2(A + BKC) < \alpha < 1$ и достигает минимума в его внутренней точке.

Лемма 3. Функция $f(K, \alpha)$ дважды дифференцируема по K , причем действие гессиана функции на произвольную матрицу² $E \in \mathbb{R}^{p \times l}$ дается выражением

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \nabla_K^2 f(K, \alpha)[E, E] = \\ & = \rho \langle E, E \rangle + \frac{1}{\alpha} \langle B^T Y B E C P C^T, E \rangle + \frac{2}{\alpha} \langle B^T Y (A + BKC) P' C^T, E \rangle, \end{aligned}$$

где P' — решение дискретного уравнения Ляпунова

$$(10) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} (A + BKC) P' (A + BKC)^T - P' + \\ & + \frac{1}{\alpha} \left((A + BKC) P (B E C)^T + B E C P (A + BKC)^T \right) = 0. \end{aligned}$$

² Понимаемое в смысле второй производной по направлению.

Градиент функции $f(K, \alpha)$ как функция от K не является липшицевым на множестве \mathcal{S} стабилизирующих регуляторов, однако можно показать, что — как и в непрерывном случае — он обладает этим свойством на его подмножестве \mathcal{S}_0 .

Полученные свойства минимизируемой функции позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость. А именно, предлагается итеративный подход к решению этой задачи, в основе которого лежит применение градиентного метода по переменной K и метода Ньютона по переменной α .

Приведем принципиальную схему алгоритма.

1. Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \tau < 1$ и начальным стабилизирующим приближением K_0 . Вычисляем величину

$$\alpha_0 = \frac{1 + \rho^2(A + BK_0C)}{2}.$$

2. На j -й итерации заданы K_j и α_j . Вычисляем $A_j = A + BK_jC$, решаем уравнения (8), (9) и находим матрицы P , Y ; вычисляем градиент

$$H_j = \nabla_K f(K_j, \alpha_j)$$

из соотношения (7).

Если $\|H_j\| \leq \varepsilon$, то регулятор K_j принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j H_j.$$

Длину шага $\gamma_j > 0$ подбираем дроблением γ до выполнения условий:

- а. K_{j+1} — стабилизирующий регулятор: матрица $(A + BK_{j+1}C)/\sqrt{\alpha_j}$ шуровская;
- б. $f(K_{j+1}) \leq f(K_j) - \tau\gamma_j\|H_j\|^2$.

4. Для полученного K_{j+1} решаем задачу минимизации $f(K_{j+1}, \alpha)$ по α и находим α_{j+1} .

Переходим к п. 2.

Предлагаемый метод сходится в следующем смысле.

Теорема 3. На каждой итерации реализуется лишь конечное число дроблений γ_j , функция $f(K_j)$ монотонно убывает и градиент стремится к нулю

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|H_j\| = 0$$

со скоростью геометрической прогрессии.

Доказательство полностью аналогично непрерывному случаю и использует обычную схему анализа градиентного метода для безусловной минимизации функций с липшицевым градиентом [8].

4. Пример

Рассмотрим систему вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0,9950 & 0,0050 & 0,0998 & 0,0002 \\ 0,0050 & 0,9950 & 0,0002 & 0,0998 \\ -0,0997 & 0,0997 & 0,9950 & 0,0050 \\ 0,0997 & -0,0997 & 0,0050 & 0,9950 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0000 \\ 0,0998 \\ 0,0002 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0,0050 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0050 \\ 0,0998 & 0,0002 \\ 0,0002 & 0,0998 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

представляющую собой слегка видоизмененный пример 4.3.2 из монографии [3].

Положим $\rho = 0,1$ и возьмем в качестве начального некоторый стабилизирующий регулятор

$$K_0 = \begin{pmatrix} -2,9823 \\ -3,9608 \end{pmatrix}.$$

Итерационный процесс завершается на 25-м шаге и предоставляет регулятор

$$K_* = \begin{pmatrix} -0,6519 \\ -1,8166 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ограничивающий эллипс по регулируемому выходу системы с матрицей

$$\begin{pmatrix} 19,2309 & -3,4643 \\ -3,4643 & 10,3506 \end{pmatrix}.$$

Динамика итерационного процесса показана на рис. 1.

Взяв в качестве начального приближения стабилизирующий регулятор

$$K'_0 = \begin{pmatrix} -0,3675 \\ -0,7106 \end{pmatrix},$$

на 24-м шагу получаем регулятор

$$K'_* = \begin{pmatrix} -0,6527 \\ -1,8166 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ограничивающий эллипс с матрицей

$$\begin{pmatrix} 19,2293 & -3,4638 \\ -3,4638 & 10,3543 \end{pmatrix}.$$

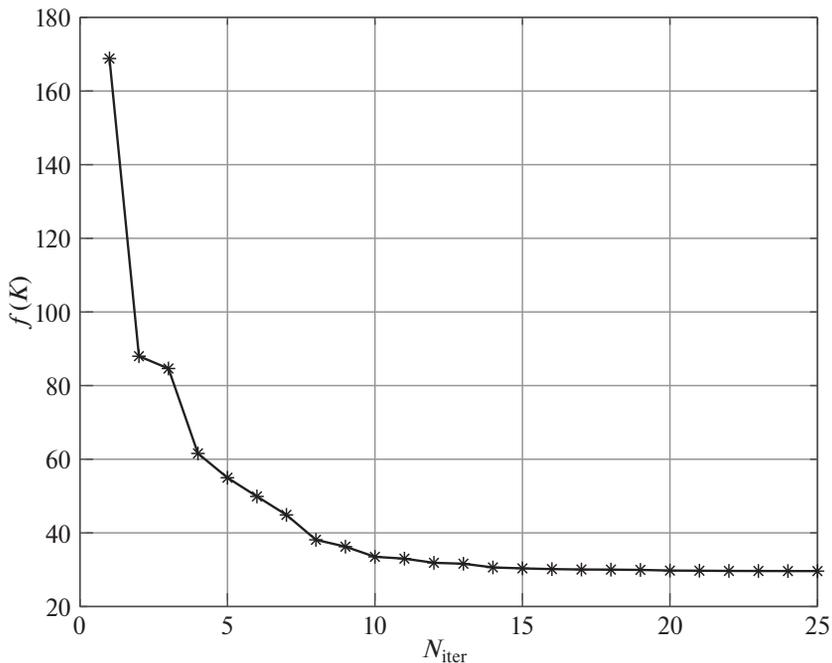


Рис. 1. Оптимизационная процедура.

Обратим внимание, что регуляторы K_* и K'_* отличаются по норме на доли процента, так же, как и найденные ограничивающие эллипсы (по критерию следа).

Для сравнения решим эту же задачу, построив обратную связь в виде динамического регулятора

$$u_k = K \hat{x}_k$$

при помощи наблюдателя

$$\hat{x}_{k+1} = A \hat{x}_k + B u_k + L(y_k - C \hat{x}_k), \quad \hat{x}_0 = 0.$$

Следуя подходу [3], основанному на использовании техники линейных матричных неравенств, получаем матрицу обратной связи

$$K = \begin{pmatrix} -39,0055 & -46,7193 & -8,5074 & -98,0176 \end{pmatrix},$$

матрицу наблюдателя

$$L = \begin{pmatrix} 0,5655 & 0,0759 \\ -6,7183 & 1,8722 \\ -2,2061 & 1,0573 \\ -2,8715 & 0,7224 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\begin{pmatrix} 32,2165 & -14,9238 \\ -14,9238 & 36,3654 \end{pmatrix}$$

эллипса, содержащего регулируемый выход.

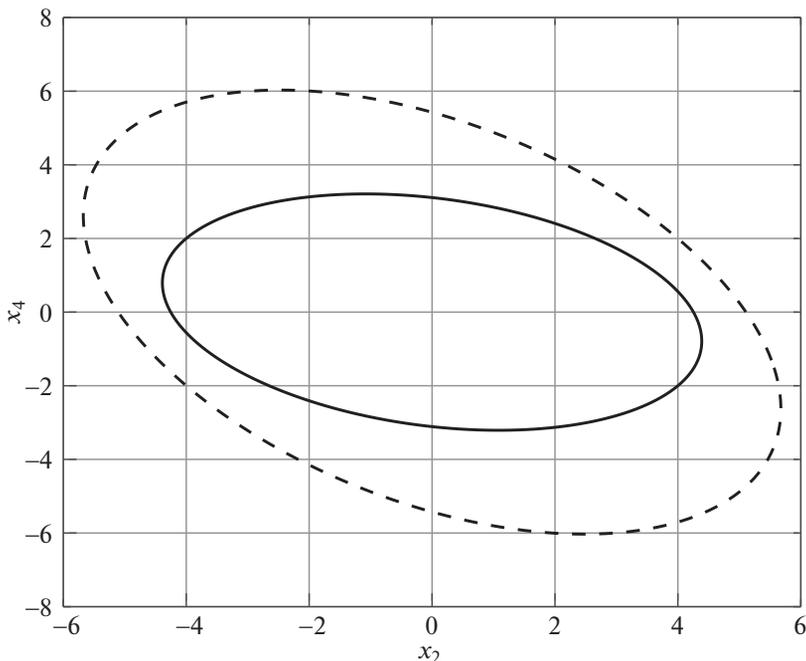


Рис. 2. Ограничивающие эллипсы.

Небольшое техническое различие между постановками этих задач состоит в том, что в последнем случае вместо регуляризующей добавки $\rho \|K\|_F^2$ в минимизируемой функции с теми же целями в регулируемый выход системы вводится дополнительный член с управлением: $z_k = C_1 x_k + B_1 u_k$.

На рис. 2 сплошной линией показан ограничивающий эллипс, найденный в соответствии с предлагаемой итерационной процедурой, а пунктиром — эллипс, предоставляемый динамическим регулятором. Довольно большая разница в размерах эллипсов объясняется тем, что при построении динамической обратной связи приходится производить ряд закруглений для того, чтобы линеаризовать матричные неравенства, что и приводит к излишнему консерватизму.

5. Заключение

Предложен новый подход к задаче синтеза регулятора, оптимально подавляющего ограниченные внешние возмущения в линейной дискретной системе. Он основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменной является матрица обратной связи. Далее эта задача решается градиентным методом; его сходимость теоретически обосновывается для ряда важных частных случаев. Рассмотренный пример демонстрирует эффективность предложенной процедуры.

В работе рассмотрена проблема подавления внешних возмущений при достаточно жестких ограничениях: в частности, предполагается, что размерность возмущений и регулируемых выходов совпадает с числом состояний.

Однако метод работает и достаточно эффективен и при отсутствии таких ограничений; его обоснование представляет собой важную задачу.

Поскольку область определения $f(K)$ может быть даже несвязной, трудно рассчитывать на сходимость к глобальному минимуму. Однако для задачи управления по состоянию, как и в непрерывном случае, по-видимому, можно ожидать, что минимизируемая функция удовлетворяет *условию градиентного доминирования* и ожидать глобальную сходимость к единственной точке минимума.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Рассмотрим последовательность допустимых регуляторов $\{K_j\} \in \mathcal{S}$ такую, что $K_j \rightarrow K \in \partial\mathcal{S}$, т.е. $\rho(A + BK_jC) = 1$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon)$ такое, что неравенство

$$|\rho(A + BK_jC) - \rho(A + BK_jC)| = 1 - \rho(A - BK_jC) < \varepsilon$$

справедливо для всех $j \geq N(\varepsilon)$.

Пусть P_j — решение уравнения (5), ассоциированного с регулятором K_j :

$$\frac{1}{\alpha_j}(A + BK_jC)P_j(A + BK_jC)^T - P_j + \frac{1}{1 - \alpha_j}DD^T = 0,$$

а Y_j — решение двойственного к нему дискретного уравнения Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha_j}(A + BK_jC)^TY_j(A + BK_jC) - Y_j + C_1C_1^T = 0.$$

Тогда с учетом [6, леммы П.1, П.2] и [7, лемма П.1.2] имеем:

$$\begin{aligned} f(L_j) &= \text{tr } C_1P_jC_1^T + \rho\|K_j\|_F^2 \geq \text{tr } P_jC_1C_1^T = \text{tr} \left(Y_j \frac{1}{1 - \alpha_j} DD^T \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{1 - \alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \|D\|_F^2 \geq \frac{1}{1 - \alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(C_1C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A + BK_jC)} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{1 - \rho^2(A + BK_jC)} \frac{\lambda_{\min}(C_1C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A + BK_jC)} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \rho(A + BK_jC)} \frac{\lambda_{\min}(C_1C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A + BK_jC)} \|D\|_F^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

поскольку $\rho^2(A + BK_jC) < \alpha_j < 1$.

С другой стороны,

$$f(K_j) = \text{tr } C_1 P_j C_1^T + \rho \|K_j\|_F^2 \geq \rho \|K_j\|_F^2 \geq \rho \|K_j\|^2 \xrightarrow{\|K_j\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Дифференцирование по α производится в соответствии с результатами, приведенными в разделе 2, с заменой A на $A + BKC$.

Придадим в уравнении (5) величине K приращение ΔK и обозначим соответствующее приращение P через ΔP :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} (A + B(K + \Delta K)C)(P + \Delta P)(A + B(K + \Delta K)C)^T - \\ & - (P + \Delta P) + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0. \end{aligned}$$

Оставляя обозначение ΔP для главной части приращения, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \left((A + BKC)P(A + BKC)^T + B\Delta KCP(A + BKC)^T + \right. \\ & \left. + (A + BKC)P(B\Delta KC)^T + (A + BKC)\Delta P(A + BKC)^T \right) - \\ & - (P + \Delta P) + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0. \end{aligned}$$

После вычитания уравнения (5) из этого уравнения имеем

$$\begin{aligned} \text{(П.1)} \quad & \frac{1}{\alpha} (A + BKC)\Delta P(A + BKC)^T - \Delta P + \\ & + \frac{1}{\alpha} \left((A + BKC)P(B\Delta KC)^T + B\Delta KCP(A + BKC)^T \right) = 0. \end{aligned}$$

Вычислим приращение функционала $f(K)$, линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned} \Delta f(K) &= f(K) - f(K + \Delta K) = \\ &= \text{tr } C_1 (P + \Delta P) C_1^T + \rho \|K + \Delta K\|_F^2 - (\text{tr } C_1 P C_1^T + \rho \|K\|_F^2) = \\ &= \text{tr } C_1 \Delta P C_1^T + \rho \text{tr } K^T \Delta K + \rho \text{tr } (\Delta K)^T K = \text{tr } \Delta P C_1^T C_1 + 2\rho \text{tr } K^T \Delta K. \end{aligned}$$

По лемме [6, лемма П.1] из двойственных уравнений (П.1) и (9) имеем

$$\begin{aligned} \Delta f(K) &= 2 \text{tr } Y \frac{1}{\alpha} B \Delta K C P (A + BKC)^T + 2\rho \text{tr } K^T \Delta K = \\ &= 2 \text{tr} \left(\rho K^T + \frac{1}{\alpha} C P (A + BKC)^T Y B \right) \Delta K = \\ &= 2 \left\langle \rho K + \frac{1}{\alpha} B^T Y (A + BKC) P C^T, \Delta K \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к соотношению (7). Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Вычислим величину

$$\nabla_K^2 f(K, \alpha)[E, E] = \langle \nabla_K^2 f(K, \alpha)[E], E \rangle,$$

взяв производную от $\nabla_K f(K, \alpha)[E] = \langle \nabla_K f(K, \alpha), E \rangle$ по направлению $E \in \mathbb{R}^{p \times l}$.

Линеаризуя соответствующие величины, вычислим приращение функционала $\nabla_K f(K, \alpha)[E]$ по направлению E :

$$\begin{aligned} & \Delta \nabla_K f(K, \alpha)[E] = \\ & = 2 \left(\rho(K + \delta E) + \frac{1}{\alpha} B^T (Y + \Delta Y) (A + B(K + \delta E)C) (P + \Delta P) C^T \right) - \\ & \quad - 2 \left(\rho K + \frac{1}{\alpha} B^T Y (A + BKC) P C^T \right) = \\ & = 2\delta \left(\rho E + \frac{1}{\alpha} B^T (Y B E C P + Y'(K)[E](A + BKC)P + \right. \\ & \quad \left. + Y(A + BKC)P'(K)[E]) C^T \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(K + \delta E) - P(K) = \delta P'(K)[E], \\ \Delta Y &= Y(K + \delta E) - Y(K) = \delta Y'(K)[E]. \end{aligned}$$

Таким образом, обозначая $P' = P'(K)[E]$ и $Y' = Y'(K)[E]$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \nabla_K^2 f(K, \alpha)[E, E] = \\ & = \left\langle \rho E + \frac{1}{\alpha} B^T (Y B E C P + Y'(A + BKC)P + Y(A + BKC)P') C^T, E \right\rangle. \end{aligned}$$

Далее, $P = P(K)$ есть решение дискретного уравнения Ляпунова (5); запишем его в приращениях по направлению E :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} (A + B(K + \delta E)C) (P + \delta P') (A + B(K + \delta E)C)^T - \\ & \quad - (P + \delta P') + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \left((A + BKC)P(A + BKC)^T + (A + BKC)\delta P'(A + BKC)^T + \right. \\ & \quad \left. + (A + BKC)P(B\delta EC)^T + B\delta EC P(A + BKC)^T \right) - \\ & \quad - (P + \delta P') + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0, \end{aligned}$$

откуда с учетом (5) приходим к уравнению (10).

Далее, $Y = Y(K)$ есть решение дискретного уравнения Ляпунова (9); запишем его в приращениях по направлению E :

$$\frac{1}{\alpha}(A + B(K + \delta E)C)^T(Y + \delta Y')(A + B(K + \delta E)C) - (Y + \delta Y') + C_1^T C_1 = 0$$

или

$$\frac{1}{\alpha} \left((A + BKC)^T Y (A + BKC) + (A + BKC)^T \delta Y' (A + BKC) + (A + BKC)^T Y B \delta EC + (B \delta EC)^T Y (A + BKC) \right) - (Y + \delta Y') + C_1^T C_1 = 0.$$

С учетом (9) имеем

$$(П.2) \quad \frac{1}{\alpha}(A + BKC)^T Y' (A + BKC) - Y' + \frac{1}{\alpha} \left((A + BKC)^T Y B E C + (B E C)^T Y (A + BKC) \right) = 0.$$

Из (10) и (П.2) имеем соотношение

$$\text{tr } P'(A + BKC)^T Y B E C = \text{tr } Y' B E C P (A + BKC)^T,$$

так что

$$\frac{1}{2} \nabla_K^2 f(K, \alpha)[E, E] = \rho \langle E, E \rangle + \frac{1}{\alpha} \langle B^T Y B E C P C^T, E \rangle + \frac{2}{\alpha} \langle B^T Y (A + BKC) P' C^T, E \rangle.$$

Лемма 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
2. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2007. № 3. С. 106–125.
Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
4. *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control // *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana.* 1960. V. 5. No. 1. P. 102–119.
5. *Levine W., Athans M.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1970. V. 15. No. 1. P. 44–48.

6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // *АиТ.* 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
7. *Хлебников М.В.* Сравнение гарантирующего и калмановского фильтров // *АиТ.* 2023. № 4. С. 64–95.
Khlebnikov M.V. A Comparison of Guaranteeing and Kalman Filters // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 4. P. 434–459.
8. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. 2-е изд. М.: УРСС, 2014.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глузовым.

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 24.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023