

# Стохастические системы

© 2023 г. А.Н. ТАРАСОВ<sup>1</sup> (tarrapid@gmail.com),  
В.М. АЗАНОВ, канд. физ.-мат. наук (azanov59@gmail.com),  
А.И. КИБЗУН<sup>2</sup>, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru)  
(Московский авиационный институт)

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УДЕРЖАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ТРУБКЕ

Исследуется задача оптимального управления стационарной линейной стохастической системой с дискретным временем, скалярным неограниченным управлением, аддитивным шумом и критерием вероятности пребывания ее траекторий в заданной окрестности нуля. С использованием метода динамического программирования и двусторонних оценок функции Беллмана находится аналитическое выражение оптимального управления для двух шагов по времени и субоптимального управления для произвольного горизонта управления. Эффективность найденного управления проверяется на модельном примере.

*Ключевые слова:* дискретные системы, стохастическое оптимальное управление, вероятностный критерий, метод динамического программирования, функция Беллмана, стационарные системы, неограниченное управление.

DOI: 10.31857/S0005231023010038, EDN: LUDTND

### 1. Введение

Исследование задач оптимального управления стохастическими системами с критериями вероятности выполняются с 1960-х гг. для широкого спектра прикладных областей: аэрокосмической [1–5], робототехнической [6–10], экономической [11–12], биомедицинской [13] и др. [14]. Под критерием вероятности понимается вероятность выполнения некоторых ограничений на вектор состояния, часто характеризующих точность системы управления [1]. Интерес к таким постановкам вызван практическими требованиями, предъявляемыми к системам управления, формализованными в виде вероятностных ограничений [1, 3, 4] и задачами определения множеств стохастической

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта №20-31-90056 (Разделы 1, 2, 3, 4.1).

<sup>2</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 22-21-00213, <https://rscf.ru/project/22-21-00213> (Разделы 4.2, 5, 6).

достижимости [2, 6–8], жизнеспособности [15] (в англоязычной литературе — stochastic viability) и поглощений [16].

Задачи с критерием максимума вероятности пребывания системы в трубке траекторий исследовались в [2, 6–10, 13–15, 19–21]. В [6–10, 13–15] исследован случай дискретного времени, для которого получены условия оптимальности в форме метода динамического программирования (МДП), на основе которого предложен ряд алгоритмов, позволяющих решить задачу стохастической достижимости, где сами множества достижимости строятся с помощью аппроксимации поверхности уровня функции Беллмана. В [19] для линейной системы с дискретным временем получены условия логарифмической вогнутости функции Беллмана и с использованием “разомкнутого управления”, являющегося программным, предложен алгоритм аппроксимации поверхностей уровня функции Беллмана. В [9, 10] для широкого класса систем предложен численный метод поиска оптимального управления в классе полиномов, основанный на сведении исходной задачи к так называемой проблеме моментов (см., например, [21]). В [21] найдены двусторонние оценки функции Беллмана и предложен алгоритм поиска субоптимального управления, основанный на ее нижней границе. Преимущество данного алгоритма заключается в отсутствии необходимости решения уравнения Беллмана, а наличие явного соотношения определения точности субоптимального управления [21] обеспечивает возможность его практического применения.

В настоящей статье исследуется задача оптимального удержания траекторий линейной системы с дискретным временем, скалярным неограниченным управлением и случайным шумом в канале управления в заданной окрестности нуля по вероятностному критерию. С использованием [21] находятся явные выражения для поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана и двусторонние границы функции Беллмана. С использованием нижних границ получено аналитическое выражение для субоптимального управления. Показано, что для траекторий системы, лежащих на поверхностях уровней 1 и 0 функции Беллмана, данное управление является оптимальным. Рассмотрен пример управления системой второго порядка. Для системы второго порядка показано, что поверхности уровня 1 и 0 обладают свойствами частичной стационарности.

## 2. Постановка задачи

В статье рассматривается задача оптимального управления линейной стохастической системой с дискретным временем и аддитивным случайным шумом

$$(1) \quad \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + C\xi_k, & k = \overline{0, N}, \\ x_0 = X, \end{cases}$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u_k \in \mathbb{R}$  — скалярное управляющее воздействие,  $\xi_k$  — случайное возмущение со значениями на  $\mathbb{R}$ ,  $N$  — горизонт управ-

ления,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — матрица системы,  $B = (0, \dots, b)^T$ ,  $b \in \mathbb{R}$  и  $C = (0, \dots, c)^T$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

В качестве критерия рассматривается функционал вероятности

$$(2) \quad P_\varphi(u(\cdot)) = \mathbf{P} \left( \max_{k=0, \overline{N}} \|\Lambda x_{k+1}\|_\infty \leq \varphi \right),$$

где матрица  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скаляр  $\varphi \in \mathbb{R}$  представляют собой параметры множества удержания  $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\Lambda x\|_\infty \leq \varphi\}$ , а  $\|x\|_\infty = \max_{i \in \overline{1, n}} |x^i|$  —  $l_1$ -норма вектора, где  $x = (x^1, \dots, x^n)^T$ .

В отношении системы (1) и функционала (2) введем предположения:

1. Известна полная информация о векторе состояния  $x_k$ ; данный факт позволяет строить управление в классе функций  $u_k = \gamma_k(x_k)$ , где  $\gamma_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая измеримая функция;
2. Начальное состояние  $x_0 = X$  является случайным вектором со значениями в  $\mathbb{R}^n$  и с известным распределением  $\mathbf{P}_X$ ;
3. Управлением называется набор функций  $u(\cdot) = (\gamma_0(\cdot), \dots, \gamma_N(\cdot))^T \in \mathcal{U}$ , классом допустимых управлений называется множество  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \times \dots \times \mathcal{U}_N$ , где  $\mathcal{U}_k$  — множество измеримых функций  $\gamma_k(\cdot)$ ;
4. Случайные величины  $\xi_k$ ,  $k = \overline{0, N}$ , имеют распределение с финитной плотностью вероятности  $f_{\xi_k}(t)$ ,  $\text{supp}[f_{\xi_k}(t)] = [m_\xi - \epsilon; m_\xi + \epsilon]$ , где  $m_\xi = \mathbf{M}[\xi_k]$ ,  $\epsilon > 0$ , причем  $f_{\xi_k}(t)$  симметрична относительно  $m_\xi$ , а компоненты вектора  $(X, \xi_0, \dots, \xi_N)^T$  независимы;
5. Матрица  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  является диагональной и положительно определенной, а  $\varphi > 0$ .

Рассматривается задача

$$(3) \quad P_\varphi(u(\cdot)) \rightarrow \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}},$$

физический смысл которой — поиск позиционного управления, максимизирующего вероятность пребывания траекторий системы (1) в прямоугольном параллелепипеде  $\mathcal{F}$  в течение заданного промежутка времени  $\{1, \dots, N+1\}$ .

Вопросы оптимального управления с критериями в форме (2) в более общем случае рассмотрены в [21, 23], где, в частности, получены условия оптимальности в форме МДП и найдены двусторонние границы функции Беллмана, на основе которых предложен способ построения субоптимального управления. Приведем отдельные теоретические положения работ [21, 23], для их дальнейшего использования при решении задачи (3).

### 3. Метод динамического программирования и двусторонние оценки функции Беллмана

Введем обозначения:

$$f_k(x_k, u_k, \xi_k) = Ax_k + Bu_k + C\xi_k, \quad \Phi_k(x) = \|\Lambda x\|_\infty.$$

Рассмотрим функцию Беллмана

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_k(x) = \\ & = \sup_{\gamma_k(\cdot) \in \mathcal{U}_k, \dots, \gamma_N(\cdot) \in \mathcal{U}_N} \mathbf{P} \left( \max_{i=\overline{k, N}} \Phi_{i+1}(x_{i+1}(x_k, \gamma_k(\cdot), \dots, \gamma_i(\cdot), \xi_k, \dots, \xi_i)) \leq \varphi \mid x_k = x \right). \end{aligned}$$

В соответствии с [23] уравнения динамического программирования для задачи (3) имеют вид

$$(4) \quad \gamma_k^*(x) = \arg \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{M}_{\xi_k} [\mathbf{I}_{\mathcal{F}}(x) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k))],$$

$$(5) \quad \mathbf{B}_k(x) = \sup_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{M}_{\xi_k} [\mathbf{I}_{\mathcal{F}}(x) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k))], \quad k = \overline{0, N},$$

$$(6) \quad \mathbf{B}_{N+1}(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F}}(x),$$

где  $\mathbf{M}_{\xi_k}[\cdot]$  — математическое ожидание по распределению случайной величины  $\xi$ , а  $\mathbf{I}_{\mathcal{F}}$  — индикаторная функция множества  $\mathcal{F}$ .

Известно [23], что если существует решение  $u^*(\cdot) = (\gamma_0^*(\cdot), \dots, \gamma_N^*(\cdot))$  задач (4)–(6), то оно является оптимальным управлением в задаче (3). Важно отметить, что решение уравнений (4)–(6) вызывает большие трудности, даже если анализировать относительно простые задачи. Для задачи оптимального удержания траекторий дискретной стохастической системы в трубке общего вида с помощью поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана были получены двусторонние оценки функции правой части уравнения МДП, функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия.

На данном фундаменте был предложен алгоритм приближенного поиска оптимального управления [21], который при определенных условиях дает точное решение. Для описания алгоритма используются поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана

$$\mathcal{I}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{B}_k(x) = 1\}, \quad \mathcal{O}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{B}_k(x) = 0\}$$

и множество  $\mathcal{B}_k = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k\}$ . Для удобства введем обозначение  $\overline{\mathcal{F}} = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}$ . Нетрудно видеть, что из определения введенных множеств справедливо, что

$$\mathcal{I}_k \cup \mathcal{B}_k \cup \mathcal{O}_k = \mathbb{R}^n, \quad \begin{cases} \mathbf{B}_k(x) = 1, & x \in \mathcal{I}_k, \\ \mathbf{B}_k(x) \in (0, 1), & x \in \mathcal{B}_k, \\ \mathbf{B}_k(x) = 0, & x \in \mathcal{O}_k. \end{cases}$$

В [21] были получены рекуррентные соотношения, не зависящие от функции Беллмана и позволяющие найти явный вид для поверхностей  $\mathcal{I}_k, \mathcal{O}_k$  и множества  $\mathcal{B}_k$ . Благодаря этому были получены условия для оптимальности управления для  $x_k \in \mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k$  и найдены двусторонние оценки функции Беллмана, на базе которых предлагается алгоритм для поиска субоптимального управления для задачи (3).

Рассмотрим стратегию  $\underline{u}(\cdot) = (\underline{\gamma}_0(\cdot), \dots, \underline{\gamma}_N(\cdot))$ , где  $\underline{u}_k = \underline{\gamma}_k(x_k)$ , которая на каждом шаге  $k$  максимизирует нижнюю оценку функции правой части уравнения динамического программирования

$$\underline{\gamma}_k(x) = \arg \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}),$$

$$(7) \quad \mathcal{I}_k = \mathcal{F}_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathbb{R} : \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1\}, \quad k = \overline{0, N}, \\ \mathcal{I}_{N+1} = \mathcal{F}.$$

Для предложенной стратегии из [21] следует, что стратегия является оптимальной при  $x_k \in \mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k$ ,  $k = \overline{0, N}$  и для любых  $x_k \in \mathbb{R}^n$  при  $k = N$ , а также там приведено выражение для нахождения оценки точности субоптимальной стратегии  $\underline{u}(\cdot)$ . Воспользуемся теоретическими результатами настоящего раздела для решения задачи (3).

## 4. Решение задачи

### 4.1. Аналитическое решение для двух шагов по времени

Воспользуемся методом динамического программирования, найдем решение задач (4)–(6) для  $k = N$  и положим  $x = x_N$ ,  $u = u_N$ . Из выражений (5) и (6) следует

$$\mathbf{V}_N(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{M}[\mathbf{I}_{\mathcal{F}}(x) \mathbf{I}_{\mathcal{F}}(f_N(x, u, \xi_N))] = \\ = \max_{u \in \mathbb{R}} \{\mathbf{I}_{\mathcal{F}}(x) \mathbf{P}(\|\Lambda(Ax + Bu + C\xi_N)\|_{\infty} \leq \varphi)\}.$$

Поскольку матрица  $\Lambda$  является диагональной,  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ , и для всех  $i = \overline{1, n-1}$  выполнено  $e_i^T \Lambda b = e_i^T \Lambda c = 0$ , где  $e_i$  – орт координатной оси, то последнее выражение примет вид

$$\mathbf{V}_N(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{F}}(x) \mathbf{I}_{(-\infty, \varphi]} \left( \max_{i=\overline{1, n-1}} |e_i^T \Lambda Ax| \right) \times \right. \\ \left. \times \mathbf{P}(|e_n^T \Lambda(Ax + Bu + C\xi_N)| \leq \varphi) \right\} = \\ = \begin{cases} \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{P}(|e_n^T \Lambda(Ax + Bu + C\xi_N)| \leq \varphi), & x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}', \\ 0, & x \notin \mathcal{F} \cap \mathcal{F}', \end{cases}$$

где

$$\mathcal{F}' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=\overline{1, n-1}} |e_i^T \Lambda Ax| \leq \varphi \right\}.$$

Рассмотрим задачу стохастического программирования в первой ветви последнего выражения. Целевая функция может быть преобразована следующим образом:

$$h = \text{sign} (e_n^T \Lambda C) (\varphi - e_n^T \Lambda A x - e_n^T \Lambda B u - e_n^T \Lambda C m_\xi),$$

$$\mathbf{P} (|e_n^T \Lambda (A x + B u + C \xi_N)| \leq \varphi) = \int_{-h}^h f_{\xi_N}^\circ (t) dt \rightarrow \max_{u \in \mathbb{R}},$$

где  $f_{\xi_N}^\circ (t)$  — плотность распределения центрированной случайной величины  $\xi_N = \xi_N - m_\xi$ . Поскольку  $f_{\xi_N}^\circ (t)$  является четной функцией, указанная задача стохастического программирования в соответствии с [24, с. 244] имеет детерминированный эквивалент, аналитическое решение которого  $u^* = - (e_n^T \Lambda B)^{-1} (e_n^T \Lambda A x + e_n^T \Lambda C m_\xi)$ . Подставляя найденное решение в целевую функцию, находим функцию Беллмана на шаге  $k = N$ :

$$(8) \quad \mathbf{B}_N (x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'} (x) \mathbf{P} \left( |e_n^T \Lambda C \xi_N| \leq \varphi \right)$$

и решение задачи (3) при  $k = N$

$$\gamma_N^* (x) = - (e_n^T \Lambda B)^{-1} (e_n^T \Lambda A x + e_n^T \Lambda C m_\xi).$$

Заметим, что функция (8) равна единице только в случае  $|e_n^T \Lambda C \varepsilon| \leq \varphi$ , поэтому поверхность уровня 1 функции Беллмана на шаге  $k = N$  не пуста только в случае выполнения этого неравенства и равна

$$\mathcal{I}_N = \begin{cases} \mathcal{F} \cap \mathcal{F}', & |e_n^T \Lambda C \varepsilon| \leq \varphi, \\ \emptyset & \text{иначе.} \end{cases}$$

Аналогично с учетом  $\mathbf{P} \left( |e_n^T \Lambda C \xi_N| \leq \varphi \right) \neq 0$  находим выражение для поверхности уровня 0:

$$\mathcal{O}_N = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}'}$$

Найдем теперь оптимальное управление и функцию Беллмана для  $k = N - 1$ . Используя (4) и (8), запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{N-1} (x) &= \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{M} \left[ \mathbf{I}_{\mathcal{F}} (x) \mathbf{B}_N (f_{N-1} (x, u, \xi_{N-1})) \right] = \\ &= \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{M} \left[ \mathbf{I}_{\mathcal{F}} (x) \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'} (f_{N-1} (x, u, \xi_{N-1})) \mathbf{P} \left( |e_n^T \Lambda C \xi_N| \leq \varphi \right) \right] = \\ &= \max_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'} (x) \mathbf{P} \left( |e_n^T \Lambda C \xi_N| \leq \varphi \right) \mathbf{P} \left( \max \left\{ |e_n^T \Lambda (A x + B u + C \xi_{N-1})|, \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \max_{i=1, n-1} |e_i^T \Lambda A (A x + B u + C \xi_{N-1})| \right\} \leq \varphi \right) \right\}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\Lambda_N = (e_1^T \Lambda A, e_2^T \Lambda A, \dots, e_{n-1}^T \Lambda A, e_n^T \Lambda)^T, \quad \Lambda_N \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Тогда выражение для функции Беллмана при  $k = N - 1$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} B_{N-1}(x) &= \\ &= \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'}(x) \mathbf{P} \left( \left| e_n^T \Lambda C \xi_N^\circ \right| \leq \varphi \right) \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{P} \left( \|\Lambda_N (Ax + Bu + C\xi_{N-1})\|_\infty \leq \varphi \right). \end{aligned}$$

Ниже в доказательстве утверждения 1 будет показано, что решение задачи стохастического программирования в правой части последнего выражения имеет вид

$$\gamma_{N-1}^*(x) = \arg \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{P} \left( \|\Lambda_N (Ax + Bu + C\xi_{N-1})\|_\infty \leq \varphi \right) = c_{N-1}(x) - \frac{c}{b} m_\xi,$$

а функция Беллмана равна

$$(9) \quad B_{N-1}(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'}(x) \mathbf{P} \left( \left| e_n^T \Lambda C \xi_N^\circ \right| \leq \varphi \right) \mathbf{P} \left( \left| \frac{c}{b} \xi_{N-1} \right| \leq r_{N-1}(x) \right),$$

где функции  $c_{N-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r_{N-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  имеют вид

$$c_{N-1}(x) = \frac{1}{2} \left( \overline{\varphi}_{N-1}(x) + \underline{\varphi}_{N-1}(x) \right), \quad r_{N-1}(x) = \frac{1}{2} \left( \overline{\varphi}_{N-1}(x) - \underline{\varphi}_{N-1}(x) \right),$$

а функции  $\overline{\varphi}_{N-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\underline{\varphi}_{N-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_{N-1}(x) &= \min_{i=1, n} \frac{\text{sign}(e_i^T \Lambda_N B) \varphi - e_i^T \Lambda_N A x}{e_i^T \Lambda_N B}, \\ \underline{\varphi}_{N-1}(x) &= \max_{i=1, n} \frac{-\text{sign}(e_i^T \Lambda_N B) \varphi - e_i^T \Lambda_N A x}{e_i^T \Lambda_N B}. \end{aligned}$$

Найдем поверхность уровня 1 функции Беллмана для  $k = N - 1$ :

$$\mathcal{I}_{N-1} = \begin{cases} \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_{N-1}, & |e_n^T \Lambda C \varepsilon| \leq \varphi, \\ \emptyset & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{I}_{N-1} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| (e_n^T \Lambda_N B)^{-1} e_n^T \Lambda_N C \varepsilon \right| \leq r_{N-1}(x) \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 2 \left| (e_n^T \Lambda_N B)^{-1} e_n^T \Lambda_N C \varepsilon \right| + \max_{i=1, n} \frac{-\text{sign}(e_i^T \Lambda_N B) \varphi - e_i^T \Lambda_N A x}{e_i^T \Lambda_N B} \leq \right. \\ &\quad \left. \leq \min_{i=1, n} \frac{\text{sign}(e_i^T \Lambda_N B) \varphi - e_i^T \Lambda_N A x}{e_i^T \Lambda_N B} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 2 \left| \frac{c}{b} \varepsilon \right| + \frac{-\text{sign}(e_j^\top \Lambda_N B) \varphi - e_j^\top \Lambda_N A x}{e_j^\top \Lambda_N B} \leq \right. \\
&\leq \left. \frac{\text{sign}(e_i^\top \Lambda_N B) \varphi - e_i^\top \Lambda_N A x}{e_i^\top \Lambda_N B}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \right\} = \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n : \|\Lambda_{N-1} x\|_\infty \leq \varphi\},
\end{aligned}$$

где матрица  $\Lambda_{N-1} \in \mathbb{R}^{n_{N-1} \times n}$ ,  $n_{N-1} = n(n-1)/2$ , составлена следующим образом:

$$\Lambda_{N-1} = \left( e_1^\top \Lambda_{N-1}, e_2^\top \Lambda_{N-1}, \dots, e_{n_{N-1}}^\top \Lambda_{N-1} \right)^\top,$$

$p$ -я строка  $e_p^\top \Lambda_{N-1}$ ,  $p = \overline{1, n_{N-1}}$ , определяется выражением

$$e_p^\top \Lambda_{N-1} = \frac{\varphi}{\tilde{\varepsilon} + \left( \text{sign}(b_{N-1}^i) + \text{sign}(b_{N-1}^j) \right) \varphi} \left( \frac{(a_{N-1}^i)^\top}{b_{N-1}^i} - \frac{(a_{N-1}^j)^\top}{b_{N-1}^j} \right),$$

где

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} = 2 \left| \frac{c}{b} \varepsilon \right|, \\ b_{N-1}^i = e_i^\top \Lambda_N B, \\ (a_{N-1}^i)^\top = e_i^\top \Lambda_N A, \\ a_{N-1}^i \in \mathbb{R}^n, \quad b_{N-1}^i \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\varepsilon} \in [0, +\infty), \end{cases}$$

а индексы  $i$  и  $j$  связаны с  $p$  системой

$$\begin{cases} p = (n-1)i + j - 1 \\ i, j \in \{1, \dots, n\}, \\ i < j. \end{cases}$$

Поскольку для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  выполнено  $r_{N-1}(x) > 0$ , то с учетом (9) поверхность уровня 0 функции Беллмана на шаге  $k = N-1$  имеет вид

$$\mathcal{O}_{N-1} = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}'}$$

Поиск функции Беллмана и оптимального управления на шагах  $k = \overline{0, N-2}$  затруднен. Воспользуемся результатами раздела 3 и найдем субоптимальное управление  $(\gamma_0(\cdot), \dots, \gamma_{N-2}(\cdot))$  и нижнюю границу функции Беллмана.

#### 4.2. Субоптимальная стратегия на шагах $k = \overline{0, N-2}$

Воспользуемся теоремой 1 и найдем поверхность уровня 1 функции Беллмана, ее нижнюю границу и субоптимальное управление на шагах  $k = \overline{0, N-2}$ .



Утверждение 1. Пусть выполнено

$$(10) \quad \max_{k=0, \overline{N-2}} \max_{i \in \overline{1, n_{k+1} + n}} |b_k^i| \leq 2\varphi (\tilde{\varepsilon})^{-1},$$

где параметры  $n_{k+1}$ ,  $b_k^i$  и  $\tilde{\varepsilon}$  определены ниже. Тогда справедливы утверждения:

1. Поверхности уровня 1 функции Беллмана при  $k = \overline{0, N-2}$  имеют вид

$$(11) \quad \mathcal{I}_k = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_k,$$

где

$$\Delta \mathcal{I}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\Lambda_k x\|_\infty \leq \varphi\},$$

матрица  $\Lambda_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n}$ , где

$$\begin{cases} n_k = \frac{1}{2} (n_{k+1} + n) (n_{k+1} + n - 1), & k = \overline{0, N-2}, \\ n_{N-1} = \frac{1}{2} n (n - 1), \end{cases}$$

имеет вид  $\Lambda_k = (e_1^\top \Lambda_k, e_2^\top \Lambda_k, \dots, e_{n_k}^\top \Lambda_k)^\top$ , где каждая  $p$ -я строка,  $p = \overline{1, n_k}$ , определяется соотношениями

$$(12) \quad e_p^\top \Lambda_k = \frac{\varphi}{\tilde{\varepsilon} + (\text{sign}(b_k^i) + \text{sign}(b_k^j)) \varphi} \left( \frac{(a_k^i)^\top}{b_k^i} - \frac{(a_k^j)^\top}{b_k^j} \right),$$

$$(13) \quad \begin{cases} \tilde{\varepsilon} = 2 \left| \frac{c}{b} \varepsilon \right|, \\ b_k^i = e_i^\top \tilde{\Lambda}_{k+1} B, \\ (a_k^i)^\top = e_i^\top \tilde{\Lambda}_{k+1} A, \\ \tilde{\Lambda}_{k+1} = (\Lambda_{k+1}, e_1^\top \Lambda A, \dots, e_{n-1}^\top \Lambda A, e_n^\top \Lambda)^\top, \\ a_k^i \in \mathbb{R}^n, \quad b_k^i \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\varepsilon} \in [0, +\infty), \quad \tilde{\Lambda}_k \in \mathbb{R}^{(n_k+n) \times n}, \end{cases}$$

причем индексы  $i$  и  $j$  связаны с  $p$  системой

$$(14) \quad \begin{cases} p = (i-1)(n_{k+1} + n) + j - 1, \\ i, j \in \{1, \dots, n_{k+1} + n\}, \\ i < j. \end{cases}$$

2. Решения задачи стохастического программирования (7) при  $k = \overline{0, N-2}$  имеют вид

$$(15) \quad \underline{\gamma}_k(x) = c_k(x) - \frac{c}{b} m_\xi,$$

нижняя граница функции Беллмана равна

$$\underline{B}_k(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'}(x) \mathbf{P} \left( \left| \frac{c}{b} \xi_k^\circ \right| \leq r_k(x) \right),$$

где функции  $c_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  имеют вид

$$c_k(x) = \frac{1}{2} \left( \overline{\varphi}_k(x) + \underline{\varphi}_k(x) \right), \quad r_k(x) = \frac{1}{2} \left( \overline{\varphi}_k(x) - \underline{\varphi}_k(x) \right)$$

и функции  $\overline{\varphi}_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\underline{\varphi}_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_k(x) &= \min_{i=1, n_{k+1}+n} \frac{\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i}, \\ \underline{\varphi}_k(x) &= \max_{i=1, n_{k+1}+n} \frac{-\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i}. \end{aligned}$$

3. Поверхности уровня 0 функции Беллмана при  $k = \overline{0, N-2}$  имеют вид

$$(16) \quad \mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}'}$$

4. Верхняя граница функции Беллмана при  $k = \overline{0, N-2}$  равна

$$(17) \quad \overline{B}_k(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'}(x) \mathbf{P} \left( \left| \frac{c}{b} \xi_k^\circ \right| \leq r_{N-1}(x) \right).$$

Доказательство утверждения 1 вынесено в Приложение.

*Замечание.* Если  $b_k^i = 0$  или  $b_k^j = 0$  из п. 1 утверждения 1, то вектор строка, определяемая выражением (12), исключается из  $\Lambda_k$ .

Как видно из п. 1 утверждения 1, условие (25) является необходимым для непустоты поверхностей уровня 1 функции Беллмана на шагах  $k = \overline{0, N-2}$ . Заметим, что из п. 1 следует, что число строк  $n_k$  матрицы  $\Lambda_k$  квадратично растет с каждым шагом обратного времени  $k = \overline{0, N-2}$ . Субоптимальное управление (31) представляет собой кусочно-линейную функцию состояния с максимальным числом линейных участков, равных  $n_k$ . Заметим также, что верхняя граница функции Беллмана для всех  $k = \overline{0, N-2}$  с точностью до случайной величины  $\xi_k$  совпадает с функцией Беллмана на шаге  $k = N-1$  (23), а поверхности уровня 0 стационарны.

## 5. Пример 1. Управление системой второго порядка

### 5.1. Описание системы

Рассмотрим систему (1) для случая  $n = 2$ , описывающую движение материальной точки

$$(18) \quad \begin{cases} r_{k+1} = r_k + v_k h, \\ v_{k+1} = v_k + u_k h + \xi_k, \\ r_0 = X, v_0 = V, \end{cases}$$

где  $r_k, v_k$  — координата положения и скорость в  $k$ -й момент времени,  $\xi_k \sim U[m_\xi - \epsilon, m_\xi + \epsilon]$  — случайные возмущения на шаге  $k$ , для которых введены допущения, описанные в разделе 2,  $k = \overline{0, N}$ . Роль управляющего воздействия  $u_k$  выполняет ускорение.

Во введенных в разделе 2 обозначениях получаем

$$x_k = \begin{pmatrix} r_k \\ v_k \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и установим значения для параметров системы:  $N = 6, h = 1, \varphi = 1, 2, \epsilon = 0, 7, m_\xi = 0$  и  $\Lambda = \text{diag}[1, 1]$ .

### 5.2. Поверхности уровня 1 функции Беллмана

Перед тем, как перейти к численному эксперименту, важно отметить, что для случая двумерной системы получается установить факт стационарности поверхностей уровня 1 функции Беллмана для шагов  $k = \overline{0, N-2}$ . Рассмотрим шаг  $k = N$ . Используя результаты раздела 4.1, находим  $\Lambda_N = (e_1^\top \Lambda A, e_2^\top \Lambda)^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Рассмотрим шаг  $k = N-1$ . Используя результаты раздела 4.1, получаем  $n_{N-1} = n(n-1)/2 = 1$  и  $\Lambda_{N-1} = (e_1^\top \Lambda_{N-1})^\top \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , где

$$e_1^\top \Lambda_{N-1} = \frac{\varphi}{\tilde{\varepsilon} + (\text{sign}(b_{N-1}^1) + \text{sign}(b_{N-1}^2)) \varphi} \left( \frac{(a_{N-1}^1)^\top}{b_{N-1}^1} - \frac{(a_{N-1}^2)^\top}{b_{N-1}^2} \right),$$

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} = 2 \left| (e_2^\top B)^{-1} e_2^\top C \varepsilon \right|, \\ b_{N-1}^i = e_i^\top \Lambda_N B, \\ (a_{N-1}^i)^\top = e_i^\top \Lambda_N A, \\ a_{N-1}^i \in \mathbb{R}^n, \quad b_{N-1}^i \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\varepsilon} \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Упростим выражения для параметров  $a_{N-1}^i$  и  $b_{N-1}^i$  с учетом вида матрицы  $\Lambda_N$  и  $e_2^\top \Lambda e_1^\top = 0, e_1^\top \Lambda e_2^\top = 0$ :

$$\begin{aligned} (a_{N-1}^1)^\top &= e_1^\top \begin{pmatrix} e_1^\top \Lambda A \\ e_2^\top \Lambda \end{pmatrix} A = e_1^\top \Lambda A A, & b_{N-1}^1 &= e_1^\top \begin{pmatrix} e_1^\top \Lambda A \\ e_2^\top \Lambda \end{pmatrix} B = e_1^\top \Lambda A B, \\ (a_{N-1}^2)^\top &= e_2^\top \begin{pmatrix} e_1^\top \Lambda A \\ e_2^\top \Lambda \end{pmatrix} A = e_2^\top \Lambda A, & b_{N-1}^2 &= e_2^\top \begin{pmatrix} e_1^\top \Lambda A \\ e_2^\top \Lambda \end{pmatrix} B = e_2^\top \Lambda B, \\ \frac{(a_{N-1}^1)^\top}{b_{N-1}^1} &= \frac{e_1^\top \Lambda A A}{e_1^\top \Lambda A B} = \frac{e_1^\top A A}{e_1^\top A B} = \frac{e_1^\top A A}{e_1^\top A e_2^\top B}, & \frac{(a_{N-1}^2)^\top}{b_{N-1}^2} &= \frac{e_2^\top \Lambda A}{e_2^\top \Lambda B} = \frac{e_2^\top A}{e_2^\top B}, \\ \frac{(a_{N-1}^1)^\top}{b_{N-1}^1} - \frac{(a_{N-1}^2)^\top}{b_{N-1}^2} &= \frac{e_1^\top A A}{e_1^\top A e_2^\top B} - \frac{e_2^\top A}{e_2^\top B} = \left( \frac{e_1^\top A}{e_1^\top A e_2^\top} - e_2^\top \right) \frac{A}{e_2^\top B} = \left( \frac{e_1^\top A e_1^\top}{e_1^\top A e_2^\top} \cdot \frac{1}{e_2^\top B} \right) e_1^\top A. \end{aligned}$$

Из этих выражений получаем выражение для матрицы  $\Lambda_{N-1}$ :

$$\Lambda_{N-1} = (\lambda_{N-1} e_1^T A)^T, \quad \lambda_{N-1} = \frac{\varphi}{\tilde{\varepsilon} + (\text{sign}(b_{N-1}^1) + \text{sign}(b_{N-1}^2)) \varphi} \left( \frac{e_1^T A e_1^T}{e_1^T A e_2^T} \frac{1}{e_2^T B} \right),$$

где  $\lambda_{N-1} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_{N-1} \neq 0$ . Таким образом, из утверждения 1 получаем, что множество  $\Delta \mathcal{I}_{N-1}$  равно

$$\Delta \mathcal{I}_{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|\Lambda_{N-1} x\|_\infty \leq \varphi\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |e_1^T \Lambda_{N-1} x| \leq \varphi\}.$$

Рассмотрим шаг  $k = N - 2$ . Воспользуемся утверждением 1 и найдем значения параметров управления

$$n_{N-2} = \frac{1}{2} (n_{N-1} + 2) (n_{N-1} + 1) = 3,$$

$$e_p^T \Lambda_{N-2} = \frac{\varphi}{\tilde{\varepsilon} + (\text{sign}(b_{N-1}^i) + \text{sign}(b_{N-1}^j)) \varphi} \left( \frac{(a_{N-2}^i)^T}{b_{N-2}^i} - \frac{(a_{N-2}^j)^T}{b_{N-2}^j} \right),$$

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} = 2 \left| (e_2^T B)^{-1} e_2^T C \varepsilon \right|, \\ b_{N-2}^i = e_i^T \tilde{\Lambda}_{N-1} B, \\ (a_{N-2}^i)^T = e_i^T \tilde{\Lambda}_{N-1} A, \\ \tilde{\Lambda}_{N-1} = (\Lambda_{N-1}, e_1^T \Lambda A, e_2^T \Lambda)^T, \\ a_{N-2}^i \in \mathbb{R}^2, \quad b_{N-2}^i \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\varepsilon} \in [0, +\infty), \quad \tilde{\Lambda}_{N-1} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \end{cases}$$

где индексы  $i$  и  $j$  связаны с  $p$  системой

$$\begin{cases} p = i \cdot 3 + j - 4, \\ i, j \in \{1, 2, 3\}, \\ i < j. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что выполнены равенства

$$(19) \quad a_{N-2}^2 = a_{N-1}^1, \quad a_{N-2}^3 = a_{N-1}^2, \quad b_{N-2}^2 = b_{N-1}^1, \quad b_{N-2}^3 = b_{N-1}^2,$$

$$(20) \quad \frac{(a_{N-2}^1)^T}{b_{N-2}^1} = \frac{\lambda_{N-1} e_1^T A A}{\lambda_{N-1} e_1^T A B} = \frac{e_1^T A A}{e_1^T A B} = \frac{(a_{N-2}^2)^T}{b_{N-2}^2} = \frac{(a_{N-1}^1)^T}{b_{N-1}^1}.$$

С учетом (19) строка  $p = 1$  ( $i = 1, j = 2$ ) матрицы  $\Lambda_{N-2}$  оказывается нулевой, поскольку

$$\frac{(a_{N-2}^1)^T}{b_{N-2}^1} - \frac{(a_{N-2}^2)^T}{b_{N-2}^2} = (0, 0).$$

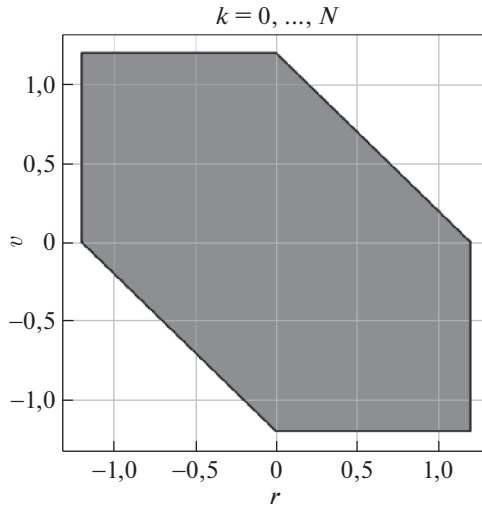


Рис. 1. Поверхность уровня 1 функции Беллмана при  $k = 0, \dots, N$ .

Аналогично получаем, что строки  $p = 2$  ( $i = 1, j = 3$ ) и  $p = 3$  ( $i = 2, j = 3$ ) матрицы  $\Lambda_{N-2}$  совпадают, так как выполнено

$$\frac{(a_{N-2}^1)^T}{b_{N-2}^1} - \frac{(a_{N-2}^3)^T}{b_{N-2}^3} = \frac{(a_{N-2}^2)^T}{b_{N-2}^2} - \frac{(a_{N-2}^3)^T}{b_{N-2}^3},$$

и равны  $e_1^T \Lambda_{N-1}$  в силу (19) и (21). Таким образом матрица  $\Lambda_{N-2}$  принимает вид

$$\Lambda_{N-2} = ((0, 0), e_1^T \Lambda_{N-1}, e_1^T \Lambda_{N-1})^T,$$

откуда получаем, что множество  $\Delta \mathcal{I}_{N-2}$  равно

$$\Delta \mathcal{I}_{N-2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|\Lambda_{N-2} x\|_\infty \leq \varphi\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |e_1^T \Lambda_{N-1} x| \leq \varphi\} = \Delta \mathcal{I}_{N-1}.$$

Отсюда по индукции заключаем, что для всех  $k = \overline{0, N-2}$  выполнено

$$\Delta \mathcal{I}_k = \Delta \mathcal{I}_{N-1},$$

и, следовательно, для указанных шагов поверхности уровня 1 функции Беллмана совпадают. Используя описанный выше результат и п. 3 утверждения 1, получаем, что поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана для шагов  $k = \overline{0, N-2}$  стационарны. В качестве примера на рис. 1 построена поверхность уровня 1 функции Беллмана для системы (18).

Далее рассмотрим численный эксперимент, используя результаты, приведенные в разделах 4.1 и 4.2, для системы (18) с целью анализа полученного решения.

### 5.3. Численный эксперимент

Положение системы в начальный момент времени не фиксируется, а генерируется из равномерного распределения. Для положения  $r_0$  и скорости  $v_0$  системы из распределения  $U[-1, 1, 1, 1]$ . Важно отметить, что носители случайных величин  $r_0$  и  $v_0$  подобраны таким образом, чтобы генерировать точки внутри и вне множества удержания. Выполним симуляцию  $M = 100$  траекторий  $r_k(i), v_k(i)$  и  $u_k(i), k = \overline{0, N}, i = \overline{1, M}$  стохастической системы.

На рис. 2 отображена каждая траектория системы отдельно. Графики подтверждают, что удается удержать систему для случаев, когда начальное состояние системы находится внутри и вне множества удержания, причем начиная с шага 3 траектории системы проходят близко к началу координат. При этом заметно, что часть траекторий  $r_k(i)$  и  $v_k(i)$  до второго шага лежат вне множества удержания, но после все траектории лежат строго внутри множества удержания.

Для анализа управления, предложенного в разделе 4 (далее — вероятностного управления), сравним его с LQG (Linear quadratic Gaussian control) управлением с единичной матрицей  $Q$  и критериальной функцией  $J(u(\cdot)) = M[\sum_{k=0}^{N+1} x_k^T x_k]$ .

На левом графике рис. 3 изображены зависимости оценки вероятностного критерия от параметра  $\varphi$  при использовании вероятностного (пунктирная линия) и LQG (жирная линия) управлений. Для оценки критериальной функции выполняется симуляция  $M = 1000$  траекторий  $r_k(i), v_k(i)$  и  $u_k(i), k = \overline{0, N}, i = \overline{1, M}$  стохастической системы при заданном  $\varphi$  и используется частотная оценка для критерия. Из графика видно, что при  $\varphi \in [0, 1) \cup (1, 35, +\infty]$  значения критериальных функций совпадают, а на отрезке  $[1, 1, 35]$  для основной части точек  $\varphi$  оценка вероятности удержания траекторий системы больше для вероятностного управления.

На правом графике рис. 3 изображены зависимости оценки критериальной функции  $J(u(\cdot))$  от первой координаты начального состояния  $x_0^1$  при использовании вероятностного (пунктирная линия) и LQG (жирная линия) управле-

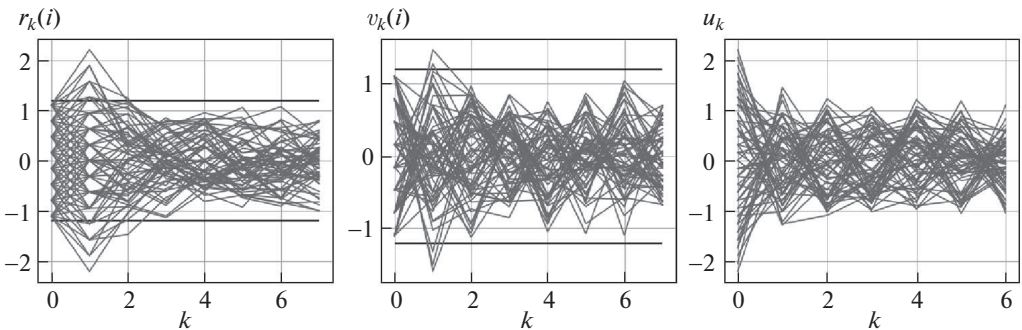


Рис. 2. Изменения траекторий системы  $r_k(i), v_k(i)$  и  $u_k(i)$ .

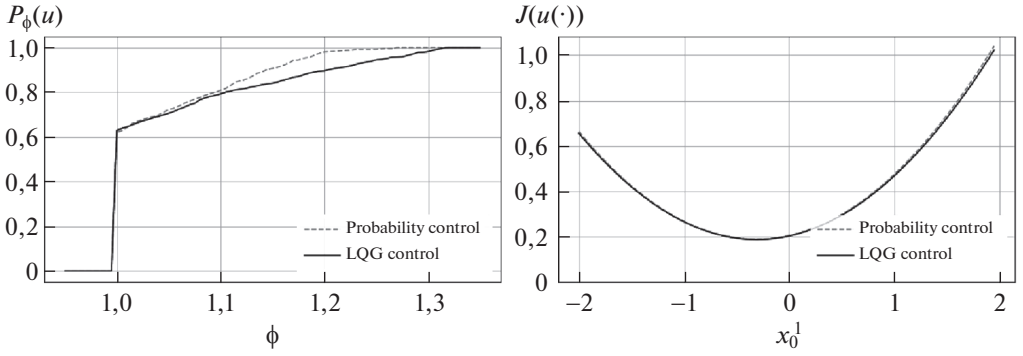


Рис. 3. Значение критериальных функций  $P_\phi(u(\cdot))$  и  $J(u(\cdot))$  для вероятностного и LQG управлений.

ний и фиксированной второй координате начальных условий  $x_0^2$  на уровне 0,5. Из графика видно, что значения критериальных функций очень близки, но кривая для LQG критерия всегда проходит немного ниже кривой для вероятностного критерия.

## 6. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимального удержания линейной системы с дискретным временем, скалярным неограниченным управлением и случайным шумом в канале управления в заданной окрестности нуля по вероятностному критерию. Найдены аналитические выражения для поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана и ее двусторонних границ. На основе нижней границы получено явное соотношение для субоптимального управления, являющегося оптимальным, если состояния системы принадлежат поверхностям уровня 1 и 0. Эффективность найденного управления проверена на модельной задаче. Для частного случая системы второго порядка доказано свойство частичной стационарности поверхностей уровня 1.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения 1.* Предположим, что на некотором шаге  $k + 1$ , где  $k = \overline{0, N - 2}$ , поверхность уровня 1 функции Беллмана имеет вид  $\mathcal{I}_{k+1} = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_{k+1}$ ,

$$\Delta \mathcal{I}_{k+1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\Lambda_{k+1}x\|_\infty \leq \varphi\},$$

где  $\Lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_{k+1} \times n}$ , а  $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ ,  $n_{k+1} \geq n$  — некоторое целое число. Воспользуемся п. 1 теоремы 1 и найдем поверхность уровня 1 на шаге  $k$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &= \mathcal{F} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathbb{R} : \mathbf{P}([Ax + Bu + C\xi_k] \in \{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_{k+1}\}) = 1\} = \\ &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathbb{R} : \mathbf{P}([Ax + Bu + C\xi_k] \in \{\mathcal{F}'_n \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_{k+1}\}) = 1\}, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{F}'_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |e_n^\top \Lambda x| \leq \varphi\}$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}_{k+1} &= \{\mathcal{F}'_n \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_{k+1}\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \max \left\{ |e_n^\top \Lambda x|, \max_{i=1, n-1} |e_i^\top \Lambda A x|, \|\Lambda_{k+1} x\|_\infty \right\} \leq \varphi \right\}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение матрицу  $\tilde{\Lambda}_{k+1} \in \mathbb{R}^{(n_{k+1}+n) \times n}$ ,

$$\tilde{\Lambda}_{k+1} = (\Lambda_{k+1}, e_1^\top \Lambda A, \dots, e_{n-1}^\top \Lambda A, e_n^\top \Lambda)^\top.$$

Тогда справедливо

$$\tilde{\mathcal{I}}_{k+1} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\| \tilde{\Lambda}_{k+1} x \right\|_\infty \leq \varphi \right\},$$

а выражение для поверхности уровня 1 функции Беллмана на шаге  $k$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathbb{R} : \mathbf{P} \left( \left\| \tilde{\Lambda}_{k+1} (Ax + Bu + C\xi_k) \right\|_\infty \leq \varphi \right) = 1 \right\} = \\ &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n : \max_u \mathbf{P} \left( \left\| \tilde{\Lambda}_{k+1} (Ax + Bu + C\xi_k) \right\|_\infty \leq \varphi \right) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу стохастического программирования

$$(II.1) \quad \mathbf{P} \left( \left\| \tilde{\Lambda}_{k+1} (Ax + Bu + C\xi_k) \right\|_\infty \leq \varphi \right) \rightarrow \max_u,$$

которая позволит найти явный вид поверхности уровня 1, нижнюю границу функции Беллмана и стратегию (3) на шаге  $k = \overline{0, N-2}$ . Преобразуем целевую функцию (II.1) с учетом обозначений (12)–(14)

$$\begin{aligned} (II.2) \quad \mathbf{P} \left( \left\| \tilde{\Lambda}_{k+1} (Ax + Bu + C\xi_k) \right\|_\infty \leq \varphi \right) &= \\ &= \mathbf{P} \left( \max_{i=1, n_{k+1}+n} |e_i^\top \tilde{\Lambda}_{k+1} (Ax + Bu + C\xi_k)| \leq \varphi \right) = \\ &= \mathbf{P} \left( \max_{i=1, n_{k+1}+n} |(a_k^i)^\top x + b_k^i u + c_k^i \xi_k| \leq \varphi \right) = \\ &= \mathbf{P} \left( \frac{-\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i} \leq u + \frac{c_k^i}{b_k^i} \xi_k \leq \frac{\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i}, \right. \\ &\quad \left. \forall i = \overline{1, n_{k+1} + n} \right), \end{aligned}$$



где  $c_k^i = e_i^T \tilde{\Lambda}_{k+1} C$ . Заметим, что для любого  $i = \overline{1, n_{k+1} + n}$  выполнено  $c_k^i / b_k^i = e_n^T C / e_n^T B$ . Тогда последнее выражение для целевой функции принимает вид

$$\begin{aligned}
 (\text{П.3}) \quad & \mathbf{P} \left( \underline{\varphi}_k(x) \leq u + \frac{e_n^T C}{e_n^T B} \xi_k \leq \overline{\varphi}_k(x) \right) = \\
 & = \mathbf{P} \left( -\frac{1}{2} (\overline{\varphi}_k(x) - \underline{\varphi}_k(x)) + \frac{1}{2} (\overline{\varphi}_k(x) + \underline{\varphi}_k(x)) \leq u + \frac{e_n^T C}{e_n^T B} \xi_k \leq \right. \\
 & \quad \left. \leq \frac{1}{2} (\overline{\varphi}_k(x) - \underline{\varphi}_k(x)) + \frac{1}{2} (\overline{\varphi}_k(x) + \underline{\varphi}_k(x)) \right) = \\
 & = \mathbf{P} \left( \left| u + \frac{e_n^T C}{e_n^T B} \xi_k - c_k(x) \right| \leq r_k(x) \right) = \\
 & = \mathbf{P} \left( \left| u + \frac{e_n^T C}{e_n^T B} \xi_k^\circ + \frac{e_n^T C}{e_n^T B} m_\xi - c_k(x) \right| \leq r_k(x) \right).
 \end{aligned}$$

Поскольку плотность распределения  $f_{\xi_k^\circ}(t)$  центрированной случайной величины  $\xi_k^\circ$  является четной функцией, то задача (П.1) имеет решение

$$(\text{П.4}) \quad u^* = \underline{\gamma}_k(x) = c_k(x) - \frac{c}{b} m_\xi,$$

а оптимальное значение целевой функции определяется выражением

$$(\text{П.5}) \quad \mathbf{P} \left( \left\| \tilde{\Lambda}_{k+1} (Ax + Bu^* + C\xi_k) \right\|_\infty \leq \varphi \right) = \mathbf{P} \left( \left| \frac{c}{b} \xi_k^\circ \right| \leq r_k(x) \right).$$

Запишем преобразованный вид поверхности уровня 1 функции Беллмана на шаге  $k$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_k &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{P} \left( \left| \frac{c}{b} \xi_k^\circ \right| \leq r_k(x) \right) = 1 \right\} = \\
 &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \frac{c}{b} \varepsilon \right| \leq r_k(x) \right\} = \\
 &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \underline{\varphi}_k(x) + 2 \left| \frac{c}{b} \varepsilon \right| \leq \overline{\varphi}_k(x) \right\} = \\
 &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1, n_{k+1}} \frac{-\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^T x}{b_k^i} + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left| \frac{c}{b} \varepsilon \right| \leq \min_{i=1, n_{k+1}+n} \frac{\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^T x}{b_k^i} \right\} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{-\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i} + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\varepsilon} \leq \frac{\text{sign}(b_k^j) \varphi - (a_k^j)^\top x}{b_k^j}, \forall i, j \in \{1, \dots, n_{k+1} + n\} \right\} = \\
&= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{-\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i} + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\varepsilon} \leq \frac{\text{sign}(b_k^j) \varphi - (a_k^j)^\top x}{b_k^j}, \forall i, j \in \{1, \dots, n_{k+1} + n\} \right\}.
\end{aligned}$$

Видно, что для  $\mathcal{I}_k \neq \emptyset$  необходимо, чтобы

$$(П.6) \quad \max_{i \in \{1, n_{k+1} + n\}} |b_k^i| \leq 2\varphi(\tilde{\varepsilon})^{-1}.$$

С учетом (П.4) получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_k &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{-\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i} + \tilde{\varepsilon} \leq \right. \\
&\quad \left. \leq \frac{\text{sign}(b_k^j) \varphi - (a_k^j)^\top x}{b_k^j}, \forall i, j \in \{1, \dots, n_{k+1} + n\}, i < j \right\} = \\
&= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \frac{\varphi}{\tilde{\varepsilon} + (\text{sign}(b_k^i) + \text{sign}(b_k^j)) \varphi} \left( \frac{(a_k^i)^\top}{b_k^i} - \frac{(a_k^j)^\top}{b_k^j} \right) x \right| \leq \varphi, \right. \\
&\quad \left. \forall i, j \in \{1, \dots, n_{k+1} + n\}, i < j \right\} = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|\Lambda_k x\|_\infty \leq \varphi\} = \\
&= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_k.
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства п. 1 достаточно убедиться, что на шаге  $k = N - 1$  поверхность уровня 1 функции Беллмана имеет вид (11), что следует из раздела 4.1.

П. 1 утверждения 1 доказан.

П. 2 утверждения 2 следует из (П.4) и (П.5).

Предположим, что на некотором шаге  $k + 1$ ,  $k = \overline{0, N - 2}$  поверхность уровня 0 функции Беллмана имеет вид  $\mathcal{O}_{k+1} = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}'}$ . Воспользуемся п. 2 теоремы 1 и найдем поверхность уровня 0 на шаге  $k$

$$\begin{aligned}
(\text{II.7}) \quad \mathcal{O}_k &= \overline{\mathcal{F}} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \forall u \in \mathbb{R} : \mathbf{P}_{\xi_k} \left( [Ax + Bu + C\xi_k] \in \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}}' \right) = 1 \right\} = \\
&= \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}}' \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \forall u \in U_k : \mathbf{P}_{\xi_k} \left( [Ax + Bu + C\xi_k] \in \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}}'_n \right) = 1 \right\},
\end{aligned}$$

где  $\overline{\mathcal{F}}'_n = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}'_n$  (см. доказательство п.1 утверждения 1). Нетрудно видеть, что

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \forall u \in \mathbb{R} : \mathbf{P}_{\xi_k} \left( [Ax + Bu + C\xi_k] \in \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}}'_n \right) = 1 \right\} = \emptyset,$$

откуда с учетом (II.7) заключаем, что  $\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}}'$ , и поскольку данное равенство выполнено для  $k = N - 2$ , то оно выполнено и для всех  $k = \overline{0, N - 2}$ .

П.3 утверждения 1 доказан.

П.4 утверждения 1 следует из (9), (10) и п.3 утверждения 1.

Утверждение 1 доказано.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
2. *Lesser K., Oishi M., Erwin R.* Stochastic reachability for control of spacecraft relative motion // Proc. IEEE Conf. Dec. and Ctrl. 2013. P. 4705–4712.
3. *Кан Ю.С.* Оптимизация управления по квантильному критерию // АиТ. 2001. № 5. С. 77–88.  
*Kan Y.S.* Control Optimization by the Quantile Criterion // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 6. P. 746–757.
4. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Синтез оптимальных стратегий в задачах управления стохастическими дискретными системами по критерию вероятности // АиТ. 2017. № 6. С. 57–83.  
*Azanov V.M., Kan Yu.S.* Design of Optimal Strategies in the Problems of Discrete System Control by the Probabilistic Criterion // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 1006–1027.
5. *Кузьмин В.П., Ярошевский В.А.* Оценка предельных отклонений фазовых координат динамической системы при случайных возмущениях. М.: Наука, 1995.
6. *Soudjani S., Abate A.* Probabilistic reach-avoid computation for partially degenerate stochastic processes // IEEE Trans. Autom. Ctrl. IEEE Trans. Autom. Ctrl., 2014. V. 59. No. 2. P. 528–534.
7. *Summers S., Lygeros J.* Verification of discrete time stochastic hybrid systems: A stochastic reach-avoid decision problem // Automatica. 2010. V. 46. No. 12. P. 1951–1961.
8. *Vinod A., Oishi M.* Scalable underapproximation for the stochastic reach-avoid problem for highdimensional LTI systems using Fourier transforms // IEEE Lett.-Contr. Syst. Soc. 2017. V. 1. No. 2. P. 316–321.
9. *Jasour A.M., Aybat N.S., Lagoa C.M.* Semidefinite Programming For Chance Constrained Optimization Over Semialgebraic Sets // SIAM J. Optimization. 2015. V. 25. No. 3. P. 1411–1440.

10. *Jasour A.M., Lagoa C.M.* Convex constrained semialgebraic volume optimization: Application in systems and control. arXiv:1701.08910, 2017.
11. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // *АиТ.* 2004. №2. С. 179–197.  
*Grigor'ev P.V., Kan Y.S.* Optimal Control of the Investment Portfolio with Respect to the Quantile Criterion // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 2. P. 319–336.
12. *Бунто Т.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг с ненулевой вероятностью разорения // *АиТ.* 2013. № 5. С. 114–136.  
*Bunto T.V., Kan Y.S.* Quantile criterion-based control of the securities portfolio with a nonzero ruin probability // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 5. P. 811–828.
13. *Maidens J.N., Kaynama S., Mitchell I.M., Oishi M.M., Dumont G.A.* Lagrangian methods for approximating the viability kernel in high-dimensional systems // *Automatica.* 2013. V. 49. No. 7. P. 2017–2029.
14. *Kariotoglou N., Raimondo D.M., Summers S., Lygeros J.* Astochastic reachability framework for autonomous surveillance with pan-tilt-zoom cameras // *Proc. European Ctrl. Conf.* 2011. P. 1411–1416.
15. *Doyen L., De Lara M.* Stochastic viability and dynamic programming // *Systems and Control Letters.* 2010. V. 59. No. 10. P. 629–634.
16. *Кибзун А.И., Иванов С.В., Степанова А.С.* Построение доверительного множества поглощения в задачах анализа статических стохастических систем // *АиТ.* 2020. № 4. С. 21–36.
17. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества // *АиТ.* 2018. № 2. С. 3–18.  
*Azanov V.M., Kan Yu.S.* Bilateral Estimation of the Bellman Function in the Problems of Optimal Stochastic Control of Discrete Systems by the Probabilistic Performance Criterion // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 2. P. 203–215.
18. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Усиленная оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления с вероятностным критерием качества // *АиТ.* 2019. № 4. С. 53–69.  
*Azanov V.M., Kan Yu.S.* Refined Estimation of the Bellman Function for Stochastic Optimal Control Problems with Probabilistic Performance Criterion // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 90. No. 4. P. 634–647.
19. *Vinod A.P., Oishi M.M.* Stochastic reachability of a target tube: Theory and computation // *Automatica.* 2021. V. 125.
20. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.
21. *Азанов В.М., Тарасов А.Н.* Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задаче оптимального удержания траекторий дискретной стохастической системы в трубке по критерию вероятности // *АиТ.* 2020. № 10. С. 93–117.  
*Azanov V.M., Tarasov A.N.* Probabilistic criterion-based optimal retention of trajectories of a discrete-time stochastic system in a given tube: bilateral estimation of the Bellman function // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. P. 1819–1839.
22. *Konrad Schmudgen.* The moment problem. Vol. 9. Springer, 2017.

23. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Об оптимальном удержании траектории дискретной стохастической системы в трубке // *АиТ.* 2019. № 1. С. 38–53.  
*Azanov V.M., Kan Yu.S.* On Optimal Retention of the Trajectory of Discrete Stochastic System in Tube // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 1. P. 30–42.
24. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрустальевым.*

Поступила в редакцию 24.02.2022

После доработки 16.05.2022

Принята к публикации 28.07.2022