

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. Ю.Н. СОТСКОВ, д-р физ.-мат. наук (sotskov48@mail.ru)
(Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск)

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ РАСПИСАНИЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ С ПРЕРЫВАНИЯМИ ОПЕРАЦИЙ КАК ОПТИМАЛЬНАЯ РАСКРАСКА СМЕШАННОГО ГРАФА¹

Установлена взаимосвязь задач теории расписаний с критерием минимизации длины расписания и задач поиска оптимальных (строгих) раскрасок вершин смешанного графа, т.е. назначений минимального множества упорядоченных цветов вершинам $V = \{v_1, \dots, v_{|V|}\}$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, для которых вершинам v_i и v_j , инцидентным ребру $[v_i, v_j] \in E$, назначаются разные цвета, а для дуги $(v_k, v_l) \in A$ цвет вершины v_k не больше (меньше) цвета вершины v_l . Показано, что любая задача поиска оптимальной раскраски вершин смешанного графа G может быть представлена как задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ построения оптимального по быстродействию расписания обслуживания частично упорядоченного множества требований с целочисленными длительностями p_{ij} операций при допустимости прерываний их выполнения. В отличие от классических задач теории расписаний, в задаче $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ для выполнения операции может требоваться несколько приборов и помимо двух типов отношений предшествования, заданных на множестве операций, необходимо, чтобы единичные операции заданного подмножества выполнялись одновременно. Задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ псевдополиномиально сводится к задаче поиска оптимальной раскраски вершин смешанного графа G , который определяет исходные данные задачи. В силу доказанных утверждений для результатов, полученных для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, имеются аналоги для соответствующих задач оптимальных раскрасок вершин смешанных графов G , и наоборот.

Ключевые слова: расписание, прерывание, быстродействие, смешанный граф, оптимальная раскраска.

DOI: 10.31857/S0005231023010075, EDN: LULDPY

1. Введение

Для оперативно-календарного планирования (ОКП) производства требуется построение оптимальных расписаний обслуживания заданных требований на имеющемся оборудовании (машинах, станках, процессорах). Опти-

¹ Исследование поддержано Белорусским Республиканским Фондом Фундаментальных Исследований, проект № Ф21-010 и проект № Ф23РНФ-017.

мизация расписаний производственных процессов является важным фактором эффективности производства, поскольку позволяет сокращать производственные затраты, время реализации поступивших заявок, своевременно снабжать производственные процессы сырьем и комплектующими изделиями, необходимыми для изготовления конечной продукции.

Практические задачи ОКП многообразны как по условиям, ограничениям и назначению производства, так и по целям, которые достигаются при реализации построенных расписаний. Для решения задач ОКП, как правило, разрабатываются специальные алгоритмы оптимизации расписаний с учетом условий конкретного производства. Расширение области применения алгоритмов теории расписаний в ОКП может быть основано на моделях более сложных обслуживающих систем с целью единообразного представления различных классов расписанческих задач и разработки на основе таких моделей общих методов построения оптимальных расписаний.

Известно, что задачи построения оптимальных по быстродействию расписаний с единичными длительностями заданных операций эквивалентны задачам поиска оптимальных раскрасок вершин графов. Если же при построении расписаний необходимо учитывать не только отношения предшествования, заданные на множестве операций, но и невозможность совместного выполнения операций на одном оборудовании (обслуживающих приборах), то для оптимизации расписаний можно использовать раскраски вершин смешанных графов, введенные в [1, 2].

Пусть $G = (V, A, E)$ обозначает конечный смешанный граф с непустым множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_{|V|}\}$, множеством дуг A и множеством ребер E . Дуга $(v_i, v_j) \in A$ определяет упорядоченную пару вершин v_i и v_j , а ребро $[v_p, v_q] \in E$ — неупорядоченную пару вершин v_p и v_q . Будем предполагать далее, что рассматриваемый смешанный граф $G = (V, A, E)$ не содержит кратных дуг, кратных ребер и петель. Если множество A пусто, то получаем граф (V, \emptyset, E) . Если же множество E пусто, то получаем ориентированный граф (V, A, \emptyset) .

В [1] введено следующее определение раскраски (вершин) смешанного графа.

Определение 1 [1]. Целочисленную функцию $c : V \rightarrow \{1, \dots, t\}$ называют раскраской $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, если нестрогое неравенство $c(v_i) \leq c(v_j)$ выполняется для каждой дуги $(v_i, v_j) \in A$ и $c(v_p) \neq c(v_q)$ для каждого ребра $[v_p, v_q] \in E$. Раскраска $c(G)$ является оптимальной, если в ней используется минимальное количество $t =: \chi(G)$ различных цветов $c(v_i) \in \{1, \dots, t\}$. Минимальное число $\chi(G)$ называют хроматическим числом смешанного графа G .

Если $A = \emptyset$, то раскраска $c(G)$ является обычной раскраской вершин графа $G = (V, \emptyset, E)$. В отличие от раскраски графа (V, \emptyset, E) , существующей для любого графа, раскраска $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ с непустыми множествами дуг и ребер может не существовать. Следующий

критерий существования раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ доказан в [1].

Теорема 1 [1]. *Раскраска $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ существует тогда и только тогда, когда ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа G не содержит ни одного контура с парой вершин смежных в подграфе (V, \emptyset, E) .*

Смешанный граф $G = (V, A, E)$ будем называть раскрашиваемым, если для него существует раскраска $c(G)$. Задача поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа является NP-трудной, даже если $A = \emptyset$ [3]. Взаимосвязь задач поиска оптимальных раскрасок смешанного графа с задачами теории расписаний с критерием минимизации длины расписания (минимизации общего времени обслуживания требований) при условии, что все операции обслуживания требований имеют единичные длительности, исследовалась в статьях [4–8]. В [9] представлен обзор опубликованных результатов по раскраскам смешанных графов и эквивалентным задачам построения оптимальных расписаний выполнения операций с единичными длительностями.

В данной статье установлено, что задача поиска оптимальной раскраски любого раскрашиваемого смешанного графа сводится к задаче построения оптимального по быстродействию расписания выполнения частично упорядоченного множества операций с целочисленными длительностями при допустимости прерываний их выполнения. В отличие от классических задач теории расписаний, в рассматриваемой задаче для выполнения операции может требоваться несколько различных приборов (машин, процессоров). Помимо двух типов отношений предшествования, заданных на множестве операций, в задаче может потребоваться, чтобы единичные операции заданного подмножества выполнялись одновременно. В силу доказанных утверждений результаты, полученные для исследованных задач построения оптимальных по быстродействию расписаний, имеют аналоги для соответствующих задач поиска оптимальных раскрасок вершин смешанных графов, и наоборот.

2. Оптимальные расписания обслуживания требований с различными маршрутами и раскраски вершин смешанного графа

Далее используется терминология монографий [10, 11] по теории графов и монографий [12, 13] по теории расписаний.

Для классификации задач теории расписаний используется введенное в [14] трехпозиционное обозначение $\alpha|\beta|\gamma$, в котором α обозначает обслуживающую систему и количество приборов (машин, процессоров), β — характеристики обслуживаемых требований (работ, заданий), а γ — целевую функцию. Используются приведенные в [13] параметры классификации задач теории расписаний.

2.1. Единичные длительности операций и строгая
раскраска смешанного графа

Начнем с постановки задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ построения оптимального по быстродействию расписания (такой критерий оптимальности обозначается C_{\max}) обслуживания множества требований $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ с различными маршрутами (такую многостадийную обслуживающую систему называют job-shop, т.е. цех работ) и единичными длительностями $p_{ij} = 1$ всех заданных операций Q_{ij} . В задаче $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ множество требований \mathcal{J} необходимо обслужить оптимально на множестве $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_{|\mathcal{M}|}\}$ специализированных (различных) приборов. Обслуживание требования $J_i \in \mathcal{J}$ подразумевает выполнение множества $\mathcal{Q}_i = \{Q_{i,1}, \dots, Q_{i,|\mathcal{Q}_i|}\}$ операций в заданном для них порядке, а именно: $(Q_{i,1}, \dots, Q_{i,|\mathcal{Q}_i|})$. Для каждой операции $Q_{ij} \in \mathcal{Q}_i$ задан специализированный прибор $M_{\mu(i,j)}$ множества $\mathcal{M} \ni M_{\mu(i,j)}$, на котором операция Q_{ij} должна выполняться.

Все требования множества $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ готовы к обслуживанию в начальный момент $t = 0$ горизонта планирования, и прерывания выполнения любой операции $Q_{ij} \in \mathcal{Q}_i$ по обслуживанию требования $J_i \in \mathcal{J}$ запрещены. Следовательно, допустимое расписание обслуживания требований множества $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ однозначно определяется моментами начала $S(Q_{ij}) \geq 0 = t$ или же моментами завершения $C(Q_{ij}) = S(Q_{ij}) + p_{ij}$ выполнения всех операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{Q}_i$.

Пусть подмножество $\mathcal{Q}^{(k)}$ множества \mathcal{Q} состоит из всех операций, которые должны выполняться на приборе $M_k \in \mathcal{M}$. Любая пара операций из множества $\mathcal{Q}^{(k)}$ не может выполняться одновременно при реализации допустимого расписания.

Из приведенной постановки задачи теории расписаний следует, что допустимое расписание для задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ должно определять $|\mathcal{M}|$ линейных строгих порядков выполнения множеств операций $\mathcal{Q}^{(k)}$ на специализированных приборах $M_k \in \mathcal{M}$, причем оптимальное по быстродействию расписание

$$(1) \quad \left\{ C(Q_{1,1}), \dots, C(Q_{1,|\mathcal{Q}_1|}), \dots, (C(Q_{|\mathcal{J}|,1}), \dots, C(Q_{|\mathcal{J}|,|\mathcal{Q}_{|\mathcal{J}|}|})) \right\} =: \mathbf{S}$$

должно иметь наименьшую длину $C_{\max} := \max\{C_1, \dots, C_{|\mathcal{J}|}\}$ среди всех допустимых расписаний обслуживания требований множества \mathcal{J} . Здесь и далее C_i обозначает момент завершения обслуживания требования $J_i \in \mathcal{J}$, т.е. $C_i = C(Q_{i,|\mathcal{Q}_i|})$, где $Q_{i,|\mathcal{Q}_i|}$ — последняя операция по обслуживанию требования J_i .

При решении задачи $\alpha|\beta|C_{\max}$ поиск оптимального расписания можно ограничить множеством активных расписаний [12], поскольку существует оптимальное по быстродействию расписание, которое является активным.

Определение 2. Допустимое для задачи $\alpha|\beta|C_{\max}$ расписание \mathbf{S} называют активным, если выполнение любой операции из множества \mathcal{Q} не может быть начато раньше без нарушения порядка выполнения операций при

расписании \mathbf{S} или (и) другая операция будет выполняться позже, чем при расписании \mathbf{S} .

В [2] введено следующее определение строгой раскраски смешанного графа.

Определение 3 [2]. Целочисленную функцию $c_{<} : V \rightarrow \{1, \dots, t\}$ называют строгой раскраской $c_{<}(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, если неравенство

$$(2) \quad c_{<}(v_i) < c_{<}(v_j)$$

выполняется для каждой дуги $(v_i, v_j) \in A$ и $c_{<}(v_p) \neq c_{<}(v_q)$ для каждого ребра $[v_p, v_q] \in E$. Строгая раскраска $c_{<}(G)$ является оптимальной, если в ней используется минимальное количество $t =: \chi_{<}(G)$ различных цветов $c_{<}(v_i) \in \{1, \dots, t\}$.

Строгую раскраску $c_{<}(G)$ можно интерпретировать как частный случай раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ (см. определение 1).

Замечание 1. Раскраску $c(G)$ можно использовать вместо строгой раскраски $c_{<}(G)$ для любого смешанного графа $G = (V, A, E)$, в котором для каждой дуги $(v_i, v_j) \in A$ выполняется следующая импликация:

$$(3) \quad (v_i, v_j) \in A \Rightarrow [v_i, v_j] \in E.$$

Если же в смешанном графе $G = (V, A, E)$ имеется дуга $(v_i, v_j) \in A$, для которой импликация (3) не выполняется, то добавим ребро $[v_i, v_j]$ в смешанный граф G для каждой такой дуги (v_i, v_j) . Тогда любая строгая раскраска $c_{<}(G)$ смешанного графа G может быть представлена как раскраска $c(G^+)$ смешанного графа $G^+ = (V, A, E^+)$, полученного в результате добавления всех указанных ребер.

Как следствие из теоремы 1, получаем следующий критерий существования строгой раскраски $c_{<}(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$.

Следствие 1. Строгая раскраска $c_{<}(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ существует тогда и только тогда, когда ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа $G = (V, A, E)$ не содержит контуров.

В [4] для задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ доказана следующая

Теорема 2 [4]. Задача $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ эквивалентна задаче поиска оптимальной строгой раскраски $c_{<}(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, для которого $V = \mathcal{Q}$ и выполняются следующие два условия:

(а) $(\mathcal{Q}, A, \emptyset) = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} (\mathcal{Q}_i, A_i, \emptyset)$, где каждый ориентированный подграф $(\mathcal{Q}_i, A_i, \emptyset)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ является путем, проходящим через все вершины множества \mathcal{Q}_i , и выполняется равенство $\mathcal{Q}_i \cap \mathcal{Q}_j = \emptyset$ для всех индексов $i \neq j$;

(б) $(\mathcal{Q}, \emptyset, E) = \bigcup_{k=1}^{|\mathcal{M}|} (\mathcal{Q}^{(k)}, \emptyset, E^{(k)})$, где каждый подграф $(\mathcal{Q}^{(k)}, \emptyset, E^{(k)})$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ является полным графом, и равенство $\mathcal{Q}^{(k)} \cap \mathcal{Q}^{(l)} = \emptyset$ выполняется для всех индексов $k \neq l$.

С учетом замечания 1 непосредственно из теоремы 2 получаем

Следствие 2. Задача $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ эквивалентна задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, для которого $V = Q$ и выполняются условия (а), (б) и (3).

2.2. Прерывания операций с целочисленными длительностями

В этом подразделе теорема 2 обобщается на задачу $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ построения оптимального по быстродействию расписания обслуживания множества требований \mathcal{J} с целочисленными длительностями $p_{ij} \geq 1$ операций $Q_{ij} \in Q$, при выполнении которых допускаются прерывания. В обозначении задачи $pmtn$ определяет допустимость прерываний операций, а $[p_{ij}]$ — целочисленность длительностей заданных операций. Допустимость прерываний операций множества Q приводит к расширению множества активных расписаний, что во многих случаях может усложнить поиск оптимального по быстродействию расписания. С другой стороны, прерывания всех или некоторой части операций множества Q может привести к уменьшению длины C_{\max} оптимального активного расписания. Следовательно, при решении многих задач $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ желательно ограничить количество моментов времени, в которые допустимы прерывания выполнения операций из множества Q без потери активного расписания наименьшей длины C_{\max} .

В дальнейшем для задачи $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ поиск оптимального расписания будет ограничен множеством активных расписаний, при реализации которых прерывания операций допустимы только в целочисленные моменты времени. Такое сокращение области поиска решения задачи $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ основано на следующем замечании.

Замечание 2. Поскольку все требования множества $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ готовы к обслуживанию в момент времени $t = 0$, и длительности $p_{ij} \geq 1$ всех операций $Q_{ij} \in Q$ являются целочисленными, то существует оптимальное активное расписание, при котором прерывания операций ограничены целочисленными моментами времени.

Справедливость замечания 2 следует из того, что прерывание выполнения операции $Q_{ij} \in Q$ может привести к уменьшению длины активного расписания S без прерываемых операций только при условии, что это прерывание произойдет в момент завершения хотя бы одной операции, что позволит начать выполнение другой операции $Q_{uv} \in Q$, $u \neq i$, на освободившемся приборе $M_{\mu(i,j)} = M_{\mu(u,v)} \in M$. Поскольку все требования множества $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ готовы к обслуживанию в момент времени $t = 0$, и длительности $p_{ij} \geq 1$ всех операций $Q_{ij} \in Q$ являются целочисленными, то в активном расписании S без прерываний операций выполнение любой операции может завершиться только в целочисленный момент времени.

Учитывая замечание 2, разобьем операцию $Q_{1,1} \in Q_1$ целочисленной длительности на $p_{1,1}$ единичных операций. Полученное множество единичных операций обозначим $\{v_1, \dots, v_{p_{1,1}}\}$.

Здесь и далее будем предполагать, что единичные операции линейно упорядочены и должны выполняться в порядке возрастания их номеров (индексов) в процессе реализации любого допустимого расписания.

Множество единичных операций, на которые разбивается следующая операция $Q_{1,2} \in \mathcal{Q}_1$ требования J_1 , обозначим $\{v_{p_{1,1}+1}, \dots, v_{p_{1,1}+p_{1,2}}\}$. Аналогично продолжим разбиение операций множества $\mathcal{Q}_1 \setminus \{Q_{1,1}, Q_{1,2}\}$ на единичные операции и присвоим им очередные номера (индексы). Так, последняя операция $Q_{1,|\mathcal{Q}_1|} \in \mathcal{Q}_1$ требования J_1 будет разбита на следующие единичные операции: $\left\{v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|-1} p_{1,j}+1}, \dots, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j}}\right\}$.

В результате описанного разбиения операций множества \mathcal{Q}_1 получим множество

$$(4) \quad \mathcal{W}_1 = \left\{v_1, \dots, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j}}\right\}$$

линейно упорядоченных единичных операций обслуживания первого требования $J_1 \in \mathcal{J}$ в задаче $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$.

Начиная с очередной единичной операции $v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j}+1}$, последовательно обозначим все единичные операции, на которые разбиваются операции множества $\mathcal{Q}_2 = \{Q_{2,1}, \dots, Q_{2,|\mathcal{Q}_2|}\}$ обслуживания второго требования $J_2 \in \mathcal{J}$. Получим множество

$$(5) \quad \mathcal{W}_2 = \left\{v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j}+1}, \dots, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_2|} p_{2,j}}\right\}$$

линейно упорядоченных единичных операций обслуживания требования $J_2 \in \mathcal{J}$.

Продолжая аналогично, будем обозначать единичные операции обслуживания требований множества $\mathcal{J} \setminus \{J_1, J_2\}$ в порядке возрастания номеров требований и индексов полученных единичных операций.

На последнем этапе разбиения целочисленных операций множества \mathcal{J} на единичные операции получим множество

$$(6) \quad \mathcal{W}_{|\mathcal{J}|} = \left\{v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{|\mathcal{J}|-1}|} p_{|\mathcal{J}|-1,j}+1}, \dots, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{|\mathcal{J}|}|} p_{|\mathcal{J}|,j}}\right\}$$

линейно упорядоченных единичных операций обслуживания последнего требования $J_{|\mathcal{J}|}$ множества \mathcal{J} .

Итак, с учетом замечания 2 обслуживание всех требований множества \mathcal{J} состоит из выполнения следующего множества единичных операций $\mathcal{W} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$.

Пусть $\mathcal{J}^{(k)}$ обозначает подмножество множества требований $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{J}^{(k)}$, обслуживание которых включает операции, выполняемые на приборе $M_k \in \mathcal{M}$. Если $J_i \in \mathcal{J}^{(k)}$, то подмножество $\mathcal{Q}_i^{(k)}$ множества $\mathcal{Q}_i \supseteq \mathcal{Q}_i^{(k)}$ содержит все операции требования J_i , которые выполняются на приборе $M_k \in \mathcal{M}$.

2.3. Пример 1 задачи $J5[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$

Опишем сведение задачи $J[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ к задаче поиска оптимальной строгой раскраски $c_{<}(G)$ смешанного графа G на примере 1 задачи $J5[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ с множеством требований $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3\}$ и множеством приборов $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_5\}$. Исходные данные примера 1 представлены в табл. 1.

Построим смешанный граф $G = (V, A, E)$, который будет определять все исходные данные примера 1 в сетевом виде.

Обслуживание требования J_1 состоит из четырех операций $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $Q_{1,3}$ и $Q_{1,4}$ с длительностями $p_{1,1} = 2$, $p_{1,2} = 4$, $p_{1,3} = 2$ и $p_{1,4} = 1$. Используя обозначения (4), получаем линейно упорядоченное множество единичных операций $\mathcal{W}_1 = \{v_1, \dots, v_9\}$, которые включаем в искомое множество вершин $V \supset \mathcal{W}_1$. Поскольку все операции требования J_1 и все единичные операции, на которые разбивается каждая операция множества \mathcal{Q}_1 , линейно упорядочены при выполнении любого допустимого расписания, то в искомый смешанный граф $G = (V, A, E)$ включаем следующее множество дуг: $\mathcal{A}_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_8, v_9)\}$; $\mathcal{A}_1 \subset A$.

Обслуживание требования J_2 состоит из пяти операций $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$, $Q_{2,3}$, $Q_{2,4}$ и $Q_{2,5}$ с длительностями $p_{2,1} = 3$, $p_{2,2} = 2$, $p_{2,3} = 2$, $p_{2,4} = 3$ и $p_{2,5} = 1$. Используя обозначения (5), получаем множество единичных операций $\mathcal{W}_2 = \{v_{10}, \dots, v_{20}\}$, которые включаем в множество вершин $V \supset \mathcal{W}_2$. Поскольку все операции требования J_2 линейно упорядочены при выполнении любого допустимого расписания, то в искомый смешанный граф $G = (V, A, E)$ добавляем следующее множество дуг: $\mathcal{A}_2 = \{(v_{10}, v_{11}), (v_{11}, v_{12}), \dots, (v_{19}, v_{20})\}$; $\mathcal{A}_2 \subset A$.

Обслуживание требования J_3 состоит из пяти операций $Q_{3,1}$, $Q_{3,2}$, $Q_{3,3}$, $Q_{3,4}$ и $Q_{3,5}$ с длительностями $p_{3,1} = 2$, $p_{3,2} = 1$, $p_{3,3} = 1$, $p_{3,4} = 3$ и $p_{3,5} = 1$. Используя обозначения (6), получаем множество единичных операций $\mathcal{W}_3 = \{v_{21}, \dots, v_{28}\}$, которые включаем в множество вершин $V \supset \mathcal{W}_3$. Поскольку все операции требования J_3 линейно упорядочены при выполнении любого допустимого расписания, то в искомый смешанный граф $G = (V, A, E)$ до-

Таблица 1. Исходные данные примера 1 задачи $J5[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$

Операции $Q_{1,j}$ требования J_1	$Q_{1,1}$	$Q_{1,2}$	$Q_{1,3}$	$Q_{1,4}$	–
Приборы $M_{\mu(1,j)}$	M_1	M_2	M_3	M_4	–
Длительности $p_{1,j}$ операций $Q_{1,j}$	2	4	2	1	–
Операции $Q_{2,j}$ требования J_2	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$	$Q_{2,3}$	$Q_{2,4}$	$Q_{2,5}$
Приборы $M_{\mu(2,j)}$	M_2	M_5	M_1	M_2	M_4
Длительности $p_{2,j}$ операций $Q_{2,j}$	3	2	2	3	1
Операции $Q_{3,j}$ требования J_3	$Q_{3,1}$	$Q_{3,2}$	$Q_{3,3}$	$Q_{3,4}$	$Q_{3,5}$
Приборы $M_{\mu(3,j)}$	M_5	M_3	M_1	M_5	M_3
Длительности $p_{3,j}$ операций $Q_{3,j}$	2	1	1	3	1

бавляем следующее множество дуг: $\mathcal{A}_3 = \{(v_{21}, v_{22}), (v_{22}, v_{23}), \dots, (v_{27}, v_{28})\}$; $\mathcal{A}_3 \subset A$.

Итак, построен ориентированный подграф $(V, A, \emptyset) = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} (\mathcal{W}_i, \mathcal{A}_i, \emptyset)$, $|\mathcal{J}| = 3$, искомого смешанного графа (V, A, E) с множеством вершин

$$(7) \quad V = \mathcal{W} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$$

и множеством дуг

$$(8) \quad A = \mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{A}_i.$$

Множество ребер E смешанного графа $G = (V, A, E)$ будем строить последовательно для каждого множества $\mathcal{Q}^{(k)} = \bigcup_{J_i \in \mathcal{J}^{(k)}} \mathcal{Q}_i^{(k)}$ операций, выполняемых на приборе $M_k \in \{M_1, \dots, M_5\}$.

Для прибора M_1 множество $\mathcal{Q}^{(1)}$ разбивается на две единичные операции $\{v_1, v_2\}$ требования J_1 , две единичные операции $\{v_{15}, v_{16}\}$ требования J_2 и единичную операцию v_{24} требования J_1 . Поскольку ни одна пара операций из множества $\mathcal{Q}^{(1)}$ не может выполняться одновременно, то необходимо построить полный трехдольный граф (V_1, \emptyset, E_1) , в котором $V_1 = \{v_1, v_2; v_{15}, v_{16}; v_{24}\}$ и $E_1 = \{[v_1, v_{15}], [v_1, v_{16}], [v_2, v_{15}], [v_2, v_{16}]; [v_1, v_{24}], [v_2, v_{24}]; [v_{15}, v_{24}], [v_{16}, v_{24}]\}$. *Здесь и далее вершины разных долей построенного k -дольного графа и построенные ребра, инцидентные вершинам разных долей графа, отделяются знаком; (точка с запятой).*

Для прибора M_2 множество $\mathcal{Q}^{(2)}$ разбивается на четыре единичные операции $\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ требования J_1 и шесть единичных операций $\{v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$ требования J_2 . Поскольку ни одна пара операций из множества $\mathcal{Q}^{(2)}$ не может выполняться одновременно, то необходимо построить полный двудольный граф (V_2, \emptyset, E_2) , в котором $V_2 = \{v_3, v_4, v_5, v_6; v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$ и $|E_2| = |\mathcal{Q}_1^{(2)}| \cdot |\mathcal{Q}_2^{(2)}| = 4 \cdot 6 = 24$.

Для прибора M_3 множество $\mathcal{Q}^{(3)}$ разбивается на две единичные операции $\{v_7, v_8\}$ требования J_1 и две единичные операции $\{v_{23}, v_{28}\}$ требования J_3 . Поскольку пара операций из множества $\mathcal{Q}^{(3)}$ не может выполняться одновременно, то необходимо построить полный двудольный граф (V_3, \emptyset, E_3) , в котором $V_3 = \{v_7, v_8; v_{23}, v_{28}\}$ и $|E_3| = |\mathcal{Q}_1^{(3)}| \cdot |\mathcal{Q}_3^{(3)}| = 2 \cdot 2 = 4$.

Для прибора M_4 множество $\mathcal{Q}^{(4)}$ разбивается на единичную операцию v_9 требования J_1 и единичную операцию v_{20} требования J_2 . Поскольку операции множества $\mathcal{Q}^{(4)}$ не могут выполняться одновременно, то необходимо соединить ребром операции v_9 и v_{20} и тем самым построить тривиальный полный двудольный граф (V_4, \emptyset, E_4) , в котором $V_4 = \{v_9; v_{20}\}$ и $E_4 = \{[v_9, v_{20}]\}$.

Для прибора M_5 множество $\mathcal{Q}^{(5)}$ разбивается на две единичные операции $\{v_{13}, v_{14}\}$ требования J_2 и пять единичных операций $\{v_{21}, v_{22}, v_{25}, v_{26}, v_{27}\}$ тре-

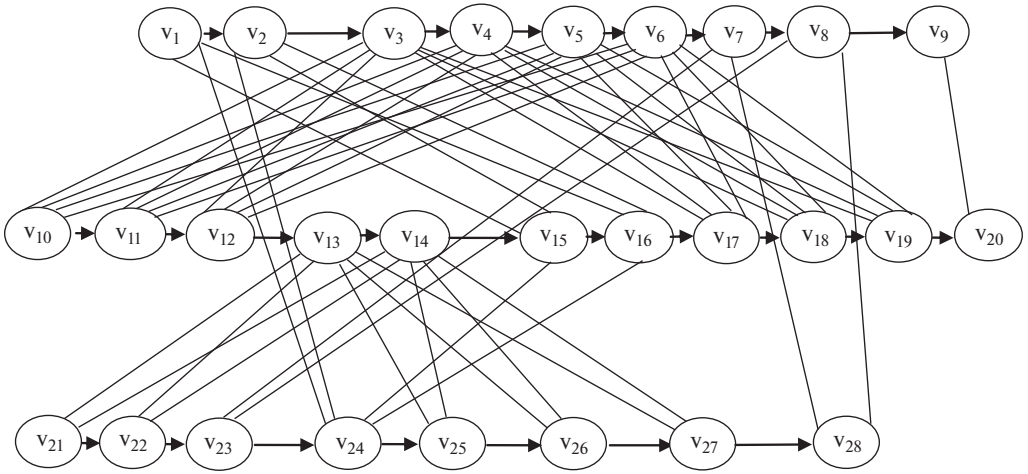


Рис. 1. Смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий исходные данные примера 1 задачи $J5[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$.

бования J_3 . Поскольку ни одна пара операций из множества $\mathcal{Q}^{(5)}$ не может выполняться одновременно, то необходимо построить полный двудольный граф (V_5, \emptyset, E_5) , в котором $V_5 = \{v_{13}, v_{14}; v_{21}, v_{22}, v_{25}, v_{26}, v_{27}\}$ и $|E_5| = |\mathcal{Q}_2^{(5)}| \cdot |\mathcal{Q}_3^{(5)}| = 2 \cdot 5 = 10$.

Итак, построен подграф $(V, \emptyset, E) = \bigcup_{k=1}^{|\mathcal{M}|} (V_k, \emptyset, E_k)$, $|\mathcal{M}| = 5$, искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$ с множеством ребер

$$(9) \quad E = \mathcal{E} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{M}|} \mathcal{E}_i.$$

Каждый подграф (V_k, \emptyset, E_k) смешанного графа G является полным $|\mathcal{J}^{(k)}|$ -дольным графом и выполняется равенство $V_k \cap V_l = \emptyset$ для всех пар различных индексов $k \neq l$.

На рис. 1 представлен смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий исходные данные примера 1. Покажем далее, что поиск оптимальной строгой раскраски $c_{<}(G)$ смешанного графа G можно представить как решение примера 1.

Отметим, что для рассмотренной в подразделе 2.1 задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ справедливы равенства $p_{ij} = 1$ для всех операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$, поэтому расписание (1) для задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ определяется моментами завершения единичных операций \mathcal{Q} по обслуживанию всех требований множества \mathcal{J} .

Для задачи $J|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ с прерываниями целочисленных операций допустимое расписание обслуживания требований множества $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ определяется моментами завершения $C(v_j)$ всех единичных операций $v_j \in \mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$. Величина p_{ij} равна целочисленной длительности операции Q_{ij} . Учитывая замечание 2, помимо множества (1) моментов завершения целочисленных операций \mathcal{Q} по обслуживанию требований мно-

жества \mathcal{J} , необходимо определить и моменты завершения всех единичных операций множества \mathcal{W} . Следовательно, допустимое расписание \mathbf{S} для задачи $J[[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ с прерываниями целочисленных операций определяется следующим множеством:

$$(10) \quad \{C(v_1), \dots, C(v_{|\mathcal{W}|})\} =: \mathbf{S}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для смешанного графа $G = (V, A, E)$, построенного для примера 1, для всех вершин $v_i \in \mathcal{W}$ выполняются следующие равенства:

$$(11) \quad C(v_i) = c_{<}(v_i).$$

Из равенств (10) и (11) следует, что оптимальное по быстродействию расписание $\mathbf{S} = \{C(v_1) = c_{<}(v_1), \dots, C(v_{28}) = c_{<}(v_{28})\}$ для примера 1 определяется следующей оптимальной строгой раскраской $c_{<}(G)$ смешанного графа G , представленного на рис. 1:

$$\begin{aligned} c_{<}(v_1) &= 1, & c_{<}(v_2) &= 2, & c_{<}(v_3) &= 4, & c_{<}(v_4) &= 5, & c_{<}(v_5) &= 6, \\ c_{<}(v_6) &= 7, & c_{<}(v_7) &= 8, & c_{<}(v_8) &= 9, & c_{<}(v_9) &= 10, & c_{<}(v_{10}) &= 1, \\ c_{<}(v_{11}) &= 2, & c_{<}(v_{12}) &= 3, & c_{<}(v_{13}) &= 4, & c_{<}(v_{14}) &= 5, & c_{<}(v_{15}) &= 6, \\ c_{<}(v_{16}) &= 7, & c_{<}(v_{17}) &= 8, & c_{<}(v_{18}) &= 9, & c_{<}(v_{19}) &= 10, & c_{<}(v_{20}) &= 11, \\ c_{<}(v_{21}) &= 1, & c_{<}(v_{22}) &= 2, & c_{<}(v_{23}) &= 3, & c_{<}(v_{24}) &= 4, & c_{<}(v_{25}) &= 6, \\ & & c_{<}(v_{26}) &= 7, & c_{<}(v_{27}) &= 8, & c_{<}(v_{28}) &= 10. \end{aligned}$$

Вычислим длину оптимального расписания для примера 1:

$$\begin{aligned} C_{\max} &= \max\{C_1, C_2, C_3\} = \max\{c_{<}(v_9), c_{<}(v_{20}), c_{<}(v_{28})\} = \\ &= \max\{10, 11, 10\} = 11. \end{aligned}$$

Оптимальность строгой раскраски $c_{<}(G)$ следует из того, что в подграфе (V, A, \emptyset) построенного смешанного графа $G = (V, A, E)$ имеется путь (v_{10}, \dots, v_{20}) , длина которого равна 11, из чего следует нестрогое неравенство $\chi_{<}(G) \geq 11$.

2.4. Задача $J[[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ и соответствующая задача поиска строгой раскраски вершин смешанного графа с полными k -дольными подграфами

Введенные обозначения позволяют сформулировать следующую теорему, в которой используется условие (а), определенное в теореме 2.

Теорема 3. Задача $J[[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ псевдополиномиально сводится к задаче поиска оптимальной строгой раскраски $c_{<}(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, множество вершин которого определяется равенством $V = \mathcal{W}$, и выполняются условие (а) и условие

(в) $(V, \emptyset, E) = \bigcup_{k=1}^{|\mathcal{M}|} (V_k, \emptyset, E_k)$, где каждый граф (V_k, \emptyset, E_k) является полным $|\mathcal{J}^{(k)}|$ -дольным графом, и равенство $V_k \cap V_l = \emptyset$ выполняется для всех индексов $k \neq l$.

Доказательство. Для произвольной задачи $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ докажем существование смешанного графа $G = (V, A, E)$ с множеством вершин $V = \mathcal{W}$, оптимальная строгая раскраска которого определяет оптимальное расписание для задачи $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$, и выполняются условия (а) и (в).

Из замечания 2 следует, что оптимальное расписание для задачи $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ можно искать в классе активных расписаний, в которых прерывания операций допускаются только в целочисленные моменты времени. Следовательно, задачу $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ можно представить как задачу $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ построения оптимального по быстрдействию расписания обслуживания заданного множества $\mathcal{W} = \{v_1, \dots, v_{|\mathcal{W}|}\} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$ требований с единичными длительностями. Построение множества требований \mathcal{W} для задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ основано на последовательном разбиении множеств операций \mathcal{Q}_i по обслуживанию всех требований $J_i \in \mathcal{J}$ для задачи $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ на единичные операции, как это описано в подразделе 2.2 (см. равенство (4) для операций множества \mathcal{Q}_1 , равенство (5) для операций множества \mathcal{Q}_2 и равенство (6) для операций множества $\mathcal{Q}_{|\mathcal{J}|}$).

Нетрудно убедиться в том, что теорема 3 следует из теоремы 2, поскольку условие (б) для смешанного графа $G = (V, A, E)$ с множеством вершин $V = \mathcal{Q}$ превращается в условие (в) для смешанного графа $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathcal{E})$ с построенным в подразделе 2.3 множеством вершин $\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$ (см. равенство (7)), множеством дуг $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{A}_i$ (равенство (8)) и множеством ребер $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{E}_i$ (равенство (9)). Теорема 3 доказана.

Учитывая замечание 1, получаем

Следствие 3. Задача $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ псевдополиномиально сводится к задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, для которого выполняются условия (а), (в) и равенство $V = \mathcal{W}$.

3. Оптимальное расписание выполнения многопроцессорных операций и соответствующая раскраска вершин смешанного графа

В разделе 2 приведена теорема 2 и доказана теорема 3 о сведении классических задач теории расписаний $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ и $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ к задачам поиска оптимальных строгих раскрасок $c_{<}(G)$ смешанных графов $G = (V, A, E)$, для которых должны выполняться условия (а) и (б) и условия (а) и (в) соответственно. Нетрудно убедиться в том, что для произвольно заданного смешанного графа $G = (V, A, E)$ задача поиска оптимальной строгой раскраски $c_{<}(G)$ может не сводиться ни к задаче $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$, ни к задаче $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$.

В этом разделе представлены обобщения задач $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ и $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$, к которым сводится задача поиска оптимальной раскраски $c(G)$ любого заданного смешанного графа $G = (V, A, E)$.

3.1. Единичные длительности многопроцессорных операций

В отличие от классических задач $J|\beta|C_{\max}$ теории расписаний, в которых каждая операция выполняется на одном из приборов множества \mathcal{M} , в обслуживающих системах с многопроцессорными операциями (заданиями), в течение всего периода продолжительности $p_{ij} \geq 0$ для выполнения операции $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$ может требоваться либо единственный прибор, либо несколько специализированных приборов из множества \mathcal{M} [13]. Как и во всех задачах $\alpha|\beta|\gamma$ теории расписаний, при реализации любого допустимого расписания не может одновременно выполняться ни одна пара операций, для выполнения которых требуется хотя бы один общий прибор $M_k \in \mathcal{M}$.

В монографии [13, с. 264–283] приведены результаты исследований задач $GMPT||C_{\max}$, где сокращение MPT используется для обозначения многопроцессорных заданий (Multi-Processor Tasks), а G определяет обслуживаемую систему (general shop — общий цех работ) с произвольными отношениями предшествования, заданными на множестве многопроцессорных операций \mathcal{Q} . В задаче $GMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ требуется, чтобы момент завершения $C(Q_{ij})$ операции $Q_{ij} = v_{k_{ij}}$ предшествовал началу $S(Q_{rq})$ операции $Q_{rq} = v_{k_{rq}}$. Такое отношение предшествования операций типа завершение-начало будем обозначать $v_{k_{ij}} \rightarrow v_{k_{rq}}$. Нетрудно видеть, что смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий исходные данные задачи $GMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, должен содержать как дугу $(v_{k_{ij}}, v_{k_{rq}})$, так и ребро $[v_{k_{ij}}, v_{k_{rq}}]$ (см. определение 1).

Следует отметить, что интенсивные исследования задач $GMPT|\beta|\gamma$ продолжаются уже несколько десятилетий [15–23], поскольку такие задачи возникают во многих практических задачах ОКП. Опубликованные до 1996 г. результаты исследований задач $GMPT|\beta|\gamma$ представлены в обзоре [19]. Задачи $GMPT|p_{ij} = 1|\gamma$ с единичными длительностями многопроцессорных операций исследовались в [19–23].

Рассмотрим задачу $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, которая эквивалентна задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, как установлено в [24]. Задача $GMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ является частным случаем задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, а задача $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ — частный случай задачи $GMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$.

Отличие задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ от задачи $GMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ [13, с. 264–268] состоит в следующем:

1) помимо задания отношений предшествования $v_{k_{ij}} \rightarrow v_{k_{rq}}$ типа завершение-начало, в задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на множестве операций \mathcal{Q} могут быть заданы отношения предшествования типа начало-начало (т.е. момент начала $S(Q_{ij})$ операции $Q_{ij} = v_{k_{ij}}$ должен предшествовать началу $S(Q_{rq})$ операции $Q_{rq} = v_{k_{rq}}$);

2) также в задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ могут быть заданы подмножества единичных операций $\{v_{h_1}, \dots, v_{h_{|V(h)|}}\} =: V(h)$ множества V , которые должны выполняться одновременно при любом допустимом расписании.

Опишем отношения предшествования типа начало-начало, как обобщение задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ при условии, что исходные данные этой задачи представлены в виде смешанного графа $G = (V, A, E)$ и, следовательно, задача $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ сводится к задаче поиска оптимальной раскраски смешанного графа G (следствие 2).

При описании отношений предшествования, заданных на множестве \mathcal{Q} , будем использовать обозначения $v_{k_{ij}} \in \mathcal{W}$ единичных операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$, введенные в подразделе 2.2 для операций с целочисленными длительностями задачи $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, что допустимо, поскольку все операции задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ имеют единичные длительности. Взаимно однозначное соответствие элементов множества \mathcal{Q} и множества \mathcal{W} определяется равенством (4) для операций требования J_1 , равенством (5) для операций требования J_2 и равенством (6) для операций последнего требования $J_n \in \mathcal{J}$.

Пусть в задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ требуется, чтобы момент завершения $C(Q_{ij})$ операции $Q_{ij} = v_{k_{ij}}$ предшествовал началу $S(Q_{rq})$ операции $Q_{rq} = v_{k_{rq}}$. Тогда смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий исходные данные задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, должен содержать как дугу $(v_{k_{ij}}, v_{k_{rq}})$, так и ребро $[v_{k_{ij}}, v_{k_{rq}}]$ (согласно определению 1). Помимо задания отношения $v_{k_{ij}} \rightarrow v_{k_{rq}}$ типа завершение-начало, в задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ может потребоваться, чтобы момент начала $S(Q_{uv})$ операции $Q_{uv} = v_{k_{uv}}$ предшествовал моменту начала $S(Q_{el})$ операции $Q_{el} = v_{k_{el}}$. Тогда смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий исходные данные задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, содержит дугу $(v_{k_{uv}}, v_{k_{el}})$ и не содержит ребро $[v_{k_{uv}}, v_{k_{el}}]$. Такое отношение предшествования типа начало-начало будем обозначать $v_{k_{uv}} \mapsto v_{k_{el}}$.

Помимо задания отношений предшествования $v_{k_{ij}} \rightarrow v_{k_{rq}}$ и $v_{k_{uv}} \mapsto v_{k_{el}}$, в задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ может потребоваться, чтобы заданное подмножество единичных операций $\{v_{h_1}, \dots, v_{h_{|V(h)|}}\} =: V(h)$ множества V выполнялось одновременно при любом допустимом расписании. Для задания такого условия ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа $G = (V, A, E)$ должен содержать контур $(v_{h_1}, v_{h_2}, \dots, v_{h_{|V(h)|}}, v_{h_1})$, т.е. множество A должно содержать следующее подмножество дуг:

$$\left\{ (v_{h_1}, v_{h_2}), (v_{h_2}, v_{h_3}), \dots, (v_{h_{|V(h)|-1}}, v_{h_{|V(h)|}}), (v_{h_{|V(h)|}}, v_{h_1}) \right\} \subseteq A.$$

Пусть в задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ задано w подмножеств $V(1), \dots, V(w)$ единичных операций, причем операции каждого подмножества $V(h) = \{v_{h_1}, \dots, v_{h_{|V(h)|}}\} \subseteq V$ должны выполняться одновременно при любом допустимом расписании, $h \in \{1, \dots, w\}$. Тогда ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа $G = (V, A, E)$ должен содержать следующее подмножество дуг:

$$(12) \quad \mathcal{A}_0 = \bigcup_{h=1}^w \left\{ (v_{h_1}, v_{h_2}), (v_{h_2}, v_{h_3}), \dots, (v_{h_{|V(h)|-1}}, v_{h_{|V(h)|}}), (v_{h_{|V(h)|}}, v_{h_1}) \right\}.$$

Поскольку смешанный граф $G = (V, A, E)$ определяет исходные данные индивидуальной задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, то такую индивидуальную задачу будем называть задачей $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$. В отличие от классических задач теории расписаний $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ и $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, имеющих решение при любых исходных данных, существуют примеры (индивидуальные задачи) $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, для которых не существует допустимых расписаний. Следующий критерий существования допустимого расписания для задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ доказан в [24, с. 76].

Теорема 4 [24]. Допустимое расписание для задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ существует тогда и только тогда, когда ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа $G = (V, A, E)$ не содержит ни одного контура со смежными вершинами подграфа (V, \emptyset, E) .

В [24, с. 76] для задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ доказана и следующая

Лемма 1 [24]. Разрешимая задача $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ эквивалентна задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ того же смешанного графа $G = (V, A, E)$.

Нетрудно убедиться в том, что не все задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ сводятся к оптимальным строгим раскраскам $c_{<}(G)$ смешанных графов $G = (V, A, E)$, поскольку строгое неравенство (2) не может быть использовано для задания отношения предшествования $v_{k_{ij}} \mapsto v_{k_{rq}}$ типа начало-начало и, как следствие, ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа G , для которого существует строгая раскраска $c_{<}(G)$, не содержит контуров (сравните теоремы 1 и 4 со следствием 1).

3.2. Прерывания многопроцессорных операций с целочисленными длительностями

Следующая теорема 5 обобщает лемму 1 на задачу $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ поиска оптимального по быстродействию расписания обслуживания множества требований \mathcal{J} с целочисленными длительностями $p_{ij} \geq 1$ всех операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$ при допустимости прерываний их выполнения.

Теорема 5. Разрешимая задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ псевдополиномиально сводится к задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$. Для любого раскрашиваемого смешанного графа $G = (V, A, E)$ существует задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на том же смешанном графе $G = (V, A, E)$, которая эквивалентна задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$.

Доказательство. Для разрешимой задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ поиска оптимального по быстродействию расписания обслуживания требований множества $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ на заданных специализированных приборах $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_{|\mathcal{M}|}\}$ покажем, как можно построить смешанный граф $G = (V, A, E)$, оптимальная раскраска которого определяет решение задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$.

Учитывая замечание 2, оптимальное по быстродействию расписание для разрешимой задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ будем искать в классе активных расписаний, в которых прерывания операций допускаются только в целочисленные моменты времени. Для этого определим множество единичных операций $\mathcal{W} = \{v_1, \dots, v_{|\mathcal{W}|}\} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$ в результате последовательного разбиения множеств целочисленных операций \mathcal{Q}_i по обслуживанию всех требований $J_i \in \mathcal{J}$ для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на единичные операции, как это описано в подразделе 2.2, в котором для операций \mathcal{Q}_1 первого требования равенство (4) определяет подмножество \mathcal{W}_1 единичных операций, а для операций \mathcal{Q}_2 второго требования равенство (5) определяет подмножество \mathcal{W}_2 единичных операций. Аналогичные равенства для множеств $\mathcal{Q}_3, \dots, \mathcal{Q}_{|\mathcal{J}|-1}$ последовательно определяют подмножества $\mathcal{W}_3, \dots, \mathcal{W}_{|\mathcal{J}|-1}$ единичных операций. Так, для операций $\mathcal{Q}_{|\mathcal{J}|}$ последнего требования $J_{|\mathcal{J}|}$ равенство (6) определяет подмножество $\mathcal{W}_{|\mathcal{J}|}$ единичных операций. В результате последовательного разбиения всех целочисленных операций на единичные операции получаем подграф $(\mathcal{W}, \emptyset, \emptyset)$ искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$ с множеством вершин $V = \mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$.

Для любого активного расписания обслуживание требования $J_i \in \mathcal{J}$ состоит из выполнения линейно упорядоченного множества целочисленных операций $\mathcal{Q}_i \subset \mathcal{Q}$, которому соответствует линейно упорядоченное множество единичных операций

$$\mathcal{W}_i = \left\{ v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{i-1}|} p_{i-1,j} + 1}, \dots, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_i|} p_{i,j}} \right\}.$$

Множество дуг

$$\mathcal{A}_i = \left\{ \left(v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{i-1}|} p_{i-1,j}}, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{i-1}|} p_{i-1,j} + 1} \right), \dots, \left(v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_i|} p_{i,j}}, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_i|} p_{i,j} + 1} \right) \right\}$$

и множество ребер

$$\mathcal{E}_i = \left\{ \left[v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{i-1}|} p_{i-1,j}}, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{i-1}|} p_{i-1,j} + 1} \right], \dots, \left[v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_i|} p_{i,j}}, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_i|} p_{i,j} + 1} \right] \right\}$$

определяют линейный порядок выполнения операций множества \mathcal{W}_i при реализации допустимого расписания для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$.

Пусть помимо отношений предшествования типа завершение-начало между операциями множества \mathcal{Q}_i по обслуживанию одного и того же требования $J_i \in \mathcal{J}$, в задаче $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ задано следующее множе-

ство $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ отношений предшествования типа завершение-начало между операциями разных требований:

$$(13) \quad \mathcal{R}_{\rightarrow} = \{v_{r_1} \rightarrow v_{r_2}, \dots, v_{r_{n-1}} \rightarrow v_{r_n}\};$$

и следующее множество \mathcal{R}_{\mapsto} отношений предшествования типа начало-начало между операциями разных требований:

$$(14) \quad \mathcal{R}_{\mapsto} = \{v_{l_1} \mapsto v_{l_2}, \dots, v_{l_{m-1}} \mapsto v_{l_m}\}.$$

Согласно определению 1, для представления отношений предшествования (13) в искомый смешанный граф $G = (V, A, E)$ следует включить множество дуг $\mathcal{A}_{|\mathcal{J}|+1} := \{(v_{r_1}, v_{r_2}), \dots, (v_{r_{n-1}}, v_{r_n})\}$ и множество ребер $\mathcal{E}_{|\mathcal{J}|+1} := \{[v_{r_1}, v_{r_2}], \dots, [v_{r_{n-1}}, v_{r_n}]\}$, а для представления отношений предшествования (14) в смешанный граф $G = (V, A, E)$ достаточно включить только множество дуг $\mathcal{A}_{|\mathcal{J}|+2} := \{(v_{l_1}, v_{l_2}), \dots, (v_{l_{m-1}}, v_{l_m})\}$.

В задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ также могут быть заданы подмножества $V(1), \dots, V(w)$ единичных операций множества \mathcal{Q} такие, что все операции подмножества $V(h) = \{v_{h_1}, \dots, v_{h_{|V(h)|}}\} \subseteq V$ должны выполняться одновременно при любом допустимом расписании, $h \in \{1, \dots, w\}$. При задании такого условия в задаче $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ множество отношений предшествования \mathcal{R}_{\mapsto} , представленное в (14), должно содержать следующее подмножество отношений предшествования: $\bigcup_{h=1}^w \left\{ v_{h_1} \mapsto v_{h_2}, v_{h_2} \mapsto v_{h_3}, \dots, v_{h_{|V(h)|-1}} \mapsto v_{h_{|V(h)|}}, v_{h_{|V(h)|}} \mapsto v_{h_1} \right\}$. Тогда построенное множество дуг $\mathcal{A}_{|\mathcal{J}|+2}$ должно содержать и множество $\mathcal{A}_0 \subseteq A$, определенное в (12).

Обозначим $\mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|+2} \mathcal{A}_i$ и $\mathcal{E} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|+1} \mathcal{E}_i$. Итак, построен подграф $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathcal{E})$ искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$, в котором $V = \mathcal{W}$ и $A = \mathcal{A}$.

Множество $E \setminus \mathcal{E}$ остальных ребер смешанного графа G определим далее таким образом, чтобы было невозможно выполнять на приборе $M_k \in \mathcal{M}$ одновременно ни одной пары единичных операций из множества $\mathcal{Q}^{(k)}$, $k \in \{1, \dots, |\mathcal{M}|\}$, при любом расписании, допустимом для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$. Для каждого прибора $M_k \in \mathcal{M}$ множество $\mathcal{Q}^{(k)}$ целочисленных операций, выполняемых на этом приборе, определяет множество V_k всех единичных операций, выполняемых на приборе M_k .

Мощность множества V_k равна сумме длительностей всех операций по обслуживанию требований множества $\mathcal{J}^{(k)} = \{J_{k_1}, \dots, J_{|\mathcal{J}^{(k)}|}\}$, т.е. $|V_k| = \sum_{J_i \in \mathcal{J}^{(k)}} p_{ik}$. Разобьем множество V_k на $|\mathcal{J}^{(k)}|$ подмножеств \mathcal{V}_k^j единичных операций по обслуживанию требований $J_{k_j} \in \mathcal{J}^{(k)}$:

$$V_k = \mathcal{V}_k^1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k^{|\mathcal{J}^{(k)}|}, \quad \mathcal{V}_k^j \neq \emptyset, \quad \mathcal{V}_k^j \cap \mathcal{V}_k^l = \emptyset, \quad k \neq l.$$

Нетрудно убедиться в том, что запрещение одновременного выполнения любой пары единичных операций из множества V_k в допустимом расписании

задается полным $|\mathcal{J}^{(k)}|$ -дольным графом (V_k, \emptyset, E_k) , долями которого являются множества $\mathcal{V}_k^1, \dots, \mathcal{V}_k^{|\mathcal{J}^{(k)}|}$, и мощность множества ребер E_k равна произведению $\prod_{J_{k_j} \in \mathcal{J}^{(k)}} |\mathcal{V}_k^{j}|$.

Итак, определено множество ребер $E \setminus \mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^{|\mathcal{M}|} E_k$ и построен смешанный граф $G = (V, A, E)$, в котором $V = \mathcal{W}$, $A = \mathcal{A}$ и $E = \mathcal{E} \cup E_1 \cup \dots \cup E_{|\mathcal{M}|}$. Из построения смешанного графа $G = (V, A, E)$ следует, что все отношения предшествования операций, заданные в задаче $G_cMPT|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$, определяются подграфом $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathcal{E})$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, а запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_k на одном и том же приборе $M_k \in \mathcal{M}$ определяется подграфом $(\mathcal{W}, \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} A_i, \{ \bigcup_{k=1}^{|\mathcal{M}|} E_k \} \cup \{ \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{E}_i \})$ смешанного графа $G = (V, A, E)$. Следовательно, для разрешимой задачи $G_cMPT|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ существует допустимое расписание

$$(15) \quad \mathbf{S} = \{C(v_1), \dots, C(v_{|\mathcal{W}|})\},$$

определяющее раскраску $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, в которой равенство $c(v_i) = C(v_i)$ выполняется для всех вершин $v_i \in \mathcal{W}$. Очевидно, что оптимальное по быстродействию расписание определяет оптимальную раскраску $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, что и завершает доказательство первой части теоремы 5.

Заметим, что оптимальное по быстродействию расписание для задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ совпадает с решением задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1, pmtn|C_{\max}$, поскольку согласно замечанию 2, если все операции $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$ имеют единичные длительности $p_{ij} = 1$, то прерывания выполнения той или иной операции из множества \mathcal{Q} не приводит к уменьшению длины C_{\max} искомого оптимального по быстродействию активного расписания. Поэтому возможность прерываний единичных операций при решении задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1, pmtn|C_{\max}$ можно попросту игнорировать при поиске оптимального по быстродействию активного расписания. Следовательно, задачу $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ можно решать, как частный случай $G_cMPT|p_{ij} = 1, pmtn|C_{\max}$ задачи $G_cMPT|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$, представленный в теореме 5. Таким образом, вторая часть теоремы 5 непосредственно следует из леммы 2.

Лемма 2 [24]. Для любого раскрашиваемого смешанного графа $G = (V, A, E)$ существует задача $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на том же смешанном графе $G = (V, A, E)$, которая эквивалентна задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$.

Приведенное в статье [24, с. 78–79] доказательство леммы 2 содержит алгоритм, который для любого заданного раскрашиваемого смешанного графа $G = (V, A, E)$ строит задачу $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на том же смешанном графе G , поиск решения которой эквивалентен поиску оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$. Теорема 5 доказана.

4. Пример 2 задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$

Проиллюстрируем первую часть теоремы 5 на следующем примере 2 разрешимой задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ с пятью требованиями $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_5\}$ и девятью приборами $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_9\}$. В табл. 2 представлены операции множества \mathcal{Q} , длительности их выполнения и приборы множеств $\mathcal{M}_{\mu(i,j)} \subseteq \mathcal{M}$, которые требуются для выполнения операции $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$. Перед тем, как задать отношения предшествования между операциями разных требований для примера 2, построим подграф $G' = (V, A', E')$ искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$.

Смешанный граф $G' = (V, A', E')$ будет представлять ту часть исходных данных примера 2, которая представлена в табл. 2. При построении всего смешанного графа $G = (V, A, E)$ будем использовать следующее

Замечание 3. Так как рассматриваемая задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ имеет решение, то согласно теореме 4 ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа $G = (V, A, E)$ не должен содержать ни одного контура со смежными вершинами подграфа (V, \emptyset, E) .

Обслуживание требования J_1 состоит из двух операций $Q_{1,1}$ и $Q_{1,2}$ с длительностями $p_{1,1} = 5$ и $p_{1,2} = 1$. Используя обозначения (4), получаем множество $\mathcal{W}_1 = \{v_1, \dots, v_6\}$ линейно упорядоченных единичных операций, которые включаем в множество вершин $V \supset \mathcal{W}_1$ смешанного графа G' . Поскольку операции обслуживания требования J_1 линейно упорядочены при реализации допустимого расписания, то в смешанный граф G' включаем множество дуг $\mathcal{A}_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_5, v_6)\}$, $\mathcal{A}_1 \subset A'$, и множество ребер $\mathcal{E}_1 = \{[v_1, v_2], [v_2, v_3], \dots, [v_5, v_6]\}$, $\mathcal{E}_1 \subset E'$.

Обслуживание требования J_2 состоит из трех операций $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$ и $Q_{2,3}$ с длительностями $p_{2,1} = 3$, $p_{2,2} = 1$ и $p_{2,3} = 3$. Используя обозначения (5), получаем множество $\mathcal{W}_2 = \{v_7, \dots, v_{13}\}$ единичных операций, которые включаем в множество вершин $V \supset \mathcal{W}_2$. Поскольку все операции требования J_2 линейно упорядочены при реализации допустимого расписания, то в смешанный граф G' добавляем множество дуг $\mathcal{A}_2 = \{(v_7, v_8), (v_8, v_9), \dots, (v_{12}, v_{13})\}$, $\mathcal{A}_2 \subset A'$, и множество ребер $\mathcal{E}_2 = \{[v_7, v_8], [v_8, v_9], \dots, [v_{12}, v_{13}]\}$, $\mathcal{E}_2 \subset E'$.

Обслуживание требования J_3 состоит из трех операций $Q_{3,1}$, $Q_{3,2}$ и $Q_{3,3}$ с длительностями $p_{3,1} = 2$, $p_{3,2} = 1$ и $p_{3,3} = 2$. Используя обозначения (6), получаем множество $\mathcal{W}_3 = \{v_{14}, \dots, v_{18}\}$ единичных опера-

Таблица 2. Часть исходных данных примера 2 задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$

Операции	$Q_{1,1}$	$Q_{1,2}$	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$	$Q_{2,3}$	$Q_{3,1}$	$Q_{3,2}$	$Q_{3,3}$	$Q_{4,1}$	$Q_{4,2}$	$Q_{4,3}$	$Q_{5,1}$	$Q_{5,2}$
Приборы	M_1	M_7	M_1	M_6	M_7	M_2	M_5	M_3	M_3	M_8	M_9	M_4	M_5
множества	M_6		M_2			M_3	M_7	M_8	M_4				M_9
$\mathcal{M}_{\mu(i,j)}$									M_5				
p_{ij}	5	1	3	1	3	2	1	2	4	2	2	4	2

ций, которые включаем в множество вершин $V \supset \mathcal{W}_3$. Поскольку все операции требования J_3 линейно упорядочены при реализации допустимого расписания, то в смешанный граф G' добавляем множество дуг $\mathcal{A}_3 = \{(v_{14}, v_{15}), (v_{15}, v_{16}), (v_{16}, v_{17}), (v_{17}, v_{18})\}$, $\mathcal{A}_3 \subset A'$, и множество ребер $\mathcal{E}_3 = \{[v_{14}, v_{15}], [v_{15}, v_{16}], [v_{16}, v_{17}], [v_{17}, v_{18}]\}$, $\mathcal{E}_3 \subset E'$.

Обслуживание требования J_4 состоит из трех операций $Q_{4,1}$, $Q_{4,2}$ и $Q_{4,3}$ с длительностями $p_{4,1} = 4$, $p_{4,2} = 2$ и $p_{4,3} = 2$. Продолжая последовательно обозначать единичные операции, получаем множество единичных операций $\mathcal{W}_4 = \{v_{19}, \dots, v_{26}\}$, которые включаем в множество вершин $V \supset \mathcal{W}_4$. Поскольку все операции требования J_4 линейно упорядочены при реализации допустимого расписания, то в смешанный граф G' добавляем множество дуг $\mathcal{A}_4 = \{(v_{19}, v_{20}), (v_{20}, v_{21}), \dots, (v_{25}, v_{26})\}$, $\mathcal{A}_4 \subset A'$, и множество ребер $\mathcal{E}_4 = \{[v_{19}, v_{20}], [v_{20}, v_{21}], \dots, [v_{25}, v_{26}]\}$, $\mathcal{E}_4 \subset E'$.

Обслуживание требования J_5 состоит из двух операций $Q_{5,1}$ и $Q_{5,2}$ с длительностями $p_{5,1} = 4$ и $p_{5,2} = 2$. Используя обозначения (6), получаем множество единичных операций $\mathcal{W}_5 = \{v_{27}, \dots, v_{32}\}$, которые включаем в искомое множество вершин $V \supset \mathcal{W}_5$. Поскольку все операции требования J_5 линейно упорядочены при реализации допустимого расписания, то в смешанный граф G' добавляем множество дуг $\mathcal{A}_5 = \{(v_{27}, v_{28}), (v_{28}, v_{29}), \dots, (v_{31}, v_{32})\}$, $\mathcal{A}_5 \subset A'$, и множество ребер $\mathcal{E}_5 = \{[v_{27}, v_{28}], [v_{28}, v_{29}], \dots, [v_{31}, v_{32}]\}$, $\mathcal{E}_5 \subset E'$. Итак, построен подграф $G' = (V, A', E')$ искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$ с множеством вершин $V = \mathcal{W} := \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{W}_i$, множеством дуг $A' := \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{A}_i$ и множеством ребер $E' := \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{E}_i$.

Пусть помимо заданных в табл. 1 отношений предшествования между операциями множества \mathcal{Q}_i по обслуживанию одного и того же требования $J_i \in \mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_5\}$, в примере 2 задано следующее множество $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ отношений предшествования $v_{k_{ij}} \rightarrow v_{k_{rq}}$ между операциями из разных множеств $\mathcal{Q}_i \subseteq \mathcal{Q}$ (т.е. $v_{k_{ij}} \in \mathcal{Q}_i, v_{k_{rq}} \in \mathcal{Q}_r, r \neq i$):

$$(16) \quad \mathcal{R}_{\rightarrow} = \{v_1 \rightarrow v_7, v_{22} \rightarrow v_{14}, v_{22} \rightarrow v_{30}, v_{27} \rightarrow v_{19}\}$$

и задано также множество \mathcal{R}_{\mapsto} отношений предшествования $v_{k_{ij}} \mapsto v_{k_{rq}}$:

$$(17) \quad \mathcal{R}_{\mapsto} = \{v_9 \mapsto v_{19}, v_{10} \mapsto v_{23}, v_{23} \mapsto v_{15}, v_{15} \mapsto v_{10}, v_{17} \mapsto v_{25}\}.$$

Заметим, что операции множества $V(h) = \{v_{10}, v_{15}, v_{23}\}$ должны выполняться одновременно при реализации любого допустимого расписания, поскольку множество (17) содержит отношения предшествования $v_{10} \mapsto v_{23}$, $v_{23} \mapsto v_{15}$ и $v_{15} \mapsto v_{10}$. Следовательно, ориентированный подграф (V, A, \emptyset) искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$ должен содержать контур $(v_{10}, v_{23}, v_{15}, v_{10})$.

Для представления множества (16) отношений предшествования $v_{k_{ij}} \rightarrow v_{k_{rq}}$ в построенный смешанный граф $G' = (V, A', E')$ добавляем множество дуг $\mathcal{A}_6 = \{(v_1, v_7), (v_{22}, v_{14}), (v_{22}, v_{30}), (v_{27}, v_{19})\}$, $\mathcal{A}_6 \subset A'$, а также множество ребер $\mathcal{E}_6 = \{[v_1, v_7], [v_{14}, v_{22}], [v_{22}, v_{30}], [v_{19}, v_{27}]\}$, $\mathcal{E}_6 \subset E'$.

Для представления множества (17) отношений предшествования $v_{k_{ij}} \mapsto v_{k_{rq}}$ в построенный смешанный граф добавляем множество дуг $\mathcal{A}_7 = \{(v_9, v_{19}), (v_{10}, v_{23}), (v_{23}, v_{15}), (v_{15}, v_{10}), (v_{17}, v_{25})\}$, $\mathcal{A}_7 \subset \{A' \cup A_6\}$.

Итак, построен ориентированный подграф (V, A, \emptyset) искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$ и подмножество $\mathcal{E}_6 \cup E'$ множества ребер E .

Остальные ребра множества $E \setminus \{\mathcal{E}_6 \cup E'\}$ искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$ будем строить последовательно для всех множеств $\mathcal{Q}^{(k)} = \bigcup_{J_i \in \mathcal{J}^{(k)}} \mathcal{Q}_i^{(k)}$ операций, выполняемых на приборах $M_k \in \{M_1, \dots, M_9\}$.

Для прибора M_1 множество $\mathcal{Q}^{(1)} = \{\mathcal{Q}_{1,1}, \mathcal{Q}_{2,1}\}$ целочисленных операций определяет множество из восьми единичных операций $\{v_1, \dots, v_5, v_7, v_8, v_9\} =: V_1$, которое разбивается на пять единичных операций $\{v_1, \dots, v_5\}$ требования J_1 и три единичные операции $\{v_7, v_8, v_9\}$ требования J_2 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_1 задается полным двудольным графом (V_1, \emptyset, E'_1) , в котором $V_1 = \{v_1, \dots, v_5; v_7, v_8, v_9\}$. Как и в подразделе 2.3, вершины разных долей k -дольного графа отделяются точкой с запятой. Учитывая замечание 3, ребра $[v_1, v_7]$, $[v_1, v_8]$ и $[v_1, v_9]$ можно исключить из полного двудольного графа (V_1, \emptyset, E'_1) , поскольку порядок выполнения операций v_1 и v_i , $i \in \{7, 8, 9\}$, определяется путем в ориентированном графе (V, A, \emptyset) и цепью в графе $(V, \emptyset, \{\mathcal{E}_6 \cup E'\})$ между вершинами v_1 и v_i . Поэтому вместо полного двудольного графа (V_1, \emptyset, E'_1) , в котором $|E'_1| = |\mathcal{Q}_1^{(1)}| \cdot |\mathcal{Q}_2^{(1)}| = 5 \cdot 3 = 15$, построим двудольный граф (V_1, \emptyset, E_1) , в котором $E_1 = \{[v_2, v_7], \dots, [v_5, v_7], [v_2, v_8], \dots, [v_5, v_8], [v_2, v_9], \dots, [v_5, v_9]\}$.

Для прибора M_2 множество $\mathcal{Q}^{(2)}$ целочисленных операций определяет множество V_2 , которое состоит из пяти единичных операций и разбивается на три единичные операции $\{v_7, v_8, v_9\}$ требования J_2 и две единичные операции $\{v_{14}, v_{15}\}$ требования J_3 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_2 задается полным двудольным графом (V_2, \emptyset, E_2) , в котором $V_2 = \{v_7, v_8, v_9; v_{14}, v_{15}\}$ и $E_2 = \{[v_7, v_{14}], [v_7, v_{15}], [v_8, v_{14}], [v_8, v_{15}], [v_9, v_{14}], [v_9, v_{15}]\}$.

Для прибора M_3 множество $\mathcal{Q}^{(3)}$ целочисленных операций определяет множество V_3 , которое состоит из восьми единичных операций и разбивается на четыре единичные операции $\{v_{14}, v_{15}, v_{17}, v_{18}\}$ требования J_3 и четыре единичные операции $\{v_{19}, \dots, v_{22}\}$ требования J_4 . Поскольку множество $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ содержит отношение предшествования $v_{22} \rightarrow v_{14}$, и операции множеств \mathcal{Q}_3 и \mathcal{Q}_4 по обслуживанию требований J_3 и J_4 упорядочены, то нет необходимости добавлять ребра в искомый смешанный граф для запрещения одновременного выполнения пары операций из множества $\mathcal{Q}^{(2)}$. В таком случае полагаем $E_3 = \emptyset$.

Для прибора M_4 множество $\mathcal{Q}^{(4)}$ целочисленных операций определяет множество V_4 , которое состоит из восьми единичных операций и разбивается на четыре единичные операции $\{v_{19}, \dots, v_{22}\}$ требования J_4 и четыре единичные операции $\{v_{27}, \dots, v_{30}\}$ требования J_5 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_4 задается полным двудольным

графом (V_4, \emptyset, E'_4) , в котором $V_4 = \{v_{19}, \dots, v_{22}; v_{27}, \dots, v_{30}\}$. В силу замечания 3, ребра множества $\{[v_{19}, v_{28}], [v_{19}, v_{29}], [v_{19}, v_{30}]\}$ можно удалить из полного двудольного графа (V_4, \emptyset, E'_4) , поскольку порядок выполнения операций v_{19} и v_i , $i \in \{28, 29, 30\}$, определяется путем в ориентированном графе (V, A, \emptyset) и цепью в графе $(V, \emptyset, \{E_6 \cup E'\})$ между вершинами v_{19} и v_i . Поскольку множество $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ содержит отношение предшествования $v_{22} \rightarrow v_{30}$, то удалим ребра множества $\{[v_{19}, v_{30}], [v_{20}, v_{30}], [v_{21}, v_{30}]\}$ и вместо полного двудольного графа (V_4, \emptyset, E'_4) , в котором $|E'_4| = |\mathcal{Q}_4^{(4)}| \cdot |\mathcal{Q}_5^{(4)}| = 4 \cdot 4 = 16$, построим двудольный граф (V_4, \emptyset, E_4) , в котором $E_4 = \{[v_{20}, v_{28}], [v_{20}, v_{29}], [v_{21}, v_{28}], [v_{21}, v_{29}]\}$.

Для прибора M_5 множество $\mathcal{Q}^{(5)}$ целочисленных операций определяет множество V_5 , которое состоит из семи единичных операций и разбивается на единичную операцию v_{16} требования J_3 , четыре единичные операции $\{v_{19}, \dots, v_{22}\}$ требования J_4 и две операции $\{v_{31}, v_{32}\}$ требования J_5 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_5 задается полным трехдольным графом (V_5, \emptyset, E'_5) , в котором $V_5 = \{v_{16}; v_{19}, \dots, v_{22}; v_{31}, v_{32}\}$. В силу замечания 3, ребра множества $\{[v_{16}, v_{19}], \dots, [v_{16}, v_{22}]\}$ удалим из полного трехдольного графа (V_5, \emptyset, E'_5) , поскольку множество $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ содержит отношение предшествования $v_{22} \rightarrow v_{14}$. Поскольку множество $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ содержит отношение предшествования $v_{22} \rightarrow v_{30}$, то удалим и ребра множества $\{[v_{19}, v_{31}], [v_{19}, v_{32}], [v_{20}, v_{31}], [v_{20}, v_{32}], [v_{21}, v_{31}], [v_{21}, v_{32}], [v_{22}, v_{31}], [v_{22}, v_{32}]\}$ и вместо полного трехдольного графа (V_5, \emptyset, E'_5) , в котором $|E'_5| = |\mathcal{Q}_3^{(5)}| \cdot |\mathcal{Q}_4^{(5)}| \cdot |\mathcal{Q}_5^{(5)}| = 1 \cdot 4 \cdot 2 = 8$, построим трехдольный граф (V_5, \emptyset, E_5) , в котором $E_5 = \{[v_{16}, v_{31}], [v_{16}, v_{32}]\}$.

Для прибора M_6 множество $\mathcal{Q}^{(6)}$ целочисленных операций определяет множество V_6 , которое состоит из шести единичных операций и разбивается на пять единичных операций $\{v_1, \dots, v_5\}$ требования J_1 и единичную операцию v_{10} требования J_2 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_6 задается полным двудольным графом (V_6, \emptyset, E_6) , в котором $V_6 = \{v_1, \dots, v_5; v_{10}\}$ и $E_6 = \{[v_1, v_{10}], \dots, [v_5, v_{10}]\}$.

Для прибора M_7 множество $\mathcal{Q}^{(7)}$ целочисленных операций определяет множество V_7 , которое состоит из пяти единичных операций и разбивается на единичную операцию v_6 требования J_1 , три единичные операции $\{v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$ требования J_2 и единичную операцию v_{16} требования J_3 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_7 задается полным трехдольным графом (V_7, \emptyset, E_7) , в котором $V_7 = \{v_6; v_{11}, v_{12}, v_{13}; v_{16}\}$ и $E_7 = \{[v_6, v_{11}], [v_6, v_{12}], [v_6, v_{13}]; [v_6, v_{16}]; [v_{11}, v_{16}], [v_{12}, v_{16}], [v_{13}, v_{16}]\}$.

Для прибора M_8 множество $\mathcal{Q}^{(8)}$ целочисленных операций определяет множество V_8 , которое состоит из четырех единичных операций и разбивается на две единичные операции $\{v_{17}, v_{18}\}$ требования J_3 и две единичные операции $\{v_{23}, v_{24}\}$ требования J_4 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_8 задается полным двудольным графом (V_8, \emptyset, E_8) , в котором $V_8 = \{v_{17}, v_{18}; v_{23}, v_{24}\}$ и $E_8 = \{[v_{17}, v_{23}], [v_{17}, v_{24}], [v_{18}, v_{23}], [v_{18}, v_{24}]\}$.

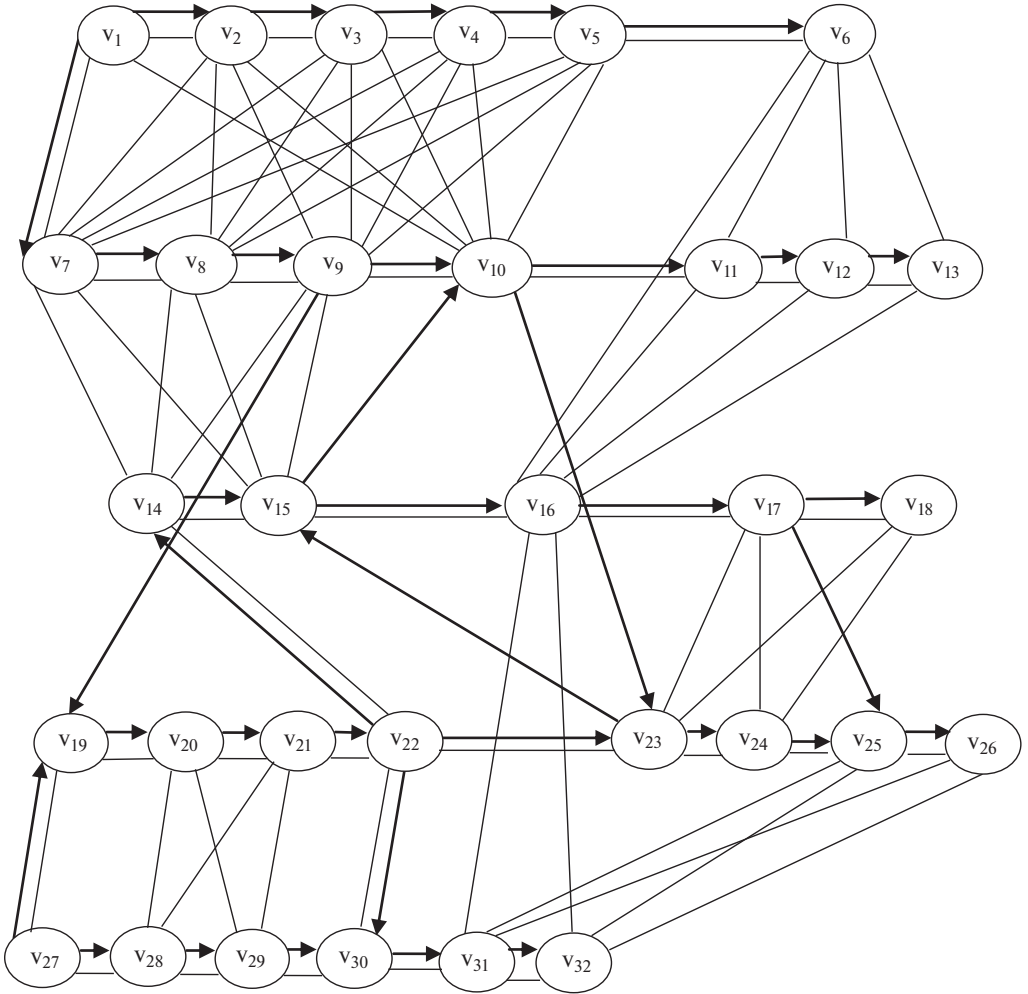


Рис. 2. Смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий исходные данные примера 2 задачи $G_cMPT[[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$.

Для прибора M_9 множество $\mathcal{Q}^{(9)}$ целочисленных операций определяет множество V_9 , которое состоит из четырех единичных операций и разбивается на две единичные операции $\{v_{25}, v_{26}\}$ требования J_4 и две единичные операции $\{v_{31}, v_{32}\}$ требования J_5 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_9 задается полным двудольным графом (V_9, \emptyset, E_9) , в котором $V_9 = \{v_{25}, v_{26}; v_{31}, v_{32}\}$ и $E_9 = \{[v_{25}, v_{31}], [v_{25}, v_{32}], [v_{26}, v_{31}], [v_{26}, v_{32}]\}$.

Итак, построен подграф $(V, \emptyset, E \setminus \{\mathcal{E}_6 \cup E'\}) = \bigcup_{k=1}^9 (V_k, \emptyset, E_k)$ смешанного графа (V, A, E) , где каждый граф (V_k, \emptyset, E_k) является $|\mathcal{J}^{(k)}|$ -дольным графом. На рис. 2 представлен построенный смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий все исходные данные примера 2 задачи $G_cMPT[[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ с пятью требованиями $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_5\}$ и девятью приборами $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_9\}$.

В соответствии с теоремой 5 индивидуальная задача $G_cMPT|[p_{ij}]$, $pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ (т.е. пример 2) сведена к задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ того же смешанного графа $G = (V, A, E)$. Допустимое расписание \mathbf{S} для задачи $G_cMPT|[p_{ij}]$, $pmtn|C_{\max}$ с прерываниями операций \mathcal{Q} определяется множеством (15) моментов завершения выполнения единичных операций множества \mathcal{W} . Активное расписание определяется раскраской $c(G)$ смешанного графа G , в которой $c(v_i) = C(v_i)$ для всех вершин $v_i \in \mathcal{W}$.

Оптимальное по быстродействию активное расписание для примера 2 определяется следующей оптимальной раскраской $c(G)$ смешанного графа G , представленного на рис. 2:

$$\begin{aligned} c(v_1) &= 1, & c(v_2) &= 5, & c(v_3) &= 6, & c(v_4) &= 7, & c(v_5) &= 8, & c(v_6) &= 9, \\ c(v_7) &= 2, & c(v_8) &= 3, & c(v_9) &= 4, & c(v_{10}) &= 9, & c(v_{11}) &= 11, & c(v_{12}) &= 12, \\ c(v_{13}) &= 13, & c(v_{14}) &= 8, & c(v_{15}) &= 9, & c(v_{16}) &= 10, & c(v_{17}) &= 11, \\ c(v_{18}) &= 12, & c(v_{19}) &= 4, & c(v_{20}) &= 5, & c(v_{21}) &= 6, & c(v_{22}) &= 7, \\ c(v_{23}) &= 9, & c(v_{24}) &= 10, & c(v_{25}) &= 12, & c(v_{26}) &= 13, & c(v_{27}) &= 1, \\ c(v_{28}) &= 2, & c(v_{29}) &= 3, & c(v_{30}) &= 8, & c(v_{31}) &= 9, & c(v_{32}) &= 11. \end{aligned}$$

Оптимальность раскраски $c(G)$ следует из справедливости неравенства $\chi(G) \geq 13$, поскольку ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа G содержит путь $(v_1, v_7, v_8, v_9, v_{19}, v_{20}, v_{21}, v_{22}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{25}, v_{26})$, вес которого равен 13. Здесь вес пути в смешанном графе $G = (V, A, E)$ полагаем равным сумме весов $w(v_i, v_j)$ всех дуг (v_i, v_j) , образующих этот путь, а вес дуги $(v_i, v_j) \in A$ полагаем равным единице, если $[v_i, v_j] \in E$, и $w(v_i, v_j) = 0$ в противном случае.

5. Активные расписания для задачи $G_cMPT|[p_{ij}]$, $pmtn|C_{\max}$ и соответствующие минимальные раскраски вершин смешанного графа

Пусть E^* обозначает подмножество всех ребер $[v_i, v_j]$ множества E , для которых вершины v_i и v_j не являются смежными в ориентированном графе (V, A, \emptyset) . В силу определения 1 любая раскраска $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ для каждого ребра $[v_i, v_j] \in E^*$ определяет различные цвета $c(v_i) \neq c(v_j)$. Если $c(v_i) < c(v_j)$, то добавляем дугу (v_i, v_j) в смешанный граф G , а если $c(v_i) > c(v_j)$, то добавляем в смешанный граф симметричную дугу (v_j, v_i) . В результате добавления указанных дуг для всех ребер $[v_i, v_j] \in E^*$ смешанный граф $G = (V, A, E)$ превращается в смешанный граф $G(c) = (V, A \cup A(c), E)$, $|E^*| = |A(c)|$, для каждого ребра $[v_p, v_q] \in E$ которого справедлива следующая импликация:

$$(18) \quad [v_p, v_q] \in E \Rightarrow (v_p, v_q) \in A \cup A(c).$$

Из (18) следует, что любая раскраска $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ определяет порядок цветов $c(v_i)$ для всех вершин $v_i \in V$. Следовательно, можно определить следующее множество минимальных раскрасок $c(G)$ смешанного графа G .

Определение 4. Раскраску $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ называют минимальной, если ни один цвет $c(v_i)$, $v_i \in V$, нельзя уменьшить без нарушения определенного раскраской $c(G)$ порядка цветов $c(v_i)$ для всех вершин $v_i \in V$ и (или) какую-то вершину $v_j \in V \setminus \{v_i\}$ пришлось бы окрасить в цвет больше цвета $c(v_j)$.

Поиск оптимальной раскраски смешанного графа $G = (V, A, E)$ можно ограничить множеством минимальных раскрасок, поскольку, очевидно, существует оптимальная раскраска любого заданного раскрашиваемого смешанного графа G , которая является минимальной. Заметим, что оптимальная раскраска $c(G)$ смешанного графа G , построенного для примера 2, является минимальной.

Минимальная раскраска $c(G)$ определяет оптимальное расписание (15) для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$, причем это расписание является активным. Из леммы 2 и определений 2 и 4 следует, что любое активное расписание \mathbf{S} , существующее для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$, однозначно определяет минимальную раскраску вершин смешанного графа G , и наоборот. Получаем следующее утверждение.

Теорема 6. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathbf{C}(G)$ всех минимальных раскрасок $c(G)$ раскрашиваемого смешанного графа $G = (V, A, E)$ и множеством $\mathbf{S}(G)$ всех активных расписаний, существующих для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$.

Согласно теоремам 5 и 6 можно сократить размерность множества допустимых расписаний, которые сравниваются при решении задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, и соответственно, сократить размерность множества сравниваемых раскрасок $c(G)$ при поиске оптимальной раскраски.

Из второй части теоремы 5 следует, что задача поиска оптимальной раскраски $c(G)$ любого раскрашиваемого смешанного графа $G = (V, A, E)$ имеет ту же асимптотическую сложность, что и задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$, причем справедливо равенство $|\mathbf{C}(G)| = |\mathbf{S}(G)|$.

Согласно первой части теоремы 5, сведение задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ к поиску оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа G является псевдополиномиальным. Такое сведение целесообразно при решении практических задач ОКП, если длительности c_{ij} операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$ не велики. Для задачи с большими целочисленными длительностями операций множества \mathcal{Q} можно вычислить наибольший общий делитель D целочисленных длительностей всех операций множества \mathcal{Q} .

Если полученное значение D превосходит единицу, то вместо исходной задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ целесообразно решать ее аналог с модифицированными длительностями, равными $\frac{c_{ij}}{D}$ для всех операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$.

Сократить размерность смешанного графа $G = (V, A, E)$, порождаемого задачей $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, можно и в результате подходящей декомпозиции начальной задачи на подзадачи меньшей размерности на основе запланированных прерываний производственного процесса, например, в моменты начала обеденного перерыва или после завершения рабочей смены. За время такого перерыва уточненные и дополненные данные могут быть включены в исходные данные очередной подзадачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, в результате решения которой может быть получено более эффективное расписание производственного процесса.

Следует отметить, что в теории расписаний общепринято предположение о том, что прерывание операции не связано с какими-то затратами и выполняется мгновенно, как и последующее возобновление прерванной операции. Такие идеальные прерывания операций не характерны для многих практических задач ОКП. В практических задачах требуется определенное время для прерывания производственной операции, также необходимо учитывать временные затраты на переналадку прибора после прерывания операции и на последующую наладку прибора с целью возобновления ранее прерванной операции. На практике для учета времени наладки и переналадки приборов в исходные данные задачи следует включать специальные операции наладки и переналадки приборов и решать задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ с исходными данными, включающими операции наладки и переналадки приборов. При этом длительности переналадки и наладки приборов $M_{\mu(ij)} \in \mathcal{M}$ должны быть меньше длительностей операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$, прерывания которых целесообразны.

6. Обсуждение полученных результатов и перспективы использования

Утверждения, представленные в разделах 1–5, можно использовать для построения сетевых моделей в виде смешанных графов $G = (V, A, E)$ для многочисленных задач $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ теории расписаний при допустимости прерываний выполнения операций и для задач $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ без прерываемых операций. На основе построенных сетевых моделей можно разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы минимизации длины C_{\max} активных расписаний. Такие алгоритмы будут включать поиск оптимальных раскрасок $c(G)$ или строгих раскрасок $c_<(G)$ смешанных графов $G = (V, A, E)$, определяющих исходные данные задачи $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ или разрешимой задачи $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$.

Установленная взаимосвязь представленных в статье обобщений классических задач теории расписаний и задач поиска оптимальных (строгих) раскрасок вершин смешанных графов позволяет решать любые разрешимые задачи

$\alpha|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ и любые задачи $\alpha|p_{ij}|C_{\max}$, а также многочисленные частные случаи этих задач в терминах теории графов и не использовать при этом специальные термины теории расписаний, которые связаны с практическими задачами ОКП. Оказалось, что терминов теории графов вполне достаточно как для постановки любой задачи $\alpha|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ или $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$, так и для разработки алгоритмов решения задач теории расписаний в результате поиска оптимальных (строгих) раскрасок смешанных графов $G = (V, A, E)$, определяющих условия поставленных задач.

В качестве иллюстрации преимущества использования терминологии теории графов при решении задач $\alpha|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ и $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ перечислим термины теории расписаний, использованные в этой статье: *цех работ (общий), обслуживающая система (многостадийная), job-shop, general shop, прибор (обслуживающий, специализированный), машина, станок, процессор, расписание (активное, допустимое, оптимальное), критерий оптимальности расписания, процесс реализации допустимого расписания, оптимальное по быстрдействию расписание, требование (первое, второе, последнее), задание, обслуживание требования, время готовности требования к обслуживанию, горизонт планирования, длина расписания, операция (многопроцессорная, прерываемая), прерывание (целочисленное), маршрут обслуживания требования, первая (последняя) операция требования, длительность (выполнения) операции (единичная, целочисленная), назначение операции на прибор, недопустимость одновременного выполнения операций, необходимость совместного выполнения (единичных) операций, начало операции, завершение операции, момент начала (завершения) операции, прерывание операции, быстрдействие расписания, отношение предшествования операций (завершение-начало, начало-начало), время реализации заявок, условия (эффективность) производства, момент времени (целочисленный)*. Для описания и доказательства тех же результатов статьи в терминах раскрасок вершин смешанных графов использовалось меньше терминов теории графов, а именно: *вершина (инцидентная, смежная), дуга, ребро (инцидентное), граф (конечный, ориентированный, смешанный, k-дольный, полный, раскрашиваемый), подграф, раскраска (строгая, минимальная, оптимальная), цвет вершины, хроматическое число, путь, длина (вес) пути, цепь, контур*.

Утверждения об эквивалентности задач $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ и задач поиска оптимальной раскраски $c(G)$ или строгой раскраски $c_{<}(G)$ того же смешанного графа $G = (V, A, E)$, а также утверждения о полиномиальной сводимости задачи поиска оптимальной раскраски $c(G)$ любого раскрашиваемого смешанного графа $G = (V, A, E)$ к задаче $\alpha|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ и утверждения о псевдополиномиальном сведении любой разрешимой задачи $\alpha|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ к задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ имеют важное значение как для теории расписаний, так и для теории графов.

Представленные и доказанные в статье результаты можно рассматривать как обоснование теоретико-графового метода решения задач $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ и $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ путем сведения их к соответствующим задачам поиска оптимальных раскрасок $c(G)$ или оптимальных строгих раскрасок $c_{<}(G)$ смешанных графов $G = (V, A, E)$, определяющих условия и ограничения расписанческих задач. Условия и ограничения индивидуальной задачи $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ или $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ определяются соответствующим смешанным графом $G = (V, A, E)$. Для задачи $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ такой смешанный граф $G = (V, A, E)$ определяется однозначно, а для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ с точностью до избыточных ребер из множества E , которые можно найти и удалить в результате разбиения по рангам вершин ориентированного подграфа $G = (V, A, \emptyset)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, как это продемонстрировано на примере 2 в разделе 4. Представленные в статье результаты могут быть использованы для исследования раскрасок специальных классов смешанных графов, порождаемых задачами $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ и $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, что может способствовать привлечению специалистов в области теории графов к решению задач $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ и $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ и их многочисленных частных случаев.

Нетрудно убедиться в том, что разные задачи $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ или $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ могут быть заданы одним и тем же смешанным графом $G = (V, A, E)$. Поэтому результаты полученные для раскраски $c(G)$ или строгой раскраски $c_{<}(G)$ конкретного смешанного графа $G = (V, A, E)$ применимы, как правило, для целого множества расписанческих задач $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ или задач $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ соответственно. Следовательно, свойства раскрасок и алгоритмы поиска оптимальных раскрасок смешанных графов $G = (V, A, E)$ специального вида могут быть использованы для решения всех задач $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ или $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, соответственно, исходные данные которых задаются такими же смешанными графами.

7. Заключение

Исследована взаимосвязь задач оптимальной раскраски вершин смешанного графа $G = (V, A, E)$ и задач $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ построения оптимального по быстрдействию расписания выполнения частично упорядоченного множества целочисленных операций при допустимости их прерываний, при задании двух типов отношений предшествования на множестве операций (окончание-начало и начало-начало двух операций) и необходимости одновременного выполнения подмножества единичных операций. Из теоремы 5 следует, что задача поиска оптимальной раскраски вершин смешанного графа $G = (V, A, E)$ полиномиально сводится к решению задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на том же смешанном графе G . Из конструктивного доказательства этой теоремы следует, что для многих утверждений, доказанных для оптимальных раскрасок вершин смешанных графов (см., например, [1–9, 24]), существуют аналогичные утверждения для за-

дачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ и ее частных случаев. Установлено также, что любая разрешимая задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ псевдополиномиально сводится к задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ вершин того же смешанного графа G , что позволяет получать утверждения для задач поиска оптимальных раскрасок вершин смешанных графов непосредственно из утверждений, доказанных для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ и ее многочисленных частных случаев [2, 5, 12, 13, 15–24].

Автор благодарен рецензентам за полезные замечания и предложения, которые позволили улучшить представление полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sotskov Y.N., Tanaev V.S.* Хроматический многочлен смешанного графа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 6. С. 20–23.
2. *Hansen P., Kuplinsky J., de Werra D.* Mixed graph colorings // Math. Methods Oper. Res.. 1997. V. 45. P. 145–160.
3. *Karp R.M.* Reducibility among combinatorial problems / In *Complexity of Computer Computations*, R.E. Miller, J.W. Thatcher (Editors.) // New York, USA: Plenum Press. 1972. P. 85–103.
4. *Sotskov Y.N., Dolgui A., Werner F.* Mixed graph coloring for unit-time job-shop scheduling // Int. J. of Math. Algorithms. 2001. V. 2. P. 289–323.
5. *Sotskov Y.N., Tanaev V.S., Werner F.* Scheduling problems and mixed graph colorings // Optimization. 2002. V. 51. No. 3. P. 597–624.
6. *Al-Anzi F.S., Sotskov Y.N., Allahverdi A., Andreev G.V.* Using mixed graph coloring to minimize total completion time in job shop scheduling // Appl. Math. Comput. 2006. V. 182. P. 1137–1148.
7. *Kouider A., Ait Haddadene H., Ourari S., Oulamara A.* Mixed graph coloring for unit-time scheduling // Int. J. Product. Res. 2017. V. 55. No. 6. P. 1720–1729.
8. *Kouider A., Ait Haddadene H., Oulamara A.* On minimization of memory usage in branch-and-bound algorithm for the mixed graph coloring: application to the unit-time job shop scheduling // Comput. Oper. Res. 2019. V. 4967. P. 1001–1008.
9. *Sotskov Y.N.* Mixed graph colorings: A historical review // Mathematics. 2020. V. 8. P. 1–24.
10. *Harary F.* Graph Theory. MA, USA: Addison-Wesley, Reading, 1969.
11. *Thulasiraman K., Swamy M.N.S.* Graphs: Theory and Algorithms. Toronto, Canada: John Wiley & Sons, Inc. 1992.
12. *Tanaev V.S., Sotskov Y.N., Strusevich V.A.* Scheduling Theory: Multi-Stage Systems. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994.
13. *Brucker P.* Scheduling Algorithms, Berlin, Germany: Springer, 1995.
14. *Graham R.E., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G.* Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey // Ann. Discret. Math. 1979. V. 5. P. 287–326.

15. *Hoogeveen J.A., van de Velde S.L., Veltman B.* Complexity of scheduling multiprocessor tasks with prespecified processor allocations // *Discret. Appl. Math.* 1994. V. 55. P. 259–272.
16. *Brucker P., Kramer A.* Shop scheduling problems with multiprocessor tasks on dedicated processors // *Ann. Oper. Res.* 1995. V. 57. P. 13–27.
17. *Chou F.D.* Particle swarm optimization with cocktail decoding method for hybrid flow shop scheduling problems with multiprocessor tasks // *Int. J. Prod. Econom.* 2013. V. 141. P. 137–145.
18. *Kurdi M.* Ant colony system with a novel Non-Daemon Actions procedure for multiprocessor task scheduling in multistage hybrid flow shop // *Swarm Evol. Comput.* 2019. V. 44. P. 987–1002.
19. *Drozdowski M.* Scheduling multiprocessor – an overview // *Eur. J. Oper. Res.* 1996. V. 94. P. 215–230.
20. *Baptiste P.* A note on scheduling multiprocessor tasks with identical processing times // *Comput. Oper. Res.* 2003. V. 30. P. 2071–2078.
21. *Zinder Y., Dob V.H., Oguz C.* Computational complexity of some scheduling problems with multiprocessor tasks // *Discret. Optimization.* 2005. V. 2. P. 391–408.
22. *Kis T.* Scheduling multiprocessor UET tasks of two sizes // *Theor. Comput. Sci.* 2009. V. 410. P. 4864–4873.
23. *Giaro K., Kubale M., Obszarski P.* A graph coloring approach to scheduling of multiprocessor tasks on dedicated machines with availability constraints // *Discret. Appl. Math.* 2009. V. 157. P. 3625–3630.
24. *Sotskov Y.N.* Mixed graph coloring as scheduling multi-processor tasks with equal processing times // *J. Belarusian State Univ. Math. Inform.* 2021. V. 2. P. 67–81.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 04.11.2021

После доработки 15.08.2022

Принята к публикации 29.09.2022