

© 2023 г. А.А. ГАЛЯЕВ, чл.-корр. РАН (galaev@ipu.ru),  
В.П. ЯХНО, канд. техн. наук (vic\_iakhno@mail.ru),  
П.В. ЛЫСЕНКО, канд. физ.-мат. наук (pavellysen@ipu.ru),  
Л.М. БЕРЛИН (berlin.lm@phystech.edu),  
М.Э. БУЗИКОВ (me.buzikov@physics.msu.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНА ПЕРЕХВАТА ПРЯМОЛИНЕЙНО ДВИЖУЩИХСЯ ЦЕЛЕЙ<sup>1</sup>

Рассматривается задача комбинаторной оптимизации поиска плана перехвата в простых движениях прямолинейно движущихся целей как модификация динамической задачи коммивояжера. Вводятся новые для такой задачи макрохарактеристики и определения, которые используются для классификации полученных решений. Описаны векторные критерии, составленные из нескольких функционалов, имеющих прикладное значение. Для двух типов критериев доказаны принципы неоптимальности простоя и максимальной скорости. Предложен и реализован интеллектуальный полнопереборный алгоритм с элементами динамического программирования для поиска оптимальных планов по введенным критериям перехвата. Для набора различных начальных обстановок собрана статистика решений разработанного алгоритма, на которой исследованы предложенные макрохарактеристики и сделаны выводы об их применимости в качестве локальных правил для жадного алгоритма поиска субоптимального плана перехвата.

*Ключевые слова:* динамическая задача коммивояжера, комбинаторная оптимизация, перехват в простых движениях.

DOI: 10.31857/S0005231023100033, EDN: YEYLZE

### 1. Введение

Непрерывное развитие интеллектуальных технологий в сфере автономных беспилотных аппаратов делает возможным их совместное использование в различных миссиях и сценариях, которые еще в недавнем времени рассматривались как невозможные. Одним из таких сценариев применения служит задача предотвращения проникновения прямолинейно движущихся целей в заданную точку пространства посредством их перехвата. Оказывается, что при формализации и дальнейшем решении задачи перехвата множества целей важную роль играет проблема оптимального выбора порядка их обхода. Строго говоря оптимальный, с точки зрения одного критерия, выбор может оказаться плохим при использовании другого критерия. Например, если под

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-19-00134).

оптимальным выбором порядка обхода движущихся целей наивно понимается такой выбор порядка обхода, что все вражеские цели должны быть перехвачены за наименьшее время на наибольшей от защищаемой точки дистанции, то можно показать внутреннюю противоречивость такого требования. Действительно, если представить ситуацию, в которой один защитник противостоит двум вражеским целям, причем одна из них быстрая, а другая медленная, то при атаке места старта защитника с диаметрально противоположных сторон, быстрее всего по времени будет сначала перехватить медленную цель, дав быстрой подобраться ближе, но если перехватить сначала быструю цель, а потом медленную, то наименьшее расстояние до защищаемой точки будет больше, чем в первом случае.

Известная в литературе под названием “динамическая задача коммивояжера” (ДЗК) [1, 2] или Moving Targets Traveling Salesman Problem (MTTSP) [3, 4] является самой близкой по смыслу к исследуемой в данной работе задаче построения оптимального плана перехвата движущихся целей. ДЗК является обобщением задачи коммивояжера (ЗК). В 1972 г. была показана NP-полнота задачи о гамильтоновом цикле, что подразумевает NP-полноту ДЗК [5]. Одной из первых постановок ДЗК для прямолинейно движущихся целей стала работа [1], в которой было установлено, что аппарат динамического программирования может применяться для построения эффективного алгоритма поиска оптимального плана перехвата.

В ДЗК, как правило, предполагается, что объект управления имеет динамику простых движений (управляемым входом служит вектор скорости). При определенных условиях [1, 4] такое предположение позволяет перейти от дискретно-непрерывной задачи оптимизации к дискретной. Модель простых движений может быть достаточно грубым приближением для построения опорных траекторий реального объекта управления, однако использование более точных моделей, учитывающих, например, маневренность объекта управления, не позволяют перейти от дискретно-непрерывной задачи к дискретной для получения точного решения даже в случае неподвижных целей [6, 7]. При этом, если объект управления достаточно маневренный и дистанции при перемещении между целями велики (в сравнении с минимальным радиусом разворота такого объекта), то учет маневренности в задаче планирования обхода целей не оказывает влияния на структуру оптимального плана.

Методы решения ДЗК можно разделить на следующие категории:

- с дискретизацией времени [3, 8, 9] или без [1, 4, 8, 10, 11];
- дающие оптимальное решение [3, 4, 8] или субоптимальное [9–11];
- детерминированные [1, 3, 4, 8, 9, 12] или случайные [10, 11, 13].

Для задачи предотвращения достижения целями заданной точки с возвращением коммивояжера в нее после каждой встречи с целью на основе понятия опасности цели предложен алгоритм построения гарантированного плана перехвата [4].

В настоящей работе будет рассмотрена задача оптимизации плана перехвата для векторного критерия, формализованы понятия опасности, удоб-

ства и сложности перехвата, предпочтение будет отдано детерминированным методам без дискретизации времени и дающим оптимальное решение (без гарантий быстрого завершения).

Статья состоит из введения, четырех разделов и заключения и имеет следующую структуру. В разделе 2 формализуется новая постановка задачи поиска оптимального плана для перехвата прямолинейно движущихся в одну защищаемую точку целей, вводятся множество допустимых планов, векторные критерии задачи, дается определение гарантированного плана перехвата. В разделе 3 доказываются теоремы о гарантированности перехвата и о принципе неоптимальности простоя, а также вводятся новые понятия опасности обстановки, удобства и сложности плана перехвата. Раздел 4 посвящен интеллектуальному алгоритму полного перебора, значительно сокращающего количество операций вызова функций вычисления перехвата. Далее, в разделе 5 приводятся результаты моделирования на основе предложенного алгоритма и статистически исследуются свойства оптимальных планов. В разделе 6 формируются планы дальнейшей работы.

## 2. Постановка задачи

### 2.1. Математическая модель

Полагаем, что защищаемая точка расположена на плоскости в начале координат, а цели появляются на внешней границе круга радиуса  $R$  в слое толщиной  $2\Delta R$  в секторе с центральным углом  $\alpha$ . Цели движутся прямолинейно с известными скоростями, находящимися в заданном диапазоне  $[v_{\min}, v_{\max}]$ . Коммивояжер в исходный момент времени находится в начале координат и движется в классе простых движений со скоростью  $v(t) \in [0, V]$ , при этом  $V > v_{\max}$ . Будем считать, что движущиеся цели нужно обойти и обслужить коммивояжеру как можно дальше от защищаемого объекта, подвергая его как можно меньшей опасности.

*Определение 1. Совокупность начальных условий для движущихся целей и коммивояжера с фиксацией всех параметров задачи назовем начальной обстановкой.*

Обстановка может изменяться, поскольку меняются и уточняются текущие данные об объектах. Поскольку за начальный момент времени может быть выбран любой момент, в котором известны все параметры задачи, то ситуацию в этот момент будем называть текущей обстановкой.

Будем считать, что таких целей всего  $m$  штук и каждая из них в начальный момент времени расположена в точке

$$\mathbf{r}_j^0 = (x_j^0, y_j^0), \quad \text{где } j = 1, \dots, m.$$

Также будем считать, что каждая цель движется с постоянной скоростью

$$\mathbf{v}_j = (v_{x,j}, v_{y,j}).$$

Таким образом, траектория движения каждой цели представляет собой прямую линию

$$(1) \quad \mathbf{r}_j(t) = \mathbf{r}_j^0 + \mathbf{v}_j t, \quad j = 1, \dots, m$$

с ограничениями на параметры следующего вида:

$$(2) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{v}_j\| &\in [v_{\min}, v_{\max}], \quad v_{\max} < V, \\ \|\mathbf{r}_j^0\| &\in [R - \Delta R, R + \Delta R], \\ \operatorname{arctg} \frac{y_j^0}{x_j^0} &\in \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right]. \end{aligned}$$

После момента времени, когда какая-либо цель достигнет начала координат, обслуживать ее не имеет смысла. Этот момент времени для цели под номером  $j$  можно вычислить следующим образом:

$$(3) \quad t_j^0 = \frac{\|\mathbf{r}_j^0\|}{\|\mathbf{v}_j\|}.$$

Динамика коммивояжера описывается системой дифференциальных уравнений следующего вида:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x}^I(t) &= v(t) \cos \psi(t), \quad v(t) \in [0, V]; \\ \dot{y}^I(t) &= v(t) \sin \psi(t), \quad \psi(t) \in [0, 2\pi); \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}^I(t) = (x^I(t), y^I(t))$  — положение коммивояжера в момент времени  $t$ ;  $\psi(t)$  — управление направлением скорости на плоскости. Коммивояжер в начальный момент находится в начале координат,  $\mathbf{r}^I(t) = (x^I(0), y^I(0)) = (0, 0)$ .

Чтобы привести формальную постановку задачи построения плана как задачи оптимизации, требуется привести формальное описание модели задачи, определить, что подразумевается под решением этой задачи, какие решения являются допустимыми и какой критерий качества используется при поиске решения.

Принципы неоптимальности простоя и движения на максимальной скорости будут доказаны в работе далее. Функция перехвата строится для задачи наискорейшего перехвата цели, движущейся равномерно по прямой, с помощью коммивояжера, имеющего кинематику простых движений, и сводится к поиску наименьшего положительного корня следующего квадратного уравнения относительно времени перехвата  $\tau$ :

$$(\mathbf{r}_j + \mathbf{v}_j \tau)^2 = V^2 \tau^2.$$

Здесь  $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}^I(t)$  — вектор относительного положения коммивояжера и цели с номером  $j$ ,  $\mathbf{r}^I(t)$  — текущее положение коммивояжера,  $V$  — максимальная скорость коммивояжера,  $\mathbf{v}_j$  — вектор скорости цели. Обозначим наименьший неотрицательный корень этого уравнения через  $\tau(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j)$ . Можно показать, что в случае  $\mathbf{v}_j^2 < V^2$  справедливо выражение

$$(5) \quad \tau(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j) = \frac{(\mathbf{v}_j, \mathbf{r}_j) + \sqrt{(\mathbf{v}_j, \mathbf{r}_j)^2 + \mathbf{r}_j^2 (V^2 - \mathbf{v}_j^2)}}{V^2 - \mathbf{v}_j^2}.$$

## 2.2. Индивидуальный план

Будем говорить, что для коммивояжера задан индивидуальный план  $\pi$  по обслуживанию  $k \in \{0, \dots, m\}$  целей, если  $\pi$  является кортежем из  $k$  различных чисел из  $\mathcal{M} = \{1, \dots, m\}$ . Порядок следования чисел в кортеже определяет порядок обслуживания целей. Пространство всех индивидуальных планов по обслуживанию  $k \in \{0, \dots, m\}$  целей можно описать так:

$$\Pi_k = \left\{ (\pi_1, \dots, \pi_k) \in \mathcal{M}^k : \forall p, q \in \{1, \dots, k\} \quad p \neq q \rightarrow \pi_p \neq \pi_q \right\}.$$

Рассмотрим пример  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \{()\}, \\ \Pi_1 &= \{(1, ), (2, )\}, \\ \Pi_2 &= \{(1, 2), (2, 1)\}. \end{aligned}$$

Здесь  $()$  обозначает пустой кортеж (индивидуальный план, предписывающий бездействие). Таким образом, если для коммивояжера задан индивидуальный план  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k) \in \Pi_k$ , то в соответствии с этим индивидуальным планом коммивояжер должен обслужить сначала цель с номером  $\pi_1$ , затем цель с номером  $\pi_2$  и т.д.

Пространство всех планов для заданного количества целей  $m$  представляет собой следующее множество:

$$\Pi = \bigcup_{k=0}^m \Pi_k.$$

Для начала вычислим минимальное время  $T(\pi)$ , которое требуется коммивояжеру для того, чтобы исполнить индивидуальный план  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ . Используя определение  $\tau(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j)$  из (5), можно получить следующее рекурсивное выражение:

$$(6) \quad T(\pi) = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ \tau(\mathbf{r}_{\pi_1}^0, \mathbf{v}_{\pi_1}), & k = 1; \\ t + \tau(\mathbf{r}_{\pi_k}(t) - \mathbf{r}^I(t), \mathbf{v}_{\pi_k}), & k > 1, \text{ здесь } t = T((\pi_1, \dots, \pi_{k-1})). \end{cases}$$

Выпишем также ограничение, которое заключается в том, что всякая вошедшая в план цель должна быть обслужена вовремя, т.е. до попадания в начало координат. Пусть каждый индивидуальный план  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ . Тогда справедливо

$$\text{OnTime}(\pi) = (\forall j \in \{1, \dots, k\} : T((\pi_1, \dots, \pi_j)) \leq t_{\pi_j}).$$

Заметим, что последнее ограничение может быть проверенно рекуррентно. Пусть для индивидуального плана  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$  выполнено соответствующее ограничение и цель  $j$  не учтена в индивидуальном плане  $\pi$ . Тогда

для проверки ограничения для индивидуального плана  $\pi + j = (\pi_1, \dots, \pi_k, j)$  можно воспользоваться следующим выражением:

$$\text{OnTime}(\pi + j) = \text{OnTime}(\pi) \ \& \ T(\pi + j) \leq t_j.$$

Таким образом, множество допустимых планов представляет собой следующее множество:

$$\Pi_A = \{\pi \in \Pi : \text{OnTime}(\pi)\}.$$

### 2.3. Критерии и определения

Будем ассоциировать с критерием качества задачи некоторый функционал потерь  $J$ . Очевидно, что чем ниже потери, тем лучше решение. Функционал потерь должен быть задан на множестве допустимых планов  $\Pi_A$ , т.е. каждый план, который позволяет вовремя обойти указанные движущиеся цели, поддается оценке понесенных потерь в результате своего исполнения. Оптимальным решением задачи построения плана обхода является наилучший план  $\pi^* \in \Pi_A$ , который минимизирует значение функционала потерь:

$$(7) \quad \pi^* \in \arg \min_{\pi \in \Pi_A} J[\pi].$$

Так как множество допустимых планов  $\Pi_A$  конечно и содержит хотя бы один элемент (которым является пустой план, заключающийся в абсолютном бездействии коммивояжера), то поставленная задача минимизации всегда имеет решение, быть может, не единственное. Знак равенства в выражении  $\pi^* = \arg \min_{\pi \in \Pi_A} J[\pi]$  ставится, если решение единственно.

Перечислим основные функционалы, которые могут быть использованы далее для построения критерия задачи.

- **Количество целей, пропущенных в начало координат.** Если план  $\pi \in \Pi_A$ , то начала координат достигнут все цели, которые не вошли в индивидуальный план  $\pi$ , т.е. количество пропущенных целей считается так

$$n_0[\pi] = m - \text{card}(\pi),$$

где  $\text{card}(\pi)$  – длина плана  $\pi$ .

- **Время выполнения плана.** Вычисляется как время исполнения индивидуального плана

$$T_{\text{sum}}[\pi] = T(\pi).$$

- **Минимальное расстояние приближения целей.** Если план  $\pi \in \Pi_A$ , то минимальное расстояние полета целей к началу координат вычисляется так

$$D_{\min}[\pi] = \min_{j \in \{1, \dots, m\}} \|\mathbf{r}_{\pi_j}(T((\pi_1, \dots, \pi_j)))\|.$$

Если план  $\pi$  пустой, то формально будем считать, что  $D_{\min}[\pi] = 0$ .

Не все из перечисленных функционалов сами по себе годятся на роль критерия задачи. Действительно, если минимизировать время выполнения плана само по себе, то пустой план, состоящий в бездействии, будет оптимальным, так как на его исполнение требуется ноль единиц времени. В целом самостоятельную роль из описанных выше функционалов играет лишь функционал потерь, характеризующий количество целей, долетевших до начала координат.

*Определение 2. Назовем план перехвата гарантированным, если  $n_0[\pi] = 0$ . Множество гарантированных планов обозначим через  $\Pi_G$ .*

Чтобы адекватно учитывать перечисленные функционалы в итоговом функционале потерь или критерии задачи, понадобится некоторое обобщение самого понятия сравнения. Большинство из перечисленных функционалов обретают смысл в задаче минимизации, если в качестве критерия выступает некоторая комбинация представленных функционалов. Например, если сравнивать два плана в первую очередь по количеству целей, пропускаемых в начало координат, а во вторую очередь, времени обхода целей, то такой комбинированный функционал потерь адекватно отражает суть задачи защиты региона. Проще говоря, если некоторый план  $\pi_1$  допускает пропуск одной цели в начало координат, при этом время выполнения плана равно 7, т.е.  $n_0[\pi_1] = 1$  и  $T_{\text{sum}}[\pi_1] = 7$ , а план  $\pi_2$  допускает пропуск одной цели в начало координат и время выполнения плана равно 8, т.е.  $n_0[\pi_2] = 1$  и  $T_{\text{sum}}[\pi_2] = 8$ , то план  $\pi_1$  лучше плана  $\pi_2$ , т.е. формально можно сравнить кортежи  $(1, 7) < (1, 8)$ . Такое сравнение аналогично позиционному сравнению вещественных чисел, где каждая цифра на соответствующей позиции вещественного числа сравнивается с соответствующей цифрой другого числа до тех пор, пока не найдутся расхождения в значениях слева направо. Формализуем сказанное выше на основе понятия лексикографического порядка.

*Определение 3. Кортеж чисел  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  меньше кортежа чисел  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_q)$ , если существует такой номер  $k \in \{1, \dots, \min(p, q)\}$ , что  $a_i = b_i$  для  $i < k$ , и  $a_k < b_k$ . Если для всех  $k \in \{1, \dots, \min(p, q)\}$  выполнено  $a_k = b_k$ , то при  $p < q$  будем считать, что  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ . В остальных случаях будем считать, что  $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ .*

Примеры:

$$(1, 2) < (1, 3), \quad (0, 1) < (1, 2), \quad (1, 2) < (1, 2, 1), \quad () < (1, 2), \quad (1, 2) < (2, ).$$

Используя определение сравнения кортежей чисел, сформулируем основные критерии задачи построения плана обхода целей для произвольного допустимого плана  $\pi \in \Pi_A$ .

- **Пропущенные цели + Время исполнения.** Критерий качества получаемых планов выглядит так

$$(8) \quad J_T[\pi] = (n_0[\pi], T_{\text{sum}}[\pi]).$$

По смыслу минимизация такого функционала потерь в первую очередь нацелена на минимизацию количества пропущенных в начало координат и во вторую очередь — на быстроедействие при исполнении плана.

- **Пропущенные цели + Наименьшая близость к началу координат.** Критерий качества записывается следующим образом:

$$(9) \quad J_D[\pi] = (n_0[\pi], -D_{\min}[\pi]).$$

Минимизация такого функционала потерь в первую очередь нацелена на минимизацию количества пропущенных в начало координат целей и во вторую очередь — на максимизацию расстояния самой близкой из приблизившихся к началу координат целей.

- **Пропущенные цели + Наименьшая близость к началу координат + Время исполнения.** Критерий сформирован из трех основных функционалов

$$(10) \quad J_{DT}[\pi] = (n_0[\pi], -D_{\min}[\pi], T_{\text{sum}}[\pi]).$$

Минимизация такого критерия в первую очередь нацелена на наименьшее количество пропущенных в начало координат целей, во вторую очередь — на максимизацию расстояния самой близкой из приблизившихся целей, и последняя сортировка осуществляется по быстрдействию исполнения плана.

Сформулируем задачу оптимизации.

*Задача 1.* Для  $t$  целей, движущихся по траекториям (1) с ограничениями на параметры движения вида (2), требуется найти оптимальный по критерию (8) или (10) план перехвата  $\pi \in \Pi_A$  коммивояжером с динамической (4).

### 3. Свойства задачи поиска оптимального плана перехвата

Для описания свойств задачи потребуются следующие определения и понятия.

Введем, используя формулу (5), время  $\tau_j(t) = \tau(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j)$  перехвата  $j$ -й цели из текущей обстановки и время  $t_j(t)$  движения  $j$ -й цели до начала координат.

*Определение 4.* Опасностью  $K_j$ , которую составляет  $j$ -я цель, назовем величину, обратную времени движения до начала координат, а именно

$$K_j(t) = \frac{1}{t_j(t)}.$$

Опасность — это свойство цели. Чем меньше времени остается цели до проникновения на защищаемый объект, тем она считается опаснее.

*Определение 5.* Удобством перехвата  $j$ -й цели  $U_j$  назовем величину, обратную времени перехвата этой цели из текущей обстановки, а именно

$$U_j(t) = \frac{1}{\tau_j(t)}.$$

Удобство — это свойство действия коммивояжера по отношению к цели. Чем меньше времени затрачивается на поимку цели, тем цель удобнее для перехвата.



*Определение 6. Сложностью перехвата  $C[\pi]$  плана  $\pi$  назовем максимальное время между двумя последовательными перехватами в плане, а именно*

$$(11) \quad C[\pi] = \max_{\substack{\{\pi_j\} \in \pi, \\ 1 < j \leq m}} \tau_{\pi_j}(T((\pi_1, \dots, \pi_{j-1}))).$$

Сложность — это свойство плана коммивояжера. Чем меньше времени он затрачивает между двумя последовательными обходами целей во время исполнения плана, тем план перехвата менее сложный.

*Определение 7. Средней сложностью перехвата  $\hat{C}[\pi]$  плана  $\pi$  назовем среднее время между двумя последовательными обходами в плане, а именно*

$$(12) \quad \hat{C}[\pi] = \frac{1}{m-1} \sum_{\substack{\{\pi_j\} \in \pi, \\ 1 < j \leq m}} \tau_{\pi_j}(T((\pi_1, \dots, \pi_{j-1}))).$$

Средняя сложность характеризует длительности между последовательными обходами в плане. Если все цели перехватываются по пути, без длительных обходов, то такой план менее сложный в среднем, по сравнению с планом, где есть несколько длительных обходов.

Понятие опасности непосредственно связано с критериями выполнения плана перехвата, а понятия удобства и сложности связывают между собой последовательный выбор следующей цели и качество выполнения плана по критерию быстродействия. Действительно, если удастся найти план обхода целей, при котором последовательные перехваты происходят максимально удобно и не происходит пропуска цели, то полное время выполнения плана часто близко к оптимальному.

Понятия опасность и удобство могут быть обобщены на текущую обстановку.

*Определение 8. Опасностью текущей обстановки назовем упорядоченный по уменьшению кортеж из величин опасностей*

$$(13) \quad (K_{j_1}(t), \dots, K_{j_m}(t)),$$

*составленный для  $m$  целей.*

Упорядоченность целей в кортеже опасности текущей обстановки не меняется при выполнении всего плана.

*Определение 9. Удобством текущей обстановки назовем упорядоченный по уменьшению кортеж из величин удобств*

$$(U_{j_1}(t), \dots, U_{j_m}(t)),$$

*составленный для  $m$  целей.*

Удобство текущей обстановки зависит от положения коммивояжера и меняется во времени.

При обслуживании целей длины кортежей уменьшаются. Сравнение обстановок может происходить различными способами, например, по максимальному элементу в каждом из кортежей, или по совокупности элементов

кортежей, попавших в заданные диапазоны значений. В свою очередь сложность плана непосредственно связана с удобством обхода. Оптимальный план сочетает в себе все перечисленные характеристики обстановки.

*Теорема 1.* Для любой начальной обстановки и любого количества целей в задаче 1 существует план гарантированного перехвата  $\pi \in \Pi_G$ .

*Доказательство.* Можно провести доказательство, используя теорему 10 из [4], но тогда особенности рассматриваемой задачи останутся за кадром.

Как и в [4], вычисляется опасность начальной обстановки (13), в соответствии с которой составляется план перехвата. Докажем, что такой план является гарантированным.

Если в начальной обстановке расстояние  $\|\mathbf{r}_j^0\|$ , где индекс  $j$  соответствует самой опасной цели, не является минимальным среди всех  $\|\mathbf{r}_k^0\|$ ,  $k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$ , то отложим момент старта движения коммивояжера. Тогда найдется такой радиус  $R_0$ , что цели его пересекут в порядке уменьшения опасности  $(K_{j_1}, \dots, K_{j_m})$  по перестановке целей  $(j_1, \dots, j_m)$  по отношению к начальной нумерации  $(1, \dots, m)$ . В момент перехвата самой опасной цели все остальные находятся вне круга радиусом текущего перехвата. Из-за превосходства скорости коммивояжера ни одна цель не достигнет начала координат, что показывается на примере обстановки, когда следующая по опасности цель  $j_{d+1}$  расположена диаметрально противоположно текущей, причем  $\|\mathbf{r}_{j_d}(t)\| < \|\mathbf{r}_{j_{d+1}}(t)\|$ ,  $t = T((j_1, \dots, j_d))$ . В этом случае разница времен, которые требуются цели и коммивояжеру для достижения начала координат, равна

$$\frac{\|\mathbf{r}_{j_{d+1}}(t)\|}{\|\mathbf{v}_{j_{d+1}}\|} - \frac{\|\mathbf{r}_{j_d}(t)\|}{V} = \frac{V \cdot \|\mathbf{r}_{j_{d+1}}(t)\| - \|\mathbf{v}_{j_{d+1}}\| \cdot \|\mathbf{r}_{j_d}(t)\|}{V \cdot \|\mathbf{v}_{j_{d+1}}\|} > 0.$$

Это означает, что в крайнем случае, когда перехват происходит по лучам одной прямой, коммивояжер успеет добраться до начала координат, после чего осуществить перехват следующей цели. В случаях, когда перехват осуществляется по остальным лучам, очевидно, что цели также не достигают начала координат. Это полностью доказывает гарантированность плана перехвата по опасности. Теорема 1 доказана.  $\square$

*Пример 1.* Пусть цели равномерно распределены по окружности  $R$  и движутся с одинаковыми скоростями  $\|\mathbf{v}\|$ . Тогда оптимальный перехват по критериям  $J_T[\pi]$  и  $J_{DT}[\pi]$  осуществляется по траектории, близкой к логарифмической спирали [14], по плану  $\pi$ , на котором  $n_0[\pi] = 0$ , как показано на рис. 1. В данном примере опасность и удобство начальной обстановки имеют вид  $(K_1, \dots, K_m) = (U_1, \dots, U_m) = (\|\mathbf{v}\|/R, \dots, \|\mathbf{v}\|/R)$  и не позволяют осуществить начальный выбор цели. После перехвата крайней правой или крайней левой в секторе цели, оставшиеся цели будут также одинаково распределены по опасности. Однако кортеж удобства перехвата будет иметь не только упорядоченный вид, но и очередность оставшихся целей в кортеже не будет меняться после каждого перехвата.

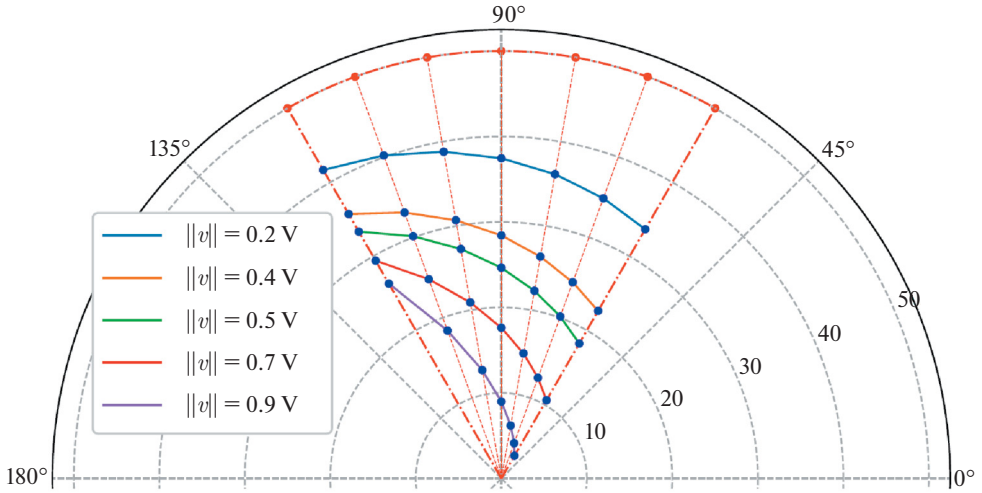


Рис. 1. Перехват целей со скоростями  $\|\mathbf{v}\| = \{0.2V, 0.4V, 0.5V, 0.7V, 0.9V\}$ , расположенных на границе сектора окружности с центральным углом  $\alpha = 60^\circ$ .

*Теорема 2. Для критериев  $J_T[\pi]$  и  $J_{DT}[\pi]$  в задаче 1 справедливы*

- 1) принцип неоптимальности простоя,
- 2) принцип максимальной скорости (на оптимальном плане коммивояжер движется на максимально возможной скорости).

*Доказательство.* Гарантированный перехват ( $n_0[\pi] = 0$ ), минимизирующий количество пропущенных целей для критериев  $J_T[\pi] = (n_0[\pi], T_{\text{sum}}[\pi])$  и  $J_{DT}[\pi] = (n_0[\pi], -D_{\text{min}}[\pi], T_{\text{sum}}[\pi])$ , может быть получен по теореме 1 выбором плана  $\pi = (i_1, \dots, i_m)$  по опасности начальной обстановки  $(K_{i_1}, \dots, K_{i_m})$ .

Дальнейшая оптимизация векторных критериев  $J_T[\pi]$  и  $J_{DT}[\pi]$  происходит по гарантированным планам, с  $n_0[\pi] = 0$ , состоящим как минимум из одного плана  $\pi = (i_1, \dots, i_m)$ .

Справедливость принципов неоптимальности простоя и максимальной скорости при минимизации  $T_{\text{sum}}[\pi]$  показывается в лемме 1 [4], что и заканчивает доказательство теоремы для функционала  $J_T[\pi]$ .

Максимизация функционала  $D_{\text{min}}[\pi]$  в критерии  $J_{DT}$  по конечному числу гарантированных планов приводит к нахождению плана  $\pi^*$ . Зафиксируем этот план и найдем первый номер цели  $j$  в плане, на котором достигается минимум расстояния до начала координат. План  $\pi^* = (\pi_{1,j}, \pi_{j,m})$  разбивается на две части:  $\pi_{1,j}$  до цели  $j$  включительно и  $\pi_{j,m}$  после цели  $j$ , тогда  $D_{\text{min}}[\pi^*] = D_{\text{min}}[\pi_{1,j}]$ . Увеличение времени выполнения части плана  $\pi_{1,j}$  за счет простоя или движения не на максимальной скорости приводит к уменьшению значения  $D_{\text{min}}[\pi_{1,j}]$  аналогично лемме 1 [4]. Далее, по принципу оптимальности Беллмана часть плана  $\pi_{j,m}$  оптимальна по быстрдействию. За что отвечает часть критерия по функционалу  $T_{\text{sum}}[\pi]$  после достижения минимума на функционале  $D_{\text{min}}[\pi]$ . Поэтому простой и замедление движения коммивояжера невозможно на  $\pi_{j,m}$  и соответственно на всем  $\pi^*$ .

Теорема 2 доказана.  $\square$

#### 4. Алгоритм поиска оптимальных планов перехвата

Алгоритм построения плана обхода одним коммивояжером многих подвижных целей основан на полном переборе планов с изначальной сортировкой целей по опасности и интеллектуальном правиле отбрасывания заведомо неоптимальных веток перебора в ходе своей работы. Алгоритм гарантированно находит оптимальный план перехвата.

Для введения некоторых важных понятий, необходимых для понимания работы алгоритма, рассмотрим сначала простейший случай полного перебора. Работа алгоритма в этом случае может быть проиллюстрирована матрицами переходов в табл. 1, на которых показана полная последовательность планов, рассмотренная в ходе работы алгоритма. Сама табл. 1 называется таблицей поиска планов.

**Таблица 1.** Таблица поиска планов, состоящая из матриц переходов для случая полного перебора при  $m = 4$

1				2				3				4							
1	①	2	3	4	1	①	2	3	4	1	①	2	3	4	1	①	2	3	4
1	②	3	4		1	②	3	4		*2	2	③	4		2	2	③	4	
1	③	4			*2	3	④			1	②	4			*2	2	④		
1	④				1	③				1	④				1	②			
5				6				7				8							
1	①	2	3	4	1	①	2	3	4	*2	1	②	3	4	2	1	②	3	4
*3	2	3	④		3	2	3	④		1	①	3	4		1	①	3	4	
1	②	3			*2	2	③			1	③	4			*2	3	④		
1	③				1	②				1	④				1	③			
9				10				11				12							
2	1	②	3	4	2	1	②	3	4	2	1	②	3	4	2	1	②	3	4
*2	1	③	4		2	1	③	4		*3	1	3	④		3	1	3	④	
1	①	4			*2	1	④			1	①	3			*2	1	③		
1	④				1	①				1	③				1	①			
13				14				15				16							
*3	1	2	③	4	3	1	2	③	4	3	1	2	③	4	3	1	2	③	4
1	①	2	4		1	①	2	4		*2	1	②	4		2	1	②	4	
1	②	4			*2	2	④			1	①	4			*2	1	④		
1	④				1	②				1	④				①				
17				18				19				20							
3	1	2	③	4	3	1	2	③	4	*4	1	2	3	④	4	1	2	3	④
*3	1	2	④		3	1	2	④		1	①	2	3		1	①	2	3	
1	①	2			*2	1	②			1	②	3			*2	2	③		
1	②				1	①				1	③				1	②			
21				22				23				24							
4	1	2	3	④	4	1	2	3	④	4	1	2	3	④	4	1	2	3	④
*2	1	②	3		2	1	②	3		*3	1	2	③		3	1	2	③	
1	①	3			*2	1	③			1	①	2			*2	1	②		
1	②				1	①				1	②				1	①			

Критерием задачи в алгоритме выбран критерий (10):

$$J_{DT}[\pi] = (n_0[\pi], -D_{\min}[\pi], T_{\text{sum}}[\pi]).$$

В табл. 1 матрицы переходов пронумерованы от 1 до  $m! = 24$ . Для каждой матрицы в столбце слева записан вектор индексов, который определяет план перехвата. Полученный план — последовательность отмеченных окружностей в матрице согласно вектору индексов в порядке возрастания номера строки.

Звездочкой отмечен самый верхний индекс в столбце, с которого начинается новый расчет следующего плана. Промежуточное состояние, характеризующее частью уже рассчитанного плана, сохраняется для экономии вычислительных ресурсов.

*Утверждение 1. Полное количество вызовов функции единичного перехвата (5) при полном переборе всех вариантов в алгоритме с промежуточным сохранением расчетов описывается рекуррентной формулой*

$$(14) \quad f(m) = m(f(m-1) + 1).$$

Таким образом, существенно удастся сократить количество вызовов функции единичного перехвата. Например, для  $m = 4$ :

$$(15) \quad f(m) = 64,$$

тогда как для случая полного перебора число вызовов этой функции равно  $F(m) = m! \cdot m = 96$ . Для большего количества целей  $m = 10$  соответственно имеем

$$(16) \quad \begin{aligned} f(m) &= 9\,864\,100, \\ F(m) &= 36\,288\,000. \end{aligned}$$

Видно, что только за счет сохранения текущего состояния плана удастся существенно сократить количество вычислений. Однако основной выигрыш в эффективности предлагаемого алгоритма обусловлен его проблемной ориентацией под специфику задачи и возможностью отбрасывания неоптимальных цепочек планов, значения функционалов в критерии для которых будут хуже этих значений в текущем сохраненном плане. Алгоритм состоит в следующей последовательности действий.

**Алгоритм 1. Нахождение плана обхода.**

1. Цели сортируются по опасности  $K_i$ .
2. Заполняется вспомогательная матрица поиска (матрица с индексом 1 в табл. 1), на основе которой будет формироваться последовательность планов.
3. На каждом новом шаге алгоритма переход по состояниям полной таблицы поиска планов  $1 \dots m!$  (табл. 1) осуществляется согласно критерию (10).
4. Первый вариант: еще не найден план перехвата всех целей. В этом случае:

- а. Переход в таблице поиска планов осуществляется согласно параметру количества перехваченных целей.
  - б. Если очередной план нереализуем (очередная цель перехватывается за границей красной зоны), и в новом рассматриваемом плане количество перехваченных целей совпадает, то проверяются критерии дистанции и времени и сохраняется в память лучший план.
  - в. При этом ветка может быть отброшена, если количество пропущенных в начало координат целей ухудшилось относительно сохраненного плана.
5. Второй вариант: если найден план, перехватывающий все цели. Тогда:
- а. Любая пропущенная в начало координат цель в новом плане приводит к прекращению рассмотрения текущей цепочки планов.
  - б. Если в новом рассматриваемом плане перехватываются все цели, проверяются критерии дистанции и времени и сохраняется в память лучший из двух планов.
6. Последний сохраненный план является оптимальным.

Предложенная начальная сортировка целей по опасности служит для отбрасывания неоптимальных цепочек плана на ранних этапах работы алгоритма 1.

## 5. Моделирование и обсуждение результатов

Алгоритм перехвата 1 был реализован в среде Matlab с использованием функций (5) и (6). Моделирование показало, что время работы алгоритма является приемлемым для приложений реального времени и сильно сокращается относительно алгоритма полного перебора. Так, для 1000 экспериментов время работы составило 200 с, что дает среднее время отработки одной начальной обстановки в 0,2 с.

Рассматриваются 1000 различных начальных обстановок, для которых выбраны следующие основные параметры:

- Количество целей  $m = 15$ .
- Центральный угол сектора, где находятся цели  $\alpha = 60^\circ$ .
- Значения  $\|\mathbf{r}_j\|$ ,  $j = 1, \dots, m$  распределены равномерно на отрезке  $[800, 1000]$ .
- Скорости целей распределены равномерно на отрезке  $[0,5V, 0,7V]$ .

Для каждой обстановки находятся ее опасность и удобство, а также по алгоритму 1 оптимальные планы обхода по критериям  $J_T[\pi]$  и  $J_{DT}[\pi]$ , после чего в табл. 2 и 3 приводится статистика, как часто первые несколько целей оптимального плана оказываются самыми опасными/удобными.

Таблицы 2 и 3 показывают, что статистика выбора первой цели в плане отличается от статистики на следующих шагах, поскольку начальная обстановка значительно отличается от обстановок, возникающих после каждого перехвата. Полученные статистики указывают на то, что в более чем 70% случаев первая цель оптимального плана совпадает с самой опасной или с самой удобной целью, что может быть использовано для построения жадных алгоритмов на основе локальных правил по опасности или удобству вместо полнопереборных алгоритмов.

**Таблица 2.** Процент совпадений первых четырех целей  $\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*, \pi_4^*$  оптимального по критерию  $J_T[\pi]$  плана  $\pi^*$  с соответствующими опасными и удобными целями для 1000 различных начальных обстановок

Номера целей плана $\pi^*$	Количество совпадений $i$ -й цели плана $\pi^*$ с $i$ -й по			
	опасности ( $K_{\pi_i^*} = K_{j_i}$ ), %	удобству ( $U_{\pi_i^*} = U_{j_i}$ ), %	опасности и удобству, %	опасности или удобству, %
Первая цель $\pi_1^*$ ( $i = 1$ )	65,0	65,9	56,8	74,1
Вторая цель $\pi_2^*$ ( $i = 2$ )	32,1	57,6	13,9	75,8
Третья цель $\pi_3^*$ ( $i = 3$ )	19,4	58,5	7,1	70,8
Четвертая цель $\pi_4^*$ ( $i = 4$ )	16,3	57,0	3,8	69,5

**Таблица 3.** Процент совпадений первых четырех целей  $\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*, \pi_4^*$  оптимального по критерию  $J_{DT}[\pi]$  плана  $\pi^*$  с соответствующими опасными и удобными целями для 1000 различных начальных обстановок

Номера целей плана $\pi^*$	Количество совпадений $i$ -й цели плана $\pi^*$ с $i$ -й по			
	опасности ( $K_{\pi_i^*} = K_{j_i}$ ), %	удобству ( $U_{\pi_i^*} = U_{j_i}$ ), %	опасности и удобству, %	опасности или удобству, %
Первая цель $\pi_1^*$ ( $i = 1$ )	61,2	63,0	52,8	71,4
Вторая цель $\pi_2^*$ ( $i = 2$ )	36,6	52,9	13,2	76,3
Третья цель $\pi_3^*$ ( $i = 3$ )	27,5	49,2	7,7	69,0
Четвертая цель $\pi_4^*$ ( $i = 4$ )	24,6	45,7	6,2	64,1

Для 1000 начальных обстановок было установлено, что в 24,6% случаев оптимальный план  $\pi^*$  по критерию  $J_{DT}[\pi^*]$  совпадает с оптимальным планом по критерию  $J_T[\pi^*]$ .

Дальнейшее моделирование посвящено исследованию планов для одной начальной обстановки. На рис. 2 представлены зависимости  $T_{\text{sum}}[\pi]$ ,  $D_{\text{min}}[\pi]$  от  $C[\pi]$ ,  $\widehat{C}[\pi]$  для допустимых планов  $\pi$ , минимальное расстояние приближения целей которых  $D_{\text{min}}[\pi] > 0,6D_{\text{min}}[\pi^*]$ , где  $\pi^*$  – оптимальный по критерию  $J_{DT}[\pi]$  план. Значения  $T_{\text{sum}}[\pi^*]$ ,  $D_{\text{min}}[\pi^*]$  дополнительно обведены окружностями красного цвета, причем все соответствующие допустимым планам  $\{\pi : \pi_1 = \pi_1^*\}$  точки также выделены красным цветом.

Как видно из графика, времена исполнения всех допустимых планов выстраиваются в линейные зависимости от  $\widehat{C}[\pi]$ , что дает возможность конструирования оптимального полиномиального алгоритма построения плана перехвата в рассматриваемой задаче. Зелеными окружностями на всех графиках отмечен оптимальный по критерию  $J_T$  план, время исполнения кото-

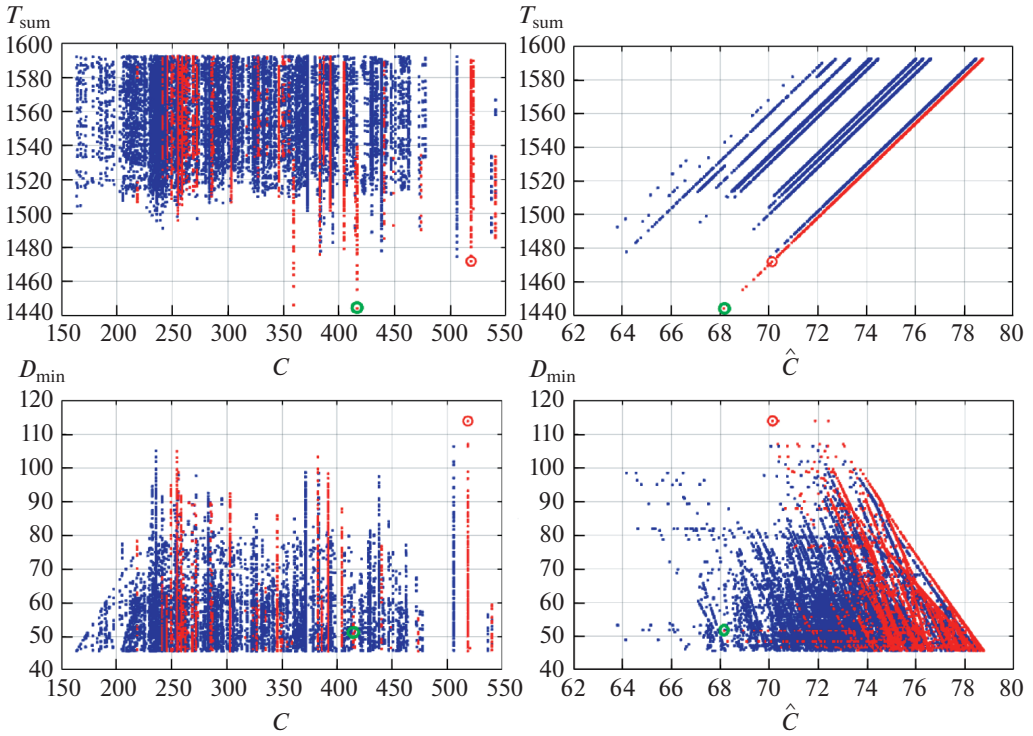


Рис. 2. Времена исполнения плана и минимальные значения расстояний приближения целей к началу координат для допустимых планов одной начальной обстановки в зависимости от сложности и средней сложности плана.

рого меньше  $T_{\text{sum}}[\pi^*]$  на 2%, но по минимальному расстоянию приближения целей к началу координат такой план хуже  $\pi^*$  на 54%.

Проанализируем четыре допустимых плана  $\pi^*, \pi^1, \pi^2, \pi^3$  с одинаковым значением  $D_{\text{min}} = 113,8$ , которые на рис. 2 слева обозначены одной точкой, а справа они разнесены по значениям средней сложности. В табл. 4 указаны рассматриваемые планы обхода целей в явном виде, где выделена их общая часть.

Из табл. 4 видно, что максимальное время между перехватами  $C$  и значение  $D_{\text{min}}$  в этих планах были достигнуты на участке общего плана. При этом различающиеся последовательности целей, завершающих планы, привели к изменению средней сложности каждого из них.

**Таблица 4.** Допустимые планы со значением  $D_{\text{min}}[\pi] = 113,8$

$i$	$\pi^i$	$T_{\text{sum}}[\pi]$	$D_{\text{min}}[\pi]$	$C[\pi]$	$\hat{C}[\pi]$	
$\pi^*$						
1	{10, 1, 6, 12, 2, 13, 3, 5, 15,	8, 11, 9, 4, 14, 7}	1472	113,8	518,8	70,1
2		8, 11, 4, 9, 14, 7}	1496	113,8	518,8	71,9
3		11, 8, 4, 9, 14, 7}	1504	113,8	518,8	72,4
3		11, 8, 9, 4, 14, 7}	1475	113,8	518,8	70,4



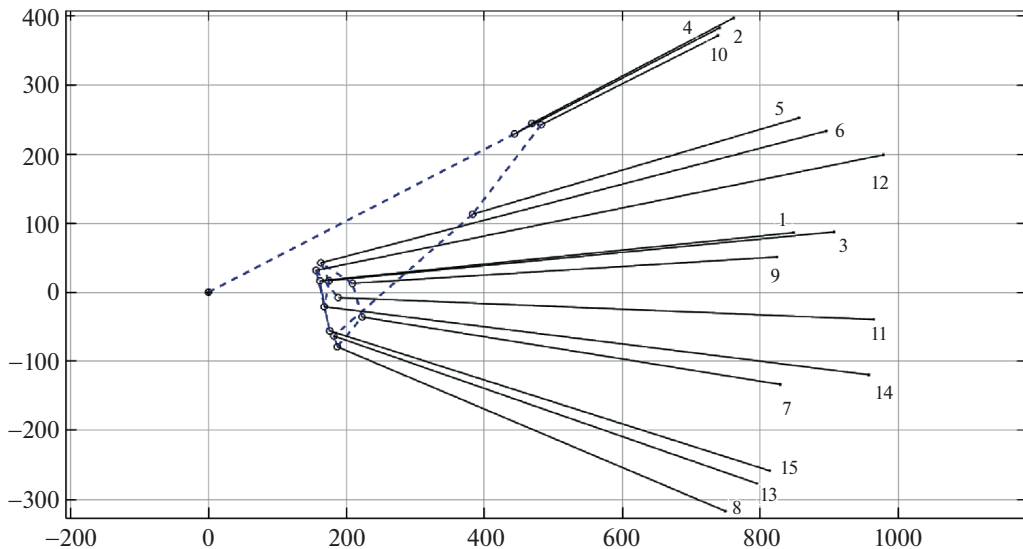


Рис. 3. План оптимального перехвата 15 целей коммивояжером по критерию  $J_{DT}[\pi]$ :  $\pi^* = (2, 4, 10, 5, 13, 8, 7, 9, 6, 3, 14, 1, 15, 12, 11)$ ,  $T_{\text{sum}}[\pi^*] = 1471,049$ ,  $D_{\text{min}}[\pi^*] = 159,168$ .

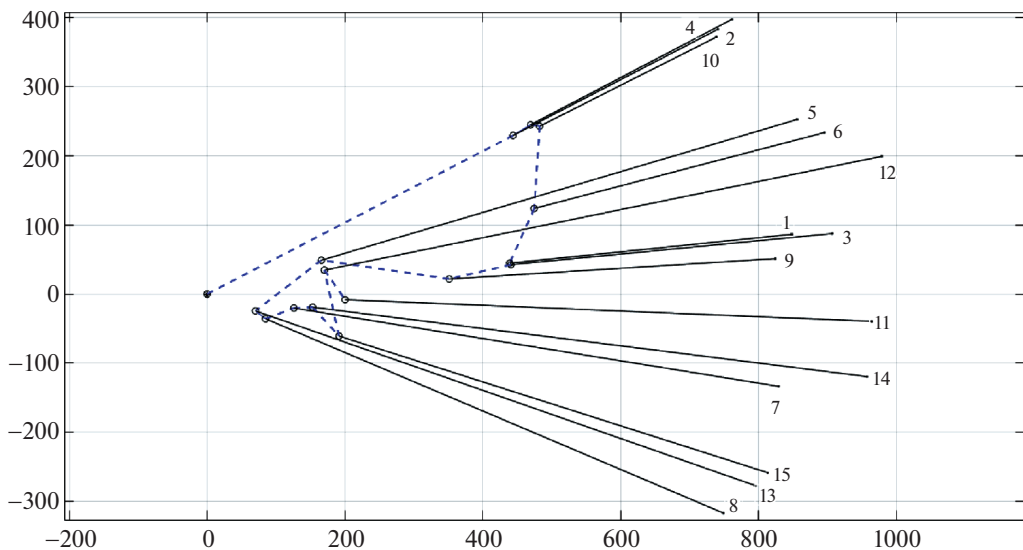


Рис. 4. План оптимального перехвата 15 целей коммивояжером по критерию  $J_T[\pi]$ :  $\pi^* = (2, 4, 10, 6, 1, 3, 9, 5, 13, 8, 7, 14, 15, 12, 11)$ ,  $T_{\text{sum}}[\pi^*] = 1448,051$ ,  $D_{\text{min}}[\pi^*] = 74,183$ .

Раздел моделирования завершает пример построения двух оптимальных планов перехвата по критериям  $J_{DT}[\pi]$  и  $J_T[\pi]$  на рис. 3 и 4 для одной начальной обстановки, где траектория коммивояжера на графиках выделена синей пунктирной линией.

Оптимизация по критерию  $J_T[\pi]$  приводит к незначительному улучшению времени исполнения плана по сравнению с оптимальным по  $J_{DT}[\pi]$  планом, но при этом более чем в два раза уменьшается значение  $D_{\min}[\pi]$ .

## 6. Заключение

В работе была рассмотрена задача перехвата одним перехватчиком множества прямолинейно движущихся целей. Были предложены новые макрохарактеристики задачи и статистически исследовано их влияние на построение оптимального плана перехвата для различных начальных обстановок. Для сбора статистики за адекватное время был предложен алгоритм поиска оптимального плана, основанный на интеллектуальном полном переборе и идеях динамического программирования. На набранной статистике показано влияние новых величин на успешность выполнения миссии и сделаны выводы об их применимости для создания быстрых жадных алгоритмов перехвата.

В будущем планируется исследовать различные локальные правила, учитывающие информационные и геометрические характеристики распределения целей, создать субоптимальные алгоритмы перехвата на их основе и сравнить их с полнопереборными оптимальными алгоритмами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сухарулдзэ Г.Г.* Об одном обобщении задачи коммивояжера. I // А и Т. 1971. No. 8. P. 116–123.
2. *Сухарулдзэ Г.Г.* Об одном обобщении задачи коммивояжера. II // А и Т. 1971. No. 10. P. 142–147.
3. *Picard J.C., Queyranne M.* The time-dependent traveling salesman problem and its application to the tardiness problem in one-machine scheduling // Oper. Res. 1978. V. 26. No. 1. P. 86–110. <https://doi.org/10.1287/opre.26.1.86>
4. *Helwig C.S., Robins G., Zelikovsky A.* The moving-target traveling salesman problem // J. Algorithm. Comput. Technol. 2003. V. 49. No. 1. P. 153–174. [https://doi.org/10.1016/S0196-6774\(03\)00075-0](https://doi.org/10.1016/S0196-6774(03)00075-0)
5. *Garey M.R., Johnson D.S.* Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco, Calif.: W.H. Freeman & Co., 1979.
6. *Ny J., Feron E., Frazzoli E.* On the Dubins traveling salesman problem // IEEE Trans. Automat. Contr. 2012. V. 57. No. 1. P. 265–270. <https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2166311>
7. *Isaiah P., Shima T.* Motion planning algorithms for the Dubins travelling salesperson problem // Automatica. 2015. V. 53. P. 247–255. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.12.041>
8. *Stieber A.* The multiple traveling salesperson problem with moving targets. Brandenburg University of Technology Cottbus-Senftenberg, 2022.
9. *Ahrens B.* The tour construction framework for the dynamic Travelling Salesman Problem // SoutheastCon, IEEE. 2015. P. 1–8. <https://doi.org/10.1109/SECON.2015.7132999>
10. *Choubey N.S.* Moving target travelling salesman problem using genetic algorithm // Int. J. Comput. Appl. 2013. V. 70. No. 1. P. 30–34. <https://doi.org/10.5120/11937-7726>

11. *Smith C.D.* Assessment of genetic algorithm based assignment strategies for unmanned systems using the multiple traveling salesman problem with moving targets // Thesis (M.S.), Department of Civil and Mechanical Engineering. University of Missouri, Kansas City, 2021.
12. *Buzikov M.E., Galyaev A.A.* Minimum-time lateral interception of a moving target by a Dubins car // Automatica. 2022. V. 135. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109968>
13. *Galyaev A.A., Lysenko P.V., Rubinovich E.Y.* Optimal Stochastic Control in the Interception Problem of a Randomly Tacking Vehicle // Mathematics. 2021. V. 9. No. 19. <https://doi.org/10.3390/math9192386>
14. *Galyaev A.A., Dobrovidov A.V., Lysenko P.V., Shaikin M.E. et.al.* Path Planning in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern // Sensors. 2020. V. 20. No. 7. <https://doi.org/10.3390/s20072076>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глузовым.*

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 18.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023