

# Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2023 г. П.В. ПАКШИН, д-р физ.-мат. наук (pakshinpv@gmail.com),  
Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА, канд. физ.-мат. наук (emelianovajulia@gmail.com)  
(Арзамасский политехнический институт (филиал)  
Нижегородского государственного технического  
университета им. Р.Е. Алексеева)

## УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИИ ПОВТОРЕНИЯ И АМПЛИТУДНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ<sup>1</sup>

Рассматривается линейная дискретная система, функционирующая в повторяющемся режиме, задачей которой является слежение за эталонной траекторией с требуемой точностью при условии, что управление запаздывает вдоль траектории повторения и при амплитудных ограничениях типа насыщения. Предлагается новый метод синтеза управления с итеративным обучением, зависящего от запаздывания и позволяющего обеспечить необходимую точность слежения. Приведен пример, демонстрирующий эффективность метода.

*Ключевые слова:* управление с итеративным обучением, амплитудные ограничения, запаздывание, повторяющиеся процессы, 2D-системы, устойчивость, стабилизация, векторная функция Ляпунова, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231023010063, EDN: LUKRYD

### 1. Введение

Управление с итеративным обучением (УИО) является эффективным инструментом повышения точности в системах, работающих в повторяющемся режиме [1]. Простым характерным примером таких систем может служить порталный робот-манипулятор, устанавливающий детали в требуемые позиции на конвейере. В настоящее время алгоритмы управления с итеративным обучением находят применение в медицинских роботах для реабилитации больных, перенесших инсульт [2, 3], в устройствах поддержки желудка сердца [4], в установках высокоточного многослойного лазерного напыления [5, 6] и в других приложениях, где процессы носят повторяющийся характер [6–8].

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-21-00612, <https://rscf.ru/project/22-21-00612/>.

Большинство работ, посвященных синтезу алгоритмов УИО, базируется на линейных моделях [9, 10]. В то же время исполнительные органы робототехнических систем, как правило, являются электромеханическими устройствами, для которых характерны нелинейности типа насыщения, зоны нечувствительности, люфта и гистерезиса. Влияние этих нелинейностей может сделать недостижимой требуемую точность и поэтому требует детального исследования. Другим фактором, не учитываемым в линейных моделях, являются запаздывания, которые, в частности, возникают при удаленном управлении.

Исследованию указанных факторов в задачах УИО в текущей литературе посвящен ряд работ, но они не дают исчерпывающего решения связанных с этими факторами задач. В данной работе ограничимся рассмотрением широко распространенной нелинейности с характеристикой типа насыщения. В [11–17] предложены различные алгоритмы УИО для систем с насыщением, но ни в одной из них не обсуждается влияние величины насыщения на точность. Показано, что эти алгоритмы обеспечивают уменьшение ошибки обучения, но нигде не отмечено, как величина насыщения влияет на установившееся значение этой ошибки при неограниченном увеличении числа повторений.

Управление с итеративным обучением учитывает особенность повторяющихся процессов, которая заключается в том, что сигналы ошибок обучения от предыдущих повторений содержат существенную информацию и все алгоритмы УИО эффективно используют эту информацию на текущем шаге. УИО отличается от других стратегий управления с обучением, таких как адаптивное управление и нейросетевое управление. Стратегии адаптивного управления изменяют параметры регулятора, тогда как УИО изменяет только входной сигнал. Кроме того, адаптивные регуляторы обычно не используют информацию, содержащуюся в повторяющихся командных сигналах. Точно так же обучение нейронной сети включает в себя изменение параметров регулятора, модифицируя обучаемую нейронную сеть. Эти сети обычно требуют большого объема обучающих данных, и бывает трудно гарантировать быструю сходимость, тогда как алгоритмы УИО обычно сходятся адекватно всего за несколько итераций [9] и список литературы в [9].

В соответствии с отмеченной особенностью УИО, здесь возможны различные варианты запаздываний: это могут быть запаздывания по состоянию и управлению на каждом повторении и запаздывания вдоль повторений, т.е. на текущем повторении может быть доступна информация не с предыдущего, а с более раннего повторения. В [18–23] предложены различные алгоритмы УИО для систем с запаздыванием по состоянию на повторениях. Другие виды запаздываний в известной авторам литературе не рассматривались.

Данная статья развивает результаты [24] для систем с нелинейностью типа насыщения и запаздыванием вдоль траектории повторения. Одновременный учет этих факторов ранее в литературе не рассматривался, хотя, как показывает приводимый далее пример, их сочетание вполне естественно в

технических системах. Как и в [24], здесь используется подход, основанный на построении 2D-модели в виде повторяющегося процесса [25] в сочетании с дивергентным методом векторных функций Ляпунова [26], что позволяет в итоге применить для получения конечных результатов эффективную технику линейных матричных неравенств. Предложенный алгоритм УИО зависит от запаздывания. Приведен пример и сформулированы возможные пути дальнейших исследований.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную систему в повторяющемся режиме, которая на  $k$ -м повторении описывается следующей моделью в пространстве состояний:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= Ax_k(p) + B\psi_k(p-d), \\ \psi_k(p) &= \text{sat}(u_k(p)), \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \quad p \in [0, N-1], \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$  — вектор состояния,  $u_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$  — вектор управления  $y_k(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$  — вектор выходных переменных, называемый профилем повторения,  $k$  — номер повторения,  $N$  — продолжительность повторения,  $d$  — число шагов запаздывания,  $\psi_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$  — функция насыщения, которая задается следующим образом:

$$(2.2) \quad \psi_k(p)_j = \text{sat}(u_k(p))_j = \begin{cases} U_j & \text{если } u_{k,j}(p) > U_j, \\ u_{k,j}(p) & \text{если } -U_j \leq u_{k,j}(p) \leq U_j, \\ -U_j & \text{если } u_{k,j}(p) < -U_j, \end{cases}$$

для  $1 \leq j \leq n_u$ ,  $k \geq 0$ , где  $u_{k,j}(p)$  —  $j$ -я компонента  $u_k(p)$ , а  $U_j$  — положительная постоянная.

Пусть  $y_{ref}(p)$ ,  $0 \leq p \leq N$  — заданная эталонная траектория (желаемый профиль повторения). Тогда

$$(2.3) \quad e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p)$$

является ошибкой обучения на повторении  $k$ .

Задача состоит в нахождении такой последовательности управлений  $u_k(p)$ , которая, оставаясь ограниченной при всех  $k = 0, 1, \dots$ , обеспечивает достижение заданной точности воспроизведения эталонной траектории за конечное число повторений  $k^*$  и сохранение этой точности при дальнейших повторениях, т.е.

$$(2.4) \quad \|e_k(p)\| \leq e^*, \quad k \geq k^*, \quad 0 \leq p \leq N.$$

### 3. Переход к эквивалентной 2D модели в виде повторяющегося процесса

Поставленная задача будет решена, если указанная последовательность  $u_k(p)$  удовлетворяет условиям

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(p)\| &= \|e_\infty(p)\|, \\ \|e_k(p)\| &\leq \kappa \varrho^k + \mu, \quad \kappa > 0, \quad \mu \geq 0, \quad 0 < \varrho < 1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(p)\| &= \|u_\infty(p)\|, \end{aligned}$$

где  $u_\infty(p)$  — ограниченная переменная, обычно называемая обученным управлением.

Закон управления с итеративным обучением на текущем будем формировать следующим образом

$$(3.2) \quad \psi_{k+1}(p) = \text{sat}(u_{k+1}(p)), \quad u_{k+1}(p) = \text{sat}(\psi_k(p) + \delta u_{k+1}(p)),$$

где  $\delta u_{k+1}(p)$  — корректирующая поправка, которая должна быть выбрана так, чтобы обеспечить условия сходимости (3.1).

Следуя стандартной технике, перейдем от (2.1) к эквивалентной расширенной модели, с этой целью введем вспомогательный вектор  $\hat{x}_k$  размерности  $dn_u$ , компоненты которого определяются как  $\hat{x}_{ki}(p) = \psi_k(p - i)$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Этот вектор, очевидно, будет удовлетворять уравнению

$$(3.3) \quad \hat{x}_k(p + 1) = A_d \hat{x}_k(p) + B_d \psi_k(p),$$

где

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = [I \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T.$$

С учетом этого первое уравнение из (2.1) можно записать в виде

$$(3.4) \quad x_k(p + 1) = Ax_k(p) + BC_d \hat{x}_k(p),$$

где  $C_d = \underbrace{[0 \ \dots \ 0]}_{d-1} I$ .

Обозначим  $\bar{x}_{k+1}(p) = [x_{k+1}^T(p) \ \hat{x}_{k+1}^T(p)]^T$  запишем (3.3), (3.4) в виде одного уравнения

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \bar{x}_k(p + 1) &= \hat{A} \bar{x}_k(p) + \hat{B} \psi_k(p), \\ y_k(p) &= \hat{C} \bar{x}_k(p), \end{aligned}$$

где

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & BC_d \\ 0 & A_d \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_d \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [C \ 0].$$

Предположим, что вектор состояния доступен для формирования управления и матрица  $CB$  является невырожденной. При отсутствии запаздывания последнее условие позволяет достаточно просто записать уравнение для ошибки обучения, как функции числа повторений. Для расширенной модели  $\hat{C}\hat{B} = 0$ , что приводит к необходимости дополнительных преобразований. Сначала запишем уравнения для приращений расширенного вектора состояния. Для этого введем вспомогательную переменную

$$(3.6) \quad \eta_{k+1}(p+1) = \bar{x}_{k+1}(p) - \bar{x}_k(p).$$

В соответствии с (3.5) эта переменная удовлетворяют уравнению

$$(3.7) \quad \eta_{k+1}(p+1) = \hat{A}\eta_{k+1}(p) + \hat{B}\Delta\psi_{k+1}(p-1),$$

где  $\Delta\psi_{k+1}(p-1) = \psi_{k+1}(p-1) - \psi_k(p-1)$ . Учитывая структуру матриц  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , нетрудно непосредственно убедиться, что

$$(3.8) \quad \hat{C}\hat{A}^d\hat{B} = CB.$$

Введем в рассмотрение смещенную ошибку обучения  $\bar{e}_k(p) = e_k(p+d)$ . В соответствии с (2.3), (3.5)–(3.7) она будет описываться уравнением

$$(3.9) \quad \bar{e}_{k+1}(p) = -\hat{C}\hat{A}^{d+1}\eta_{k+1}(p) + \bar{e}_k(p) - CB\Delta\psi_{k+1}(p-1).$$

Заметим, что при формировании управления в (3.2), кроме переменных состояния, доступна также переменная  $\hat{x}_{kd}$ . Это дает дополнительную информацию для формирования управления, поэтому корректирующую поправку зададим в виде

$$(3.10) \quad \delta u_{k+1}(p) = K_1\eta_{k+1}(p+1) + K_2\bar{e}_k(p+1),$$

где матрица  $K_1$  имеет вид

$$K_1 = \left[ \underbrace{K_{11}}_{n_x} \quad \underbrace{0 \dots 0}_{(d-1)n_u} \quad \underbrace{K_{12}}_{n_u} \right].$$

Подставляя (3.10) в (3.7), (3.9), получим

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \eta_{k+1}(p+1) &= (\hat{A} + \hat{B}K_1)\eta_{k+1}(p) + \hat{B}K_2\bar{e}_k(p) + \hat{B}\varphi_k(p), \\ \bar{e}_{k+1}(p) &= -(\hat{C}\hat{A}^{d+1} + CBK_1)\eta_{k+1}(p) + \\ &\quad + (I - CBK_2)\bar{e}_k(p) - CB\varphi_k(p), \end{aligned}$$

где  $\varphi_k(p) = \Delta\psi_{k+1}(p-1) - \delta u_{k+1}(p-1)$ . Обозначим

$$K = [ K_1 \ K_2 ], \quad \zeta_k(p) = [ \eta_{k+1}^T(p) \ \bar{e}_k^T(p) ]^T.$$

Из (2.2) следует ограничение

$$(3.12) \quad -2U_j \leq \text{sat}(u_{k+1}(p))_j - \text{sat}(u_k(p))_j \leq 2U_j, \quad j = 1, \dots, n_u.$$

В соответствии с (2.2), (3.10) нетрудно видеть, что компоненты функции  $\varphi_k(p)$  удовлетворяют ограничениям

$$(3.13) \quad F_j[(\varphi_k(p))_j, (\zeta_k(p))_j] = \left[ 1 + \frac{1}{2U_j}((\varphi_k(p))_j + (K\zeta_k(p))_j) \right] \times \\ \times \left[ 1 - \frac{1}{2U_j}((\varphi_k(p))_j + (K\zeta_k(p))_j) \right] \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_u.$$

Система (3.11) относится к классу нелинейных повторяющихся процессов, которые представляют собой наиболее распространенный частный случай так называемых  $2D$  систем [25].

#### 4. Синтез на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова

Рассмотрим векторную функцию Ляпунова, определенную на траекториях системы (3.11):

$$(4.1) \quad V(\eta_{k+1}(p), \bar{e}_k(p)) = \begin{bmatrix} V_1(\eta_{k+1}(p)) \\ V_2(\bar{e}_k(p)) \end{bmatrix},$$

где  $V_1(\eta_{k+1}(p)) > 0$ ,  $\eta \neq 0$ ,  $V_2(\bar{e}_k(p)) > 0$ ,  $\bar{e}_k(p) \neq 0$ ,  $V_1(0) = 0$ ,  $V_2(0) = 0$ , и определим аналог оператора дивергенции вдоль траекторий этой системы как

$$(4.2) \quad \mathcal{D}_d V(\eta_{k+1}(p), \bar{e}_k(p)) = V_1(\eta_{k+1}(p+1)) - V_1(\eta_{k+1}(p)) + \\ + V_2(\bar{e}_{k+1}(p)) - V_2(\bar{e}_k(p)).$$

*Теорема 1. Если существуют векторная функция Ляпунова (4.1), положительные числа  $c_1, c_2, c_3$  и неотрицательное число  $\gamma$  такие, что*

$$(4.3) \quad c_1 \|\eta_k(p)\|^2 \leq V_1(\eta_k(p)) \leq c_2 \|\eta_k(p)\|^2,$$

$$(4.4) \quad c_1 \|\bar{e}_k(p)\|^2 \leq V_2(\bar{e}_k(p)) \leq c_2 \|\bar{e}_k(p)\|^2,$$

$$(4.5) \quad \mathcal{D}_d V(\eta_{k+1}(p), \bar{e}_k(p)) \leq \gamma - c_3(\|\eta_{k+1}(p)\|^2 + \|\bar{e}_k(p)\|^2),$$

*то для системы (3.11) выполняются условия сходимости (3.1).*

*Доказательство.* Для случая  $\gamma = 0$  доказательство совпадает с приведенным в [26] (Теорема 1). При  $\gamma \neq 0$ , следуя технике указанного доказательства, получим

$$(4.6) \quad \|\bar{e}_k(p-1)\|^2 \leq \frac{1}{c_1} \left[ \lambda^k \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} V_2(\bar{e}_0(q)) + \gamma \sum_{n=0}^{k-1} \left( \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} \right) \lambda^{k-1-n} \right],$$

где  $0 < \lambda < 1$ . Поскольку  $\|\bar{e}_0(q)\|^2$  ограничена для всех  $0 \leq q \leq N-1$ , существует  $\bar{\mu} > 0$ , такое что  $\|\bar{e}_0(q)\|^2 \leq \bar{\mu}$  и в соответствии с (4.4)

$$(4.7) \quad \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} V_2(\bar{e}_0(q)) \leq c_2 \bar{\mu} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda^{p-1-q} = \frac{c_2 \bar{\mu}}{1-\lambda}.$$

Из (4.6) с учетом (4.7) получим

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \|\bar{e}_k(p-1)\|^2 &\leq \alpha \lambda^k + \beta, \\ \alpha &= \frac{c_2 \bar{\mu}}{c_1(1-\lambda)}, \quad \beta = \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2}, \quad 1 \leq p \leq N. \end{aligned}$$

Поскольку  $\bar{e}_k(p-1)$  по определению является смещенной ошибкой обучения, из (4.8) получим второе неравенство из (3.1) с параметрами  $\kappa = \sqrt{\alpha}$ ,  $\varrho = \sqrt{\lambda}$  и  $\mu = \sqrt{\beta}$ . Кроме того, по аналогии с выводом (4.8) приходим к следующей оценке:

$$(4.9) \quad \|\eta_k(p)\| \leq \kappa \varrho^k + \mu, \quad 0 \leq p \leq N-1.$$

Поскольку  $\delta u_{k+1}(p)$  определяется выражением (3.10), из (4.8) и (4.9) следует существование  $\tilde{\kappa}$  и  $\tilde{\mu}$  таких, что

$$\|\delta u_{k+1}(p)\| \leq \tilde{\kappa} \varrho^k + \tilde{\mu}$$

для всех  $k$  и  $0 \leq p \leq N-1$ . Из второго равенства в (3.2) имеем:

$$\|u_{k+1}(p)\| \leq \|\psi_k(p)\| + \|\delta u_{k+1}(p)\|.$$

Откуда, с учетом ограниченности  $\psi_k(p)$  и предыдущего неравенства следует, что  $\|u_k(p)\|$  ограничена для всех  $k$  и  $0 \leq p \leq N-1$  и  $\|u_\infty(p)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(p)\|$  также ограничена. Таким образом, все условия из (3.1) выполнены. Теорема доказана.

Обозначим

$$(4.10) \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 \\ -\hat{C}\hat{A}^{d+1} & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ -CB \end{bmatrix},$$

$$D_U = \text{diag}[1/4U_j^2], \quad T_U = D_U^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n_u$$

и определим матрицу  $P = \text{diag}[P_1 P_2] \succ 0$  как решение дискретного алгебраического неравенства Риккати

$$(4.11) \quad \bar{A}^T P \bar{A} - (1 - \sigma)P - \bar{A}^T P \bar{B} [\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} + Q \preceq 0,$$

где  $0 < \sigma < 1$  и  $Q \succ 0$  и  $R \succ 0$ . Это неравенство вводится с целью выделения в правой части выражения для дивергенции соотношений, близких к используемым в классической теории линейно-квадратичного регулятора. В частности, матрицы  $Q$  и  $R$  по смыслу аналогичны весовым матрицам в упомянутой теории, а параметр  $\sigma$  дает дополнительную возможность влияния на запас устойчивости. После таких преобразований, детально изложенных в [27], удастся эффективно применить технику линейных матричных неравенств (ЛМН). С помощью леммы о дополнении Шура (4.11) легко сводится к ЛМН относительно переменной  $X = \text{diag}[X_1 X_2]$  с  $X_1 = P_1^{-1}$  и  $X_2 = P_2^{-1}$ :

$$(4.12) \quad \begin{bmatrix} (1 - \sigma)X & X \bar{A}^T & X \\ \bar{A}X & X + \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad X \succ 0.$$

Если это ЛМН разрешимо, то  $P = X^{-1}$  и в соответствии с результатами [27] линейный закон управления без ограничений с корректирующей поправкой (3.10), которую компактно можно записать как  $\delta u_{k+1}(p) = K \zeta_k(p)$ , гарантирует сходимость ошибки обучения к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , где

$$(4.13) \quad K = [K_1 K_2] = -[\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} \Theta,$$

$\Theta$  — блочно диагональная матрица вида

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 \\ 0 & \Theta_2 \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \text{diag} \left[ \underbrace{\Theta_{11}}_{n_x}, \underbrace{0 \dots 0}_{(d-1)n_u}, \underbrace{\Theta_{12}}_{n_u} \right],$$

удовлетворяющая ЛМН

$$(4.14) \quad \begin{bmatrix} M - M\Theta - \Theta M - Q & \Theta \sqrt{M} \\ \sqrt{M} \Theta & -I \end{bmatrix} \preceq 0,$$

$M = \bar{A}^T P \bar{B} [\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A}$ . Соотношение (4.14) отражает структурные ограничения на матрицу  $K_1$  в (3.10), при отсутствии таких ограничений оно заведомо выполняется. Матрица корректирующей поправки для случая отсутствия ограничений может быть также вычислена альтернативным методом. Пусть переменные  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  являются решением системы матричных неравенств и уравнений

$$(4.15) \quad \begin{bmatrix} X & (\bar{A}X + \bar{B}YH)^T & X & (YH)^T \\ \bar{A}X + \bar{B}YH & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ YH & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0,$$

$$HX = ZH, \quad X = \text{diag}[X_1 X_2] \succ 0,$$



где

$$H = \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I_{n_u} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I_{n_y} \end{bmatrix}.$$

В этом случае в соответствии с леммой о дополнении Шура справедливо неравенство

$$(4.16) \quad (\bar{A} + \bar{B}\bar{K}H)^T P (\bar{A} + \bar{B}\bar{K}H) - P + Q + (\bar{K}H)^T R \bar{K}H \preceq 0,$$

где  $P = \text{diag}[P_1 \ P_2] = X^{-1} \succ 0$ ,

$$(4.17) \quad \bar{K} = YZ^{-1},$$

из которого следует, что выполняются условия теоремы 1 из [26] с компонентами векторной функции Ляпунова в виде квадратичных форм

$$(4.18) \quad \begin{aligned} V_1(\eta_{k+1}(p)) &= \eta_{k+1}^T(p) P_1 \eta_{k+1}(p), \\ V_2(\bar{e}_k(p)) &= \bar{e}_k^T(p) P_2 \bar{e}_k(p) \end{aligned}$$

и корректирующая поправка  $\delta u_{k+1}(p) = \bar{K}H\zeta_k(p)$  гарантирует сходимость ошибки обучения в системе без ограничений к нулю при  $k \rightarrow \infty$ .

*Теорема 2.* Пусть для заданных ограничений (3.13) и некоторых матриц  $Q \succ 0$ ,  $R \succ 0$  и  $\Theta$  существует решение  $X = \text{diag}[X_1 \ X_2] \succ 0$  системы (4.12), (4.14), такое что ЛМН

$$(4.19) \quad \begin{bmatrix} -W & -(KW)^T & (\bar{A}W + \bar{B}KW)^T \\ -KW & -TT_U & TT_U \bar{B}^T \\ (\bar{A}W + \bar{B}KW) & \bar{B}TT_U & -W \end{bmatrix} \prec 0$$

разрешимо относительно переменных  $W = \text{diag}[W_1 \ W_2] \succ 0$ ,  $T = \text{diag}[T_j] \succ 0$ ,  $j = 1, \dots, n_u$ , при  $K$ , определяемым (4.13). Тогда закон управления с итеративным обучением (3.2), (3.10) обеспечивает условия сходимости (3.1).

*Доказательство.* Выберем компоненты векторной функции (4.1) в виде квадратичных форм вида (4.18), где  $P_1 \succ 0$  и  $P_2 \succ 0$  и образуем блочную матрицу  $P = \text{diag}[P_1 \ P_2]$ . Поскольку система (4.12), (4.14) разрешима, определим  $K$  по формуле (4.13). Вычисляя дивергенцию (4.2) вдоль траекторий (3.11), получим

$$(4.20) \quad \mathcal{D}_d V(\eta, \bar{e}) = [(\bar{A} + \bar{B}KH)\zeta + \bar{B}_\varphi]^T P [(\bar{A} + \bar{B}KH)\zeta + \bar{B}_\varphi] - \zeta^T P \zeta.$$

Поскольку  $V_1(\eta_{k+1}(p)) \succ 0$  и  $V_2(\bar{e}_k(p)) \succ 0$ , то справедливы условия (4.3) и (4.4) Теоремы 1.

Для выполнения условия (4.5) Теоремы 1 при выполнении ограничений (3.13) достаточно, чтобы для всех  $\varphi$  и  $\zeta$  выполнялось неравенство

$$(4.21) \quad \mathcal{D}_d V(\eta, \bar{e}) + \sum_{j=1}^{n_u} d_j F_j[(\varphi_k)_j, (\zeta_k)_j] \leq \gamma - \epsilon \|\zeta\|^2,$$

где  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, n_u$  — положительные постоянные и  $\epsilon$  — достаточно малое положительное число [28]. При выполнении (4.21) получим что

$$\mathcal{D}_d V(\eta, \bar{e}) \leq \gamma - \epsilon \|\zeta\|^2,$$

для всех  $\varphi$  и  $\zeta$ , и, следовательно, при ограничениях (3.13). Таким образом, все условия теоремы 1 будут выполнены, а условие (4.21) можно переписать в виде

$$(4.22) \quad \mathcal{D}_d V(\eta, e) - \zeta^T (KH)^T DD_U KH \zeta - 2\zeta^T (KH)^T DD_U \varphi - \\ - \varphi^T DD_U \varphi + \text{tr}(D) \leq \gamma - \epsilon \|\zeta\|^2,$$

где  $D = \text{diag}[d_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_u$  и  $\epsilon$  — достаточно малое положительное число.

В случае, когда  $n_u = 1$ , этот подход, известный как  $S$ -процедура, гарантирует, что (4.21) является не только достаточным, но и необходимым условием выполнения (4.5) при ограничениях (3.13) [29].

Выбирая  $\gamma = \text{tr}(D)$ , получим, что условие (4.5) теоремы 1 выполняется, если

$$(4.23) \quad [(\bar{A} + \bar{B}KH)\zeta + \bar{B}\varphi]^T P[(\bar{A} + \bar{B}KH)\zeta + \bar{B}\varphi] - \zeta^T P \zeta - \\ - 2\zeta^T (KH)^T DD_U \varphi - \varphi^T DD_U \varphi < 0,$$

или

$$[\zeta^T \ \varphi^T] \bar{M}_i [\zeta^T \ \varphi^T]^T < 0,$$

где

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} (\bar{A} + \bar{B}KH)^T P(\bar{A} + \bar{B}KH) - P & (\bar{B}^T P(\bar{A} + \bar{B}KH) - DD_U KH)^T \\ \bar{B}^T P(\bar{A} + \bar{B}KH) - DD_U KH & \bar{B}^T P \bar{B} - DD_U \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\bar{M}$  может быть переписана как

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} -P & -(KH)^T DD_U \\ -DD_U KH & -DD_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\bar{A} + \bar{B}KH)^T \\ \bar{B}^T \end{bmatrix} P[(\bar{A} + \bar{B}KH) \ \bar{B}].$$

По лемме о дополнении Шура  $\bar{M}_i < 0$  если и только если

$$(4.24) \quad \begin{bmatrix} -P & -(KH)^T DD_U & (\bar{A}_i + \bar{B}KH)^T \\ -DD_U(KH) & -DD_U & \bar{B}^T \\ (\bar{A}_i + \bar{B}KH) & \bar{B} & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

Обозначим  $W = P^{-1}$ ,  $T = D^{-1}$ . Умножая (4.24) на  $\text{diag}[P^{-1} [DD_U]^{-1} I]$  справа и слева, получим, что справедливо (4.19). Теорема доказана.

Используя другой метод вычисления матрицы  $K$ , сформулируем альтернативную версию теоремы.

*Теорема 3.* Пусть для заданных ограничений (3.13) и некоторых матриц  $Q \succ 0$ ,  $R \succ 0$  существует решение  $X = \text{diag}[X_1 \ X_2] \succ 0$ ,  $Y$ ,  $Z$  системы (4.15), такое что ЛМН (4.19) разрешимо относительно переменных  $W = \text{diag}[W_1 \ W_2] \succ 0$ ,  $T = \text{diag}[T_j] \succ 0$ ,  $j = 1, \dots, n_u$ , при  $K = \bar{K}H$ , где  $\bar{K}$  определяется из (4.17). Тогда закон управления с итеративным обучением (3.2), (3.10) обеспечивает условия сходимости (3.1).

## 5. Пример

Рассмотрим модель экспериментальной установки из [30]. Она состоит из двух синхронных двигателей с постоянными магнитами, валы которых соединены муфтой. Первый двигатель (А) является приводом, а второй двигатель (Б) создает крутящий момент нагрузки. Целью управления является воспроизведение валом привода заданной траектории изменения углового положения  $\theta(t)$ . Непрерывная модель динамики установки имеет вид

$$(5.1) \quad T_e(t) = i_A(t)k_{tA} = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta(t)}{dt} + T_1(t),$$

где  $T_e(t)$  — крутящий момент, создаваемый двигателем А,  $k_{tA}$  — постоянная крутящего момента двигателя А,  $J$  — общий момент инерции,  $b$  — результирующий коэффициент трения,  $T_1(t)$  — крутящий момент нагрузки (двигателя Б). Численные значения параметров следующие:  $T_{cA} = 0,8 \cdot 10^{-3}$  с,  $k_{tA} = 0,93$  Н·м/А,  $J = 9,3 \cdot 10^{-4}$  кг·м<sup>2</sup>,  $b = 2,4 \cdot 10^{-3}$  кг·м<sup>2</sup>/с.

Дискретный сигнал управления вычисляется с шагом дискретности  $T_s = 2$  мс при запаздывании на 1 шаг. Этот сигнал преобразуется в управляющий ток с помощью экстраполяции нулевого порядка и последующего усиления. Результирующая дискретная модель в пространстве состояний имеет вид

$$(5.2) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= Ax_k(p) + Bu_k(p) + Ed_k(p), \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,0020 & 0,0020 \\ 0 & 0,9949 & 1,9948 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -0,0021 \\ -2,1450 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0],$$

$$x_k(p) = \begin{bmatrix} \theta_k(p) \\ \omega_k(p) \\ i_{Ak}(p) \end{bmatrix}, \quad u_k(p) = i_{Ak}^{\text{ref}}(p), \quad d_k(p) = T_{1k}(p),$$

$\theta_k(p)$  — угол поворота вала на  $k$ -м повторении,  $\omega_k(p)$  — угловая скорость вала на  $k$ -м повторении,  $i_{Ak}(p)$  — величина тока на двигателе А на  $k$ -м повторении,

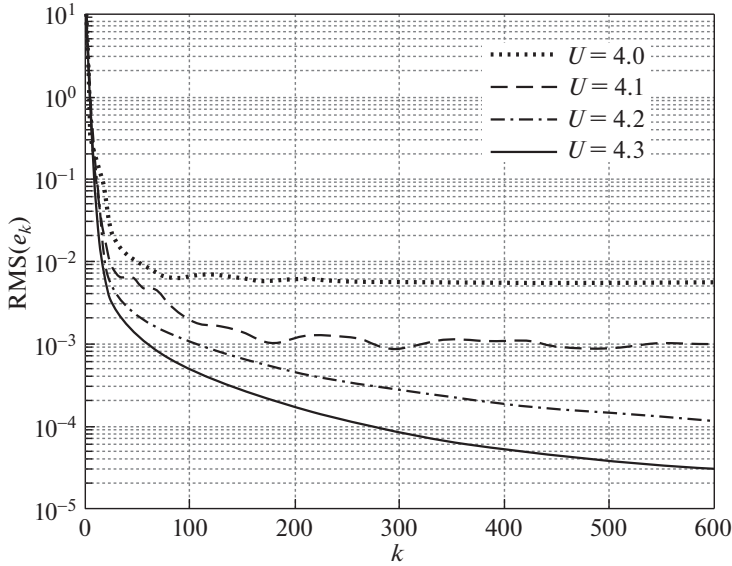


Рис. 1. Изменение среднеквадратической ошибки обучения при различных уровнях насыщения.

$i_{A_k}^{\text{ref}}(p)$  — величина управляющего тока на  $k$ -м повторении,  $T_{1k}(p)$  — величина крутящего момента нагрузки на  $k$ -м повторении.

В соответствии с результатами предыдущего раздела закон управления с итеративным обучением имеет вид

$$(5.3) \quad u_k(p) = \text{sat}(u_{k-1}(p) + K_1(x_k(p) - x_{k-1}(p)) + K_2 e_{k-1}(p + 2)),$$

где  $K_1$  и  $K_2$  вычисляются в соответствии с условиями теоремы 2. При этом при решении (4.12), (4.14) использованы следующие параметры:

$$Q = \text{diag}[0,2 \cdot 10^6 \quad 10^4 \quad 10^4 \quad 10^{10}], \quad R = 1,5, \quad \sigma = 0,9,$$

$$\Theta = \text{diag}[1 \quad 1 \quad 1 \quad 2].$$

Для этих параметров неравенство (4.19) выполняется для всех рассматриваемых далее значений величины насыщения. В результате получим

$$K_1 = [-30,1869 \quad -0,5717 \quad -1,0856], \quad K_2 = 14,3028.$$

При отсутствии ограничений на управление максимальное значение управляющего сигнала составляет 4.7 А. Оценку влияния величины ограничения на точность слежения проведем по среднеквадратической ошибке обучения

$$(5.4) \quad \text{RMS}(e_k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \|e_k(p)\|^2}.$$

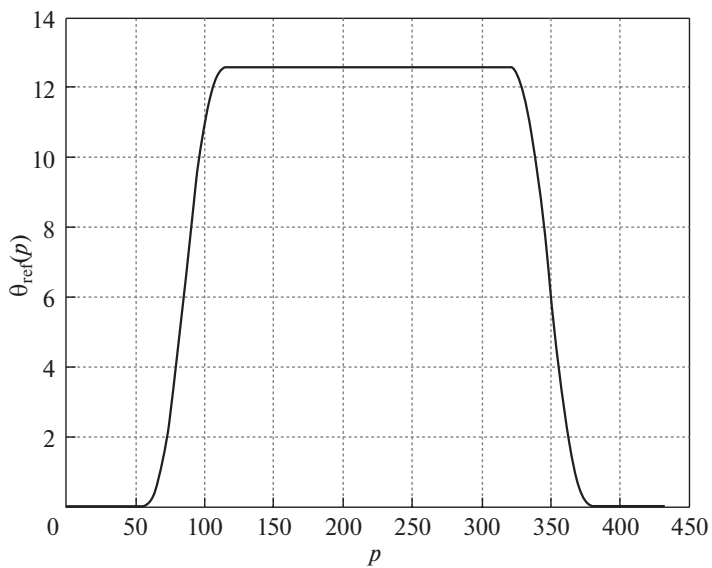


Рис. 2. Эталонная траектория изменения угла.

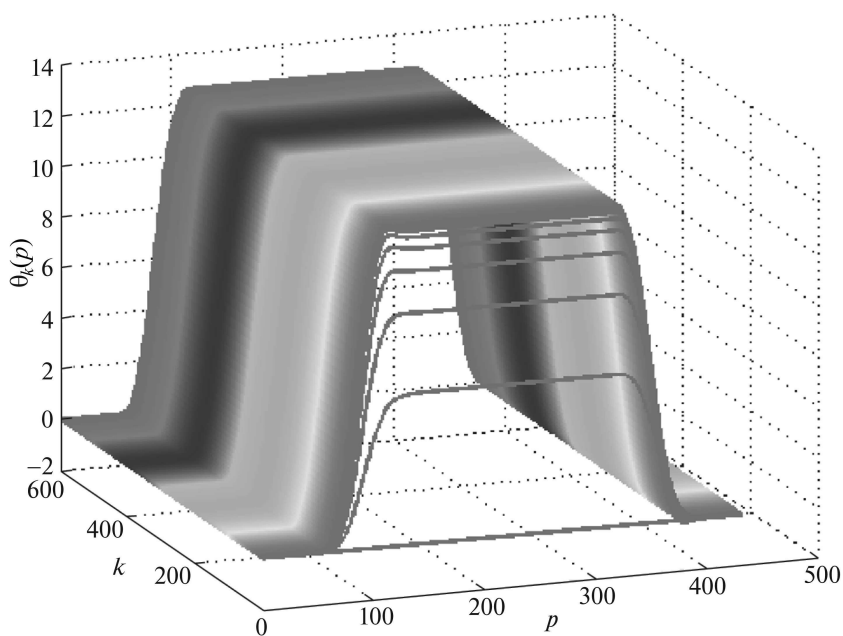


Рис. 3. Изменение угла в зависимости от числа повторений при уровне насыщения  $U = 4,3$ .

Характер изменения этой ошибки в зависимости от числа повторений при различных уровнях насыщения представлен на рис. 1.

Чтобы отметить значения, близкие к установившимся, число шагов повторения взято достаточно большим ( $k = 600$ ). Моделирование показало, что

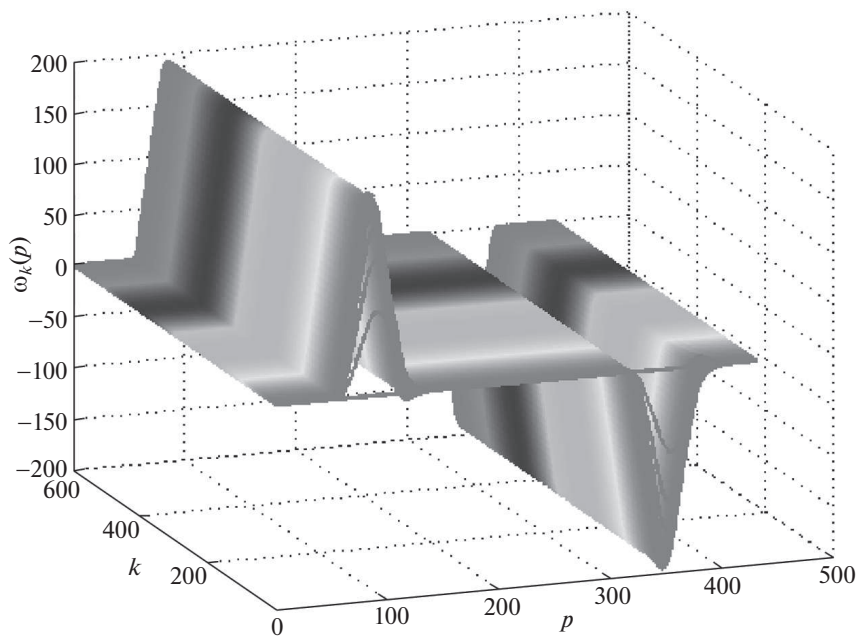


Рис. 4. Изменение угловой скорости в зависимости от числа повторений при уровне насыщения  $U = 4,3$ .

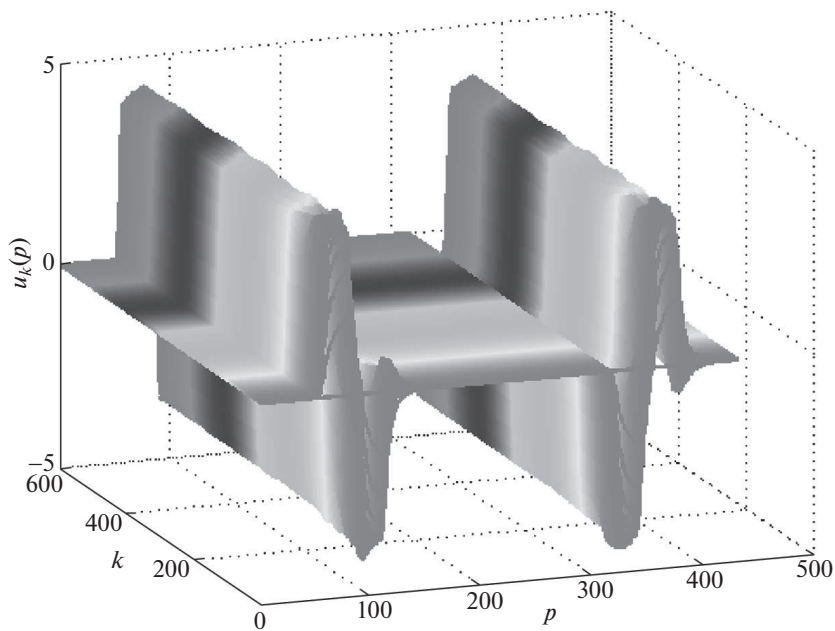


Рис. 5. Изменение управляющего сигнала в зависимости от числа повторений при уровне насыщения  $U = 4,3$ .

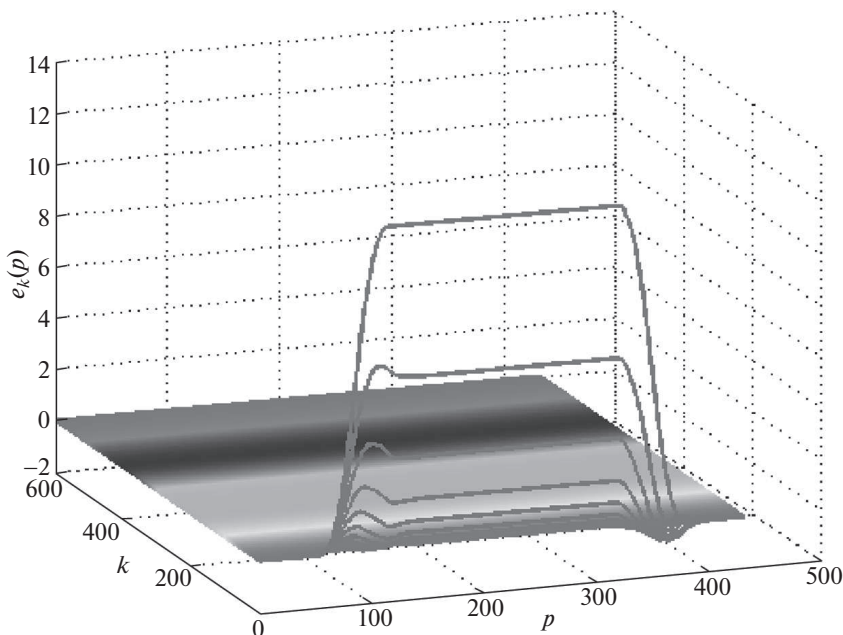


Рис. 6. Изменение ошибки обучения в зависимости от числа повторений при уровне насыщения  $U = 4,3$ .

при уменьшении уровня насыщения с 4,3 до 4,0 А установившаяся ошибка увеличивается примерно в 100 раз. На рис. 2 представлена эталонная траектория изменения угла. Рисунки 3 и 4 показывают характер изменения угла и угловой скорости привода в зависимости от числа повторений. На рис. 5 и 6 показаны характер изменения управляющего сигнала и ошибки обучения в зависимости от числа повторений.

## 6. Заключение

Полученный закон управления с итеративным обучением построен для определенной величины запаздывания и не гарантирует сходимость ошибки обучения при другом запаздывании. В то же время интересно получить результат для случая переменного запаздывания из определенного диапазона. Как было отмечено во введении, УИО корректирует входной сигнал, не меняя структуры системы, и достижение требуемой точности зависит как от информационной структуры, так и от мощности входного сигнала. В случае нелинейности типа насыщения на входе, мощность сигнала ограничивается, предельная ошибка при  $k \rightarrow \infty$  стабилизируется относительно некоторого значения, отличного от нуля, и требуемая точность может не достигаться. С другой стороны, при отсутствии насыщения обученное управление имеет естественную границу и наилучший результат будет достигнут, когда эта граница лежит внутри области насыщения. В противном случае необходи-

мо тщательно изучить влияние насыщения на снижение точности, которое, как показывает пример, может быть существенным, на практике этот анализ может служить рекомендацией для выбора привода нужной мощности.

Определенным недостатком предложенного подхода является отсутствие явных зависимостей скорости сходимости ошибки обучения и достижимой точности от величины запаздывания и уровня насыщения.

Существенный интерес в дальнейшем представляет разработка алгоритмов УИО при запаздывании вдоль повторений, которое возможно при удаленном управлении, и при смешанном запаздывании — вдоль повторений и относительно повторений одновременно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Robots by Learning // *J. Robot. Syst.* 1984. V. 1. P. 123–140.
2. *Freeman C.T., Rogers E., Hughes A.-M., Burrigge J.H., Meadmore K.L.* Iterative learning control in health care: electrical stimulation and robotic-assisted upper-limb stroke rehabilitation // *IEEE Control Syst. Magaz.* 2012. V. 47. P. 70–80.
3. *Meadmore K.L., Exell T.A., Hallewell E., Hughes A.-M., Freeman C.T., Kutlu M., Benson V., Rogers E., Burrigge J.H.* The application of precisely controlled functional electrical stimulation to the shoulder, elbow and wrist for upper limb stroke rehabilitation: a feasibility study // *J. of NeuroEngineer. and Rehabilitation.* 2014. P. 11–105.
4. *Ketelhut M., Stemmler S., Gesenhues J., Hein M., Abel D.* Iterative learning control of ventricular assist devices with variable cycle durations // *Control Engineer. Practice.* 2019. V. 83. P. 33–44.
5. *Sammons P.M., Gegel M.L., Bristow D.A., Landers R.G.* Repetitive Process Control of Additive Manufacturing with Application to Laser Metal Deposition // *IEEE Transact. Control Syst. Technol.* 2019. V. 27. No. 2. P. 566–575.
6. *Lim I., Hoelzle D.J., Barton K.L.* A multi-objective iterative learning control approach for additive manufacturing applications // *Control Engineer. Practice.* 2017. V. 64. P. 74–87.
7. *Sornmo O., Bernhardsson B., Kroling O., Gunnarsson P., Tenghamn R.* Frequency-domain iterative learning control of a marine vibrator // *Control Engineer. Practice.* 2016. V. 47. P. 70–80.
8. *Hladowski L., Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C., Lewin P.* Experimentally Supported 2D Systems Based Iterative Learning Control Law Design for Error Convergence and Performance // *Control Engineer. Practice.* 2010. V. 18. P. 339–348.
9. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G.* A Survey of Iterative Learning Control: A Learning-Based Method for High-Performance Tracking Control // *IEEE Control Syst. Magaz.* 2006. V. 26. No. 3. P. 96–114.
10. *Ahn H.-S., Chen Y.Q., Moore K.L.* Iterative Learning Control: Survey and Categorization // *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part C: Appl. Rev.* 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
11. *Xu J.-X., Tan Y., Lee T.-H.* Iterative learning control design based on composite energy function with input saturation // *Automatica.* 2004. V. 40. P. 1371–1377.



12. *Mishra S., Topcu U., Tomizuka M.* Iterative Learning Control with Saturation Constraints // Proc. 2009 American Control Conf. 2009. P. 943–948.
13. *Zhang R., Chi R.* Iterative Learning Control for a Class of MIMO Nonlinear System with Input Saturation Constraint // Proc. 36th Chinese Control Conf. 2017. P. 3543–3547.
14. *Lješnjanić M., Tan Y., Oetomo D., Freeman C.T.* Spatial Iterative Learning Control: Systems with Input Saturation // 2017 American Control Conf. 2017. P. 5121–5126.
15. *Wei Z-B., Quan Q., Cai K-Y.* Output Feedback ILC for a Class of Nonminimum Phase Nonlinear Systems With Input Saturation: An Additive-State-Decomposition-Based Method // IEEE Trans. Autom. Control. 2017. V. 62. P. 502–508.
16. *Sebastian G., Tan Y., Oetomo D., Mareels I.* Iterative Learning Control for Linear Time-varying Systems with Input and Output Constraints // 2018 Australian and New Zealand Control Conf. (ANZCC). 2018. P. 87–92.
17. *Sebastian G., Tan Y., Oetomo D.* Convergence analysis of feedback-based iterative learning control with input saturation // Automatica. 2019. V. 101. P. 44–52.
18. *Chen Y., Gong Z., Wen C.* Analysis of a High-Order Iterative Learning Control Algorithm for Uncertain Nonlinear Systems with State Delays // Automatica. 1998. V. 34. P. 345–353.
19. *Liu T., Gao F., Wang Y.* IMC-based iterative learning control for batch processes with uncertain time delay // Journal of Process Control. 2010. V. 20. P. 173–180.
20. *Wang L., Mo S., Zhou D., Gao F., Chen X.* Delay-range-dependent robust 2D iterative learning control for batch processes with state delay and uncertainties // Journal of Process Control. 2013. V. 23. P. 715–730.
21. *Tao H., Paszke W., Yang H., Galkowski K.* Finite frequency range robust iterative learning control of linear discrete system with multiple time-delays // Journal of the Franklin Institute. 2019. V. 356. P. 2690–2708.
22. *Tao H., Paszke W., Rogers E., Yang H., Galkowski K.* Finite frequency range iterative learning fault-tolerant control for discrete time-delay uncertain systems with actuator faults // ISA Transactions. 2019. V. 95. P. 152–163.
23. *Browne F., Rees B., Chiu G.T.-C., Jain N.* Iterative Learning Control With Time-Delay Compensation: An Application to Twin-Roll Strip Casting // IEEE Trans. Control Systems Technology. 2021. V. 29. P. 140–149.
24. *Pakshin P., Emelianova J., Rogers E., Galkowski K.* Iterative Learning Control with Input Saturation // IFAC PapersOnLine. 2019. V. 52. No. 29. P. 338–343.
25. *Rogers E., Galkowski K., Owens D.H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes / Lect. Notes Control Inform. Sci. Berlin: Springer-Verlag, 2007. V. 349.
26. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E.* Dissipativity and Stabilization of Nonlinear Repetitive Processes // Syst. & Control Lett. 2016. V. 91. P. 14–20.
27. *Емельянова Ю.П., Пакшин П.В.* Синтез управления с итеративным обучением на основе наблюдателя состояния // АИТ. 2019. № 9. С. 9–24.  
*Emelianova J.P., Pakshin P.V.* Iterative Learning Control Design Based on State Observer // Automation and Remote Control. 2019. V 80. P. 1561–1573.
28. *Tarbouriech S., Garcia G., Gomes da Silva Jr. J.M., Queinnec I.* Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators.– London: Springer-Verlag. 2011.

29. *Yakubovich V.A., Leonov G.A., Gelig A.Kh.* Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. – London: World Scientific Press. 2004.
30. *Mandra S., Galkowski S., Aschemann H.* Robust guaranteed cost ILC with dynamic feedforward and disturbance compensation for accurate PMSM position control // Control Engineering Practice. 2017. V. 65. P. 36–47.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.*

Поступила в редакцию 19.08.2022

После доработки 19.09.2022

Принята к публикации 29.09.2022